

Sistemas de Ecuaciones lineales

Contenido

1	EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES .	2
2	SOLUCIONES. SISTEMAS EQUIVALENTES.....	3
2.1	SOLUCIÓN DE UN SISTEMA.....	3
2.2	SISTEMAS EQUIVALENTES, PROPIEDADES.....	3
3	RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO GAUSS.....	4
4	REGLA DE CRAMER	7
5	TEOREMA DE ROUCHE, CRITERIO DE COMPATIBILIDAD	11
6	SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS.....	15
7	SISTEMAS CON DOS ECUACIONES Y DOS INCÓGNITAS	18
7.1	INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA:	18
8	SISTEMAS DEPENDIENTES DE PARÁMETROS	20

2. Ejercicio

Escribe en notacion ordinaria los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} ; \text{ b) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{cases} a - 2b = 2 \\ 3a + 3b - c = 0 \\ 2a - b + 5c = -2 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{cases} 3x - 2z = 3 \\ x + y + 4z = 2 \\ -x - 3y + 2z = 1 \\ 2y - 5z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2 Soluciones. Sistemas equivalentes

2.1 Solución de un sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \cdots \dots + a_{3,n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right\} \quad \text{\textit{La solución del sistema consiste en hallar los valores de las variables } x_1; x_2; x_3; \dots \dots ; x_n \text{ de forma que al sustituirlos cumplen todas las ecuaciones}}$$

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden ser en funcion de su solucion:

(**Inompatibles** : no tienen ninguna solución

Compatibles: cuando tienen solucion

- C.determinados** : la solucion es unica
- C.Indeterminados** : tienen mas de una solucion

2.2 Sistemas equivalentes, propiedades

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando tienen la misma solución.

- Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de una ecuación de un sistema por un número el sistema resultante es equivalente
- Si a ambos miembros de una ecuación de un sistema se les suma o se les resta una misma expresión, el sistema resultante es equivalente
- Si sumamos o restamos a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo sistema, el sistema resultante es equivalente al dado
- Si en un sistema una ecuación depende de otras se puede suprimir y el sistema resultante es equivalente al dado.
- Si en un sistema cambiamos el orden de las ecuaciones o de las incógnitas el sistema resultante es equivalente al dado

3. Ejercicio

Comprueba que los siguientes sistemas son equivalentes

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ x + 3y = 7 \\ 3x - y = 12 \end{cases}$$

Solución

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ x + 3y = 7 \\ 3x - y = 12 \end{cases} \text{ las dos ecuaciones primeras son iguales y}$$

$3x - y = 12$ es igual a la suma de las dos ecuaciones $(2x - 4y = 5) + (x + 3y = 7)$
luego se puede suprimir

4. Ejercicio

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y = 3; \\ 4x - 3y = 1; \end{cases}$ Añadir otra ecuación a este de forma que sean equivalentes

Solución

Una ecuación podría ser la suma de las ecuaciones $\begin{cases} x + 2y = 3; \\ 4x - 3y = 1; \\ 5x - y = 4 \end{cases}$

3 Resolución de sistemas por el método Gauss

Para resolverlo transformo el sistema en uno escalonado y una vez escalonado se cumple:

- a) Si alguna ecuación es de la forma $d = 0$ siendo $d \neq 0$ el sistema es incompatible no tiene solución
- b) Si el número de ecuaciones lineales es igual al número de incógnitas el sistema es compatible determinado, la solución es única.
- c) Si el número de ecuaciones lineales es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones

5. Ejercicio

Resuelve por el método Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 1; \\ 2x + y + 2z = 2; \\ x + y + z = 1; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 3; \\ x + 2y + 3z = 6; \\ 2x + y = 2; \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1; \\ 2x + y + 2z = 2; \\ x + y + z = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 \\ F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + z = 1; \\ 0 - 3y + 0 = 0; \\ 0 - y + 0 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{sustituyo} \quad \begin{cases} x + 0 + z = 1 \\ y = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \text{ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 3; \\ x + 2y + 3z = 6; \\ 2x + y = 2; \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 3; \\ x + 2y + 3z = 6; \\ 2x + y + 0 = 2; \end{cases} \begin{cases} F_1 \\ F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 3; \\ 0 + y + 2z = 3; \\ 0 - y - 2z = -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = F_3 + F_2 \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 3; \\ 0 + y + 2z = 3; \\ 0 + 0 + 0 = -1; \end{cases} \text{ el sistema es indeterminados}$$

6. Ejercicio

Resuelve por el metodo Gaus el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y + z = 0; \\ x + 2y + 3z = 3; \\ 2x - y + 3z = 1; \\ 4x + 3y + 9z = 7 \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} x - y + z = 0; \\ x + 2y + 3z = 3; \\ 2x - y + 3z = 1; \\ 4x + 3y + 9z = 7 \end{cases} \begin{cases} F_1 \\ F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \\ F_4 = F_4 - 4F_1 \end{cases} \begin{cases} x - y + z = 0; \\ 0 + 3y + 2z = 3; \\ 0 + y + z = 1; \\ 0 + 7y + 5z = 7 \end{cases} \begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = 3F_3 - F_2 \\ F_4 = 3F_4 - 7F_2 \end{cases} \begin{cases} x - y + z = 0; \\ 0 + 3y + 2z = 3; \\ 0 + 0 + z = 0; \\ 0 + 0 + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0; \text{ sustituyo } x - 1 + 0 = 0; x = 1; \\ 0 + 3y + 2z = 3; \text{ sustituyo } y = 1; \\ z = 0; \\ z = 0 \end{cases} \text{ Solucion } x = 1; y = 1; z = 0;$$

7. Ejercicio

Resuelve por el metodo Gaus los siguientes sistemas de ecuaciones a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1; \\ 2x + y + 2z = 23; \\ x + y + z = 1; \end{cases}$

$$b) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1; \\ y + 2z = 0; \\ x + 3y = 1; \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y - z = 1; \\ x - y + z = 1; \\ -x + y + z = 1; \end{cases} \quad d) \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8; \\ 2x + 3y - 3z = 4; \\ x - 3y - 5z = -6; \\ 4x + 4y + 6z = 18 \end{cases}$$

Solución

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 1; \\ 2x + y + 2z = 2; \\ x + y + z = 1; \end{cases} \begin{cases} F_1 \\ F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{cases} \begin{cases} x + 2y + z = 1; \\ 0 - 3y + 0 = 0; \\ 0 - y + 0 = 0; \end{cases} \begin{cases} x + 2y + z = 1; \\ -3y = 0; \\ -y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1; \text{ hago } x = \lambda; y = \frac{1 - \lambda}{2} \\ -3y = 0; \\ -y = 0; \end{cases}$$

solucion $x = \lambda; y = \frac{1 - \lambda}{2}, z = 0$ sistemas compatible indeterminado

$$b) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1; \\ y + 2z = 0; \\ x + 3y = 1; \end{cases} \begin{cases} x + 2y + 3z = 1; \\ 0 + y + 2z = 0; \\ x + 3y + 0 = 1; \end{cases} \begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{cases} \begin{cases} x + 2y + 3z = 1; \\ 0 + 2z = 0; \\ 0 + y - 3z = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1; \text{ sustituyo } x + 0 + 0 = 1; \\ z = 0; \\ 0 + y - 3z = 0; \text{ sustituyo } y = 0; \end{cases}$$

solucion $x = 1; y = 0, z = 0$ sistemas compatible determinado

$$c) \begin{cases} x + y - z = 1; \\ x - y + z = 1; \\ -x + y + z = 1; \end{cases} \begin{cases} F_1 \\ F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1 \end{cases} \begin{cases} x + y - z = 1; \\ 0 - 2y + 2z = 0; \\ 0 + 2y + 0 = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1; \text{ sustituyo } x + 1 - 1 = 1; x = 1 \\ 0 - 2y + 2z = 0; \text{ sustituyo } -2 + 2z = 0; z = 1; \\ y = 1; \end{cases}$$

solucion x = 1; y = 1, z = 1 sistemas compatible determinado

$$d) \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8; \\ 2x + 3y - 3z = 4; \\ x - 3y - 5z = -6; \\ 4x + 4y + 6z = 18 \end{cases} \begin{cases} F_1 \\ F_2 = 3F_2 - 2F_1 \\ F_3 = 3F_3 - F_1 \\ F_4 = 3F_4 - 4F_1 \end{cases} \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8; \\ 0 + 13y - 17z = -4; \\ 0 - 7y - 19z = -26; \\ 0 - 20y + 2z = 22 \end{cases} F_4 = F_2 - F_3$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8; \\ 0 + 13y - 17z = -4; \\ 0 - 7y - 19z = -26; \end{cases} \begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = 13F_3 + 7F_2 \end{cases} \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8; \\ 0 + 13y - 17z = -4; \\ 0 + 0 - 366z = -366; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8; \text{ sustituyo } 3x - 2 + 4 = 8; x = 2 \\ 0 + 13y - 17z = -4; \text{ sustituyo } 13y - 17 = -4; y = 1; \\ z = 1; \end{cases}$$

solucion x = 2; y = 1, z = 1 sistemas compatible determinado

8. Ejercicio

Resuelve por el metodo Gaus el siguiente sistema de ecuaciones, dejando como

parametros libres las incognitas de mayor indice $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Solucion:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = x_5; \\ x_1 + 0 + x_3 + 0 = x_5; \\ 3x_1 + x_2 + 0 + x_4 = 2x_5; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 \\ F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 3F_1 \\ F_4 = F_4 + F_1 \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = x_5; \\ 0 - x_2 + 0 - x_4 = 0; \\ 0 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -x_5; \\ 0 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = x_5 \end{cases} \begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = F_3 - 2F_2 \\ F_4 = F_4 + 2F_2 \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = x_5; \\ 0 - x_2 + 0 - x_4 = 0; \\ 0 - 0 - 3x_3 + 4x_4 = -x_5; \\ 0 + 0 - x_3 + 0 = x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = x_5; \text{ sustituiamos } x_1 - \mu + \lambda + \mu = \lambda; x_1 = 0; \\ 0 - x_2 + 0 - x_4 = 0; x_2 = -x_4 \text{ hacemos } x_4 = \mu \\ 0 - 0 - 3x_3 + 4x_4 = -x_5; \\ x_3 = -x_5 \text{ hacemos } x_5 = \lambda \end{cases}$$

Solucion x₁ = 0; x₂ = -μ; x₃ = -λ; x₄ = μ; x₅ = λ; sistemas compatible indeterminado

4 Regla de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales es un sistema Cramer si cumple las siguientes condiciones:

- a) Tiene el mismo numero de ecuaciones que de incognitas
- b) El determinante de la matriz formada por los coeficientes de las incognitas es distinto de 0;

Todo sistema de Cramer es un sistema compatible determinado.

