

Determinantes

Contenido

1	DETERMINANTES DE SEGUNDO O TERCER ORDEN	2
2	DETERMINANTES DE UNA MATRIZ CUADRADA	2
3	PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES	4
4	DESARROLLO DETERMINANTE POR UN ELEMENTO Y SU ADJUNTO ...	9
5	MÉTODO DE GAUSS PARA EL CÁLCULO DE DETERMINANTES.....	10
6	CALCULO DE MATRIZ INVERSA POR DETERMINANTES.....	12
7	CALCULO DEL RANGO POR DETERMINANTES	16
8	MATRICES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS.....	18
9	ECUACIONES MATRICIALES.....	23

1 Determinantes de segundo o tercer orden

Dada la matriz A de segundo orden Matriz $A_{2 \times 2} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se llama determinante de

$$A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc;$$

Dada la matriz A de terder orden Matriz $A_{3 \times 3} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ se llama determinante de

$$A = |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - afh;$$



1. Ejercicio

Calcular los determinantes de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 2 * 7 - (-2)(-3) = 14 - 6 = 8$$

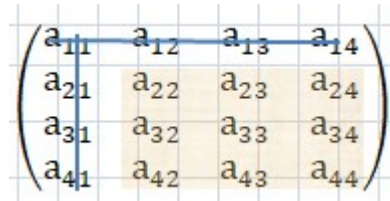
$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 * 1 * 1 + 4 * 5 * 3 + 2(-1)(-6) - 3 * 1(-6) - 4 * 2 * 1 - 3 * 5(-1) = 3 + 60 + 12 + 18 - 8 + 15 = 100;$$

2 Determinantes de una matriz cuadrada

Adjunto de un elemento de la matriz

Dada una matriz cuadrada cualquiera el Adjunto a_{11} de un elemento de la matriz es igual a

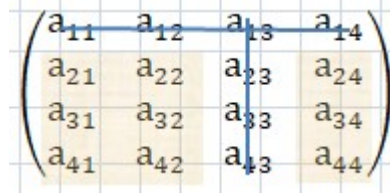
$$A_{11} = +a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \text{ precedido del signo}$$



+ si la suma de los subíndices es par y del signo - si la suma de los subíndices es impar

el Adjunto a_{13} de un elemento de la matriz es igual a

$$A_{13} = +a_{13} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \text{ precedido del signo}$$



+ si la suma de los subíndices es par y del signo - si la suma de los subíndices es impar

Determinante de una matriz por Adjuntos

El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una (fila o columna) cualquiera por sus adjuntos respectivos.

Ejemplo : Dada la Matriz $A_{4 \times 4} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vamos a resolver el determinante por adjunto

como en la tercera columna tenemos 3 ceros usamos esa columna.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 0 - 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 0 = - \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(45 - 1 + 3 - 3 - 0) = -44 \end{aligned}$$

2. Ejercicio

Hallar el determinante de la matriz por la segunda columna

$$\text{Matriz } A_{4 \times 4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

La forma mas rapida de calcular el determinante sería usando la 2 fila:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 + 0 = \\ &= -(16 - 5 - 16) - 10 + (-8 + 12 + 1 - 12) - 2 - 4 = -(37) + (11) = -26 \end{aligned}$$

$$\text{Determinante por la segunda columna } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= -0 + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 1(-8 + 12 + 1 + 12 - 4 - 2) - 5(-1 + 2) + 4(-4 - 4) = 11 - 5 - 32 = -26 \end{aligned}$$

3. Ejercicio

Hallar el determinante de la matriz de orden 5 explicando los pasos

$$\text{Matriz } A_{5 \times 5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \text{hallo por el adjunto de la 5 columna} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Nos queda una matriz de orden 4 = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ hallo determinante por 4 fila =

$$-(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(-4 - 6 - 2 - 8) + 2(-4 - 1) = -20 - 10 = -30$$

3 Propiedades de los determinantes

1. –El determinante del producto de matrices es igual al producto de los determinantes

$$|A * B| = |A| * |B|$$

2. –El determinante de una matriz con alguna fila o columna de ceros es 0

3. –Si en una matriz cuadrada dos filas o dos columnas son iguales su determinante es 0

4. – Si una matriz tiene filas o columnas linealmente dependientes, su determinante es 0

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ dado que la columna 3 es suma de la columna 1 y 2 su determinante será 0}$$

5. –Si multiplicamos todos los terminos de una fila o columna de una matriz por un numero distinto de 0 el determinante queda multiplicado por dicho número

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -20; \text{ Si multiplico la columna 1 por 2 } \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -40;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

6. –Se puede sacar factor comun de n filas o columnas y el determinante resultante quedará multiplicado por los factores

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 2 * 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

7. – Si se cambia el orden de una fila o columna de una matriz, el determinante cambia de signo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -20; \text{ si cambio dos filas } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 2 + 4 + 6 = 20$$

8. – Si todos los terminos de una fila o columna de una matriz se descomponen en dos sumandos el determinante es igual a la suma de los dos determinantes resultantes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1 & 2 \\ 1+3 & -1 & 1 \\ 1+1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 24 + 2 + 4 - 20 - 9 = -14$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 1 + 6 + 2 - 6 - 5 = -12$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 18 + 1 + 2 - 3 - 15 = -2$$

4. Ejercicio

De una matriz cuadrada A se sabe que su determinante vale -1 y que el determinante de la matriz $2A$ vale -8 . ¿Cual es le orden de la matriz?

