

Geometría Analítica

Contenido

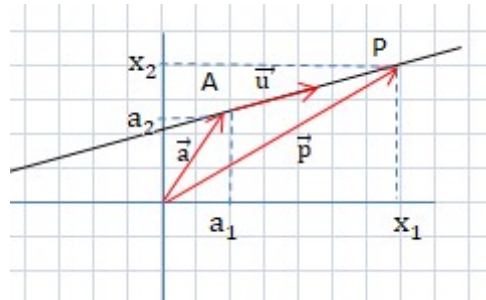
1	ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA	2
1.1	ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA	2
1.2	ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA.....	2
1.3	ECUACIÓN CONTINUA DE LA RECTA.....	2
1.4	ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA	2
1.5	RECTA PARALELAS A LOS EJES DE COORDENADAS.....	2
2	ECUACIÓN EXPLÍCITA DE LA RECTA	5
3	POSICIONES RELATIVAS DE LAS RECTAS.....	8
4	DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.....	10
5	DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA	11
6	DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS.....	11
7	ÁNGULOS ENTRE RECTAS.....	14
8	PUNTOS Y RECTAS SIMÉTRICOS	15
8.1	SIMETRÍA CENTRAL DE UN PUNTO	15
8.2	SIMETRÍA AXIAL.....	16
9	LUGARES GEOMÉTRICOS	19
9.1	MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO:.....	19
9.2	BISECTRIZ DE UN ÁNGULO:	20

1 Ecuación general de la recta

1.1 Ecuación vectorial de la recta

Una recta queda determinada por su vector director y un punto perteneciente a la misma

$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda \vec{u} \text{ donde } \lambda \in \mathbb{R}$$



1.2 Ecuaciones paramétricas de la recta

Se halla sustituyendo $\vec{p}$, $\vec{a}$ y $\vec{u}$ por sus coordenadas

$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda \vec{u}; (x_1, x_2) = (a_1, a_2) + \lambda(u_1, u_2) \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda u_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda u_2 \end{cases} \text{ donde } \lambda \in \mathbb{R}$$

1.3 Ecuación continua de la recta

Se halla despejando λ en las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda u_1; \lambda = \frac{x_1 - a_1}{u_1} \\ x_2 = a_2 + \lambda u_2; \lambda = \frac{x_2 - a_2}{u_2} \end{cases}; \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2}$$

1.4 Ecuación general de la recta

Se obtiene de la ecuación continua $\frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2}; u_2(x_1 - a_1) = u_1(x_2 - a_2)$

$$u_2 x - u_2 a_1 = u_1 y - u_1 a_2; (x_1 = x; x_2 = y); u_2 x - u_2 a_1 - u_1 y + u_1 a_2 = 0$$

$$u_2 x - u_1 y + u_1 a_2 - u_2 a_1 = 0$$

Hacemos un cambio de variables $A = u_2; B = -u_1; C = u_1 a_2 - u_2 a_1$

$$Ax + By + C = 0$$

A partir de la ecuación general de la recta se puede obtener el vector director y todos los puntos de la misma.

1.5 Recta paralelas a los ejes de coordenadas

Paralela al eje x el vector director será (0, y)

$$Ax + By + C = 0; \Rightarrow By + C = 0; y = k;$$

Paralela al eje y el vector director será (x, 0)

$$Ax + By + C = 0; \Rightarrow Ax + C = 0; x = k;$$

1. Ejercicio

Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa A (-2,3) y tiene como vector director $\vec{u}$ (3, -1). Comprueba si los puntos P(4,1) y Q(7,1) pertenecen a la recta

Solución

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda u_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda u_2 \end{cases}; \text{sustituimos valores } \begin{cases} x = -2 + \lambda \cdot 3 \\ y = 3 + \lambda(-1) \end{cases}; \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$$

$$\text{Compruebo si P (4,1) pertenece sustituyo } \begin{cases} 4 = -2 + 3\lambda; \lambda = \frac{6}{3} = 2; \\ 1 = 3 - \lambda; \lambda = 2 \end{cases} \text{ pertenece a la recta}$$

$$\text{Compruebo si Q (7,1) pertenece sustituyo } \begin{cases} 7 = -2 + 3\lambda; \lambda = \frac{9}{3} = 3; \\ 1 = 3 - \lambda; \lambda = 2 \end{cases} \text{ No pertenece a la recta}$$

2. Ejercicio

Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa P (-2,6) y tiene como vector director $\vec{u}$ (0, -3). Comprueba si los puntos P(-2,3) y Q(2, -3) pertenecen a la recta y halla dos puntos de la recta

Solución

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda u_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda u_2 \end{cases}; \text{sustituimos valores } \begin{cases} x = -2 + \lambda \cdot 0 \\ y = 6 + \lambda(-3) \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 - 3\lambda \end{cases}$$

$$\text{Compruebo si P (-2,3) pertenece sustituyo } \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 - 3\lambda \end{cases}; \begin{cases} -2 = -2 \\ 3 = 6 - 3\lambda; \lambda = 1; \end{cases} \text{ pertenece;}$$

$$\text{Compruebo si Q (2, -3) pertenece sustituyo } \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 - 3\lambda \end{cases}; \begin{cases} 2 = -2; 0 = 4 \\ -3 = 6 - 3\lambda; \lambda = 3; \end{cases} \text{ No pertenece;}$$

$$1^\circ \text{ punto de la recta para } \lambda = 1 \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 - 3\lambda \end{cases} \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 - 3; y = 3 \end{cases}$$

$$2^\circ \text{ punto de la recta para } \lambda = 2 \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 - 3\lambda \end{cases} \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 - 6; y = 0 \end{cases}$$

