

# Vectores en el espacio

## Contenido

|     |                                                        |    |
|-----|--------------------------------------------------------|----|
| 1   | VECTORES FIJOS Y LIBRES EN EL ESPACIO .....            | 2  |
| 1.1 | VECTORES FIJOS EN EL ESPACIO .....                     | 2  |
| 1.2 | EQUIPOLENCIA DE VECTORES FIJOS .....                   | 2  |
| 1.3 | VECTORES LIBRES EN EL ESPACIO .....                    | 2  |
| 2   | OPERACIONES CON VECTORES .....                         | 2  |
| 2.1 | SUMA DE VECTORES LIBRES .....                          | 2  |
| 2.2 | PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UN VECTOR .....         | 2  |
| 3   | COORDENADAS DE UN VECTOR .....                         | 3  |
| 4   | PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES .....                 | 9  |
| 4.1 | PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR .....                 | 9  |
| 5   | PRODUCTO VECTORIAL .....                               | 16 |
| 5.1 | PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL .....               | 16 |
| 5.2 | INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO VECTORIAL ..... | 16 |
| 6   | PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES .....                  | 20 |

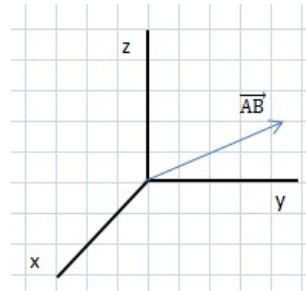
# 1 Vectores fijos y libres en el espacio

## 1.1 Vectores fijos en el espacio

Un vector fijo  $\overrightarrow{AB}$  es un segmento que tiene origen en un punto A y extremo en otro B.

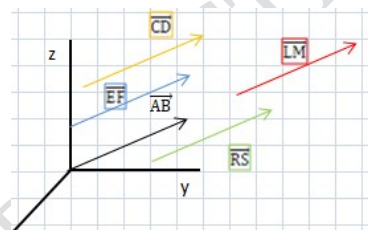
El vector  $\overrightarrow{AB}$  viene determinado por :

- Modulo: Es la longitud del segmento AB y se determina como  $|\overrightarrow{AB}|$
- Direccion: es la de la recta que lo contiene
- Sentido: es la direccion del segmento de A a B



## 1.2 Equipolencia de vectores fijos

Dos vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$  se dice que son equipotenciales si tienen el mismo modulo, direccion y sentido



## 1.3 Vectores libres en el espacio

Los **vectores libres** son aquellos que están totalmente especificados mediante su magnitud, su direcci3n y su sentido, sin que sea necesario indicar un punto de aplicaci3n

El conjunto de todos los vectores libres en el espacio se designan por  $V^3$

# 2 Operaciones con vectores

## 2.1 Suma de vectores libres

Dados dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  la suma de los vectores es igual a  $\vec{u} + \vec{v}$ ;

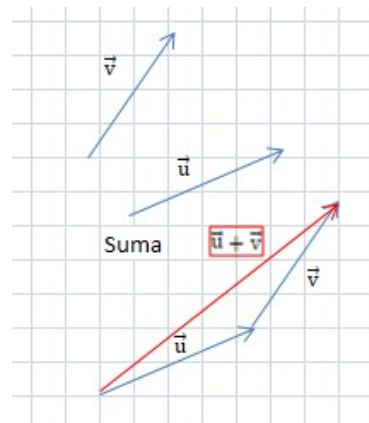
**Propiedades:**

Asociativa:  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Conmutativa:  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Elemento neutro:  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

Elemento opuesto:  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$



## 2.2 Producto de un n3mero real por un vector

Sea un n3mero real k y un vector  $\vec{u}$  su producto  $= k\vec{u}$

El modulo del vector resultante ser3 k  $|\vec{u}|$  y tendra la misma direccion y el sentido ser3 igual a  $\vec{u}$  si k es positivo y opuesto a  $\vec{u}$  si k es negativo

### 3 Coordenadas de un vector

Cualquier conjunto de tres vectores libres linealmente independientes forman una base del espacio vectorial  $V^3$

Cualquier vector  $\vec{a}$  se puede expresar como combinacion lineal de los vectores de la base

#### 1. Ejercicio

Estudiar la dependencia lineal de los vectores dados en una base  $V^3$

a)  $\vec{a} = (1,2,3)$ ;  $\vec{b} = (2,1,3)$ ;  $\vec{c} = (1,0,1)$

b)  $\vec{a} = (2,0,1)$ ;  $\vec{b} = (0,1,0)$ ;  $\vec{c} = (3,1,2)$

Solución

Tres vectores son linealmente independientes si el determinante de sus coordenadas es  $\neq 0$

a)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 - 3 - 4 = 0$  No son independientes ;  $C_3 = C_1 + C_2$

b)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$ ; Son independientes

#### 2. Ejercicio

Comprueba si forman base de  $V^3$  los vectores  $\vec{u}_1 = (1,0,-3)$ ;  $\vec{u}_2 = (1,-1,1)$ ;  $\vec{u}_3 = (0,2,-8)$

Solución

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 8 - 6 - 2 = 0$ ; No forman base  $V^3$  pues no son independientes

#### 3. Ejercicio

a) Comprueba que los vectores  $\vec{u}_1 = (2,1,0)$ ;  $\vec{u}_2 = (3,-1,0)$ ;  $\vec{u}_3 = (1,1,1)$ , expresados en una base B de  $V^3$  constituyen a su vez otra base de dicho espacio

b) Halla las coordenadas del vector  $\vec{v} = (3,1,7)$  dado en funcion de la base B, respecto a la nueva base  $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ,

Solución

a)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 30 - 5$ ; forman base  $V^3$  pues son independientes

b)  $(3,1,7) = a(2,1,0) + b(3,-1,0) + c(1,1,1) \begin{cases} 3 = 2a + 3b + c \\ 1 = a - b + c \\ 7 = 0 + 0 + c \end{cases}$

$\begin{cases} 3 = 2a + 3b + 7 \\ 1 = a - b + 7 \\ 7 = c \end{cases} \quad F_2 = 2F_2 - F_1 \quad \begin{cases} 3 = 2a + 3b + 7 \\ -1 = 0 - 5b + 7 \\ 7 = c \end{cases} \quad \begin{cases} -3 = 2a + 3b + 7 \\ b = \frac{8}{5} \\ 7 = c \end{cases}$

$3 = 2a + 3\frac{8}{5} + 7$ ;  $2a = \frac{15}{5} - \frac{24}{5} - \frac{35}{5}$ ;  $a = -\frac{44}{10} = -\frac{22}{5}$ ;

$\vec{v} = -\frac{22}{5}\vec{u}_1 + \frac{8}{5}\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$

4. **Ejercicio**

dados los vectores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  respecto a una base ortogonal son las siguientes  $\vec{u} = (1, 3, 4)$

$\vec{v} = (5, 1, 3), \vec{w} = (0, 1, 2)$  Calcular las siguientes expresiones

a)  $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}$  y  $\vec{v} + \vec{w}$ ; b)  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ ; c)  $2\vec{u}, 3\vec{v}, 5\vec{w}$ ;

d)  $2\vec{u} + 3\vec{v} + 5\vec{w}$ ; e)  $3\vec{u} - 6(2\vec{v} - 3\vec{w})$ ;

Solución

a)  $\vec{u} + \vec{v} = (1, 3, 4) + (5, 1, 3) = (6, 4, 7)$

$\vec{u} + \vec{w} = (1, 3, 4) + (0, 1, 2) = (1, 4, 6)$

$\vec{v} + \vec{w} = (5, 1, 3) + (0, 1, 2) = (5, 2, 5)$

b)  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ ;

$(\vec{u} + \vec{v}) = (1, 3, 4) + (5, 1, 3) = (6, 4, 7)$

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (6, 4, 7) + (0, 1, 2) = (6, 5, 9)$

c)  $2\vec{u}, 3\vec{v}, 5\vec{w}$ ;