Solución

Según la propiedad 5

Si multiplicamos todos los terminos de una fila o columna de una matriz por un numero distinto de 0 el determinante queda multiplicado por dicho número

Si multiplico una fila o columna por 2 el determinante valdría $2(-1) = -2$.

Si vale -8 tendríamos $2 * 2 * 2 = 2^3$. La matriz seá $A_{3 \times 3}$; $|2A| = 2^3 * (-1) = -8$

5. Ejercicio

Escribe una matriz generica de orden 3 y comprueba que su determinante coincide con el de su matriz transpuesta.

Solución

Matriz $A_{3 \times 3} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ su traspuesta será $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

$$A; \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - ahf - ibd$$

$$\text{transpuesta de A} \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - ahf - ibd$$

6. Ejercicio

Obten el valor del siguiente determinante explicando razonadamente las propiedades que aplicas:

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$$

Solución

6. – Se puede sacar factor comun de n filas o columnas y el determinante resultante quedará multiplicado por los factores

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} bc & -b & a \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} bc & -b & a \\ -bc & 2b & -a \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} \\ &= abc \begin{vmatrix} bc & -b & a \\ -bc & 2b & -a \\ b^2c & -b^2 & 3ab \end{vmatrix} = abc (bc) \begin{vmatrix} 1 & -b & a \\ -1 & 2b & -a \\ b & -b^2 & 3ab \end{vmatrix} = abc (bc)b \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ b & -b & 3ab \end{vmatrix} = \\ &abc (bc)b * a \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ b & -b & 3b \end{vmatrix} = abc (bc)b * a * b \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = a^2b^4c^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &a^2b^4c^2(6 + 1 + 1 - 2 - 3 - 1) = 2a^2b^4c^2 \end{aligned}$$

7. Ejercicio

Utiliza solo diferencia de filas (sin multiplicar por numeros) para comprobar que el siguiente determinante vale 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \Rightarrow F_1 = F_2 + F_3 - F_4 = 0;$$

Aplico propiedad:

4. – Si una matriz tiene filas o columnas linealmente dependientes, su determinante es 0

8. Ejercicio

Transforma el siguiente determinante en otro que tenga nulos todos los elementos de la primera fila salvo el primero y calcula su valor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} C_1 \\ C_2 \\ C_3 = C_3 - C_1 \\ C_4 = C_4 - 2C_1 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \\ -3 - 6 + 27 + 1 = 19;$$

9. Ejercicio

Calcula el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ a+1 & b & c-1 & d \\ a & b+1 & c & d-1 \\ a-1 & b & c+1 & d \end{vmatrix}$

Solución

$$\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ a+1 & b & c-1 & d \\ a & b+1 & c & d-1 \\ a-1 & b & c+1 & d \end{vmatrix} \begin{cases} F_1 \\ F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - F_1 \end{cases} = \begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = F_3 - (F_2 + F_4) \\ F_4 \end{cases} = \begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ Hallamos por adjunto}$$

$$\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Solucion por adjunto:

$$\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} b-1 & c & d+1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a & c & d+1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} a & b-1 & d+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$-(-2) \begin{vmatrix} a & b-1 & c \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & c & d+1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & b-1 & c \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(a + c + d + 1 - d - 1 + c + a) + 2(a + c + b - 1 + c - b + 1 + a) =$$

$$-2(2c + 2a) + 2(2a + 2c) = 0$$

10. Ejercicio

Sea una matriz cuadrada de orden 2 que se verifica $2A^2 = A$. Calcula razonadamente los posibles valores del determinante A

Solución:

1. -El determinante del producto de matrices es igual al producto de los determinantes

$$|A * B| = |A| * |B|$$

$$|2A^2| = |A|; \text{ por ser de orden 2 } \Rightarrow 2^2 |A^2| = |A|;$$

$$2^2 |A| |A| = |A|; |A| = \frac{1}{4};$$

11. Ejercicio

Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene determinante n.

Averigua el determinante de las siguientes matrices $B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix};$

$$C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix};$$

Solución:

$$B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix} \text{ cambio } F_1 \text{ por } F_3 = - \begin{pmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 3g & 2h & i \\ 6d & 4e & 2f \end{pmatrix} \text{ factor comun} = -3 \begin{pmatrix} 3a & 6b & 3c \\ g & 2h & i \\ 2d & 4e & 2f \end{pmatrix}$$

$$= -3 * 2 \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ g & h & i \\ 2d & 2e & 2f \end{pmatrix} = -3 * 2 * 3 \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 2d & 2e & 2f \end{pmatrix} = -3 * 2 * 3 * 2 \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = -36n$$

$$C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f+e \\ a & b & c+b \\ g & h & i+h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & e & f+e \\ c & b & c+b \\ i & h & i+h \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d & e & f+e \\ a & b & c+b \\ g & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & e \\ a & b & b \\ g & h & h \end{vmatrix} \text{ como } C_2 \text{ y } C_3 \text{ son iguales } \begin{vmatrix} d & e & e \\ a & b & b \\ g & h & h \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} f & e & f+e \\ c & b & c+b \\ i & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & e & f \\ c & b & c \\ i & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & e & e \\ c & b & b \\ i & h & h \end{vmatrix} \text{ como } C_2 \text{ y } C_3 \text{ son iguales } \begin{vmatrix} f & e & e \\ c & b & b \\ i & h & h \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & e & f \\ c & b & c \\ i & h & i \end{vmatrix} \text{ como } C_1 \text{ y } C_3 \text{ son iguales } \begin{vmatrix} f & e & f \\ c & b & c \\ i & h & i \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \text{ commuto } F_1 \text{ por } F_2 = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -n;$$

