

Matrices

Contenido

1	TABLAS Y MATRICES.....	2
2	SUMA DE MATRICES	2
3	PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN NÚMERO REAL.....	3
4	PRODUCTO DE MATRICES.....	4
5	CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ POR EL MÉTODO DE GAUSS.....	5
6	CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA.....	6
6.1	CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR GAUSS	6
7	LAS MATRICES Y LOS GRAFOS.....	6
8	LAS MATRICES Y LOS MOVIMIENTOS EN EL PLANO	9
8.1	TRASLACIÓN CON VECTOR GUÍA (A,B)	9
8.2	SIMETRÍA RESPECTO AL EJE X	9
8.3	SIMETRÍA RESPECTO AL EJE Y	9
8.4	SIMETRÍA RESPECTO AL ORIGEN	9
8.5	GIRO DE CENTRO O Y ÁNGULO A	9
8.6	HOMOTECIA DE CENTRO O Y RAZÓN K; $K \neq 0$	10

1 Tablas y Matrices

Una matriz viene determinada por un numero de filas (horizontales) en nuestra matriz 4 filas

y columnas (verticales) 3 columnas: Matriz $A_{4 \times 3} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}$

Dos matrices son iguales si todos sus términos ocupan las mismas posiciones y son iguales

Matriz transpuesta de A se halla cambiando las filas por las columnas:

2 Suma de matrices

Solo se pueden sumar o restar matrices que tengan el mismo rango (mismo número de filas y columnas).

La suma de matrices cumple las propiedades:

Comutativa $A + B = B + A$

Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

Elemento neutro es la matriz nula (todos los terminos son 0)

Elemento opuesto $A + (-A) = 0$; la matriz $-A$ se obtiene cambiando el signo a A

La diferencia de dos matrices $A - B = A + (-B)$

1. Ejercicio

Comprobar que se cumplen las propiedades Conmutativa y Asociativa de la suma de matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución

Conmutativa: $A + B = B + A$;

$$\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & -9 & 1 \end{pmatrix} \\ B + A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & -9 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \text{ se cumple}$$

Asociativa : $A + (B + C) = (A + B) + C$

$$(B + C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 7 \\ 8 & 0 & -7 & 15 \end{pmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 7 \\ 8 & 0 & -7 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 11 & 12 \\ 12 & 1 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) + C; \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & -9 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 11 & 12 \\ 12 & 1 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

Se cumple

2. Ejercicio

Hallar la matriz opuesta de la matriz $A + B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & 9 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \\ 8 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

Solución

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & 9 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \\ 8 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 3 & 13 & 14 \\ 11 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{la opuesta de } A + B = -(A + B) = \begin{pmatrix} -7 & -2 & -6 \\ -3 & -13 & -14 \\ -11 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Pruebalas; $(A + B) + (-(A + B)) = 0$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 3 & 13 & 14 \\ 11 & 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -2 & -6 \\ -3 & -13 & -14 \\ -11 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Producto de una matriz por un número real

Para multiplicamos una matriz por un numero real se multiplican todos terminos de la matriz por ese numero.

$$\text{Multiplicar } B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \\ 8 & 8 & 6 \end{pmatrix} * (-2) = \begin{pmatrix} -4 & -10 & -8 \\ 2 & -12 & -10 \\ -16 & -16 & -12 \end{pmatrix}$$

3. Ejercicio

Dadas las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ Calcular:

a) $2A^t - 5B^t$; b) $-3(A + B)$ c) $\frac{1}{2}A$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } 2A^t - 5B^t &= 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 7 & -2 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 10 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 35 & -10 \\ 45 & 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 10 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ -35 & 10 \\ -45 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & -2 \\ -31 & 20 \\ -37 & -14 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\text{b) } -3(A + B) = -3 \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right) = -3 \begin{pmatrix} 9 & 9 & 13 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$-3(A + B) = \begin{pmatrix} -27 & -27 & -39 \\ 3 & -9 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \frac{1}{2}A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{2}{2} & \frac{4}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