$2\vec{u} = 2(1, 3, 4) = (2, 6, 8)$

$3\vec{v} = 3(5, 1, 3) = (15, 3, 9)$

$5\vec{w} = 5(0, 1, 2) = (0, 5, 10)$

d)  $2\vec{u} + 3\vec{v} + 5\vec{w}$ ;

$(2, 6, 8) + (15, 3, 9) + (0, 5, 10) = (17, 14, 27)$

e)  $3\vec{u} - 6(2\vec{v} - 3\vec{w})$

$3\vec{u} = 3(1, 3, 4) = (3, 9, 12)$

$6(2\vec{v} - 3\vec{w}) = 6(2(5, 1, 3) - 3(0, 1, 2)) = 6((10, 2, 6) - (0, 3, 6)) = 6(10, -1, 0) = (60, -6, 0)$

$3\vec{u} - 6(2\vec{v} - 3\vec{w}) = (3, 9, 12) - (60, -6, 0) = (-57, 15, 12)$

5. **Ejercicio**

Demuestra que el conjunto de vectores son linealmente independientes

$\vec{u} = (1, 0, 0); \vec{v} = (0, 1, 0), \vec{w} = (0, 0, 1)$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ Luego son linealmente independientes}$$

6. **Ejercicio**

a) determinar los valores de  $a$  para que resulten linealmente independientes los siguientes vectores

$\vec{u} = (-2, a, a); \vec{v} = (a, -2, a), \vec{w} = (a, a, -2)$

b) obten en esos casos una relación de dependencia entre los vectores

$\vec{u} = (-2, a, a)$

Solución

a)  $\begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = -8 + a^3 + a^3 + 2a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 2a^3 + 6a^2 - 8 = a^3 + 3a^2 - 4$

$$a^3 + 3a^2 - 4 = 0; \text{ una solución es } a = 1; \frac{a^3 + 3a^2 - 4}{a - 1} = a^2 + 4a + a = (a - 2)(a - 2);$$

$$a^3 + 3a^2 - 4 = (a - 1)(a - 2)^2;$$

para  $a = 1$  y  $a = 2$  los vectores son linealmente dependientes,

$$\text{Si } a = 1 \begin{cases} (-2, 1, 1) \\ (1, -2, 1) \\ (1, 1 - 2) \end{cases} F_1 = -(F_2 + F_3) \text{ linealmente dependientes}$$

$$\text{Si } a = -2 \begin{cases} (-2, -2, -2) \\ (-2, -2, -2) \\ (-2, -2 - 2) \end{cases} F_1 = F_2 = F_3 \text{ Los vectores son los tres iguales}$$

## 7. Ejercicio

a) Determinar si los vectores  $\vec{u}(1, 2, 3)$ ,  $\vec{v}(2, -1, 0)$  y  $\vec{w}(1, 1, 0)$  son una base de  $R^3$

b) Si es una base. Hallar las coordenadas del vector  $\vec{d}(2, 4, 6)$  en dicha base

Solución

Si estos vectores son una base en  $R^3$  han de cumplir:

1º Que los vectores sean linealmente independientes

2º Que sean conjunto de generadores

a) Determinar si los vectores  $\vec{u}(1, 2, 3)$ ,  $\vec{v}(2, -1, 0)$  y  $\vec{w}(1, 1, 0)$  son una base de  $R^3$

$$\text{Comprobamos si son linealmente independientes } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 + 3 = 9 \neq 0;$$

Como es distinto de 0 diremos que son linealmente independientes

Comprobamos si es un conjunto de generadores:

Son conjunto de generadores si cumple que cualquier vector  $\vec{d} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$

$(a, b, c) = x(1, 2, 3) + y(2, -1, 0) + z(1, 1, 0)$ ; desarrollamos

$$(a, b, c) = (x, 2x, 3x) + (2y, -y, 0) + (z, z, 0) = (x + 2y + z, (2x - y + z), (3x));$$

$$\text{Igualamos términos } \begin{cases} a = x + 2y + z \\ b = 2x - y + z \\ c = 3x; \end{cases} \begin{cases} a = x + 2y + z \\ b = 2x - y + z \\ x = \frac{c}{3}; \end{cases} \text{ sustituyo en } F_1 \text{ y } F_2$$

$$\begin{cases} a = \frac{c}{3} + 2y + z \\ b = \frac{2c}{3} - y + z \end{cases} \text{ sustituyo en } F_2 \quad z = b - \frac{2c}{3} + y;$$

$$\text{sustituyo en } F_1; a = \frac{c}{3} + 2y + z \Rightarrow a = \frac{c}{3} + 2y + b - \frac{2c}{3} + y \Rightarrow a = \frac{c}{3} + \frac{6y}{3} + \frac{3b}{3} - \frac{2c}{3} + \frac{3y}{3}$$

$$3a = 9y - c + 3b; 9y = 3a + c - 3b; y = \frac{3a + c - 3b}{9};$$

$$\text{solucion } \begin{cases} x = \frac{c}{3} \\ y = \frac{3a + c - 3b}{9} \\ z = b - \frac{2c}{3} + y; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{c}{3} \\ y = \frac{3a + c - 3b}{9} \\ z = \frac{9b}{9} - \frac{6c}{9} + \frac{3a + c - 3b}{9} = \frac{6b + 3a - 5c}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{c}{3} \\ y = \frac{3a + c - 3b}{9} \\ z = \frac{3a + 6b - 5c}{9} \end{cases}$$

b) Si es una base. Hallar las coordenadas del vector  $\vec{d}(2,4,6)$  en dicha base

$$\text{sustituimos } \begin{cases} x = \frac{c}{3} \\ y = \frac{3a + c - 3b}{9} \\ z = \frac{3a + 6b - 5c}{9} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{6}{3} \\ y = \frac{3 \cdot 2 + 6 - 3 \cdot 4}{9} \\ z = \frac{3 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 5 \cdot 6}{9} \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{0}{9} \\ z = \frac{0}{9} \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \vec{g}(2,0,0)$$

Otra forma es resolverlo directamente  $(a, b, c) = x(1,2,3) + y(2, -1,0) + z(1,1,0)$ ;

$$(2,4,6) = x(1,2,3) + y(2, -1,0) + z(1,1,0) = (a, b, c) = (x, 2x, 3x) + (2y, -y, 0) + (z, z, 0)$$

$$(2,4,6) = ((x + 2y + z), (2x - y - z), (3x)); \text{ igualamos terminos } \begin{cases} 2 = x + 2y + z \\ 4 = 2x - y - z \\ 6 = 3x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = x + 2y + z \\ 4 = 2x - y - z \\ x = 2, \end{cases} \text{ sustituyo en } F_1 \text{ y } F_2 \begin{cases} 2 = 2 + 2y + z \\ 4 = 2 \cdot 2 - y - z; \end{cases} \begin{cases} 0 = 2y + z \\ 0 = -y - z; \end{cases} \text{ sumamos } 0 = y;$$

$$\text{Sustituyo en } F_1 \Rightarrow 2 = 2 + 0 + z; z = 0; \vec{g}(2,0,0)$$

## 8. Ejercicio

$$\text{Dada la base del espacio vectorial } V^3 B = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \left( 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \left( \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right) \right]$$

referenciada a una base ortonormal, comprueba si es normal, ortogonal u ortonormal

Solución

Una base es normal si sus módulos son igual a 1

Son ortogonales si sus vectores son perpendiculares.