El valor de las variables es: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$

Donde $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3; \dots \Delta_n$ son el determinante que se obtiene al sustituir los coeficientes del 2º miembro (termino independiente) en la 1º, 2º, 3º columna respectivamente.

El valor de las incognitas = $\frac{\text{determinante asociado de la variable}}{\text{determinante de los coeficientes de las incognitas}}$

Ejemplo

Comprobar si son sistemas cramer los siguientes sistemas de ecuaciones y resuelve:

parametros libres las incognitas de mayor indice
$$\begin{cases} 2x + z = 1; \\ 3x - 2y = -7 \\ y + z = 5; \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} 2x + z = 1; \\ 3x - 2y = -7 \\ y + z = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 0 + z = 1; \\ 3x - 2y + 0 = -7 \\ 0 + y + z = 5; \end{cases}$$

Es cramer pues cumple:

Tiene el mismo numero de ecuaciones (3) que de incognitas (3)

El determinante de la matriz $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1$

Solución

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -7 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2 - 7 + 10}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-14 + 15 - 3}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-20 + 3 + 14}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Solucion $x = -1; y = 2; z = 3$; sistemas compatible determinado

9. Ejercicio

Resuelve por el metodo Cramer los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 0; \\ x + 2y = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - y = 4; \\ -2x + 2y = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 5y = 4 - 2x; \\ 5 + y = x - 2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x + y = -8; \\ 3y - 2x = 5; \end{cases}$

Solución:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 0; \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1;$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2;$$

Solucion $x = -3; y = 2;$

b) $\begin{cases} 3x - y = 4; \\ -2x + 2y = 3; \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4;$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{11}{4};$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{17}{4};$$

Solucion $x = \frac{11}{4}; y = \frac{17}{4};$

c) $\begin{cases} -x + 5y = 4 - 2x; \\ 5 + y = x - 2; \end{cases}$ $\begin{cases} -x + 2x + 5y = 3; \\ -x + y = -5 - 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x + 5y = 4; \\ -x + y = -7; \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 5 = 6$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{39}{6} = \frac{13}{2};$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-7 + 4}{6} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2};$$

Solucion $x = \frac{13}{2}; y = -\frac{1}{2};$

d) $\begin{cases} 7x + y = -8; \\ 3y - 2x = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 7x + y = -8; \\ -2x + 3y = 5; \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 21 + 2 = 23;$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-29}{23} = -\frac{29}{23}; y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -8 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{19}{23};$$

Solucion $x = -\frac{29}{23}; y = \frac{19}{23};$

10. Ejercicio

Averigua para que valores del parametro b el siguiente sistema es Cramer:

$$\begin{cases} 2x - by + 2z = -1; \\ 2x + y = 3; \\ 4x + 3b - 1 = 0; \end{cases};$$

Solución:

$$\begin{cases} 2x - by + 2z = -1; \\ 2x + y = 3; \\ 4x + 3b - 1 = 0; \end{cases}; \begin{cases} 2x - by + 2z = -1; \\ 2x + y + 0 = 3; \\ 4x + 0 + 0 = 1 - 3b; \end{cases} \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -b & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8;$$

El sistema es Cramer para cualquier valor de b

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1-3b & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -b & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-2(1-3b)}{-8} = \frac{1-3b}{4}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1-3b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -b & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{4(1-3b) - 24}{-8} = \frac{4 - 12b - 24}{-8} = \frac{-12b - 20}{-8} = \frac{3b + 5}{2}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -b & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1-3b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -b & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2(1-3b) - 12b - 4 - 2b(1-3b)}{-8} =$$

$$= \frac{2 - 6b - 12b - 4 - 2b + 6b^2}{-8} = \frac{6b^2 - 20b - 2}{-8} = \frac{3b^2 - 10b - 1}{-4}$$

$$\text{Solucion } x = \frac{1-3b}{4}; y = \frac{3b+5}{2}; z = \frac{3b^2-10b-1}{-4}$$

11. Ejercicio

Resuelve por el metodo Cramer los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} -x + y + z = 2; \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}; \text{ b) } \begin{cases} x + 2y - t = 0; \\ y + z + 2t = 0 \\ z + t = 1 \\ z - t = 1; \end{cases} \text{ c) } \begin{cases} x + y = a; \\ y + z = 1 + a; \\ x + z = 1 - a; \end{cases}$$

Solución:

$$\text{a) } \begin{cases} -x + y + z = 2; \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 - 2 - 4 + 1 - 1 = -9$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4 - 1 - 1 - 2}{-9} = \frac{0}{-9} = 0;$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1 - 4 - 2 - 2}{-9} = \frac{-9}{-9} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2 + 2 - 8 - 1}{-9} = \frac{-9}{-9} = 1$$

Solucion $x = 0; y = 1; z = 1$

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0; \\ y + z + 2t = 0; \\ z + t = 1; \\ z - t = 1; \end{cases} \begin{cases} x + 2y + 0 - t = 0; \\ 0 + y + z + 2t = 0 \\ 0 + 0 + z + t = 1 \\ 0 + 0 + z - t = 1; \end{cases} \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{(-2 - 1 - 4) - (2 - 1 - 4)}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1 + 2 - 2 + 1}{-2} = \frac{2}{-2} = -1;$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1 - 1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1;$$

$$t = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1 - 1}{-2} = 0;$$

Solucion $x = 2; y = -1; z = 1; t = 0$

$$c) \begin{cases} x + y = a; \\ y + z = 1 + a; \\ x + z = 1 - a; \end{cases} \begin{cases} x + y + 0 = a; \\ 0 + y + z = 1 + a; \\ x + 0 + z = 1 - a; \end{cases} \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 + a & 1 & 1 \\ 1 - a & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a + 1 - a - 1 - a}{2} = \frac{-a}{2} = -\frac{a}{2};$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 + a & 1 \\ 1 & 1 - a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 + a + a - 1 + a}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 + a \\ 1 & 0 & 1 - a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 - a + 1 + a - a}{2} = \frac{2 - a}{2}$$

$$\text{Solucion } x = -\frac{a}{2}; y = \frac{3a}{2}; z = \frac{2 - a}{2}$$

5 Teorema de Rouché, Criterio de compatibilidad

El teorema permite conocer el tipo de solución que tendrá un sistema de m ecuaciones y n incógnitas mediante el estudio del rango de la matriz formada por los coeficientes de las variables y la ampliada con los términos independientes

El teorema establece que para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible es condición necesaria y suficiente que la matriz formada por los coeficientes y la matriz ampliada por los términos independientes tengan el mismo rango.

R = rango de la matriz formada por los coeficientes de las variables

R^* = rango matriz ampliada con los términos independientes

análisis) Si $R = R^*$ el sistema es compatible. Si $R = R^* = \text{numero de variables}$

el sistema es compatible determinado

a) Si $R = R^*$ el sistema es compatible. Si $R = R^* = \text{numero de variables}$

el sistema es compatible determinado (una única solución)

b) Si $R = R^*$ el sistema es compatible. Si $R = R^* < \text{numero de variables}$

el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

c) Si $R \neq R^*$ el sistema es incompatible no tiene solución

Resolución de sistemas compatibles indeterminados:

$R = R^* < \text{numero de variables}$. igualamos una variable a un parámetro y lo pasamos como término independiente y ya tendríamos $R = R^* = \text{numero de variables}$

12. Ejercicio

Estudia la compatibilidad y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y - z = 5; \\ 2x - y + 2z = 0; \\ y + z = 3; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2y + z = 1; \\ 2x + 3y + z = 4; \\ 4x - y + 3z = 7; \end{cases}$$

Solución

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y - z = 5; \\ 2x - y + 2z = 0; \\ y + z = 3; \end{cases} \quad \text{determinante de la matriz } R = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2 - 2 - 6$$

$$= -13 \Rightarrow \text{Rango de } R = 3$$

$$\text{determinante de la matriz } R^* = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \text{ el rango no puede ser 4}$$

$$\Rightarrow \text{rango } R^* = 3$$

$R = R^* = \text{numero de variables sistema compatible determinado}$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-5 + 6 - 3 - 10}{-13} = \frac{-12}{-13} = \frac{12}{13};$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6 - 10 - 18}{-13} = \frac{-34}{-13} = \frac{34}{13}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-9 + 10 - 6}{-13} = \frac{-5}{-13} = \frac{5}{13}$$