12. Ejercicio

Utiliza las propiedades de los determinantes para desarrollar el siguiente

$$A = \begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}.$$

Solución

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2x & 3x+2 \\ x & 2x & 3x+4 \\ x & 2x & 3x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 3x+2 \\ x & 3 & 3x+4 \\ x & 5 & 3x+6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & 2x & 3x+2 \\ x & 2x & 3x+4 \\ x & 2x & 3x+6 \end{vmatrix} \text{ como } C_1 \text{ y } C_2 \text{ son proporcionales} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3x+2 \\ x & 3 & 3x+4 \\ x & 5 & 3x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 3x \\ x & 3 & 3x \\ x & 5 & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3x \\ x & 3 & 3x \\ x & 5 & 3x \end{vmatrix} \text{ como } C_1 \text{ y } C_3 \text{ son proporcionales} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} = 18x + 10x + 4x - x - 20x - 6x = 5$$

4 Desarrollo determinante por un elemento y su adjunto

Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela su determinante no varia

Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela multiplicada por un numero su

El determinante de una matriz cuadrada en la ue todos los elementos de una fila o columna sean nulos menos uno es igual al producto de ese numero por su adjunto

13. Ejercicio

Utiliza solo diferencia de filas para comprobar que el siguiente determinante vale 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \begin{cases} F_1 \\ F_2 = F_2 - 5F_1 \\ F_3 = F_3 - 9F_1 \\ F_4 = F_4 - 13F_1 \end{cases} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 8 & 16 & 24 \\ 0 & 12 & 24 & 36 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 8 & 16 & 24 \\ 12 & 24 & 36 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$$

como C_1, C_2 son proporcionales = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

14. Ejercicio

Transforma el determinante en uno que tenga todos los elemento de la primera fila nulos salvo uno.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{cases} C_1 \\ C_2 \\ C_3 = C_3 - C_1 \\ C_4 = C_4 - 2C_1 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 - 6 + 1 + 27 = 19$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 19;$$

5 Método de Gauss para el cálculo de determinantes

El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal

Método:

Conmutar columnas para que la 1ª tenga los menores valores posibles

Si se permutan dos filas o columnas el determinante cambia de signo

Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela su determinante no varia

Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela multiplicada por un numero su

15. Ejercicio

Calcular el determinante por el metodo Gauss. $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leq C_4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \\ F_4 = F_4 - 3F_1}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 = F_4 - 5F_2}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 = F_4 + 4F_3}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

16. Ejercicio

Calcular el determinante por el metodo Gauss. $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Solución

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leq C_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - 3F_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 = F_4 + F_2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 = F_4 + F_3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = 48$$

17. Ejercicio

Calcular el determinante por el metodo Gauss. $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - 3F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = F_3 - F_2 \\ F_4 = F_4 + 7F_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = F_3 \\ F_4 = F_4 + 19/5F_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 25$$

18. Ejercicio

Calcular el determinante por el metodo Gauss. $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Solución

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \leq C_2 \\ C_2 - C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - F_1 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicamos por el conjugado $-1 \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -1(12 - 6 - 3 + 15) = -18$

19. Ejercicio

Dado el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

a) Halla su valor mediante el desarrollo por la primera fila

b) Halla su valor mediante el desarrollo por la cuarta columna

c) comprueba que los resultados alcanzados coinciden

Solución

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 4 - 4 = 1;$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 - 4 = 1;$$

6 Cálculo de matriz inversa por determinantes

La matriz inversa de una matriz dada es igual a la matriz transpuesta de su adjunta dividida por el determinante de la matriz dada.

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}$$

20. Ejercicio

Calcular la inversa de las siguientes y comprueba los resultados obtenidos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}$$

$$a) \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; |A| = -19;$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{-19} = \begin{pmatrix} 7/19 & 5/19 \\ 1/19 & -2/19 \end{pmatrix}$$

$$A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/19 & 5/19 \\ 1/19 & -2/19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{19} + \frac{5}{19} & \frac{10}{19} - \frac{10}{19} \\ \frac{7}{19} - \frac{7}{19} & \frac{5}{19} + \frac{14}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$b) \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; |B| = 10;$$

$$B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{10} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-2}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix};$$

$$B * B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-2}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{10} - \frac{2}{10} & -\frac{6}{10} + \frac{6}{10} \\ \frac{4}{10} - \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} + \frac{12}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21. Ejercicio

Calcular la inversa de $I - A$, siendo I la matriz unidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

$$B = I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; |B| = 1;$$

$$B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B * B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+1 & 1-1 \\ 0 & 1 & 1-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Ejercicio