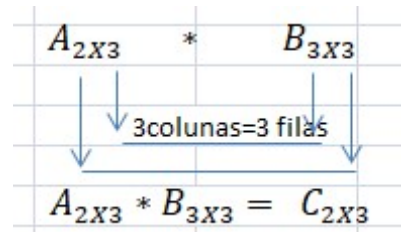
4 Producto de matrices

Para poder multiplicar dos matrices A y B ha de cumplirse que el numero columnas de A sea igual al numero de filas de B. La matriz resultante tendra las filas de A y las columnas de B

Siendo $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Se puede multiplicar $A * B$ dado que A tiene el mismo numero de columnas que B filas

La matriz resultante será $C_{2 \times 3}$



$$A_{2 \times 3} * B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 3 * 1 + 2 * 0 + 4 * (-1) & 3 * 2 + 2 * 1 + 4 * 1 & 3 * 2 + 2 * 1 + 4 * 3 \\ (-1) * 1 + 5 * 0 + 3 * (-1) & (-1) * 2 + 5 * 1 + 3 * 1 & (-1) * 2 + 5 * 1 + 3 * 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{2 \times 3} * B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 20 \\ -4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

4. Ejercicio

Dadas las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Explicar si se puede realizar los productos AxB y BxA . En caso afirmativo hallar los resultados

Solución

$A_{3 \times 4} * B_{3 \times 3}$; $A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Numero de columnas de A $\neq$ n° de filas de B

$B_{3 \times 3} * A_{3 \times 4}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; Numero de columnas de B = n° de filas de A

$B_{3 \times 3} * A_{3 \times 4} = C_{3 \times 4}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2+0 & 2+1+0 & 2+1+0 & 0+0+0 \\ 3+4+0 & 3+2+0 & 3+2+0 & 0+0+0 \\ 1+0+2 & 1+0+3 & 1+0+1 & 0+0+2 \end{pmatrix}$$

$$B_{3 \times 3} * A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Ejercicio

Calcular $A^2 - 3A - I$; siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ I matriz identidad

Solución

$$A^2 - 3A - I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & 6+3 \\ 2+1 & 3+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A - I = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Ejercicio

Dada la matriz $A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ explica si existe una matriz B, tal que AB sea una matriz de 3 filas

Solución

$A_{2 \times 4} * B_{d \times e}$ Para que podamos multiplicar $A * B \Rightarrow B$ tendría que tener 4 filas ($d = 4$)

La matriz producto siempre tendría 2 filas independiente del valor de e .

5 Cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss

El rango de una matriz es igual al número de filas o columnas totalmente independientes

Filas o columnas totalmente independientes son aquellas que no dependen de la combinación lineal del resto de filas o columnas.

Si permutamos filas o columnas, el rango de la matriz no varía.

7. Ejercicio

Calcular el rango de las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -12 \end{pmatrix}$

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{cases} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 - 4f_1 \\ f_3 = f_3 - 7f_1 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \begin{cases} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 \\ f_3 = f_3 - 2f_2 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango de la matriz A es 2

$$\text{Rango de la matriz B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -12 \end{pmatrix} = 2 \text{ pues la } f_3 = 2f_2$$

8. Ejercicio

Calcular el rango de las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & 11 \\ -1 & -4 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

Solución

$$\text{Rango de A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \text{rango columna 1 y dos son dependientes}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{cases} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 - f_1 \\ f_3 = f_3 - f_1 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \text{ rango} = 2 \text{ pues } f_3 = 2f_2$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & 11 \\ -1 & -4 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & 11 \\ -1 & -4 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{cases} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 \\ f_3 = f_3 - 2f_1 \\ f_4 = f_4 + f_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ como } f_2 = f_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{cases} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 \\ f_3 = f_3 + f_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ rango } 3$$

Solución por determinantes: el máximo rango que podría tener sería 4

A
 $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; como maximo sera 3 tomo todos los determinantes 3x3 y si alguno

es distinto de 0 el rango será 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 4 + 1 - (1 + 4 + 7) = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 2 + 5 - (2 + 5 + 8) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 9 + 6 + 3 - (3 + 6 + 9) = 0; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - (105 + 72 + 48) = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 24 + 12 - (15 + 48 + 18) = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 + 21 + 6 - (12 + 42 + 9) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 24 + 12 - (15 + 48 + 18) = 0$$