Solucion $x = \frac{12}{13}; y = \frac{34}{13}; z = \frac{5}{13}$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y + z = 1; \\ 2x + 3y + z = 4; \\ 4x - y + 3z = 7; \end{cases} \quad R = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 - 8 - 12 + 12 + 1 = 0; R = 2;$$

$$R^* = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} \text{ no puede ser rango 4; compruebo rango 3}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -14 + 9 - 4 + 1 + 24 - 21 = -5; R^* = 3;$$

$R \neq R^*$ el sistema es incompatible no tiene solucion

13. Ejercicio

Resuelve el sistema estudiando previamente su compatibilidad
$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8; \\ 2x + 3y - 3z = 4; \\ x - 3y - 5z = -6; \\ 4x + 4y + 6z = 18 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8; \\ 2x + 3y - 3z = 4; \\ x - 3y - 5z = -6; \\ 4x + 4y + 6z = 18 \end{cases} \quad R = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \\ 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{el rango no puede ser 4 pues no es } 4 \times 4$$

hallo si el rango es 3 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -45 - 24 + 6 - 12 - 27 - 20 = -122; \quad R = 3$

$$R^* = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & -6 \\ 4 & 4 & 6 & 18 \end{vmatrix} = \text{cambio } F_1 \text{ por } F_3 \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & -6 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 6 & 18 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= F_2 - 2F_1 \\ F_3 &= F_3 - 3F_1 \\ F_4 &= F_4 + 4F_1 \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 9 & 7 & 16 \\ 0 & 7 & 19 & 26 \\ 0 & 16 & 26 & 42 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} 9 & 7 & 16 \\ 7 & 19 & 26 \\ 16 & 26 & 42 \end{vmatrix} =$$

$$7182 + 2912 + 2912 - 4864 - 2058 - 6084 = 0; \quad R^* = 0; \Rightarrow$$

$R = R^* =$ numero de variables sistema compatible determinado

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8; \\ 2x + 3y - 3z = 4; \\ x - 3y - 5z = -6; \\ 4x + 4y + 6z = 18 \end{cases} \quad \text{Dado que } F_1 + F_2 - F_3 = F_4 \text{ Puedo quitar } F_4 \quad \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8; \\ 2x + 3y - 3z = 4; \\ x - 3y - 5z = -6; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -45 - 24 + 6 - 12 - 27 - 20 = -122$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-120 - 48 - 36 + 72 - 40 - 72}{-122} = \frac{-244}{-122} = 2;$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-60 - 48 - 24 - 16 - 54 + 80}{-122} = \frac{-122}{-122} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-54 - 48 - 8 - 24 + 36 - 24}{-122} = \frac{-122}{-122} = 1$$

Solucion $x = 2; y = 1; z = 1$

14. Ejercicio

Estudia la compatibilidad y el número de soluciones
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2; \\ 3x + 3y + 3z = 3; \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2; \\ 3x + 3y + 3z = 3; \end{cases} \text{ Dado que } F_1 + F_2 = F_3 \text{ Puedo quitar } F_3 \text{ y } R = 2;$$

$$R^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \text{ no puede ser 4 compruebo si es 3}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 6 + 3 - 6 - 3 - 12 = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 6 - 6 - 6 - 6 = 0; R^* = 2$$

$R = R^* = 2 < \text{numero de variables, sistema compatible indeterminado}$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2; \end{cases} \text{ igualo } z = \lambda; \begin{cases} x + 2y + \lambda = 1 \\ 2x + y + 2\lambda = 2; \end{cases} \begin{cases} x + 2y = 1 - \lambda \\ 2x + y = 2 - 2\lambda; \end{cases} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 = F_2 - 2F_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 - \lambda \\ 0 - 3y = 0; y = 0; \end{cases} x + 0 = 1 - \lambda; x = 1 - \lambda$$

Solucion $x = 1 - \lambda; y = 0; z = \lambda;$

15. Ejercicio

Estudia la compatibilidad y el número de soluciones
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2; \\ 3x + 3y + 3z = 4; \end{cases}$$

Solución

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 6 + 12 - 3 - 6 - 12 = 0; R = 2$$

$$R^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ El rango no puede ser 4 pues no es } 4 \times 4 \text{ compruebo } R^* = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 3 + 6 - 6 - 12 - 4 = 3; R^* = 3;$$

$R \neq R^*$ el sistema es incompatible no tiene solución

16. Ejercicio

Para cada uno de los siguientes sistemas a) $\begin{cases} x - 3y + z = -1 \\ 2x + y = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + z - t = 1 \\ x - y + 3t = 2; \\ 3x - 2y + 5z = -1 \end{cases}$

a) añade una ecuación de forma que el sistema resultante sea Incompatible

b) Añade una ecuación de forma que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución

a) añade una ecuación de forma que el sistema resultante sea Incompatible

un sistema es incompatible si $R \neq R^*$ y no tiene solución

a) $\begin{cases} x - 3y + z = -1; \\ 2x + y = 3; \end{cases}$; si $R < 3$; $R^* = 3$;

Si $F_1 - F_2 = F_3$ y el término independiente puedes $= 2$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 8 + 1 + 6 = 0; R \leq 2;$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 - 2 + 9 = -4; R^* = 3; \quad R \neq R^*$$

b) $\begin{cases} 2x + y + z - t = 1 \\ x - y + 3t = 2; \\ 3x - 2y + 5z = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + y + z - t = 1 \\ x - y + 0 + 3t = 2; \\ 3x - 2y + 5z + 0 = -1 \end{cases}$ $F_1 + F_2 = F_4$ $\begin{cases} 2x + y + z - t = 1 \\ x - y + 0 + 3t = 2; \\ 3x - 2y + 5z + 0 = -1 \\ 3x + 0 + z + 2t = 2 \end{cases}$

$$R \leq 3 \text{ y } R^* = 4 \quad R \neq R^*$$

b) Añade una ecuación de forma que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

un sistema es compatible indeterminado si $R = R^* < \text{numero de variables}$

a) $\begin{cases} x - 3y + z = -1; \\ 2x + y = 3; \end{cases}$; $F_1 + F_2 = F_3$; $\begin{cases} x - 3y + z = -1; \\ 2x + y = 3; \\ 3x - 2y + z = 2; \end{cases}$ $R = R^* = 2$; numero de variables 3;

b) $\begin{cases} 2x + y + z - t = 1 \\ x - y + 3t = 2; \\ 3x - 2y + 5z = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + y + z - t = 1 \\ x - y + 0 + 3t = 2; \\ 3x - 2y + 5z + 0 = -1 \end{cases}$ $F_1 + F_2 = F_4$ $\begin{cases} 2x + y + z - t = 1 \\ x - y + 0 + 3t = 2; \\ 3x - 2y + 5z + 0 = -1 \\ 3x + 0 + z + 2t = 3 \end{cases}$

$$R = R^* = 3; \text{ numero de variables } 4$$

6 Sistemas lineales Homogéneos

Sistemas lineales homogéneos son aquellos en que todos los términos independientes son 0

Todos los sistemas homogéneos son compatibles y pueden ser determinados o indeterminados

Todos los sistemas homogéneos siempre tendrán la solución trivial $x = 0; y = 0; z = 0$;

Por otro lado si solo tiene esta será compatible determinado.

Si tiene más será compatible indeterminado

17. Ejercicio

Resolver los siguientes sistemas a) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0; \\ x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0; \\ 5x - 3y + z = 0 \end{cases}$

Solución

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0; \\ x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$ Una solución será $x = 0; y = 0; z = 0$; resuelvo para ver si tiene mas

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 9 + 2 - 1 - 3 - 12 = -25$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-25} = \frac{0}{-122} = 0;$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-25} = 0$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-25} = 0$$

Solucion $x = 0; y = 0; z = 0$; compatible determinado

b) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0; \\ 5x - 3y + z = 0 \end{cases}$ Una solución $x = 0; y = 0; z = 0$; resuelvo para ver si tiene mas

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9 + 10 - 5 + 6 - 3 = 0$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0} = 0; \text{Indeterminado}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0} = 0; \text{indeterminado}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0} = 0; \text{ indeterminado}$$

Solucion $x = 0; y = 0; z = 0; \text{ compatible indeterminado}$

18. Ejercicio

Resolver el siguiente sistema homogeneo
$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + 5y - 3z = 0; \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + 5y - 3z = 0; \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \text{ la solucion trivial } x = 0; y = 0; z = 0;$$

resolvemos por gauss
$$\begin{matrix} F_1 \\ F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 3F_1 \end{matrix} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 0 + 7y - 4z = 0; \\ 0 + 7y - 4z = 0 \end{cases} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = F_3 - F_2 \end{matrix} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 0 + 7y - 4z = 0; \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 0 + 7y - 4z = 0; \end{cases} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \text{ sustituyo } x = \frac{8\lambda}{7} + \lambda = 0; x = \frac{\lambda}{7} \text{ hago } z = \lambda; y = \frac{4\lambda}{7} \\ 0 + 7y - 4z = 0; \end{cases}$$

Solucion $x = \frac{\lambda}{7}; y = \frac{4\lambda}{7}; z = \lambda; \text{ compatible indeterminado}$