Son ortonormales si son normales y ortogonales; (son perpendiculares y su módulo es 1)

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5} + 0 + \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1;$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{0 + \frac{4}{5} + \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1;$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{1}{5} + 0} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1$$

la base es normada

Comprobamos si son ortogonales  $\vec{u} * \vec{v} = 0$ ;

$$\left( \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) * \left( 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \left( 0, 0, \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{5}} \right) = \frac{2}{5} \neq 0 \text{ no son}$$

### 9. Ejercicio

Se consideran los vectores de  $V^3 \vec{u} = (0,0,1); \vec{v} = (\sin t, \cos t, 0)$  encuentra, si es posible un tercer vector  $\vec{w} = (a, b, c)$  que forme con ellos una base ortonormal

Solución

Tres vectores son linealmente independientes si el determinante de sus coordenadas es  $\neq 0$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix} = 0; b \sin t - a \cos t = 0; (-\cos t, \sin t, 0)$$

comprobamos si la base es normada

$$|\vec{u}| = \sqrt{(0)^2 + 0^2 + (1)^2} = 1;$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + (\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{0 + 1} = 1;$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-\cos t)^2 + (\sin t)^2 + 0} = \sqrt{1 + 0} = 1$$

La base es ortonormada

### 10. Ejercicio

Dados los vectores  $\vec{u} = (1,1,1); \vec{v} = (0,1,-1) \vec{w} = (1,1,0)$  de  $V^3$

a) ¿Son linealmente independientes?

b) Hallar un vector  $\vec{z}$  tal que  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  y  $\vec{z}$  sean linealmente dependientes

c) Halla si es posible un vector  $\vec{t}$ , tal que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$  sean una base en  $V^3$

Solución

a) ¿Son linealmente independientes?

Tres vectores son linealmente independientes si el determinante de sus coordenadas es  $\neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 1 = -1 \text{ son linealmente independientes}$$

b) Hallar un vector  $\vec{z}$  tal que  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  y  $\vec{z}$  sean linealmente dependientes

Para que sea linealmente dependiente debe ser un vector combinación de los otros tres

$$\vec{z} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}; \vec{z} = (2,3,0);$$

c) Halla si es posible un vector  $\vec{t}$ , tal que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$  sean una base en  $V^3$

$$\vec{t} \text{ debe ser un vector tal que } \vec{t}(a, b, c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & b & c \end{vmatrix} \neq 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = c - a - a + b \neq 0;$$

por ejemplo podría ser  $a = 1, b = -1; c = 1; c - a - a + b$  sustituyo  $1 - 1 - 1 - 1 = -1;$

### 11. Ejercicio

a) Estudia si los vectores  $\vec{u} = (2,1,-1); \vec{v} = (1,-1,1)$  son linealmente independientes

b) Escribe la relación que deben verificar las coordenadas de un vector  $\vec{w} = (a, b, c)$  para que sean combinación lineal de  $\vec{u}, \vec{v}$

Solución

a) Estudia si los vectores  $\vec{u} = (2,1,-1); \vec{v} = (1,-1,1)$  son linealmente independientes

Son linealmente independientes pues no hay ninguna relación de proporcionalidad

entre ellos

b) Escribe la relacion que deben verificar las coordenadas de un vector  $\vec{w} = (a, b, c)$  para que sean combinacion lineal de  $\vec{u}, \vec{v}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2c - b + a - a - c - 2b = -3c - 3b = 0; c = -b;$$

a puede tener cualquier valor, b = cualquier numero real y c = -b;  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & b & -b \end{vmatrix}$

## 12. Ejercicio

Dados los vectores del espacio vectorial  $V^3$ ;  $\vec{a} = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{b} = (0, 2, -1)$  y  $\vec{c} = (2, -2, -1)$

a) Hallar una base del espacio S engendrado por  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

b) Encontrar el valor de  $\lambda$ , si existe, para que el vector  $(\lambda, \lambda, -6)$  pertenezca a S

c) halla el vector de  $V^3$  que junto con la base de S obtenida anteriormente sea una base de  $R^3$

Solución

a) Hallar una base del espacio S engendrado por  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

La condicion para que tres vectores formen un base es que sean linealmente independientes

Si son linealmente independientes su determinante será distinto de 0;

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 4 = 0 \text{ no son linealmente independientes, son dependientes}$$

Si consideramos el espacio S = plano XY formaran una base si:

1º los dos vectores son linealmente independientes

2º son un sistema generador de S

Tomo los vectores  $\vec{a} = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{b} = (0, 2, -1)$  que son independientes pues sus coordenadas no son proporcionales.

Son un sistema generador de S dado que un vector generico de S puedo ponerlo como

combinacion de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ ;  $\vec{v} = x(1, 0, -1) + y(0, 2, -1)$ ;

b) Encontrar el valor de  $\lambda$ , si existe, para que el vector  $(\lambda, \lambda, -6)$  pertenezca a S

sustituimos  $\vec{v} = x(1, 0, -1) + y(0, 2, -1)$ ;  $(\lambda, \lambda, -6) = x(1, 0, -1) + y(0, 2, -1)$ ;

$(\lambda, \lambda, -6) = (x, 0, -x) + (0, 2y, -1y) = (x, 2y, -x - y)$ :

$$\text{igualo los terminos} \begin{cases} \lambda = x; \\ \lambda = 2y; \\ -6 = -x - y; \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{\lambda}{2} \\ -6 = -x - y \end{cases} \text{ sustituyo en la 3ª ecuacion}$$

$$-6 = -\lambda - \frac{\lambda}{2}; -6 = -\frac{3\lambda}{2}; \lambda = 4;$$

c) halla el vector de  $V^3$  que junto con la base de S obtenida anteriormente sea una base de  $R^3$

Valdria cualquier vector  $\vec{d}$  que cumpla junto a los vectores  $\vec{a}, \vec{b}$  con

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0; \text{ ejemplo } \vec{d} = (1, 0, 0); \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2;$$

## 4 Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es igual al producto de sus módulos por

el cos del ángulo que forman.  $\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$  ;

$$\cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|}; \alpha = \arccos \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|}$$



$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \Rightarrow \vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}|$$

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \Rightarrow \vec{u} * \vec{v} = |\vec{v}| * |\vec{u}|$$

$$\text{proyeccion de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v}; |\vec{v}| = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}|}$$

$$\text{proyeccion de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u}; |\vec{u}| = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

El producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por el módulo de la proyección del otro sobre el primero

**El módulo de un vector  $\vec{u} = (a, b, c)$  es  $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$**

### 4.1 Propiedades del producto escalar

$$\vec{u} * \vec{u} = |\vec{u}| * |\vec{u}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{u}} = |\vec{u}| * |\vec{u}| * \cos 0 = |\vec{u}| * |\vec{u}| = |\vec{u}|^2 \geq 0;$$

*Conmutativa*

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = |\vec{v}| * |\vec{u}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \Rightarrow \vec{u} * \vec{v} = \vec{v} * \vec{u}$$

*Homogenea*

$$k(\vec{u} * \vec{v}) = k\vec{u} * \vec{v} = k\vec{v} * \vec{u};$$

*Distributiva*

$$\vec{u} * (\vec{v} * \vec{w}) = \vec{u} * \vec{v} + \vec{u} * \vec{w};$$

#### **Propiedades**

*Producto escalar de dos vectores paralelos (forman un ángulo 0;  $\cos 0 = 1$ ):*

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}; \vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos 0 \Rightarrow \vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}|$$

Dos vectores son paralelos cuando son proporcionales

Para hallar un vector paralelo a otro vector es suficiente con multiplicarlo por un escalar

**Dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son paralelos si  $\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y}$  ;  $u_x * v_y = u_y * v_x$**

**Bases especiales:**

**Base Ortogonal:** Una base se dice que es ortogonal si sus vectores son perpendiculares

$$|\vec{u}| * |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 0;$$

**Base normada:** Una base se dice que es normada si los vectores que la forman son unitarios

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1;$$

**Base ortonormal :** Una base se dice que es ortonormal si es a la vez ortogonal y normada.

### 13. Ejercicio

Sean los vectores  $\vec{a} = (2, -3, 0)$ ;  $\vec{b} = (1, 2, 4)$ ,  $\vec{c} = (0, -5, -2)$ . Haz las siguientes operaciones

a)  $3\vec{a} - 2\vec{b}$  ; b)  $2\vec{a} - 3\vec{c} + 5\vec{b}$ ; c)  $\vec{a} * \vec{b}$ ; d)  $\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c})$ ; e)  $(\vec{a} + \vec{b}) * (\vec{a} - \vec{b})$ ;

f)  $(2\vec{a} + 4\vec{c}) * (\vec{c} - \vec{b})$  g)  $\vec{a} * \vec{b} + \vec{b} * \vec{c} + \vec{c} * \vec{a}$ ; h)  $(\vec{c} - \vec{a})^2 + (\vec{b} - \vec{a})^2$