Como todos son 0 el rango de la matriz es 2

6 Cálculo de la matriz inversa

6.1 Calculo de la matriz inversa por Gauss

$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ para Halla A^{-1} seforma una matriz ampliada con la unitaria

$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$ y se transforma

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 = -f_1 \\ f_2 = f_2 + 2f_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 = f_1 + \frac{4}{11}f_2 \\ f_2 = \frac{f_2}{11} \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{array} \right)$$

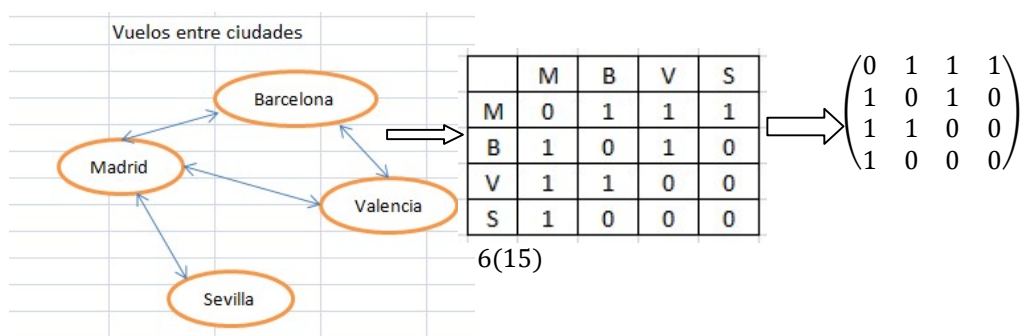
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{Prueba } A * A^{-1} = I; \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} + \frac{8}{11} & -\frac{4}{11} + \frac{4}{11} \\ -\frac{6}{11} + \frac{6}{11} & \frac{8}{11} + \frac{3}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7 Las matrices y los grafos

Un grafo es la forma de representar las posibles relaciones entre objetos

Matriz asociada a un grafo es la forma de poner los datos del grafo para poder operar con ellos



9. Ejercicio

El grafo relaciona cuatro puntos importantes de la ciudad (Plaza , Mercado, Plaza e Iglesia.



a) Forma la matriz M asociada al grafo.

b) ¿ Que sentido tiene la matriz M^2 ¿

Solución

a) Forma la matriz M asociada al grafo: $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) ¿ Que sentido tiene la matriz M^2 ¿

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M^2 = indica los accesos que hay entre los puntos pasando por otro

a_{11} indica que puedo desplazarme de la plaza a la plaza pasando por la iglesia

a_{21} indica que puedo desplazarme del mercado a la plaza pasando por el hospital

a_{24} indica que puedo desplazarme del mercado a la iglesia pasando por el hospital y la plaza

a_{34} indica que puedo desplazarme del hospital a la iglesia pasando por la plaza

a_{44} indica que puedo desplazarme de iglesia a la iglesia pasando por la plaza

10. Ejercicio

Las conexiones directas por avion de Madrid, Barcelona , Valencia y Sevilla se representa:

	M	B	V	S
M	0	1	0	1
B	1	0	1	0
V	0	1	0	1
S	1	0	0	0

 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$


a) ¿ De cuantas formas puedo viajar de una ciudad a otra haciendo una escala?

b) ¿ De cuantas formas puedo viajar de una ciudad a otra haciendo dos escala?

c) ¿De cuantas formas puedo viajar de una ciudad a otra directo y haciendo una escala?