19. Ejercicio

Resolver el siguiente sistema homogeneo
$$\begin{cases} x + 3y - z + t = 0 \\ x + y + z - 2t = 0; \\ x + y + t = 0 \\ 2x - z + 2t = 0 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} x + 3y - z + t = 0 \\ x + y + z - 2t = 0; \\ x + y + t = 0 \\ 2x - z + 2t = 0 \end{cases} \begin{cases} x + 3y - z + t = 0 \\ x + y + z - 2t = 0; \\ x + y + 0 + t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \end{cases} \text{ la solucion trivial } x = 0; y = 0; z = 0$$

$$\begin{cases} x + 3y - z + t = 0 \\ x + y + z - 2t = 0; \\ x + y + 0 + t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \end{cases} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - 2F_1 \end{matrix} \begin{cases} x + 3y - z + t = 0 \\ 0 - 2y + 2z - 3t = 0; \\ 0 - 2y + z + 0 = 0 \\ 0 - 5y + z + 0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = F_3 - F_2 \\ F_4 = 2F_4 - 5F_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 3y - z + t = 0 \\ 0 - 2y + 2z - 3t = 0; \\ 0 + 0 - z + 3t = 0 \\ 0 + 0 - 8z + 15t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 = F_4 - 8F_3 \end{matrix} \begin{cases} x + 3y - z + t = 0 \\ 0 - 2y + 2z - 3t = 0; \\ 0 + 0 - z + 3t = 0 \\ 0 + 0 + 0 - 9t = 0; \end{cases} \begin{cases} x + 3y - z + t = 0; \text{ sustituyo } x = 0 \\ 0 - 2y + 2z - 3t = 0; \text{ sustituyo } y = 0 \\ 0 + 0 - z + 3t = 0; \text{ sustituyo } z = 0 \\ 0 + 0 + 0 - 9t = 0; t = 0; \end{cases}$$

Solucion $x = 0; y = 0; z = 0; t = 0 \text{ compatible determinado}$

7 Sistemas con dos ecuaciones y dos incógnitas

7.1 Interpretación geométrica:

Geoméricamente, resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es estudiar cuál es la posición relativa de dos rectas en el plano. Es decir, resolver el sistema implica buscar si las rectas tienen o no puntos en común.

Dado que la ecuación de la recta es $ax + by + c = 0$, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas representa a dos rectas en el espacio.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + a'y + c' = 0; \end{cases} \text{ serían las rectas } \begin{cases} r: ax + by = -c \\ r': a'x + a'y = -c'; \end{cases}$$

Según el rango del sistema la posición de las rectas será:

Rango de $A = \text{rango de } A^* = 2$ Sistema compatible determinado, rectas secantes

Rango de $A = 1$; rango de $A^* = 2$ Sistema incompatible, rectas paralelas

Rango de $A = \text{rango de } A^* = 1$ Sistema compatible indeterminado, rectas coincidentes

20. Ejercicio

Estudia la posición relativa de los pares de rectas: a) $\begin{cases} r: 2x + 3y = 7 \\ r': 4x - y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: x + 2y = 1; \\ r': x + 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} r: x + 2y = 1; \\ r': 2x + 4y = 2 \end{cases}$

Solución

a) $\begin{cases} r: 2x + 3y = 7 \\ r': 4x - y = 7 \end{cases}; A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14; R(A) = 2;$

$A^* = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -7 - 21 = -27; Rg(A^*) = 2;$

Las rectas son secantes se cortan en un punto;

Prueba

Resuelvo el sistema $\begin{cases} r: 2x + 3y = 7; \\ r': 4x - y = 7; \end{cases}$ reducción $2F_1 - F_2 = 0 + 7y = 7; y = 1$

sustituyo en $r: 2x + 3y = 7; \Rightarrow 2x + 3 = 7; x = 2$; Punto de corte de las recta (2,1)

b) $\begin{cases} r: x + 2y = 1; \\ r': x + 2y = 5 \end{cases}; A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0; R(A) = 1$

$A^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 10 = -8; Rg(A^*) = 2;$

Las rectas son paralelas.

Resuelvo el sistema $\begin{cases} r: x + 2y = 1; \\ r': x + 2y = 5 \end{cases} F_1 - F_2 = 0 + 0 = -4 \text{ no tiene solución};$

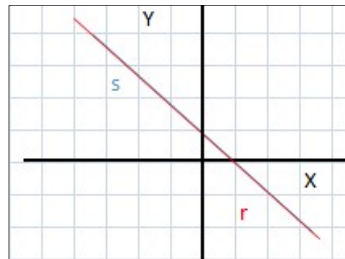
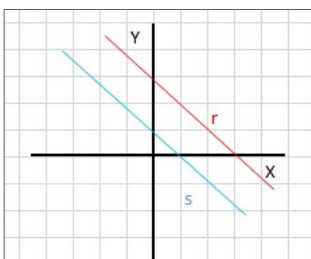
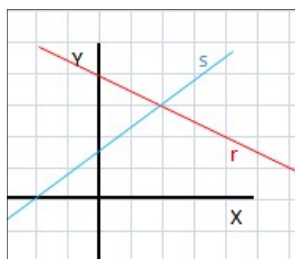
c) $\begin{cases} r: x + 2y = 1; \\ r': 2x - 4y = 2; \end{cases}$ Se ve que es la misma recta, luego son coincidentes

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0; R(A) = 1;$

$A^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0; A^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0; Rg(A^*) = 1$

21. Ejercicio

En cada caso escribe el sistema de ecuaciones que se corresponda con la situación de las figuras:



Solución

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$s: (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = (y - y_1);$$

a) un punto es $(-2,0)$ y otro $(2,3)$

$$(x - (-2)) \frac{3 - 0}{2 - (-2)} = (y - 0); (x + 2) \frac{3}{4} = (y - 0)$$

$$s: 3x + 6 = 4y; \quad s: 3x - 4y = -6$$

$$r: (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = (y - y_1); \text{ un punto es } (0,4) \text{ y otro } (2,3)$$

$$(x - 0) \frac{3 - 4}{2 - 0} = (y - 4); x \frac{-1}{2} = (y - 4); r: -x = 2y - 8; r: -x - 2y = -8$$

$$a) \begin{cases} s: 3x - 4y = -6; \\ r: -x - 2y = -8; \end{cases}$$

b) s: un punto es $(1,0)$ y otro $(0,1)$

$$(x - 1) \frac{1 - 0}{0 - (1)} = (y - 0); (x - 1) \frac{1}{-1} = y;$$

$$s: x + y = 1;$$

r: un punto es $(0,3)$ y otro $(3,0)$

$$(x - 0) \frac{0 - 3}{3 - 0} = (y - 3); x \frac{-3}{3} = (y - 3);$$

$$r: -3x = 3y - 9; r: -3x - 3y = -9; r: x + y = 3$$

$$b) \begin{cases} s: x + y = 1; \\ r: x + y = 3; \end{cases}$$

c) s: un punto es $(1,0)$ y otro $(0,1)$

$$(x - 1) \frac{1 - 0}{0 - (1)} = (y - 0); (x - 1) \frac{1}{-1} = y;$$

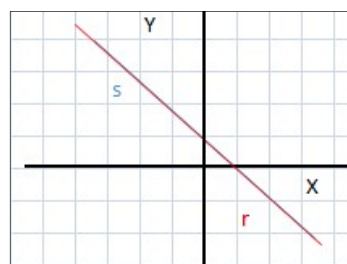
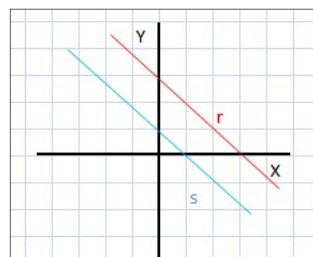
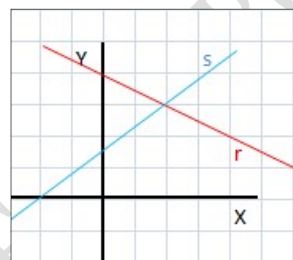
$$s: x + y = 1;$$

r: un punto es $(1,0)$ y otro $(0,1)$

$$(x - 1) \frac{1 - 0}{0 - (1)} = (y - 0); (x - 1) \frac{1}{-1} = y;$$

$$r: x + y = 1;$$

$$c) \begin{cases} s: x + y = 1; \\ r: x + y = 1; \end{cases}$$



8 Sistemas dependientes de Parámetros

Antes de resolver un sistema con parámetros es necesario hacer la discusión del sistema con el fin de ver que tipo de sistema es, indeterminado, determinado ...