Solución

$$a) 3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(2, -3, 0) - 2(1, 2, 4) = (6, -9, 0) - (2, 4, 8) = (4, -13, -8)$$

$$b) 2\vec{a} - 3\vec{c} + 5\vec{b} = 2(2, -3, 0) - 3(0, -5, -2) + 5(1, 2, 4) = (4, -6, 0) - (0, -15, -6) + (5, 10, 20) \\ (4, 9, 6) + (5, 10, 20) = (9, 19, 26)$$

$$c) \vec{a} * \vec{b} = (2, -3, 0) * (1, 2, 4) = 2 - 6 + 0 = -4;$$

$$d) \vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = (2, -3, 0) * ((1, 2, 4) + (0, -5, -2)) = (2, -3, 0) * (1, -3, 2) = 3 + 9 + 0 = 12$$

$$e) (\vec{a} + \vec{b}) * (\vec{a} - \vec{b}) = ((2, -3, 0) + (1, 2, 4))((2, -3, 0) - (1, 2, 4)) = (3, -1, 4) * (1, -5, -4) = \\ 3 + 5 - 16 = -8;$$

$$f) (2\vec{a} + 4\vec{c}) * (\vec{c} - \vec{b}) = (2(2, -3, 0) + 4(0, -5, -2)) * ((0, -5, -2) - (1, 2, 4)) \\ ((4, -6, 0) + (0, -20, -8)) * (-1, -7, -6) = (4, -26, -8) * (-1, -7, -6) = -4 + 182 + 48 = 226$$

$$g) \vec{a} * \vec{b} + \vec{b} * \vec{c} + \vec{c} * \vec{a} = (2, -3, 0) * (1, 2, 4) + (1, 2, 4) * (0, -5, -2) + (0, -5, -2) * (2, -3, 0) = \\ (2 - 6 + 0) + (0 - 10 - 8) + (0 + 15 + 0) = -4 - 18 + 15 = -7$$

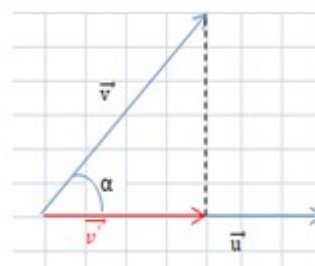
$$h) (\vec{c} - \vec{a})^2 + (\vec{b} - \vec{a})^2 = (\vec{c} - \vec{a}) * (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} - \vec{a}) * (\vec{b} - \vec{a}) = \\ = ((0, -5, -2) - (2, -3, 0)) * ((0, -5, -2) - (2, -3, 0)) + ((1, 2, 4) - (2, -3, 0)) * ((1, 2, 4) - (2, -3, 0)) \\ = (-2, -2, -2) * (-2, -2, -2) + (-1, +5, 4) * (-1, +5, 4) = (4 + 4 + 4) + (+1 + 25 + 16) \\ = 12 + 42 = 54$$

### 14. Ejercicio

Calcula el valor de m para que el modulo de la proyeccion del vector  $\vec{a}(m, 1, 1)$  sobre la direccion del vector  $\vec{b} = (5, 0, -2)$  sea igual a 2:

Solución

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \Rightarrow \vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}|$$



$$|\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}|};$$

$$\text{La proyeccion} = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{(m, 1, 1) * (5, 0, -2)}{\sqrt{5^2 + 0^2 + (-2)^2}} = 2$$

$$\frac{5m + 0 - 2}{\sqrt{25 + 4}} = \frac{5m - 2}{\sqrt{29}} = 2; \quad m = \frac{\pm 2\sqrt{29} + 2}{5}$$

#### 15. Ejercicio

Halla en cada caso el valor de b para que los vectores dados sean perpendiculares entre si

a)  $\vec{u} = (6, 0, -7); \vec{v} = (b, 1 + b, 3)$

b)  $\vec{u} = (5 + b, -4, 2b); \vec{v} = (0, 2 - b, 4)$

c)  $\vec{u} = (b, -1 + b, -3); \vec{v} = (b, 2, b)$

Solución

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}; \text{ Si los vectores son perpendiculares } \cos 90 = 0; \Rightarrow |$$

$$\vec{u} * \vec{v} = 0;$$

a)  $\vec{u} = (6, 0, -7); \vec{v} = (b, 1 + b, 3); \vec{u} * \vec{v} = (6, 0, -7) * (b, 1 + b, 3) = 0;$

$$6b + 0 - 21 = 0; b = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

b)  $\vec{u} = (5 + b, -4, 2b); \vec{v} = (0, 2 - b, 4) = (5 + b, -4, 2b) * (0, 2 - b, 4) = 0$

$$0 - 8 + 4b + 8b = 0; 12b = 8; b = \frac{3}{2};$$

c)  $\vec{u} = (b, -1 + b, -3); \vec{v} = (b, 2, b); (b, -1 + b, -3) * (b, 2, b)$

$$b^2 - 2 + 2b - 3b = 0; b^2 - b - 2 = 0; b = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 * 1 * -2}}{2}$$

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}; b = 2 \text{ y } b = -1;$$

#### 16. Ejercicio

Calcula el trabajo realizado por una fuerza  $\vec{f} (2, 3, 1)$  Newton al producir en un movil un desplazamiento dado por el vector  $\vec{d} (3, 4, 5)$  m estando los valores referenciados a una base ortogonal

Solución

**Trabajo =  $\vec{F} * \vec{e}$ ; Trabajo en Julios ; fuerza Newtons y distancia metros;**

$$T = \vec{f} * \vec{d} = (2, 3, 1) * (3, 4, 5) = 6 + 12 + 5 = 23 \text{ Julios}$$

#### 17. Ejercicio

Dos fuerzas  $\vec{f}_1$  y  $\vec{f}_2$  tienen 5 y 2 N de intensidad, respectivamente; el angulo que forman es de  $60^\circ$

Halla el producto escalar de ambas fuerzas.

Solución

$$\vec{f}_1 * \vec{f}_2 = |\vec{f}_1| * |\vec{f}_2| * \cos \widehat{\vec{f}_1, \vec{f}_2} = 5 * 2 \cos 60^\circ = 10 * 0,5 = 5$$

### 18. Ejercicio

Halla el ángulo que forman las fuerzas  $\vec{f}_1$  (2,3,4)N y  $\vec{f}_2$  (1,5,2)N. Calcula el trabajo que realiza la fuerza  $\vec{f}_1 + \vec{f}_2$  al producir en un cuerpo un desplazamiento dado por el vector  $\vec{d} = (2,3,6)$

Solución

$$\vec{f} * \vec{d} = |\vec{f}_1| |\vec{f}_2| \cos \widehat{\vec{f}_1, \vec{f}_2}; \cos \widehat{\vec{f}_1, \vec{f}_2} = \frac{\vec{f}_1 * \vec{f}_2}{|\vec{f}_1| |\vec{f}_2|} = \frac{(2,3,4) * (1,5,2)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} \sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2}} =$$

$$\frac{2 + 15 + 8}{\sqrt{4 + 9 + 16} \sqrt{1 + 25 + 4}} = \frac{25}{\sqrt{29} * \sqrt{30}} = \frac{25}{\sqrt{870}} = \frac{25}{29,49576} = 0,847579;$$

$$\cos \widehat{\vec{f}, \vec{d}} = 0,847579; \arccos 0,847579; \text{ángulo} = 32.05064264^\circ$$

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = (2,3,4) + (1,5,2) = (3,8,6)\text{N}$$

$$T = \vec{f} * \vec{d} = (3,8,6) * (2,3,6) = 6 + 24 + 36 = 66 \text{ Julios}$$

### 19. Ejercicio

Sea  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dos vectores tales que  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 25$ ;  $(\vec{u} - \vec{v})^2 = 9$ ;