Solución

a) ¿De cuantas formas puedo viajar de una ciudad a otra haciendo una escala? de 12 formas

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M^2 = indica los accesos que hay entre ciudades haciendo una escala

a_{11} Dos trayectos de Madrid Madrid uno con escala en Barcelona y otro con escala en Sevilla

a_{13} Un trayecto de Madrid Valencia haciendo escala en Barcelona

a_{22} Dos trayectos de Barcelona Barcelona uno con escala en Madrid y otro con escala en Valencia

a_{24} Dos trayectos de Barcelona Sevilla uno haciendo escala en Madrid y otro con escala en Valencia

a_{31} Dos trayectos de Valencia Madrid uno haciendo escala en Barcelona y otro con escala en Sevilla

a_{33} Un trayecto de Valencia Valencia con escala, Barcelona

a_{42} Un trayecto de Sevilla Barcelona con escala en Madrid

a_{44} Un trayecto de Sevilla Sevilla con escala en Madrid, Barcelona y Valencia

b) ¿De cuantas formas puedo viajar de una ciudad a otra haciendo dos escala?

M^3 indica los accesos que hay entre ciudades haciendo una escala

$$M^3 = M^2 * M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ De 21 forma}$$

c) ¿De cuantas formas puedo viajar de una ciudad a otra directo y haciendo una escala?

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ De 18 formas distintas}$$

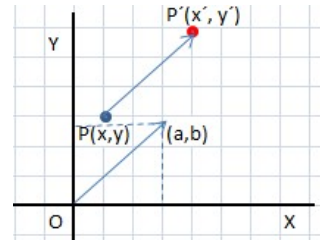
8 Las matrices y los movimientos en el plano

8.1 Traslación con vector guía (a,b)

Ecuación Analítica : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Forma matricial $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Suma de matrices $\begin{cases} x' = a + x \\ y' = b + y \end{cases}$



8.2 Simetría respecto al eje X

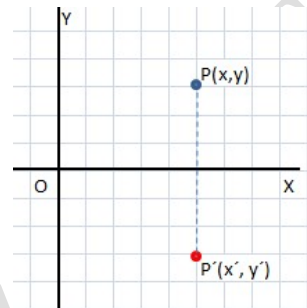
Ecuación Analítica : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Forma matricial $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Producto de matrices ;

$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x * 1 + y * 0 & x * 0 + y * (-1) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$



8.3 Simetría respecto al eje Y

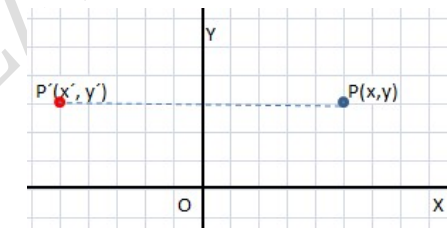
Ecuación Analítica : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

Forma matricial $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Producto de matrices ;

$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x * (-1) + y * 0 & x * 0 + y * 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$



8.4 Simetría respecto al origen

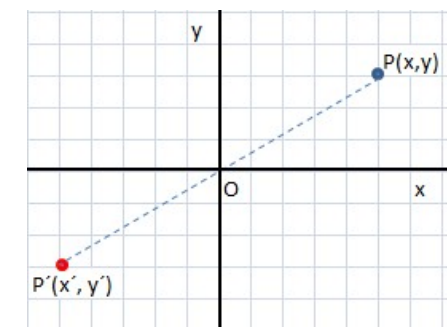
Ecuación Analítica : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

Forma matricial $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Producto de matrices ;

$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x * (-1) + y * 0 & x * 0 + y * (-1) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & -y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$



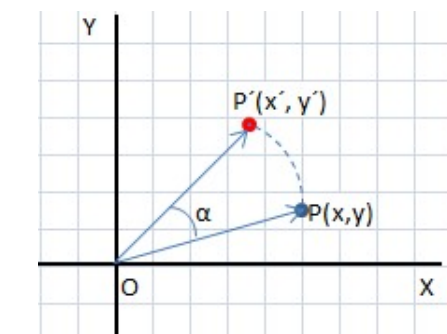
8.5 Giro de centro O y ángulo α

Ecuación Analítica : $\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$

Forma matricial $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

Producto de matrices ;