22. Ejercicio

Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x - ay = 2; \\ ax - y = a + 1; \end{cases}$$

- discutir el sistema para los valores de a
- resolver el sistema para que la solución sea única

Solución

a) discutir el sistema para los valores de a $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} = -1 + a^2$; si $|A| = 0$

$$-1 + a^2 = 0; a^2 = 1; \text{ para } a = \pm 1;$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{Rg}(A) \leq 1; \text{ si } \text{Rg}(A^*) = 2$$

Si $a \neq \pm 1$; el $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2$; el sistema es compatible determinado

$$\text{Si } a = 1; |A| = 0; \text{Rg}(A) = 1; |A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \text{Rg}(A^*) = 1;$$

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) < 2 = \text{numero de incógnitas}$; El sistema es Compatible indeterminado;

$$\text{Si } a = -1; |A| = 0; \text{Rg}(A) = 1; |A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \text{Rg}(A^*) = 2;$$

$\text{Rg}(A) < \text{Rg}(A^*)$ El sistema es Incompatible;

- Resolver el sistema para que la solución sea única

$$\text{Si } a = 0; |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1; \text{Rg}(A) = 2; \text{Compatible determinado}$$

$$\begin{cases} x - ay = 2; \\ ax - y = a + 1; \end{cases} \text{ para } a = 0; \begin{cases} x - 0 = 2; \\ 0 - y = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 2; \\ y = -1; \end{cases}$$

23. Ejercicio

Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + ay + 3z = 2; \\ x + y - z = 1; \\ 2x + 3y + az = 3; \end{cases}$$

- discutir el sistema para los valores de a

Solución

$$\begin{cases} x + ay + 3z = 2; \\ x + y - z = 1; \\ 2x + 3y + az = 3; \end{cases} |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = a + 9 - 2a - 6 + 3 - a^2 = -a^2 - a + 6 = 0;$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2(-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2}; a = 2, a = -3,$$

Para $a \neq 2$ y $a \neq -3$; el $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 3$; el sistema es compatible determinado

Para $a = 2$; $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 9 - 6 + 3 - 4 = 0$; $\text{Rg}(A) \leq 2$;

$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; compruebo $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 9 + 6 - 4 - 9 = 0$;

compruebo $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 6 + 4 + 4 - 9 - 2 = 0$;

compruebo $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ pues dos columnas son iguales

$\text{Rg}(A^*) \leq 2 \Rightarrow \text{Rg}(A) = 2 = \text{Rg}(A^*)$ Sistema compatible indeterminado

Para $a = -3$; $|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$; compruebo $\begin{vmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 + 9 + 6 - 9 - 9 = 0$;

$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$; compruebo $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 6 - 6 + 4 - 6 + 3 = -2$

$\text{Rg}(A^*) = 3$; y $\text{Rg}(A) = 2$; el sistema es incompatible no tiene solución

24. Ejercicio

Considera el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2; \\ 2x + 5y + 4z = -1; \\ x + 3y + a^2z = 3a; \end{cases}$$

Determina para que valores del parametro a es compatible y resuélvelo cuando tenga mas de una solución

Solución

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2; \\ 2x + 5y + 4z = -1; \\ x + 3y + a^2z = 3a; \end{cases} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 5a^2 + 8 + 18 - 15 - 12 - 4a^2 = a^2 - 1 = 0; a = \pm 1;$$

Para $a \neq 1$ y $a \neq -1$; el $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 3$; el sistema es compatible determinado

Para $a = 1$; $|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & a^2 & 3a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

compruebo $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24 + 10 - 9 - 24 - 45 + 2 = -42$

$\text{Rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{Rg}(A) = 2$ y $\text{Rg}(A^*) = 3$ Sistema incompatible

Para $a = -1$; $|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; compruebo $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 10 - 9 - 24 + 2 + 45 = 0$;

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; compruebo $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 3 + 4 - 8 + 18 + 1 = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; compruebo $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -15 + 12 - 2 - 10 + 3 + 12 = 0$

$\text{Rg}(A) = 2 = \text{Rg}(A^*)$ Sistema compatible indeterminado

Resolvemos el sistema para $a = -1$
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2; \\ 2x + 5y + 4z = -1; \\ x + 3y + a^2z = 3a; \end{cases} \begin{cases} x + 2y + 3z = 2; \\ 2x + 5y + 4z = -1; \\ x + 3y + z = -3; \end{cases}$$

como $F_2 - F_1 = F_3$ elimino F_3 ; $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2; \\ 2x + 5y + 4z = -1; \end{cases}$ de ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - 3z; & F_1 \\ 2x + 5y = -1 - 4z; & F_2 = F_2 - 2F_1 \end{cases} \begin{cases} x + 2y = 2 - 3z; \\ 0 + y = -5 + 2z; \end{cases}$$

hago $z = \lambda$; $y = -5 + 2\lambda$; $x = -2(-5 + 2\lambda) + 2 - 3\lambda$; $x = 12 - 7\lambda$

$z = \lambda$; $y = -5 + 2\lambda$; $x = 12 - 7\lambda$

25. Ejercicio

dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} mx - y = 1; \\ x - my = 2m - 1; \end{cases}$

a) discute el sistema para distintos valores de m

b) Interpretalo geométricamente

Solución

$$\begin{cases} mx - y = 1; \\ x - my = 2m - 1; \end{cases} \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 1 = 0; m = \pm 1;$$

Para $m \neq 1$ y $m \neq -1$; el $\text{Rg}(A) = 2 = \text{Rg}(A^*)$ Sistema compatible determinado

$$\text{Para } m = 1; \begin{cases} x - y = 1; \\ x - y = 2 - 1; \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \text{Rg}(A^*) = 1;$$

$\text{Rg}(A) = 1 = \text{Rg}(A^*)$ Compatible indeterminado

$$\text{Para } m = -1; \begin{cases} -x - y = 1; \\ x + y = -2 - 1; \end{cases} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \text{Rg}(A^*) = 2;$$

$\text{Rg}(A) = 1 \neq \text{Rg}(A^*) = 2$ sistema incompatible

b) Interpretalo geométricamente

Para $m \neq 1$ y $m \neq -1$; el $\text{Rg}(A) = 2 = \text{Rg}(A^*)$ recta secantes

Para $m = 1$; $\text{Rg}(A) = 1 = \text{Rg}(A^*)$ rectas concidentes

Para $m = -1$; $\text{Rg}(A) = 1 \neq \text{Rg}(A^*) = 2$; rectas paralelas

26. Ejercicio

Discute y resuelve, según los valores de a el sistema $\begin{cases} x + y + az = 1; \\ 2x + z = 2; \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} x + y + az = 1; \\ 2x + z = 2; \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ el } \text{Rg}(A) = 2 = \text{Rg}(A^*) \text{ sistema compatible indeterminado}$$

para cualquier valor de a

$$\begin{cases} x + y + az = 1; \\ 2x + z = 2; \end{cases} \text{hago } z = \lambda; x = \frac{2 - \lambda}{2};$$

$$y = 1 - az - x; y = 1 - a\lambda - \frac{2 - \lambda}{2} = \frac{2 - 2a\lambda - 2 + \lambda}{2} = \frac{-2a\lambda + \lambda}{2}$$

$$z = \lambda; x = \frac{2 - \lambda}{2}; y = \frac{-2a\lambda + \lambda}{2}$$

27. Ejercicio

Discute y resuelve, segun los valores del parametro el sistema $\begin{cases} 4x + 12y + 4z = 0; \\ 2x - 13y + 2z = 0 \\ (a + 2)x - 12y + 12z = 0; \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} 4x + 12y + 4z = 0; \\ 2x - 13y + 2z = 0 \\ (a + 2)x - 12y + 12z = 0; \end{cases} \left| \begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 4 & 0 \\ 2 & -13 & 2 & 0 \\ a+2 & -12 & 12 & 0 \end{array} \right| = -624 + 96 + 24(a + 2) + 52(a + 2) - 288 - 96 =$$

$$-912 + 24a + 48 + 52a + 104 = -760 + 76a = 0; a = 10$$

para $a = 10$ el sistema es compatible indeterminado

para $a \neq 10$ el sistema es compatible determinado; solución trivial $x = 0; y = 0; z = 0$;

28. Ejercicio

Discute y resuelve, segun los valores del parametro el sistema $\begin{cases} x + y = 1; \\ ay + z = 0 \\ x + (a + 1)y + az = a + 1; \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} x + y = 1; \\ ay + z = 0 \\ x + (a + 1)y + az = a + 1; \end{cases} \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & a & a+1 \end{array} \right| = a^2 + 1 - a - 1 = a^2 - a = 0; a(a - 1) = 0$$

Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$, $\text{Rg}(A) = 3 = \text{Rg}(A^*)$ Sistema compatible determinado

$$\text{Para } a = 0 \begin{cases} x + y = 1; \\ z = 0 \\ x + y + 0 = 1; \end{cases} \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \text{Rg}(A) = 2; \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \text{Rg}(A^*) = 2;$$

$\text{Rg}(A) = 2 = \text{Rg}(A^*)$ sistema compatible indeterminado; $z = 0; x = \lambda; y = 1 - \lambda$

$$\text{Para } a = 1 \begin{cases} x + y = 1; \\ y + z = 0 \\ x + 2y + z = 2; \end{cases} \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right| = 1 + 1 - 2 = 0; \text{Rg}(A) = 2;$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right| = 2 + 1 - 2 = 1; \text{Rg}(A^*) = 3;$$

$\text{Rg}(A) = 2 \neq \text{Rg}(A^*) = 3$; sistema incompatible

29. Ejercicio

Discute y resuelve, segun los valores del parametro el sistema $\begin{cases} x - y + z = 7; \\ 2x + my - 4z = m \\ -x + y - z = 1; \\ -x + y - z = 3 \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} x - y + z = 7; \\ 2x + my - 4z = m \\ -x + y - z = 1; \\ -x + y - z = 3 \end{cases}; \text{El sistema es incompatible al serlo las dos ultimas ecuaciones}$$