Calcula el producto escalar  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

Solución

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = 25; \sqrt{(\vec{u} + \vec{v})^2} = \sqrt{25}; (\vec{u} + \vec{v}) = 5; \vec{u} + \vec{v} = 5$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = 9; \sqrt{(\vec{u} - \vec{v})^2} = \sqrt{9}; (\vec{u} - \vec{v}) = 3; \vec{u} - \vec{v} = 3$$

$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = 5 \\ \vec{u} - \vec{v} = 3 \end{cases} \text{ sumo } F_1 \text{ y } F_2 \Rightarrow 2\vec{u} = 8; \vec{u} = 4; \vec{v} = 1$$

$$\vec{u} * \vec{v} = 4 * 1 = 4;$$

### 20. Ejercicio

En una base ortonormal los vectores  $\vec{u}$  (1,2,3) y  $\vec{v}$  (2,-1,4) calcular:

a) Su producto escalar

b) El módulo de cada vector

c) El ángulo que forman los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

d) El valor de m para que el vector  $\vec{w}$  (0,3,m) sea ortogonal al vector  $\vec{v}$

Solución

$$\text{a) Su producto escalar; } \vec{u} * \vec{v} = (1,2,3) * (2,-1,4) = 2 - 2 + 12 = 12;$$

$$\text{b) El módulo de cada vector } |\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14};$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

c) El ángulo que forman los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}; \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|} = \frac{12}{\sqrt{14} * \sqrt{21}} =$$

$$\cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{12}{17,1464281994} = 0,699855; \text{ángulo} = 45.5846914 = 45^\circ 35' 4,89''$$

d) El valor de m para que el vector  $\vec{w}$  (0,3,m) sea ortogonal al vector  $\vec{v}$

$$\vec{u} * \vec{v} = (2,-1,4)(0,3,m) = 0 - 3 + 4m; m = \frac{3}{4} \text{ es ortogonal}$$

### 21. Ejercicio

Hallar los valores de x e y para que el vector  $(x, y, 1)$  sea ortogonal a los vectores  $(3, 2, 0)$  y  $(2, 1, 1)$

Solución

Para que sea perpendicular a los dos ha de cumplirse  $\begin{cases} (3, 2, 0) * (x, y, 1) = 0 \\ (2, 1, 1) * (x, y, 1) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 0 = 0; F_1 \\ 2x + y - 1 = 0; F_2 = 2F_2 - F_1 \end{cases} \begin{cases} 3x + 2y + 0 = 0; \\ x + 0 - 2 = 0; \end{cases} \begin{matrix} x = 2; y = -3; (2, -3, 1) \end{matrix}$$

### 22. Ejercicio

Hallar la proyección del vector  $\vec{u} (2, 1, 3)$  sobre el vector  $\vec{v} (-3, 4, 2)$  dados respecto a una base ortogonal

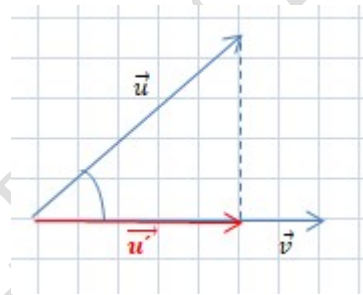
Solución

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \Rightarrow \vec{u} * \vec{v} = |\vec{v}| * |\vec{u}'|$$

$$|\vec{u}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{v}|};$$

$$\text{La proyección} = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(2, 1, 3) * (-3, 4, 2)}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 2^2}}$$

$$\text{La proyección} = \frac{-6 + 4 + 6}{\sqrt{9 + 16 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$



### 23. Ejercicio

Dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son tales que  $|\vec{a}| = 10$ ,  $|\vec{b}| = 10\sqrt{3}$  y  $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$ .

Hallar el ángulo que forman los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$

Solución

sea  $\vec{a} (a_1, a_2, a_3)$ ;  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 10$ ;  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 100$

sea  $\vec{b} (b_1, b_2, b_3)$ ;  $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = 10\sqrt{3}$ ;  $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 100 * 3 = 300$ ;

sumamos  $(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + (a_3^2 + b_3^2) = 400$ ;

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3);$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2} = 20; (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 = 400;$$

$$\begin{cases} (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + (a_3^2 + b_3^2) = 400 \\ (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 = 400 \end{cases}$$

$$a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2 = a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_2b_2 + a_3^2 + b_3^2 + 2a_3b_3$$

Para que esto se cumpla  $2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = 0$ ;

dado que  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \vec{a} * \vec{b} = 0$ ;

$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a}, \vec{b}}$ ; Para que  $\vec{a} * \vec{b} = 0$  los vectores han de ser perpendiculares

#### 24. Ejercicio

Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dos vectores tales que  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 25$  y  $(\vec{u} - \vec{v})^2 = 9$ ;

Calcula el producto escalar de  $\vec{u} * \vec{v}$

Solución

$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\vec{v} = 25 \\ (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}\vec{v} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\vec{v} = 25 \\ \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}\vec{v} = 9 \end{cases} \text{ resto } 4\vec{u}\vec{v} = 16; \vec{u}\vec{v} = 4;$$

#### 25. Ejercicio

Demuestra que si  $\vec{e}$  y  $\vec{e'}$  son vectores del mismo modulados, vectores  $\vec{e} + \vec{e'}$  y  $\vec{e} - \vec{e'}$  son ortogonales

Solución

$$\text{sea } \vec{e} (e_1, e_2, e_3); |\vec{e}| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2} \text{ y } |\vec{e'}| = \sqrt{e'_1{}^2 + e'_2{}^2 + e'_3{}^2}$$

$$\text{Si tienen el mismo modulo } \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2} = \sqrt{e'_1{}^2 + e'_2{}^2 + e'_3{}^2}; \Rightarrow$$

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = e'_1{}^2 + e'_2{}^2 + e'_3{}^2; e_1^2 - e'_1{}^2 + e_2^2 - e'_2{}^2 + e_3^2 - e'_3{}^2 = 0;$$

Por otro lado

$$(\vec{e} + \vec{e'}) = (e_1 + e'_1), (e_2 + e'_2), (e_3 + e'_3)$$

$$(\vec{e} - \vec{e'}) = (e_1 - e'_1), (e_2 - e'_2), (e_3 - e'_3)$$

$$(\vec{e} + \vec{e'}) * (\vec{e} - \vec{e'}) = (e_1 + e'_1)(e_1 - e'_1) + (e_2 + e'_2)(e_2 - e'_2) + (e_3 + e'_3)(e_3 - e'_3) = e_1^2 - e'_1{}^2 + e_2^2 - e'_2{}^2 + e_3^2 - e'_3{}^2 \text{ y esto segun se ha demostrado es igual a } 0;$$

Por lo que queda demostrado que los vectores  $(\vec{e} + \vec{e'})$  y  $(\vec{e} - \vec{e'})$  son ortogonales

#### 26. Ejercicio

Sea  $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ y } \vec{u}_3)$  una base tal que

$$a) |\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = |\vec{u}_3| = 2;$$

$$b) \widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2} = \widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_3} = \widehat{\vec{u}_2, \vec{u}_3} = 60^\circ$$

Calcula el modulo de  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$

Solución

Buscamos una método en base a las propiedades del producto escalar que nos permita despejar el modulo  $\vec{u}_1^2 = |\vec{u}_1||\vec{u}_1|$

$$\vec{u} * \vec{u} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3)(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) = \vec{u}_1\vec{u}_1 + \vec{u}_1\vec{u}_2 + \vec{u}_1\vec{u}_3 + \vec{u}_2\vec{u}_1 + \vec{u}_2\vec{u}_2 + \vec{u}_2\vec{u}_3 + \vec{u}_3\vec{u}_1 + \vec{u}_3\vec{u}_2 + \vec{u}_3\vec{u}_3; \text{ segun la propiedad conmutativa } \vec{u}_1\vec{u}_2 = \vec{u}_2\vec{u}_1 \dots \dots$$

$$\vec{u}^2 = \vec{u}_1^2 + \vec{u}_2^2 + \vec{u}_3^2 + 2\vec{u}_1\vec{u}_2 + 2\vec{u}_1\vec{u}_3 + 2\vec{u}_2\vec{u}_3;$$

$$\vec{u}_1^2 = |\vec{u}_1||\vec{u}_1| = 2 * 2 = 4; \vec{u}_1\vec{u}_2 = |\vec{u}_1||\vec{u}_2| \cos 60 = 2 * 2 * 0,5 = 2$$

$$\vec{u}^2 = |\vec{u}||\vec{u}| = |\vec{u}|^2 = 4 + 4 + 4 + 2 * 2 + 2 * 2 + 2 * 2 = 24;$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{24};$$

## 27. Ejercicio

a) ¿Puede haber dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  tal que  $\vec{u} * \vec{v} = -3$  y  $|\vec{u}| = 1$  y  $|\vec{v}| = 2$ ?

b) ¿Que se puede decir del angulo de dos vectores que verifiquen  $|\vec{u} * \vec{v}| = |\vec{u}| * |\vec{v}|$ ?