$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x \cos \alpha) - y \sin \alpha & x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{pmatrix}$



$$(x' \ y') \Rightarrow \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

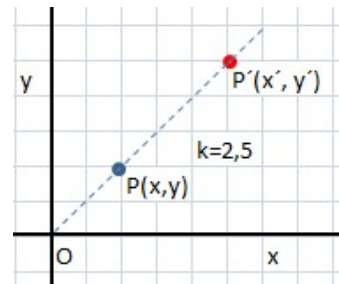
8.6 Homotecia de centro O y razón k; K≠0

Transformación del plano o del espacio, en la que los puntos correspondientes se alinean con un punto fijo y la razón entre sus distancias a este punto es constante.

$$\text{Ecuación Analítica : } \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

$$\text{Forma matricial } (x' \ y') = (x \ y) * \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$(x' \ y') = (x * k + y * 0 \quad x * 0 + y * k) = (xk \ yk)$$



11. Ejercicio

Dado el punto P(2, -1) halla su transformado mediante los siguientes movimientos:

- Una traslación del vector guía $\vec{v}(1, 3)$ primero y un giro de centro el origen y amplitud 90° después
- Un giro de centro el origen y amplitud 90° primero y una traslación de vector guía $\vec{v}(1, 3)$ después
- ¿has obtenido los mismos resultados? . trata de explicar a que es debido

Solución

- Una traslación del vector guía $\vec{v}(2, -1)$ primero y un giro de centro el origen y amplitud 90° después

$$\text{Traslación } (x' \ y') = (1 \ 3) + (2 \ -1) = (3 \ 2); \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 2 \end{cases}$$

$$\text{Giro } (x' \ y') = (3 \ 2) * \begin{pmatrix} \cos 90 & \sin 90 \\ -\sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix} = (3 \ 2) * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-2 \ 3) \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 3 \end{cases}$$

- Un giro de centro el origen y amplitud 90° primero y una traslación de vector guía $\vec{v}(1, 3)$ después

$$\text{Giro } (x' \ y') = (2 \ -1) * \begin{pmatrix} \cos 90 & \sin 90 \\ -\sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix} = (2 \ -1) * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \ 2) \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \end{cases}$$

$$\text{Traslación } (x' \ y') = (1 \ 3) + (1 \ 2) = (2 \ 5); \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 5 \end{cases}$$

- ¿has obtenido los mismos resultados? . trata de explicar a que es debido

La composición de movimientos no es conmutativo

12. Ejercicio

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ Comprobar que $(BA)^t = A^t B^t$

Solución

$$A * B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 & 4+3 \\ 3+5 & 6+3 \\ 0+30 & 0+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 9 \\ 30 & 18 \end{pmatrix}; (BA)^t = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 30 \\ 7 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}; A^t * B^t = \begin{pmatrix} 2+5 & 3+5 & 0+30 \\ 4+3 & 6+3 & 0+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 30 \\ 7 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

13. Ejercicio

Encuentra la matriz X cuadrada de orden 2 que verifican la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 12 \\ -3 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 12 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ 1a+2c & 1b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 12 \\ -3 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a-c=3 \\ 2b-d=-1 \\ 1a+2c=-1 \\ 1b+2d=12 \\ 3c=-3 \\ 3d=15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-c=3 \\ 2b-d=-1 \\ 1a+2c=-1 \\ 1b+2d=12 \\ c=-1 \\ d=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-(-1)=3; a=1 \\ 2b-d=-1; b=2 \\ 1a+2c=-1; 1-2=-1 \\ 1b+2d=12; b=2 \\ c=-1 \\ d=5 \end{cases}; X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Prueba: } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 12 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$$

14. Ejercicio

Señalar para que valores de a, b, c, d se verifique que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 \\ ab+bd=0 \\ ca+dc=0 \\ cb+d^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=-bc \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ d^2=-cb \end{cases}$$

$$1^a \begin{cases} b(a+d)=0; b=0; \text{ si } b=0 \Rightarrow a=0 \text{ y } d=0; c \text{ cualquier valor} \\ c(a+d)=0; c=0; \text{ si } c=0 \Rightarrow a=0 \text{ y } d=0; b \text{ cualquier valor} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y otra matriz } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix};$$

$$2^a \begin{cases} b(a+d)=0; \\ c(a+d)=0; \end{cases} a+d=0; a=-d \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{-d^2}{c} \\ c = \frac{-d^2}{c} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -d & \frac{-d^2}{c} \\ c & d \end{pmatrix} \text{ donde } c \text{ y } d \text{ cualquier valor}$$