30. Ejercicio

Discute y resuelve, segun los valores del parametro el sistema
$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 1; \\ (1 - \lambda^2)x - (1 + \lambda)z = -1 - \lambda \\ (2 + \lambda)y = -1; \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 1; \\ (1 - \lambda^2)x - (1 + \lambda)z = -1 - \lambda; \\ (2 + \lambda)y = -1; \end{cases} \quad \left| \begin{array}{ccc} \lambda & 2 & 1 \\ (1 - \lambda^2) & 0 & -(1 + \lambda) \\ 0 & (2 + \lambda) & 0 \end{array} \right|$$

$$= (1 - \lambda^2)(2 + \lambda) + (2 + \lambda)(1 + \lambda)\lambda = 2 - 2\lambda^2 + \lambda - \lambda^3 + 2\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0;$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2}; \lambda = -2; \lambda = -1;$$

Para $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq -1$, $\text{Rg}(A) = 3 = \text{Rg}(A^*)$ Sistema compatible determinado

Para $\lambda = -2$
$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 1; \\ (1 - \lambda^2)x - (1 + \lambda)z = -1 - \lambda; \\ (2 + \lambda)y = -1; \end{cases} \quad \left| \begin{array}{ccc} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right|; \text{Rg}(A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{cccc} -2 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right| \text{Rg}(A^*) = \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right| = -2; \text{Rg}(A^*) = 3$$

$\text{Rg}(A) = 2 \neq \text{Rg}(A^*) = 3$; sistema incompatible

Para $\lambda = -1$;
$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 1; \\ (1 - \lambda^2)x - (1 + \lambda)z = -1 - \lambda; \\ (2 + \lambda)y = -1; \end{cases} \quad \left| \begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right|; \text{Rg}(A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{cccc} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right| \text{Rg}(A^*) = 2;$$

$\text{Rg}(A) = 2 = \text{Rg}(A^*)$; sistema compatible indeterminado;

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 1; \\ (1 - \lambda^2)x - (1 + \lambda)z = -1 - \lambda; \\ (2 + \lambda)y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} -1x + 2y + z = 1; \\ 0x - 0z = 0 \\ y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} -1x + 2y + z = 1; \\ 0 - 0 = 0 \\ y = -1; \end{cases};$$

$$y = -1; x = t; \text{ sustituyo en } F_1; -1x + 2y + z = 1 \Rightarrow -t - 2 + z = 1; z = 3 + t$$

Solución $y = -1; x = t; z = 3 + t$

31. Ejercicio

Discute y resuelve, segun los valores del parametro el sistema
$$\begin{cases} x - y + z = 7; \\ 2x + my - 4z = m \\ -x + y - z = 1; \\ -x + y - z = 3 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} x + y + kz = 1; \\ kx + (k - 1)y + z = k; \\ x + y + z = k + 1; \end{cases} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & k \\ k & k - 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = k - 1 + 1 + k^2 - k^2 + k - k - 1 = k - 1 = 0; k = 1$$

Para $k \neq 1$, $\text{Rg}(A) = 3 = \text{Rg}(A^*)$ Sistema compatible determinado

Para $k = 1$;
$$\begin{cases} x + y + kz = 1; \\ kx + (k - 1)y + z = k; \\ x + y + z = k + 1; \end{cases} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| 1 + 1 - 1 - 1 = 0; \text{Rg}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 1 - 1 = 1; \text{Rg}(A^*) = 3;$$

$\text{Rg}(A) = 2 \neq \text{Rg}(A^*) = 3$; sistema incompatible

32. Ejercicio

Discute y resuelve, segun los valores del parametro el sistema
$$\begin{cases} ax + z + t = 1; \\ ay + z - t = 1; \\ ay + z - 2t = 2; \\ az - t = 0; \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} ax + z + t = 1; \\ ay + z - t = 1; \\ ay + z - 2t = 2; \\ az - t = 0; \end{cases} \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ a & 1 & -2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = a(-a - a^2 + 2a^2 + a) = a^3 = 0;$$

Para $a \neq 0$, $\text{Rg}(A) = 4 = \text{Rg}(A^*)$ Sistema compatible determinado

$$\text{Para } a = 0 \begin{cases} ax + z + t = 1; \\ ay + z - t = 1; \\ ay + z - 2t = 2; \\ az - t = 0; \end{cases} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \text{Rg}(A) = 2$$

$$\text{la matriz ampliada} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0; \text{Rg}(A^*) = 3;$$

$a = 0$, $\text{Rg}(A) = 2 \neq \text{Rg}(A^*) = 3$ Sistema incompatible.

$$\text{Resolvemos el sistema para } a \neq 0; \begin{cases} ax + z + t = 1; \\ ay + z - t = 1; \\ ay + z - 2t = 2; \\ az - t = 0; \end{cases} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = F_3 - F_2 \\ F_4 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} ax + z + t = 1; \\ ay + z - t = 1; \\ 0 + 0 - t = 1; \\ az - t = 0; \end{cases} t = -1; \text{ sustituyo } F_4; az - (-1) = 0; z = -\frac{1}{a};$$

$$\text{sustituyo } F_2; ay - \frac{1}{a} - (-1) = 1; ay = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{a^2};$$

$$\text{sustituyo } F_1; ax + z + t = 1; ax + \left(-\frac{1}{a}\right) - 1 = 1; ax = 2 + \frac{1}{a} = \frac{1 + 2a}{a}; x = \frac{1 + 2a}{a^2}$$

$$x = \frac{1 + 2a}{a^2}; y = \frac{1}{a^2}; z = -\frac{1}{a}; t = -1;$$

33. Ejercicio

Discute y resuelve el sistema cuando sea compatible
$$\begin{cases} (a+1)x + y + z = a+1; \\ x + (a+1)y + z = a+3; \\ x + y + (a+1)z = -2a-4; \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} (a+1)x + y + z = a+1; \\ x + (a+1)y + z = a+3; \\ x + y + (a+1)z = -2a-4; \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3 + 1 + 1 - (a+1) - (a+1) - (a+1) =$$

$$(a+1)^3 + 2 - 3(a+1) = -(a+1) - (a+1) = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 3a - 1 =$$

$$a^3 + 3a^2 = 0; a^2(a+3) = 0 \text{ solución } a = 0 \text{ y } a = -3$$

Para $a \neq 0$ y $a \neq -3$, $\text{Rg}(A) = 3 = \text{Rg}(A^*)$ Sistema compatible determinado

Resolvemos por el método de Cramer

El valor de las incógnitas = $\frac{\text{determinante asociado de la variable}}{\text{determinante de los coeficientes de las incógnitas}}$

El valor de las variables es: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ a+3 & a+1 & 1 \\ -2a-4 & 1 & a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}} = \frac{(a+1)^3 + (a+3) - (2a+4) + (2a+4)(a+1) - (a+1) - (a+3)(a+1)}{a^2(a+3)}$$

$$x = \frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + a + 3 - 2a - 4 + 2a^2 + 6a + 4 - a - 1 - a^2 - 4a - 3}{a^2(a+3)} =$$

$$x = \frac{a^3 + 4a^2 + 3a}{a^2(a+3)} = \frac{a(a^2 + 4a + 3)}{a^2(a+3)} = \frac{(a+1)(a+3)}{a(a+3)} = \frac{(a+1)}{a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 1 \\ 1 & a+3 & 1 \\ 1 & -2a-4 & a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}} = \frac{(a+1)^2(a+3) + (a+1) - (2a+4) - (a+3) - (a+1)^2 + (a+1)(2a+4)}{a^2(a+3)}$$

$$y = \frac{a^3 + 5a^2 + 7a + 3 + a + 1 - 2a - 4 - a - 3 - a^2 - 1 - 2a + 2a^2 + 6a + 4}{a^2(a+3)}$$

$$y = \frac{a^3 + 6a^2 + 9a}{a^2(a+3)} = \frac{a(a^2 + 6a + 9)}{a^2(a+3)} = \frac{(a+3)^2}{a(a+3)} = \frac{a+3}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & a+1 \\ 1 & a+1 & a+3 \\ 1 & 1 & -2a-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}} = \frac{-(a+1)^2(2a+4) + (a+1) + (a+3) - (a+1)^2 + (2a+4) - (a+1)(a+3)}{a^2(a+3)}$$

$$z = \frac{-2a^3 - 8a^2 - 10a - 4 + a + 1 + a + 3 - a^2 - 1 - 2a + 2a + 4 - a^2 - 4a - 3}{a^2(a+3)}$$

$$z = \frac{-2a^3 - 10a^2 - 12a}{a^2(a+3)} = -\frac{2a^3 + 10a^2 + 12a}{a^2(a+3)} = -\frac{2a(a^2 + 10a + 6)}{a(a+3)} = -\frac{2a(a+3)(a+2)}{a(a+3)}$$

$$z = -\frac{2(a+2)}{a}$$

$$x = \frac{x+1}{a}; y = \frac{a+3}{a}; z = -\frac{2(a+2)}{a}$$

$$\text{Para } a = 0 \begin{cases} (a+1)x + y + z = a+1; \\ x + (a+1)y + z = a+3; \\ x + y + (a+1)z = -2a-4; \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \text{Rg}(A) = 2;$$

$$A^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 1 - 1 - 1 + 4 = 0; \text{Rg}(A^*) = 2;$$

$\text{Rg}(A) = 2 = \text{Rg}(A^*)$ sistema compatible indeterminado

$$\text{Para } a = -3 \begin{cases} (a+1)x + y + z = a+1; \\ x + (a+1)y + z = a+3; \\ x + y + (a+1)z = -2a-4; \end{cases} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0; \text{Rg}(A) = 2;$$

$$A^* = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 8 + 2 + 4 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 2 - 2 = 0; \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 - 4 - 2 = 0;$$