Calcular si es posible, la matriz inversa de las siguientes matrices: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}; |B| = 24 + 2 - 4 + 4 = 26$$

$$\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 10 & 8 & -6 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -1 \\ -2 & 8 & 7 \\ 8 & -6 & -2 \end{pmatrix}; |B| = 26;$$

$$B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 10 & -1 \\ -2 & 8 & 7 \\ 8 & -6 & -2 \end{pmatrix}}{26} = \begin{pmatrix} \frac{4}{26} & \frac{10}{26} & -\frac{1}{26} \\ -\frac{2}{26} & \frac{8}{26} & \frac{7}{26} \\ \frac{8}{26} & -\frac{6}{26} & -\frac{2}{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{1}{26} \\ -\frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{7}{26} \\ \frac{8}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(C))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}; |C| = -3;$$

$$B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

23. Ejercicio

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

Solución

$$A * B = \begin{pmatrix} 1+6 & 4+3 & 2+3 \\ 1+2 & 4+1 & 2+1 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix};$$

$$|A * B| = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 140 + 42 + 120 - 168 - 50 - 84 = 0; \Rightarrow \text{no tiene inversa}$$

24. Ejercicio

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

a) es cierto que el $\det(AB) = \det(BA)$

b) Calcula si es posible la inversa de (AB)

Solución

a) Es cierto que el $\det(AB) = \det(BA)$

$$(AB) = \begin{pmatrix} 1+6+0+2 & 0-3+0-2 \\ 2+4+0+4 & 0-2+3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -3 \end{vmatrix} = -27 + 50 = 23$$

$$(BA) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 & 0+0 & -2+0 \\ 2-2 & 6-2 & 0-1 & -4+4 \\ 0+6 & 0+6 & 0+3 & 0-12 \\ -1+2 & -3+2 & 0+1 & 2-4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 * \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & -12 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 3 * \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & -12 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$-0 - (-2) \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-24 - 12 - 12 + 48) - 3(12 - 12) + 2(12 + 6 + 6 - 24)$$

$$(0) - 3(0) + 2(0) = 0;$$

$\det(AB) \neq \det(BA)$ distinto

b) Calcula si es posible la inversa de (AB)

$$(AB) = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -3 \end{vmatrix} = 23;$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}}{23} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{23} & \frac{5}{23} \\ -\frac{10}{23} & \frac{9}{23} \end{pmatrix}$$

25. Ejercicio

Sea $A = \begin{pmatrix} \text{sen}x & -\text{cos}x & 0 \\ \text{cos}x & \text{sen}x & 0 \\ \text{sen}x + \text{cos}x & \text{sen}x - \text{cos}x & 1 \end{pmatrix}$

¿ Para que valores de x existe la matriz inversa de A? Calcular dicha inversa

Solución

$$\text{existe } A^{-1} \text{ si } \begin{vmatrix} \text{sen}x & -\text{cos}x & 0 \\ \text{cos}x & \text{sen}x & 0 \\ \text{sen}x + \text{cos}x & \text{sen}x - \text{cos}x & 1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\begin{vmatrix} \text{sen}x & -\text{cos}x & 0 \\ \text{cos}x & \text{sen}x & 0 \\ \text{sen}x + \text{cos}x & \text{sen}x - \text{cos}x & 1 \end{vmatrix} = \text{sen}x * \text{sen}x + \text{cos}x * \text{cos}x = (\text{sen}x)^2 + (\text{cos}x)^2$$

dado que esto es siempre = 1; A tendra inversa para todo valor de x

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}, A = \begin{pmatrix} \text{sen}x & -\text{cos}x & 0 \\ \text{cos}x & \text{sen}x & 0 \\ \text{sen}x + \text{cos}x & \text{sen}x - \text{cos}x & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \text{sen}x & -(-\text{cos}x) & \text{cos}x(\text{sen}x - \text{cos}x) - (\text{sen}x(\text{sen}x + \text{cos}x)) \\ -(-\text{cos}x) & \text{sen}x & -(\text{sen}x(\text{sen}x - \text{cos}x) - (-\text{cos}x)(\text{sen}x + \text{cos}x)) \\ 0 & 0 & \text{sen}x.\text{sen}x - (-\text{cos}x.\text{cos}x) \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \text{sen}x & \text{cos}x & \text{cos}x.\text{sen}x - \text{cos}x^2 - \text{sen}x^2 - \text{sen}x.\text{cos}x \\ \text{cos}x & \text{sen}x & -(\text{sen}x^2 - \text{sen}x.\text{cos}x) + \text{sen}x.\text{cos}x + \text{cos}x^2 \\ 0 & 0 & \text{sen}x^2 + \text{cos}x^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{sen}x & \text{cos}x & -1 \\ \text{cos}x & \text{sen}x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} \text{sen}x & \text{cos}x & 0 \\ \text{cos}x & \text{sen}x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} \text{sen}x & \text{cos}x & 0 \\ \text{cos}x & \text{sen}x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} \text{sen}x & \text{cos}x & 0 \\ \text{cos}x & \text{sen}x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

26. Ejercicio

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y la $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

halla para que valores de m la matriz $B + mA$ no tiene inversa

Solución

$$mA = \begin{pmatrix} m & m \\ 2m & 0 \end{pmatrix}; B + mA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & m \\ 2m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+m & 1+m \\ 2+2m & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+m & 1+m \\ 2+2m & 2 \end{pmatrix}$$

Para que no tenga inversa $|B + mA| = 0$;

$$|B + mA| = \begin{vmatrix} 3+m & 1+m \\ 2+2m & 2 \end{vmatrix} = 2(3+m) - (1+m)(2+2m) = 6+2m - (2m^2 + 4m + 2) =$$

$$-2m^2 - 2m + 4 = 0; m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; m = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-2)4}}{2(-2)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{-4}$$

$$m = \frac{2+6}{-4} = -2; m = \frac{2-6}{-4} = 1; \text{ Para } m = -2 \text{ y } m = 1 \text{ no tiene inversa}$$

7 Cálculo del rango por determinantes

Para calcular el rango nos basamos en las propiedades de los determinantes.