Prueba

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -d & \frac{-d^2}{c} \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -d & \frac{-d^2}{c} \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d & \frac{-d^2}{c} \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^2 - d^2 & \frac{+d * d^2}{c} - \frac{+d * d^2}{c} \\ -cd + dc & -d^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Ejercicio

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Encuentra todas las matrices de B cuyo producto con A cumplan la propiedad conmutativa $AB = BA$

Solución

$$A * B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$B * A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}$$

Para que $A * B = B * A$ se a de cumplir $\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ e = a \\ f = b \\ h = d \\ i = e \\ f = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Matriz } B \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix}$

Prueba $A * B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \end{pmatrix}$

$$B * A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \end{pmatrix}$$

16. Ejercicio

Calcular la matriz $A^{250} + A^{20}$; siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{250} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 250 & 1 \end{pmatrix}; A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{250} + A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 250 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 270 & 2 \end{pmatrix}$$

17. Ejercicio

Se consideran las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Calcular } B^3 \text{ y } A^3$$

Solución

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

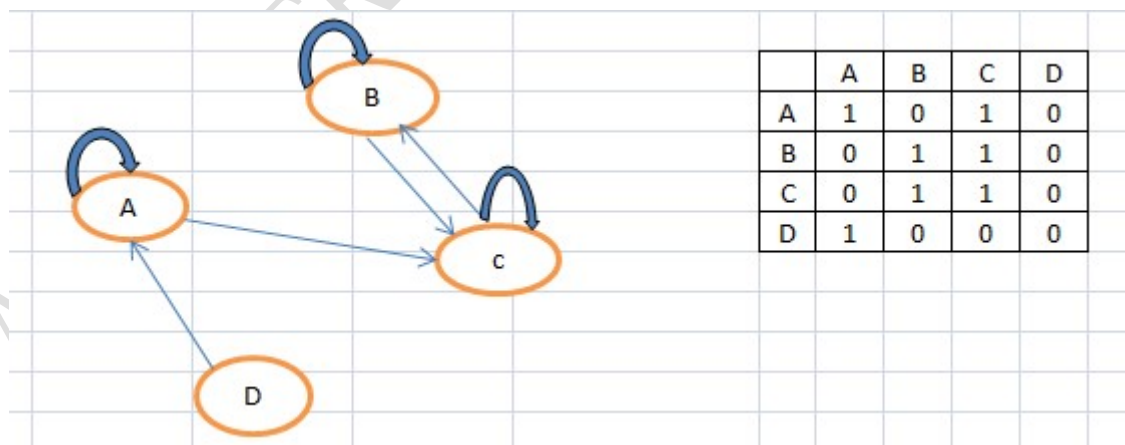
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Ejercicio

Escribir la matriz asociada a la grafo:



Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

19. Ejercicio

Dado el segmento A(1,5) y B(3,7) halla el segmento transformado en los siguientes movimientos:

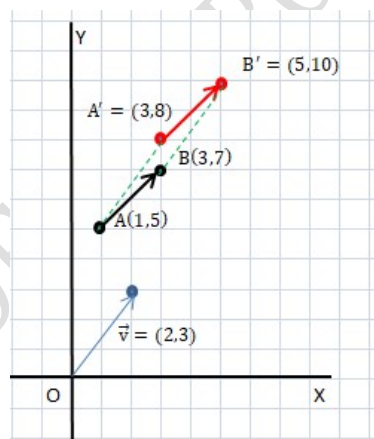
- Una traslación del vector guía $\vec{v} = (2,3)$
- Un giro de centro el origen y amplitud 45°
- Una Homotecia de centro el origen y razón 4
- Una simetría respecto el origen