$\text{Rg}(A) = 2 = \text{Rg}(A^*)$ sistema compatible indeterminado

34. Ejercicio

Discute y resuelve segun los valores de los parametros, el sistema $\begin{cases} x - y - 2z = b; \\ x + y + z = 5; \\ 4x - 5y + az = -10; \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = b; \\ x + y + z = 5; \\ 4x - 5y + az = -10; \end{cases} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & a \end{vmatrix} = 2a - 4 + 10 + 8 + 10 + a = 3a + 24 = 0; a = -8;$$

Para $a \neq -8$; $\text{Rg}(A) = 3$ sistema compatible determinado

$$\text{para } a = 8; \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -8 \end{vmatrix} = -16 - 4 + 10 + 8 + 10 - 8 = 0; \text{Rg}(A) = 2;$$

$$\text{ampliada} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & -8 & -10 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 5 \\ -5 & -8 & -10 \end{vmatrix} = 10 - 8b + 50 + 5b - 20 - 40 = -3b;$$

para $b \neq 0$; $\text{Rg}(A^*) = 3$; incompatible;

para $b = 0$; $\text{Rg}(A^*) = 2$ Compatible indeterminado;

35. Ejercicio

Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \lambda x - \mu y = 1; \\ \lambda y - \mu z = r; \\ \mu x + \lambda z = s; \end{cases}$ Donde λ, μ, r, s son numeros reales

Estudia el sistema según los valores de los parametros sabiendo que $\lambda + \mu \neq 0$

Solución

$$\begin{cases} \lambda x - \mu y = 1; \\ \lambda y - \mu z = r; \\ \mu x + \lambda z = s; \end{cases} \begin{vmatrix} \lambda & -\mu & 0 \\ 0 & \lambda & -\mu \\ \mu & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \mu^3; \text{Si } \lambda + \mu \neq 0; \text{Rg}(A) = 3;$$

sistema compatible determinado, independiente de los valores de r y s

36. Ejercicio

Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ay + bx = c; \\ cx + az = b; \\ bz + cy = a; \end{cases}$ Donde a, b, c son datos x, y, z son incognitas;

Si a, b, c son distintos de 0 el sistema tiene una solución única. Hallar dicha solución

Solución

$$\begin{cases} ay + bx = c; \\ cx + az = b; \\ bz + cy = a; \end{cases} \quad \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -abc - abc = -2abc; \text{ dado que } a, b, c \neq 0; \text{ Rg}(A) = 3$$

sistema compatible determinado

Resolvemos por Cramer. El valor de las variables es: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix}} = \frac{a^3 - ab^2 - ac^2}{-2abc} = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ c & b & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix}} = \frac{b^3 - ba^2 - bc^2}{-2abc} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} b & a & c \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix}} = \frac{c^3 - ca^2 - cb^2}{-2abc} = \frac{-c^2 + a^2 + b^2}{2ab}$$

37. Ejercicio

Juan y Pedro invierten 20000€ cada uno. Juan coloca una cantidad A al 4%, una B al 5%

y el resto al 6%. Pedro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4%. determina

la cantidad B sabiendo que Juan obtiene unos intereses de 1050€ y Pedro 950€

Solución

$$\begin{cases} A + B + C = 20000 \\ 4\%A + 5\%B + 6\%C = 1050; \\ 5\%A + 6\%B + 4\%C = 950; \end{cases} \quad \begin{cases} A + B + C = 20000 \\ \frac{4A}{100} + \frac{5B}{100} + \frac{6C}{100} = 1050; \\ \frac{5A}{100} + \frac{6B}{100} + \frac{4C}{100} = 950; \end{cases} \quad \begin{cases} A + B + C = 20000 \\ 4A + 5B + 6C = 105000; \\ 5A + 6B + 4C = 95000; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 20000 \\ 4A + 5B + 6C = 105000; \\ 5A + 6B + 4C = 95000; \end{cases} \quad \begin{matrix} F_1 \\ F_2 = F_2 - 4F_1 \\ F_3 = F_3 - 5F_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} A + B + C = 20000 \\ 0 + B + 2C = 25000; \\ 0 + B - C = -5000; \end{cases} \quad \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = F_3 - F_2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 20000 \\ 0 + B + 2C = 25000; \\ 0 + 0 - 3C = -30000; \end{cases} \quad \begin{matrix} C = 10000; \text{ Sustituyo } F_2; B = 25000 - 2000 = 5000 \end{matrix}$$

Sustituyo F_1 ; $A + B + C = 20000$; $A = 20000 - 10000 - 5000 = 5000$;

Solución A = 5000; B = 10000; C = 5000;

38. Ejercicio

Un número capicúa de 5 cifras verifica:

- La suma de sus cifras es 9;
- La cifra de las centenas es igual a la suma de la de las unidades y las decenas.
- Si se intercambian las cifras de las unidades y las de las decenas el número resultante disminuye en 9

Encuentra el número

Solución

El número sería ABCBA encuentra el número

$$\begin{cases} A + B + C + B + A = 9 \\ C = A + B; \\ ABCBA = ABCAB + 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A + 2B + C = 9 \\ A + B - C = 0; \\ 10000A + 1000B + 100C + 10B + A = 10000A + 1000B + 100C + 10A + B + 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A + 2B + C = 9 \\ A + B - C = 0; \\ 9B - 9A = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 2A + 2B + C = 9 \\ A + B - C = 0; \\ -9A + 9B = 9; \end{cases} \quad v = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -9 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 9 + 18 + 9 + 18 = 54$$

Resolvemos por Cramer. El valor de las variables es: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 9 & 9 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -9 & 9 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-18 - 9 + 81}{54} = \frac{54}{54} = 1;$$

Despejo en F_3 ; $(-9A + 9B = 9)$; $-9A + 9B = 9$; $-9 + 9B = 9$; $B = \frac{18}{9} = 2$;

Despejo en F_2 ; $(A + B - C = 0)$; $1 + 2 = C$; $C = 3$;

El número pedido será 12321;

$$\text{Prueba} \begin{cases} 2A + 2B + C = 9; & 2 * 1 + 2 + 2 + 3 = 9; \text{ Ok} \\ A + B - C = 0; & 1 + 2 - 3 = 0; \text{ Ok} \\ 9B - 9A = 9; & 9 * 2 - 9 * 1 = 9; 18 - 9 = 9 \text{ Ok} \end{cases}$$

39. Ejercicio

En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de productos

a) El primer lote compuesto por :

una botella de refresco, tres bolsas de cacahuetes y siete vasos por 5,65€;

b) El segundo lote compuesto por:

una botella de refresco, cuatro bolsas de cacahuetes, y diez vasos por 7,40€

Averiguar cuánto tendría que valer un lote compuesto por 1 botella de refresco, una bolsa de cacahuetes y un vaso. Justifica la respuesta.

Solución

botella de refresco a x€; bolsa de cacahuete a y€; vaso. z€

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 3 \cdot y + 7 \cdot z = 5,65; \\ 1 \cdot x + 4 \cdot y + 10 \cdot z = 7,40; \\ 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = A; \end{cases} \begin{cases} x + 3y + 7z = 5,65; \\ x + 4y + 10z = 7,40; \\ x + y + z = A; \end{cases}$$

para que el sistema sea compatible determinado $Rg A = Rg(A^*)$

$$Rg A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 30 + 7 - 28 - 10 - 3 = 0;$$

$$Rg(A^*) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 5,65 \\ 1 & 4 & 10 & 7,40 \\ 1 & 1 & 1 & A \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5,65 & 3 & 7 \\ 7,40 & 4 & 10 \\ A & 1 & 1 \end{vmatrix} = 22,6 + 30A + 51,8 - 28A - 56,5 - 22,2 = 0$$

$$2A = 4,3; A = \frac{4,3}{2} = 2,15; \text{ El valor del lote} = 2,15$$

40. Ejercicio

Si la altura de Carlos aumentara el triple de la diferencia entre las alturas de Toni y Abel Carlos sería igual de alto que Abel. Las alturas de los tres sumarian 515.

Ocho veces la altura de Toni es lo mismo que nueve veces la de Carlos. Hallar las alturas

Solución

Altura de Toni = x; altura de Abel = y; altura de Carlos = z.

$$\begin{cases} z + 3(x - y) = y; \\ x + y + z = 515; \\ 8x = 9z; \end{cases} \begin{cases} z + 3x - 3y - y = 0; \\ x + y + z = 515; \\ 8x - 9z = 0; \end{cases} \begin{cases} 3x - 4y + zy = 0; \\ x + y + z = 515; \\ 8x - 9z = 0; \end{cases} \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -27 - 32 - 8 - 36 = 103$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 515 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & -9 \end{vmatrix}} = \frac{18540}{103} = 180$$

$$\text{Despejo en } F_3; (8x - 9z = 0); 8 \cdot 180 = 9z; z = \frac{1440}{9} = 160$$

$$\text{Despejo en } F_2; (x + y + z = 515); 180 + 160 + y = 515; y = 175;$$

Altura de Toni = x = 180; altura de Abel = y = 175; altura de Carlos = z = 160.

Altura de Toni = x = 180; altura de Abel = y = 175; altura de Carlos = z = 160

41. Ejercicio

Un pescadero compra el martes de una semana 96kg merluza, 130kg de anchoas y paga por ello 1836€. El Lunes siguiente el precio de la merluza subió un 20% y el de las anchoas un 30%. Ese día compra 40 kg de merluza y 50 kg de anchoas y paga 918€

¿ Hay datos para calcular el precio de la merluza y anchoas el martes?