Si las filas o columnas de una matriz cuadrada son linealmente dependientes su determinante es 0

Si el determinante de una matriz cuadrada es 0 las filas o columnas son linealmente dependientes

RANGO DE UNA MATRIZ $2 \times n$

Estas matrices tienen 2 filas y n columnas lo que implica es que el mayor determinante que puedo crear será 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ matriz } 2 \times 4 \text{ el rango de esta matriz será } \leq 2 \text{ y } R(A) \geq 1$$

Busco todos los determinantes posibles de 2×2 . Si hay uno que es distinto de 0 el $R(A)$ será 2;

Si todos los determinantes 2×2 posibles fueran 0 el rango será 1;

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0; \text{ como es 0 no se cual será el rango}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0; \text{ como es 0 no se cual será el rango}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1; \text{ como es distinto de 0 el rango será 2}$$

RANGO DE UNA MATRIZ $3 \times n$

Estas matrices tienen 3 filas y n columnas lo que implica es que el mayor determinante que puedo crear será 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 1 & -1 & 2 & \dots \\ 2 & -2 & 4 & \dots \end{pmatrix} \text{ matriz } 3 \times n \text{ el rango de esta matriz será } R(A) \leq 3 \text{ y } R(A) \geq 1$$

Busco todos los determinantes posibles de 3×3 . Si hay uno que es distinto de 0 el $R(A)$ será 3;

27. Ejercicio

$$\text{Hallar el rango de la matriz A mediante determinantes } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz 3×4 el rango de esta matriz será $R(A) \leq 3$ y $R(A) \geq 1$

Busco todos los determinantes posibles de 3×3 . Si hay uno que es distinto de 0 el $R(A)$ será 3;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 2 - 4 = -8 \text{ el rango es 3; } R(A) = 3$$

28. Ejercicio

Se considera el vector $\mathbb{R}^4$ $\vec{u}_1 = (1, 0, -1, 2)$; $\vec{u}_2 = (2, 1, -1, 0)$; $\vec{u}_3 = (0, 1, 1, -1)$

¿ Son linealmente independientes?

Solución

Si las filas o columnas de una matriz cuadrada son linealmente dependientes su determinante es 0

Los vectores son independientes si el rango de la matriz formada por sus coordenadas es 3

Hallo el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Busco todos los determinantes posibles de 3×3 ;

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 1 = -2 \Rightarrow R(A) = 3 \text{ luego los vectores son independientes}$$

29. Ejercicio

Las matrices A y B tienen 3 filas y 12 columnas pero en el proceso de edición algunas se han borrado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \dots \\ 3 & -1 & 0 & \dots \\ -7 & 5 & -2 & \dots \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \dots \\ 3 & 0 & 1 & \dots \\ 5 & 4 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

a) ¿ Se puede averiguar algo sobre los posibles valores de su rango?

b) ¿ Si llamamos C a la matriz cuyas columnas son las 24 que forman las dos matrices A y B

¿ Cual será el rango de C?

Solución

a) ¿ Se puede averiguar algo sobre los posibles valores de su rango?

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 15 + 7 + 6 = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4$$

$R(A) \leq 3$ dependiendo de las columnas borradas; o el $R(A) = 2$

$$B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -5 + 36 - 8 = 23; R(B) = 3;$$

b) ¿ Si llamamos C a la matriz cuyas columnas son las 24 que forman las dos matrices A y B

$R(C) = 3$ pues será el rango de B

8 Matrices dependientes de parámetros

Los parametros son letras que pueden tomar cualquier valor.

Asi podemos calcular el rango de una matriz en funcion del valor del parametro o determinar para que valor del parametro una matriz tiene inversa..

30. Ejercicio

Calcular el rango de la matriz A segun los valores del parámetro k; $A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -k & 2 \\ 1 & -1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$

Solución

La matriz 3 x 4 el rango de esta matriz será $R(A) \leq 3$ y $R(A) \geq 2$ pues $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & 1 & -k \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - k^2 + 2 + 1 - k - 2k = -k^2 - 3k + 4; \text{ será de rango 3 si } -k^2 - 3k + 4 \neq 0$$

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-1)(4)}}{2(-1)} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-2} = \begin{cases} k = 1 \\ k = -4 \end{cases}$$

$$\text{para } k = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 2 + 1 - 1 - 2 = 0$$

$$\text{Para } k = 4; \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 16 + 2 + 1 + 8 + 4 = 0$$