Justifica la respuesta.

Solución

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}; \text{ sustituimos } -3 = 1 * 2 \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}; \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = -\frac{3}{2} = -1,5;$$

No puede ser pues los valores del cos de un angulo estan entre  $-1, 1$

b) ¿Que se puede decir del angulo de dos vectores que verifiquen  $|\vec{u} * \vec{v}| = |\vec{u}| * |\vec{v}|$ ?

$|\vec{u} * \vec{v}|$  Dado que el producto escalar es un numero esto se refiere al valor absoluto de producto del producto escalar.

Para que se cumpla esta igualdad el cos del angulo que forman los vectores  $= 1$ ;

$$|\vec{u} * \vec{v}| = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}; |\vec{u} * \vec{v}| = |\vec{u}| * |\vec{v}| * 1;$$

Si el coseno vale 1 estaremos hablando de un angulo de  $0^\circ$  ó  $180^\circ$

## 28. Ejercicio

Dados los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  tales que  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 1$  y  $|\vec{c}| = 4$  y  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ ;

Calcular la la siguiente suma de de productos escalares  $\vec{a} * \vec{b} + \vec{b} * \vec{c} + \vec{a} * \vec{c}$

Solución

Buscamos una método en base a las propiedades del producto escalar que nos permita

despejas el modulo  $\vec{u}_1^2 = |\vec{u}_1| |\vec{u}_1|$

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0; \text{ pues } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$$

$$0 = \vec{a} * \vec{a} + \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c} + \vec{b} * \vec{a} + \vec{b} * \vec{b} + \vec{b} * \vec{c} + \vec{c} * \vec{a} + \vec{c} * \vec{b} + \vec{c} * \vec{c} =$$

$$0 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} * \vec{b} + 2\vec{a} * \vec{c} + 2\vec{b} * \vec{c} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c} + \vec{b} * \vec{c});$$

$$(\vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c} + \vec{b} * \vec{c}) = \frac{-(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2)}{2} = -\frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2}{2} = -\frac{3 * 3 + 1 * 1 + 4 * 4}{2}$$

$$(\vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c} + \vec{b} * \vec{c}) = -\frac{26}{2} = -13; (\vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c} + \vec{b} * \vec{c}) = -13$$

## 29. Ejercicio

¿Puede ser el modulo de la suma de dos vectores de modulos 10 y 5 mayor que 15?

¿y menor que 4?

Solución

$$\text{Sabemos que } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} * \vec{b}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 10^2 + 5^2 + 2(\vec{a} * \vec{b}) = 125 + 2(|\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos \widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 125 + 2(50 \cos \widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 125 + 100 \cos \widehat{\vec{a}, \vec{b}}; \text{ Los valores que puede tener un coseno es entre } -1 \text{ y } 1$$

$$\begin{cases} \text{para coseno} = -1; |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 125 - 100 = 25 & |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{25} = 5 \\ \text{para coseno} = 1; |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 125 + 100 = 225 & |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{225} = 15 \end{cases}$$

Dado que el modulo de un vector siempre ha de ser positivo

El valor  $|\vec{a} + \vec{b}|$  estará entre 5 y 15  $\Rightarrow$  No puede ser mayor de 15 ni menor que 4

## 5 Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores  $\vec{a} \times \vec{b}$  da como resultado otro vector  $\vec{c}$

Modulo del vector  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{a}| * |\vec{b}| \sin \widehat{\vec{a}, \vec{b}}$ ;

Dirección del vector  $\vec{c}$  es perpendicular a  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$

Sentido del vector  $\vec{c}$ : aplicamos el sentido de la mano derecha

Dados los vectores  $\vec{a} (a_1, a_2, a_3)$  y el vector  $\vec{b} (b_1, b_2, b_3)$  su producto vectorial será

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

### 5.1 Propiedades del producto vectorial

No cumple la propiedad conmutativa  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Homogenea:  $(k \vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (k \vec{b})$

Distributiva:  $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$

### 5.2 Interpretación geométrica del producto vectorial

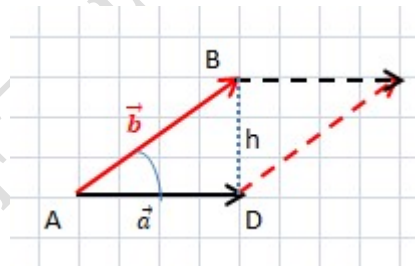
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| * |\vec{b}| \sin \widehat{\vec{a}, \vec{b}}$$

$$|\vec{b}| \sin \widehat{\vec{a}, \vec{b}} = h$$

Area del paralelogramo = base \* altura

$$\text{Area} = |\vec{a}| * h = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

El modulo de producto vectorial  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  representa el area del paralelogramo definido por los vectores



#### 30. Ejercicio

Encuentra un vector ortogonal a los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  cuya coordenadas respecto de una base ortogonal son  $\vec{u} (-1,3,5)$  y  $\vec{v} (4,0,-5)$

Solución

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -15\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 5\mathbf{k} - 12\mathbf{k} = -15\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 12\mathbf{k} \Rightarrow (-15, 15, -12)$$

#### 31. Ejercicio

Halla el area del paralelogramo que tiene por lados los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AD}$  de la figura, sabiendo que  $|\vec{AD}| = 4$ ;

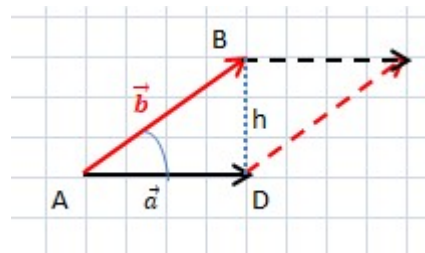
Solución

$$|\vec{AD}| = 4; \text{ La altura} = 3;$$

$$\text{area} = 4 * 3 = 12u^2;$$

Si calculamos el modulo del producto vectorial  $\vec{a} (4,0,0)$  y  $\vec{b} (4,3,0)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 12\mathbf{k} - 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} - 0\mathbf{k} = 12\mathbf{k} \text{ el modulo} = 12u^2;$$



### 32. Ejercicio

Si los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  tienen la misma dirección

a) ¿Como será su producto escalar?

b) ¿Como será su producto vectorial?

Solución

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \text{al tener la misma dirección}$

el ángulo que forman será  $0^\circ$  o  $180^\circ \Rightarrow \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 1$  o  $-1$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm |\vec{u}| |\vec{v}|$  siendo positivo o negativo

b) ¿Como será su producto vectorial?