Si es si calcula los precios , si es no razona la respuesta.

Solución

Martes: Precio de la merluza = x; precio de las anchoas = y

Lunes : Precio de la merluza 1,20x; precio de las anchoas = 1,3y

$$\begin{cases} 96x + 130y = 1836; \\ 40 \cdot 1,2x + 50 \cdot 1,3y = 918; \end{cases} \begin{cases} 96x + 130y = 1836; x = \frac{1836 - 130y}{96} \\ 48x + 65y = 918; x = \frac{918 - 65y}{48} \end{cases}$$

$$\frac{1836 - 130y}{96} = \frac{918 - 65y}{48}; 88128 - 6240y = 88128 - 6240y; y = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

El sistema es compatible indeterminado

Se podría haber deducido esto viendo que $F_1 = 2 F_2$;

42. Ejercicio

Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x \cos a + y \sin a = 1; \\ x \sin a - y \cos a = 1; \end{cases}$

a) Resuélvelo determinando el valor de x y y en función de a ;

b) calcula a para que $x + y = 1$;

Solución

$$\begin{cases} x \cos a + y \sin a = 1; x = \frac{1 - y \sin a}{\cos a}; \frac{1 - y \sin a}{\cos a} = \frac{1 + y \cos a}{\sin a}; \\ x \sin a - y \cos a = 1; x = \frac{1 + y \cos a}{\sin a} \end{cases}$$

$$\sin a - y \sin a^2 = \cos a + y \cos a^2; \sin a - \cos a = y \cos a^2 + y \sin a^2$$

$$\sin a - \cos a = y(\cos a^2 + \sin a^2); y = \sin a - \cos a;$$

$$\text{Sustituyo en } F_1 (x \cos a + y \sin a = 1); x \cos a + (\sin a - \cos a) \sin a = 1;$$

$$x \cos a + (\sin a^2 - \cos a \sin a) = 1; x = 1 - (\sin a^2 - \cos a \sin a) / \cos a$$

$$x = \frac{1 - \sin a^2 + \cos a \sin a}{\cos a}; \text{ dado que } (1 - \sin a^2) = \cos a^2 \text{ sustituyo}$$

$$x = \frac{\cos a^2 + \cos a \sin a}{\cos a} = \cos a + \sin a; x = \cos a + \sin a$$

b) calcula a para que $x + y = 1$; sustituyo, $\cos a + \sin a + \sin a - \cos a = 1$;

$$2 \sin a = 1; \text{ para que } \sin a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 30^\circ + 2k\pi \text{ y } a = 150^\circ + 2k\pi \Rightarrow a = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$a = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

43. Ejercicio

Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que cuando uno pierda una entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno de ellos tenga en ese momento. Cada uno perdió una partida y al final cada uno tenía 24€. ¿Cuanto dinero tenía cada jugador al empezar la partida.

Solución

$$\begin{cases} \text{primer jugador tenía } x \\ 2^\circ \text{ jugador } y \\ 3^\circ \text{ jugadores } z; \end{cases} \text{ primera partida pierde el } 1^\circ \begin{cases} x - y - z \\ 2y \\ 2z \end{cases}$$

$$2^\circ \text{ partida pierde el } 2^\circ \begin{cases} 2(x - y - z) \\ 2y - 2z - (x - y - z); \\ 4z \end{cases}$$

$$3^{\text{a}} \text{ partida pierde el } 3^{\text{o}} \begin{cases} 4(x-y-z) \\ 4y-4z-2(x-y-z) \\ 4z-2(x-y-z)-(2y-2z-(x-y-z)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(x-y-z) = 24 \\ 4y-4z-2(x-y-z) = 24 \\ 4z-2(x-y-z)-2y+2z+(x-y-z) = 24 \end{cases} \begin{cases} 4x-4y-4z = 24 \\ 4y-4z-2x+2y+2z = 24 \\ 4z-2x+2y+2z-2y+2z+x-y-z = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-4y-4z = 24 \\ -2x+6y-2z = 24 \\ -x-y+7z = 24 \end{cases} = \begin{cases} x-y-z = 6 \\ -x+3y-z = 12 \\ -x-y+7z = 24 \end{cases} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1 \end{matrix} \begin{cases} x-y-z = 6 \\ 0+2y-2z = 18 \\ 0-2y+6z = 30 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = F_3 + F_2 \end{matrix} \begin{cases} x-y-z = 6 \\ 0+2y-2z = 18 \\ 0+0+4z = 48; z = 12; \end{cases}$$

Sustituyo en $F_2(0+2y-2z=18); 0+2y-2*12=18; y=21$

Sustituyo en $F_1(x-y-z=6); x-21-12=6; x=39$

primer jugador tenia $x=39$;
 2^{o} jugador $y=21$;
 3^{o} jugados $z=12$;

Sustituyo

$$\begin{cases} \text{primer jugador tenia } x=39; \\ 2^{\text{o}} \text{ jugador } y=21; \\ 3^{\text{o}} \text{ jugados } z=12; \end{cases} \begin{matrix} \\ \text{primera partida pierde el } 1^{\text{o}} \\ \end{matrix} \begin{cases} 39-21-12=6; \\ 42 \\ 24 \end{cases}$$

$$2^{\text{a}} \text{ partida pierde el } 2^{\text{o}} \begin{cases} 6+6=12 \\ 42-6-24=12; \\ 24+24=48 \end{cases}$$

$$3^{\text{a}} \text{ partida pierde el } 3^{\text{o}} \begin{cases} 12+12=24 \\ 12+12=24; \text{ Ok} \\ 48-12-12=24 \end{cases}$$

44. Ejercicio

Dado el sistema $\begin{cases} x-1=4a+b; \\ y-2=3a-b \\ z=-a+2b; \end{cases}$ Eliminar los parametros

Solución

$$\begin{cases} x-1=4a+b; \\ y-2=3a-b \\ z=-a+2b; \end{cases} \begin{matrix} F_1 + F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{matrix} = \begin{cases} x-1+y-2=7a; \\ z-2y-4=-a+2b+6a-2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1+y-2=7a; \\ z-2y-4=5a \end{cases} \begin{matrix} 5F_1 - 7F_2; \\ 5x-5+5y-10-7z-14y+28=35a-35a \end{matrix}$$

$$5x-9y-7z+13=0;$$

45. Ejercicio

Dado el sistema $\begin{cases} x-y=3a+3; \\ 2x+y-z=3a+3b+1 \\ x-2y+z=-2a+5b-8; \end{cases}$ Eliminar los parametros

Solución

$$\begin{cases} x-y=3a+3; \\ 2x+y-z=3a+3b+1 \\ x-2y+z=-2a+5b-8; \end{cases} \begin{matrix} F_1 - F_2 \\ 3F_3 + 2F_2 \end{matrix} =$$

$$\begin{cases} x - y - 2x - y + z = 3a + 3 - 3a - 3b - 1 \\ 3x - 6y + 3z + 4x + 2y - 2z = -6a + 15b - 24 + 6a + 6b + 2; \\ \begin{cases} -x - 2y + z = -3b + 2; \\ 7x - 4y + z = 21b - 22; \end{cases} \{7F_1 + F_2 \\ 7x - 4y + z - 7x - 14y + 7z = 21b - 22 - 21b + 14; \quad -18y + 8z = -8; \end{cases}$$

46. Ejercicio

En el espacio la ecuacion de un plano viene dada por la expresion $x - 3y + z + 3 = 0$;

Demuestra que la ecuacion equivale a un sistema compatible indeterminado y biparametrico (con dos grados de libertad) y encuentra la solucion

Solución

Tenemos una ecuacion y tres incognitas luego el sistema será compatible indeterminado

Tenemos tres incognitas y una ecuacion, La solucion dependerá de dos parametros ($3 - 1$)

La solucion será la ecuacion parametrica del plano.

fijo dos variables $\begin{cases} x = ? \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ y despejo $x - 3y + z + 3 = 0$ $\begin{cases} x = -3 - \mu + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

47. Ejercicio

Encuentra la la ecuacion parametrica de la recta definida por la interseccion de dos planos

$$\begin{cases} x + y - z - 3 = 0; \\ 2x + 3z + 1 = 0 \end{cases};$$

Solución

Tenemos dos ecuaciones y tres incognitas $\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ 2x + 3z + 1 = 0 \end{cases}$ la ecuacion dependerá de un parametro $z = \lambda$

$$\begin{cases} x + y - \lambda - 3 = 0 \\ 2x + 3\lambda + 1 = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \text{ resolvemos las ecuaciones } \begin{cases} x + y - \lambda - 3 = 0 \\ 2x + 3\lambda + 1 = 0 \end{cases}$$

despejo $x = \frac{-1 - 3\lambda}{2}$ $\begin{cases} x + y - \lambda - 3 = 0 \\ x = \frac{-1 - 3\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$ sustituyo $y = \frac{1 + 3\lambda}{2} + \lambda + 3$;

$$\begin{cases} x = \frac{-1 - 3\lambda}{2} \\ y = \frac{1 + 3\lambda}{2} + \lambda + 3 \\ z = \lambda \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{-1 - 3\lambda}{2} \\ y = \frac{1 + 3\lambda + 2\lambda + 6}{2} \\ z = \lambda \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{-1 - 3\lambda}{2} \\ y = \frac{5\lambda + 7}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$$