Para $k \neq -4$ y $k \neq 1$ el $R(A) = 3$

31. Ejercicio

Calcular el rango de la matriz A segun los valores del parámetro k; $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 2 \\ 2 & k & k^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & k & k^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 + 2k^2 + 2 - 2k - 2 - k^3 = -k^3 + 3k^2 - 2k = k(-k^2 + 3k - 2)$$

para $k \neq 0$ $R(A) = 3$;

$$-k^2 + 3k - 2 = 0; k = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{-2} \begin{cases} k = 1 \\ k = 2 \end{cases}$$

para $k \neq 1$ y $k \neq 2$; $R(A) = 3$

32. Ejercicio

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$,

a) Hallar valores de a para los cuales la matriz tiene inversa

b) para $a = 2$ calcular la inversa de la matriz

Solución

a) Hallar valores de a para los cuales la matriz tiene inversa

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3; \quad -a^2 + 4a - 3 = 0;$$

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(-1)(-3)}}{2(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} \begin{cases} a = 1 \\ a = 3; \end{cases}$$

A tiene inversa para $a \neq 1$ y $a \neq 3$;

b) para $a = 2$ calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 8 - 3 = 1;$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

33. Ejercicio

Hallar para que valores de m admite inversa la matriz siguiente y calcula dicha inversa

para el menor valor entero positivo de m que hace que exista. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & m & 5 \end{pmatrix}$,

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & m & 5 \end{vmatrix} = 5 + 2m - 5; \quad 2m = 0; \quad m = 0; \quad A \text{ tiene inversa para } m \neq 0;$$

El menor valor positivo será $m = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 2 - 5 = 2;$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -10 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{10}{2} & \frac{2}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -5 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

34. Ejercicio

Calcular los valores a, b, c para los cuales el $R(B) = 1$ donde $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ -1 & 1 \\ -3 & c \end{pmatrix}$

Solución:

para que $R(B) = 1$ el determinante de todas las matrices 2×2 han de ser 0

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a = 0; a = -1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & b \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + b = 0; b = -2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & c \end{vmatrix} = -c + 3 = 0; c = 3;$$

Por otro lado las dos columnas han de ser proporcionales $\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{-1}{1} = \frac{-3}{c};$

despejando tendremos $a = -1; b = -2; c = 3$

35. Ejercicio

Encuentra en función de los valores de a el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix}$

Solución:

La matriz 3×4 el rango de esta matriz será ≤ 3 y $R(A) \geq 1$

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + a^2 + 1 - a - a^2 - a^2 = a^3 - a^2 + 1; \text{ igualo a } 0; a^3 - a^2 - a + 1 = 0;$$

Factorizo la ecuación por Ruffini y esta ecuación da 0 para $a = 1$ y $a = -1$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ el rango es 3; $R(A) = 3$;

Prueba

$$\text{para } x = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0; \text{ el } Rg(A) = 1$$

pues todas las matrices 2×2 tienen su determinante = 0

$$\text{para } x = -1 \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2; Rg(A) = 2;$$

36. Ejercicio

Estudia según los valores de $X \in \mathbb{R}$ el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{pmatrix}$

Solución

La matriz 4×4 el rango de esta matriz será ≤ 4 y $R(A) \geq 1$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^4 + 1 + 0 + 1 + 0 + x^2 + x^2 + 0 = x^4 + 2x^2 + 2;$$

igual a 0 y resuelvo la ecuación $x^4 + 2x^2 + 2 = 0$; cambio de variable $x^2 = t$

$$t^2 + 2t + 2 = 0; t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 * 2 + 1}}{2 * 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 * 2 + 1}}{2 * 1}$$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -x & -1 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -x & x & 1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} - 0 =$$

$$= x(x^3 + 1 + x - x) + 1(-x^3 - 1 + 0 - x + x) - 1(x^2 + x - 1 + 1 - x - x^2)$$

$$x^4 + x - x^3 - 1 - 0 = x^4 - x^3 + x - 1 = 0; \text{ para } x = -1 \text{ la ecuacion es } 0;$$

$$\text{divido por } x = 1 \quad x^4 - x^3 + x - 1 = 0 \text{ y me queda } (x - 1)(x^3 + 1) = 0$$

la ecuacion es 0 para $x = 1$ y $x = -1$;

Si $x \neq 1$ y $x \neq -1$ el rango es 4; $R(A) = 4$;

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1(1 + 1 + 1 - 1) + 1(-1 - 1 - 1 + 1) - 1(1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1) = 2 - 2 = 0; R(A) < 4$$

$$\text{elijo un determinante } 3 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad R(A) = 3$$

$$\text{Para } x = -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$-1(-1 + 1 - 1 + 1) + 1(+1 - 1 + 1 - 1) - 1(1 - 1 - 1 + 1 - 1 + 1) = 0; R(A) < 4$$

$$\text{elijo un determinante } 3 \times 3 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 1 = 1; \quad R(A) = 3$$

37. Ejercicio

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$ donde a, b, c son no nulos

a) determina el numero de columnas de A que son linealmente independientes;

b) Calcula el rango de A y razon si la matriz tiene inversa

Solución

a) determina el numero de columnas de A que son linealmente independientes;

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix} \text{ la tercera fila es la suma de las dos primeras; } F_3 = F_1 + F_2$$

Como solo hay dos lineas independiente el $Rg(A) = 2$

b) Calcula el rango de A y razon si la matriz tiene inversa

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} \text{ al ser linealmente dependientes el determinante es 0 luego no tiene inversa}$$

38. Ejercicio

Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & b-1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ tiene inversa, solo y solo si los

parametros a, b son no nulos

a) Calcula la inversa de A cuando $a = b = 1$;