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$

el ángulo que forman será  $0^\circ$  o  $180^\circ \Rightarrow \sin \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 0$  en vector será  $(0,0,0)$

### 33. Ejercicio

Calcula las coordenadas de un vector  $\vec{a}$  de módulo 5 que sea perpendicular al mismo tiempo a los vectores  $\vec{b} (2, -3, 0)$  y  $\vec{c} (1, -4, 1)$  expresado en la misma base ortonormal que  $\vec{a}$

Solución

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = -3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 8\mathbf{k} + 0\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

El vector perpendicular a  $(\vec{b}$  y  $\vec{c})$

será  $(-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$

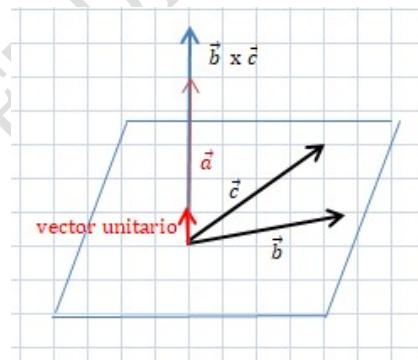
Hallo el **vector unitario** del perpendicular hallado = 
$$\frac{-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-5)^2}}$$

$$\frac{-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}}{\sqrt{9 + 4 + 25}} = \frac{-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}}{\sqrt{38}};$$

como el vector  $\vec{a}$  ha de ser perpendicular a  $(\vec{b} \times \vec{c})$  y su módulo ha de ser 5  $\Rightarrow$

que el vector  $|\vec{a}|$  pedido será = 
$$5 \frac{-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}}{\sqrt{38}} = \left( -\frac{15}{\sqrt{38}}\mathbf{i} - \frac{10}{\sqrt{38}}\mathbf{j} - \frac{25}{\sqrt{38}}\mathbf{k} \right)$$

$$\vec{a} = -\frac{15}{\sqrt{38}}\mathbf{i} - \frac{10}{\sqrt{38}}\mathbf{j} - \frac{25}{\sqrt{38}}\mathbf{k}$$



### 34. Ejercicio

Dados los vectores  $\vec{u} (3,1,-1)$  y  $\vec{v} (2,3,4)$  determinar :

- Los módulos de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$
- producto vectorial de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$
- Un vector unitario perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$
- El area del paralelogramo que tiene por lado los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

Solución

- Los módulos de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

- producto vectorial de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k} + 3\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = 7\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

- Un vector unitario perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

$\vec{u} \times \vec{v} = 7\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$  este vector  $\vec{w}$  es perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

$$\text{vector unitario de } |\vec{w}| = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{7\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}}{\sqrt{7^2 + (-14)^2 + 7^2}} = \frac{7\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}}{\sqrt{49 + 196 + 49}} = \frac{7\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}}{\sqrt{294}} =$$

$$\frac{7\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}}{7\sqrt{6}} = \frac{\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{6}} = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{6}}, \frac{-2\mathbf{j}}{\sqrt{6}}, \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{6}}; |\vec{w}| = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{6}}, \frac{-2\mathbf{j}}{\sqrt{6}}, \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$$

- El area del paralelogramo que tiene por lado los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 7\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}; \text{ area del paralelogramos } |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + (-14)^2 + 7^2} = \sqrt{294}u^2$$

### 35. Ejercicio

Calcular razonadamente un vector unitario en el espacio euclideo, que sea perpendicular simultaneamente a los vectores  $\vec{v} (1,2,3)$   $\vec{w} (1,1,-2)$ ;  $\vec{u} (0,1,5)$

Solución

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 3 - 10 + 2 = 0; \text{ no son linealmente independientes}$$

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{w} = (1,2,3) - (1,1,-2) = (0,1,5) = \vec{u}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} - 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = -7\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\text{vector unitario de } |\vec{w}| = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{v} \times \vec{w}|} = \frac{-7\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{(-7)^2 + 5^2 + (-1)^2}} = \frac{-7\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{49 + 25 + 1}} = \frac{-7\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{75}}$$

$$|\vec{w}| = \frac{-7\mathbf{i}}{\sqrt{75}}, \frac{5\mathbf{j}}{\sqrt{75}}, \frac{-\mathbf{k}}{\sqrt{75}}$$

### 36. Ejercicio

Dados los vectores  $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  y  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ , hallar el producto  $\vec{u} \times \vec{v}$  y comprueba que este vector es ortogonal a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

Halla el vector  $\vec{u} \times \vec{v}$  y comparalo con  $\vec{v} \times \vec{u}$

Solución

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 9\vec{k} + 3\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}$$

Si son perpendiculares  $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$ ; si son perpendiculares,  $\cos 90 = 0$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (2, -1, -7)(3, -1, +1) = 6 + 1 - 7 = 0;$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = (2, -1, -7)(2, -3, +1) = 4 + 3 - 7 = 0;$$

Halla el vector  $\vec{u} \times \vec{v}$  y comparalo con  $\vec{v} \times \vec{u}$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j} + 9\vec{k} = -2\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k};$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) = 2\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}; (\vec{v} \times \vec{u}) = -2\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k} \Rightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

$$= -15\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k} - 12\vec{i} + 10\vec{j} + 3\vec{k} = -27\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$$

### 37. Ejercicio

Halla el vector perpendicular a  $\vec{u} = (2, 3, 4)$  y  $\vec{v} = (-1, 3, -5)$  y que tenga por modulo 5

Solución

$$\text{Un vector perpendicular a los dos será } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{w} = -15\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k} - 12\vec{i} + 10\vec{j} + 3\vec{k} = -27\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k};$$

$$\text{vecttario de } |\vec{w}| = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{v} \times \vec{w}|} = \frac{-27\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}}{\sqrt{(-27)^2 + 6^2 + 9^2}} = \frac{-27\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}}{\sqrt{729 + 36 + 81}} = \frac{-27\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}}{\sqrt{846}}$$

$$\text{como se pide que el modulo ha de ser 5; Vector pedido} = 5 * \left( \frac{-27\vec{i}}{\sqrt{846}}, \frac{+6\vec{j}}{\sqrt{846}}, \frac{+9\vec{k}}{\sqrt{846}} \right)$$

### 38. Ejercicio

Halla el volumen del paralelepipedo cuyas aristas son los vectores  $\vec{u} = (2, 1, 0)$  y

$$\vec{j} = (0, 1, 0); \vec{v} = (3, 2, 1)$$

Solución

$$[\vec{u}, \vec{j}, \vec{v}] = \det(\vec{u}, \vec{j}, \vec{v}) = |[\vec{u}, \vec{j}, \vec{v}]| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2^2$$

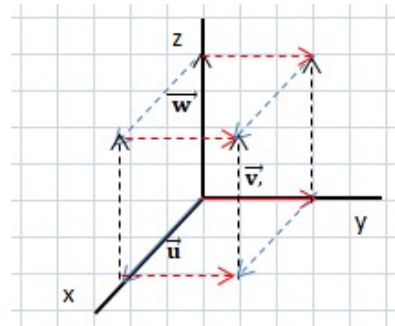
## 6 Producto mixto de tres vectores

El producto mixto de tres vectores

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w});$$

El producto mixto de tres vectores es igual al volumen del paralelepipedo

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$



### 39. Ejercicio

Halla el volumen del paralelepipedo determinado por los vectores

$$\vec{u} = (3, 0, -2), \vec{v} = (1, 1, 3), \vec{w} = (-1, 3, 2)$$

Solución

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = |6 - 6 - 2 - 27| = |-29| = 29$$

### 40. Ejercicio

a) Calcular el producto mixto de los vectores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  cuyas coordenadas respecto a una base ortogonal son  $\vec{u} = (1, 2, 3), \vec{v} = (4, 5, 6), \vec{w} = (7, 8, 9)$

b) A partir del resultado obtenido anteriormente, ¿se puede afirmar algo sobre la dependencia e independencia lineal de  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

Solución

$$a) |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - 105 - 72 - 48 = 0;$$

b) Los vectores son linealmente dependientes

### 41. Ejercicio

Considera los vectores de  $\mathbb{R}^3$   $\vec{u} = (1, 0, -1), \vec{v} = (\lambda, -1, 0), \vec{w} = (0, \lambda, -1)$

a) Para que valores de  $\lambda$  son linealmente dependientes

b) Determinar en este caso  $x, y$  de forma que sean  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ;