Solución

- Una traslación del vector guía $\vec{v} = (2,3)$

$$\begin{aligned} \text{Traslación de A(1,5) vector guía } (2,3) &\Rightarrow A' \begin{cases} x' = 2 + 1 \\ y' = 3 + 5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 8 \end{cases} A' = (3,8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Traslación de B(3,7) vector guía } (2,3) &\Rightarrow B' \begin{cases} x' = 2 + 3 \\ y' = 3 + 7 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x' = 5 \\ y' = 10 \end{cases} B' = (5,10) \end{aligned}$$

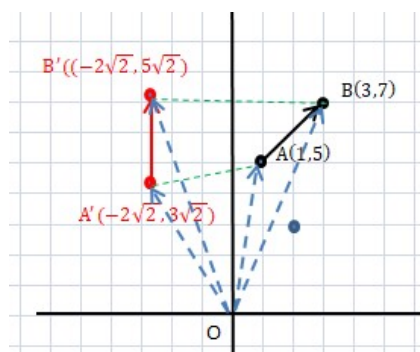


- Un giro de centro el origen y amplitud 45°

Giro centro O amplitud 45° A(1,5)

$$\begin{aligned} \Rightarrow A' \begin{cases} x' = 1 \cos 45^\circ - 5 \sin 45^\circ \\ y' = 1 \sin 45^\circ + 5 \cos 45^\circ \end{cases} \\ = \begin{cases} x' = 1 \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = 1 \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} A' = \begin{cases} x' = -4 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = 6 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \end{aligned}$$

$$A'(-2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$$



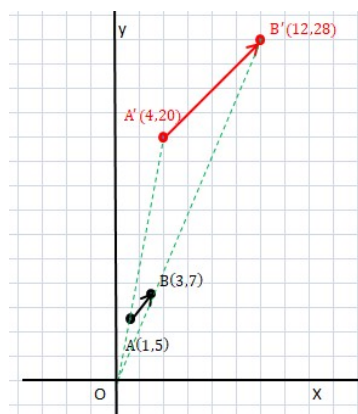
$$\text{Giro centro O amplitud } 45^\circ B(3,7) \Rightarrow B' \begin{cases} x' = 3 \cos 45^\circ - 7 \sin 45^\circ \\ y' = 3 \sin 45^\circ + 7 \cos 45^\circ \end{cases} = \begin{cases} x' = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} - 7 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} + 7 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$B' = \begin{cases} x' = -4 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; B'((-2\sqrt{2}, 5\sqrt{2}))$$

- Una Homotecia de centro el origen y razón 4

$$\begin{aligned} \text{Una Homotecia de centro el origen y razón 4} &\Rightarrow A' \\ &= \begin{cases} x' = 4 * 1 \\ y' = 4 * 5 \end{cases} = \begin{cases} x' = 4 \\ y' = 20 \end{cases} ; A'(4,20) \end{aligned}$$

14(15)



Una Homotecia de centro el origen y razon 4 $\Rightarrow B' = \begin{cases} x' = 4 * 3 \\ y' = 4 * 7 \end{cases} = \begin{cases} x' = 12 \\ y' = 28 \end{cases}; B'(12,28)$

d) Una simetria respecto el origen

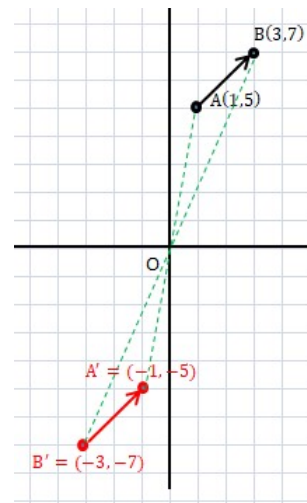
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Simetria respecto al origen de A(1,5) $\Rightarrow$

$$A' \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} = \begin{cases} x' = -1 \\ y' = -5 \end{cases} A' = (-1, -5)$$

Simetria respecto al origen de B(3,7) $\Rightarrow$

$$B' \begin{cases} x' = -3 \\ y' = -7 \end{cases} B' = (-3, -7)$$



ANGEL HERNANDEZ DE CAJAL