Solución

para $a = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & b-1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$; para $b = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = 0$ luego no tienen inversa

a) Calcula la inversa de A cuando $a = b = 1$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & b-1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix} \text{ para } a = b = 1; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|};$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 1 = -1;$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

39. Ejercicio

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Discute los valores que pueda tomar el parametro real k , si la matriz AB tiene inversa

b) Discute los valores que pueda tomar el parametro real k , si la matriz BA tiene inversa

Solución

a) Discute los valores que pueda tomar el parametro real k , si la matriz AB tiene inversa

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 2k+k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ Si tiene inversa } |AB| \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k + k - 2k + 2k^2 = 2k^2 - 2k + 2k - 2k^2 = 0$$

La matriz no tiene inversa independientemente del valor que tome k

b) Discute los valores que pueda tomar el parametro real k , si la matriz BA tiene inversa

$$BA = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix} \text{ Si tiene inversa } |BA| \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3; k^2 + 2k + 3 = 0; k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 * 3 * 1}}{2 * 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2 * 1}$$

Puesto que no hay solución en $\mathbb{R}$: La matriz tiene inversa para todos los valores de k

40. Ejercicio

a) Demuestra que $A^2 - A - 2I = 0$; siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Calcula A^{-1} utilizando el apartado anterior o de cualquier otra forma

Solución

a) Demuestra que $A^2 - A - 2I = 0$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se cumple

b) Calcula A^{-1} utilizando el apartado anterior o de cualquier otra forma

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$; $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}$; $\frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

9 Ecuaciones matriciales

Son ecuaciones en las que los terminos son matrices; $AX = B$; siendo A y B matrices

Para despejar dado que la multiplicacion de matrices no cumplen la propiedad conmutativa

hay que tener en cuenta si se multiplica por la derecha o por la izuierda

$XA = C$; $\Rightarrow XAA^{-1} = C * A^{-1}$; $X = C * A^{-1}$

$AX = C$; $\Rightarrow A^{-1}A * X = A^{-1}A * C$; $X = A^{-1}A * C$

41. Ejercicio

Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $XA = B$; b) $AX + B = C$; c) $XA + B = 2C$; d) $AX + B = C$; e) $XAB - XC = 2C$;

f) $AX - B - C = 0$;

Solución

a) $XA = B$; $X = B * A^{-1}$;

$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}$; $|A| = 4 - 3 = 1$; $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $AX + B = C$; $AX = C - B$; $X = A^{-1} * (C - B)$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $XA + B = 2C; XA = (2C - B); X = (2C - B) * A^{-1}$

$$X = \left(\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$$

d) $AX + B = C; AX = C - B; X = A^{-1}(C - B)$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

e) $XAB - XC = 2C; X(AB - C) = 2C; X = 2C * (AB - C)^{-1};$

$$(AB - C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(AB - C)^{-1} = \frac{(\text{Adj}((AB - C)))^t}{|(AB - C)|}; |(AB - C)| = 8; \text{Adj}(AB - C) = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(AB - C))^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -9 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(AB - C)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}}{8} = \begin{pmatrix} 4/8 & 0 \\ -9/8 & 2/8 \end{pmatrix}$$

$$X = 2C * (AB - C)^{-1}; x = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{4}{8} & 0 \\ -\frac{9}{8} & \frac{2}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{8} - \frac{36}{8} & 0 + \frac{8}{8} \\ \frac{8}{8} - \frac{54}{8} & 0 + \frac{12}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{28}{8} & 1 \\ -\frac{46}{8} & \frac{12}{8} \end{pmatrix}$$

$$X = 2C * (AB - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 1 \\ \frac{23}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

f) $AX - B - C = 0; AX = C + B; X = A^{-1}(C + B)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; (C + B) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$X = A^{-1}(C + B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$$

42. Ejercicio

Hallar la matriz $X^2 + Y^2$ siendo X e Y la solución del siguiente sistema de matrices;

Solución

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}; \text{ Sumamos las dos ecuaciones } 3X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{0}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{Despejo Y de la primera ecuacion } Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 2X; Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} + 1 & \frac{2}{3} + 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{9} + 0 & -\frac{2}{3} + 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{13}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{9} & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} \frac{14}{9} & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

43. Ejercicio

Reuelve la ecuacion matricial $AXB = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

$$AXB = C; A^{-1}A X B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A^{-1}A X B B^{-1} = A^{-1}C B^{-1};$$

$$X = A^{-1}C B^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prueba

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

44. Ejercicio

Calcula la matriz A sabiendo que verifica la igualdad $A * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

Solución

$$A; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \text{Igualdad } AB = C$$

$$\text{Igualdad } AB = C; A * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2I \Rightarrow$$

A es la inversa de la matriz B multiplicada por 2

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6; \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{(\text{Adj}(B))^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$A = B^{-1} * 2; A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

45. Ejercicio

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X dada por $AXA^{-1} = B$;

Solución

$$AXA^{-1} = B; AXA^{-1}A = BA; AXI = BA; A^{-1}AXI = A^{-1}BA; X = A^{-1}BA$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1; \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}BA; X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