Solución

Para que sean linealmente independientes su determinante será distinto de 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 = 0; \lambda = \pm 1;$$

para valores de  $\lambda = \pm 1$  los vectores son linealmente dependientes

b) Determinar en este caso  $x, y$  de forma que sean  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ;

Para  $\lambda = 1$ ; sustituyo en la ecuación  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ;  $(0, 1, -1) = x(1, 0, -1) + y(1, -1, 0)$

$$(0, 1, -1) = x(1, 0, -1) + y(1, -1, 0) = (x, 0, -x) + (y, -y, 0) = ((x + y), (-y), (-x))$$

$$\text{Igualo terminos } (0, 1, -1) = ((x + y), (-y), (-x)); \begin{cases} 0 = x + y \\ 1 = -y \\ -1 = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; y = -1 \end{cases}$$

Para  $\lambda = -1$ ; sustituyo en la ecuacion  $\vec{w} = x\vec{w} + y\vec{w}$ ;  $(0, \lambda, -1) = x(1, 0, -1) + y(\lambda, -1, 0)$   
 $(0, -1, -1) = x(1, 0, -1) + y(-1, -1, 0) = (x, 0, -x) + (-y, -y, 0) = ((x-y), (-y), (-x))$

Igualo terminos  $(0, -1, -1) = ((x-y), (-y), (-x))$ ;  $\begin{cases} 0 = x - y \\ -1 = -y \\ -1 = -x \end{cases}$   $x = 1; y = 1$

#### 42. Ejercicio

En el vertice de un cubo se aplican tres fuerzas dirigidas segun las diagonales de las tres caras que pasan por dicho vertice. Los modulos de estas fuerzas son 1,2,3

Hallar el modulo de la fuerza resultante

Solución

Vector unitario de la dirección de  $\vec{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

Vector unitario  $\vec{u} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}$

Vector unitario de la dirección de  $\vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Vector unitario  $\vec{v} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0}} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$

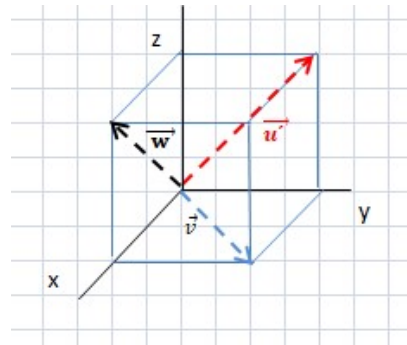
Vector unitario de la dirección de  $\vec{w} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$ ; Vector unitario  $\vec{w} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{1^2+0+1^2}} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$

$\vec{u} = 3 \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{(0,3,3)}{\sqrt{2}}$ ;  $\vec{v} = 2 \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \frac{(2,2,0)}{\sqrt{2}}$ ;  $\vec{w} = 1 \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$

Vector suma de las tres fuerzas  $\vec{R} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \frac{(0,3,3)}{\sqrt{2}} + \frac{(2,2,0)}{\sqrt{2}} + \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = \frac{(3,5,4)}{\sqrt{2}}$

El valor de la fuerza resultante  $= |\vec{R}| = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+25+16}{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}}$

$|\vec{R}| = \sqrt{2 * \frac{25}{2}} = \sqrt{25} = 5$ ;  $|\vec{R}| = 5$



#### 43. Ejercicio

Sean  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  tres vectores linealmente independientes, indica cual de los siguientes productos mixtos vale 0

Solución

a)  $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}]$

b)  $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}]$

c)  $[\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}]$

Solución

Si  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  son linealmente independientes constituirán una base donde  $\vec{a} = (1,0,0)$ ;

$\vec{b} = (0,1,0)$ ;  $\vec{c} = (0,0,1)$

a)  $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = [(1,0,0) + (0,0,1), (1,0,0) - (0,0,1), (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1)] =$

$$[(1,0,1), (1,0,-1), (1,1,1)];$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \Rightarrow$$

$$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = [(1,0,1), (1,0,-1), (1,1,1)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$b) [\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = [(1,0,0) + (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0) + (0,1,0)] = [(1,0,1), (0,1,0), (1,1,0)]$$

$$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = [(1,0,1), (0,1,0), (1,1,0)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;$$

$$c) [\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}] = [(1,0,0) - (0,0,1), (0,1,0) - (0,0,1), (0,0,1) - (1,0,0)] \\ = [(1,0,-1), (0,1,-1), (-1,0,1)]$$

$$[\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}] = [(1,0,-1), (0,1,-1), (-1,0,1)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0;$$

#### 44. Ejercicio

Dados los vectores  $\vec{u} = (1, -1, 2)$ ,  $\vec{v} = (3, 1, -1)$ , hallar el conjunto de vectores que siendo perpendiculares a  $\vec{u}$  se pueden escribir como combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

Solución

Si un vector  $(x, y, z)$  es combinación de otros dos  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  se ha de cumplir  $(x, y, z) = a(1, -1, 2) + b(3, 1, -1)$

$x = a + 3b$ ;  $y = -a + b$ ;  $z = 2a - b$ ; el conjunto de vectores serán  $(a + 3b, -a + b, 2a - b)$

Si estos vectores son perpendiculares a  $\vec{u}$  se ha de cumplir que su producto escalar será  $= 0$ ;

$$(a + 3b, -a + b, 2a - b)(1, -1, 2) = 0; (a + 3b) - (-a + b) + 4a - 2b = 0;$$

$$a + 3b + a - b + 4a - 2b = 0; 6a + 0 = 0; a = 0; \text{ el conjunto de vectores serán } (3b, b, -b)$$

#### 45. Ejercicio

Dados los vectores del espacio vectorial  $V^3$ ;  $\vec{a} = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{b} = (0, 2, -1)$  y  $\vec{c} = (2, -2, -1)$

a) Hallar una base del espacio S engendrado por  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

b) Encontrar el valor de  $\lambda$ , si existe, para que el vector  $(\lambda, \lambda, -6)$  pertenezca a S

c) halla el vector de  $V^3$  que junto con la base de S obtenida anteriormente sea una base de  $R^3$

Solución

a) Hallar una base del espacio S engendrado por  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

La condición para que tres vectores formen una base es que sean linealmente independientes

Si son linealmente independientes su determinante será distinto de 0;

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 4 = 0 \text{ no son linealmente independientes, son dependientes}$$

Si consideramos el espacio  $S = \text{plano XY}$  formarán una base si:

1º los dos vectores son linealmente independientes

2º son un sistema generador de S

Tomo los vectores  $\vec{a} = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{b} = (0, 2, -1)$  que son independientes pues sus coordenadas no son proporcionales.

Son un sistema generador de S dado que un vector generico de S puedo ponerlo como combinacion de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  ;  $\vec{v} = x(1,0,-1) + y(0,2,-1)$ ;

b) Encontrar el valor de  $\lambda$ , si existe, para que el vector  $(\lambda, \lambda, -6)$  pertenezca a S  
 sustituimos  $\vec{v} = x(1,0,-1) + y(0,2,-1)$ ;  $(\lambda, \lambda, -6) = x(1,0,-1) + y(0,2,-1)$ ;  
 $(\lambda, \lambda, -6) = (x, 0, -x) + (0, 2y, -1y) = (x, 2y, -x - y)$ :

igualo los terminos  $\begin{cases} \lambda = x; \\ \lambda = 2y; \\ -6 = -x - y; \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{\lambda}{2} \\ -6 = -x - y \end{cases}$  sustituyo en la 3ª ecuacion

$$-6 = -\lambda - \frac{\lambda}{2}; -6 = -\frac{3\lambda}{2}; \lambda = 4;$$

c) halla el vector de  $V^3$  que junto con la base de S obtenida anteriormente sea una base de  $R^3$

Valdria cualquier vector  $\vec{d}$  que cumpla junto a los vectores  $\vec{a}$  ,  $\vec{b}$  con

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0; \text{ ejemplo } \vec{d} = (1,0,0); \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2;$$