46. Ejercicio

Resuelve la ecuación matricial $B(2A + I) = AXA + B$; siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$y \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$B(2A + I) = AXA + B; \ B(2A + I) - B = AXA; \ X = A^{-1}(B(2A + I) - B)A^{-1}$$

$$(2A + I) = 2 \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -8 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -8 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B(2A + I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -8 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -7 & 6 \\ -11 & 4 & -1 \\ 12 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B(2A + I) - B = \begin{pmatrix} 23 & -7 & 6 \\ -11 & 4 & -1 \\ 12 & -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & 4 \\ -10 & 4 & 0 \\ 12 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}; \ \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \ \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}; \ (\text{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(B(2A + I) - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 & -6 & 4 \\ -10 & 4 & 0 \\ 12 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 38 & -4 & 16 \\ 78 & -6 & 36 \\ -64 & 6 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$

Otra forma de hacerlo; $B(2A + I) = AXA + B$; $B2A + B = AXA + B$; $2BA + B - B = AXA$;

$$2BA = AXA; \ A^{-1}2BAA^{-1} = A^{-1}AXAA^{-1}; \ A^{-1}2B = X; \ X = A^{-1}2B; \ X = 2A^{-1}B$$

$$X = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -3 & -9 & 6 \\ 2 & 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$

47. Ejercicio

Hallar los valores de X para los cuales la matriz no tiene inversa, $A = \begin{pmatrix} |X| & 1 \\ |X-2| & 2 \end{pmatrix}$

Solución

$$A = \begin{pmatrix} |X| & 1 \\ |X-2| & 2 \end{pmatrix} = 2|X| - |X-2| \text{ no hay inversa si } 2|X| - |X-2| = 0 \Rightarrow 2|X| = |X-2|$$

$$\begin{cases} X \geq 0; \ 2X = (X-2); \ X = -2 \\ X > 0; \ 2X = |-X-2| = -(+X+2) \Rightarrow 2X = X+2; \ X = \frac{2}{3} \end{cases}$$

No tiene inversa para $X = -2$ y $X = \frac{2}{3}$

48. Ejercicio

Sea A, B, X tres matrices cuadradas del mismo orden que verifiquen la relacion $AXB = I$;

Siendo I la matriz unidad

a) Si el determinante de A vale -1 y el B vale 1 , calcular razonadamente el determinante X

b) Calcular razonadamente la matriz X si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Solución

a) Si el determinante de A vale -1 y el B vale 1 , calcular razonadamente el determinante X

$$AXB = I \Rightarrow |A| \cdot |X| \cdot |B| = |I|; \text{ Dado que } |I| = 1 \Rightarrow -1|X|1 = 1; -|X| = 1; |X| = -1$$

b) Calcular razonadamente la matriz X si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$AXB = I; \Rightarrow A^{-1}A X B B^{-1};$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{(\text{Adj}(B))^t}{|B|}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1; \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AXB = I; \Rightarrow A^{-1}A X B B^{-1} = A^{-1}I B^{-1}; X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

49. Ejercicio

a) Sean P y Q dos matrices cuadradas de orden n que tienen inversa P^{-1} y Q^{-1}

¿tiene inversa $P * Q$?

b) Calcular la matriz inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Solución

a) Sean P y Q dos matrices cuadradas de orden n que tienen inversa P^{-1} y Q^{-1}

¿tiene inversa $P * Q$?

Propiedades de matrices. tendran inversa si su determinante no es 0; Si P y Q tienen inversa, su determinante no es 0 $\Rightarrow |P| \neq 0$ y $|Q| \neq 0$.

segun las propiedades de los determinantes $|PQ| = |P| |Q|$ dado que $|P| \neq 0$ y $|Q| \neq 0$

$|PQ| \neq 0$ Por lo que tendra inversa

b) Calcular la matriz inversa de la matriz $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 12 - 1 + 2 + 3 = 16; \text{Adj}(P) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}; (\text{Adj}(P))^t = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$P^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}}{16} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

50. Ejercicio

Hallar, si existe una matriz A cuadrada 2X2 que cumpla las siguientes condiciones:

a) coincide con su traspuesta

b) verifica la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

c) Su determinante vale 9;

Solución

a) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ su traspuesta será $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ para que se cumpla b ha de ser igual c.

b) la matriz será $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a+b & b+d \\ -a-b & -b-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -(a+b)+(b+d) \\ -a-b & -(-a-b)+(-b-d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b = -3 \\ -(a+b)+(b+d) = -3 \\ -a-b = 3 \\ -(-a-b)+(-b-d) = 3 \end{cases}; \begin{cases} a+b = -3 \\ -a-b+b+d = -3 \\ -a-b = 3 \\ a+b-b-d = 3 \end{cases}; \begin{cases} a+b = -3 \\ -a+d = -3 \\ a+b = -3 \\ a-d = 3 \end{cases}; \begin{cases} a = a \\ b = -3-a \\ a-d = 3 \\ d = a-3 \end{cases}$$

$$c) \begin{vmatrix} a & -3-a \\ -3-a & a-3 \end{vmatrix} = a^2 - 3a - (-3-a)^2 = a^2 - 3a - (9 + a^2 + 6a) =$$

$$= a^2 - 3a - a^2 - 6a - 9 = -9a - 9 \text{ ha de ser } = 9; -9a - 9 = 9; a = -\frac{18}{9} = -2$$

$$\text{si } a = -2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ d = -5 \end{cases} \text{ La matriz } A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$