3. Ejercicio

Calcula las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes y que pasan por el punto A (-3,5)

Solución

La recta paralela al eje OX, que pasa por el punto, P(-3,5), y su vector director es $\vec{u}$ (1,0)

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \end{cases}; \text{sustituimos valores } \begin{cases} x = -3 + \lambda \cdot 1 \\ y = 5 + \lambda \cdot 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 5 \end{cases}$$

La recta paralela al eje OY, que pasa por el punto, P(-3,5), y su vector director es $\vec{u}$ (0,1)

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \end{cases}; \text{sustituimos valores } \begin{cases} x = -3 + \lambda \cdot 0 \\ y = 5 + \lambda \cdot 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 + \lambda \end{cases}$$

4. Ejercicio

Indica dos puntos y el vector director de la recta r: $8x + y = 7$;

Solución

$$Ax + By + C = 0; 8x + y = 7;$$

$$\text{Hacemos un cambio de variables } A = u_2; B = -u_1; C = u_1 a_2 - u_2 a_1$$

$$u_1 = -1; u_2 = 8; \Rightarrow \vec{u}(-1, 8)$$

$$8x + y = 7; y = 7 - 8x; \text{ doy valores a } x \text{ y hallo valor de } y \text{ (0,7) (2,-9)}$$

x	y
0	7
2	-9

5. Ejercicio

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2, -1) B(3, k) y C(1, -4)

Solución

Si ha de pasar por A y C, El vector director será $\vec{u}(1 - 2, -4 - (-1))$; $\vec{u}(-1, -3)$

Para calcular la recta tomo el vector director y un punto cualquiera

$$\frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2}; \Rightarrow \frac{x_1 - 2}{-1} = \frac{x_2 - (-1)}{-3}; \frac{x_1 - 2}{-1} = \frac{x_2 + 1}{-3}; \frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 1}{-3}$$

$$(x - 2)(-3) = -y - 1; -3x + 6 = -y - 1; 3x - y = 7;$$

Si la recta ha de pasar por B(3, k) se ha de cumplir $3x - y = 7$; $3 * 3 - k = 7$; $k = 2$;

Comprobamos el punto C(1, -4) $3x - y = 7$; $3 * 1 - (-4) = 7$;

Comprobamos el punto A(2, -1) $3x - y = 7$; $3 * 2 - (-1) = 7$;

6. Ejercicio

Halla el valor de K para que la recta $(k + 5)x - (3 + k)y = 1 - k$ pase por P(2, 3)

Solución

Si ha de pasar por P(2, 3) sustituyo en la ecuación $(k + 5)x - (3 + k)y = 1 - k$

$$(k + 5)2 - (3 + k)3 = 1 - k; 2k + 10 - 9 - 3k = 1 - k; 2k - 3k + k = 1 + 9 - 10; k = 0;$$

sustituyo el valor de k y la recta será $(k + 5)x - (3 + k)y = 1 - k$; $5x - 3y = 1$;

Comprobamos el punto C(2, 3) $5x - 3y = 1$; $5 * 2 - 3 * 3 = 1$;

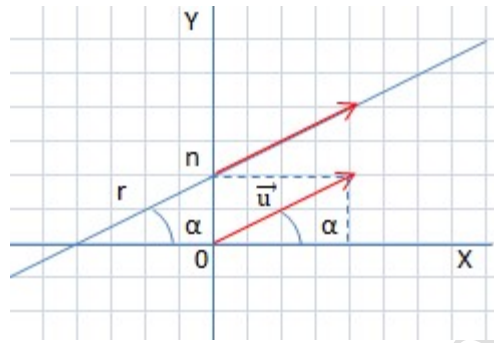
2 Ecuación explícita de la recta

Dada la ecuación general de la recta

$Ax + By + C = 0$ despejamos y para obtener la ecuación explícita de la recta;

$$y = \frac{-C - Ax}{B} = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B};$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = mx + n; \quad y = mx + n;$$



dado que $A = u_2; B = -u_1; -\frac{A}{B} = -\frac{u_2}{u_1}; m = \text{tangente de ángulo } \alpha = \frac{u_2}{u_1}$

$$C = u_1 a_2 - u_2 a_1 \Rightarrow n = -\frac{C}{B} = -\frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{-u_1} = \frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{u_1} =$$

$$\frac{u_1 a_2 - u_2 a_1}{u_1} = \frac{u_1 a_2}{u_1} - \frac{u_2 a_1}{u_1} = a_2 - m a_1; \quad n = a_2 - m a_1$$

Si tomo un punto en el eje y será del tipo (a_1, a_2) al estar en el eje y $a_2 = 0$;

$$\Rightarrow n = a_2 - m a_1; \quad n = a_2$$

En la ecuación explícita de la recta $y = mx + n$;

$m = \tan \alpha$; $n = a_2$ punto en que la recta corta al eje y;

7. Ejercicio

Indica el vector director y otro normal de la recta $-3x + 2y - 4 = 0$;

Solución

La ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$; donde $A = u_2; B = -u_1$;

$-3x + 2y - 4 = 0$; el vector director $\vec{u} = (u_1, u_2)$; $\vec{u} = (-2, -3)$

el vector director normal será un vector perpendicular $\vec{v} = (u_1, u_2)$; $\vec{v} = (3, -2)$

8. Ejercicio

Hallar el vector director y otro normal de la recta que pasa $A(-2, \frac{1}{3})$

y por el origen de coordenadas

Solución

Para calcular la recta tomo el vector director y un punto cualquiera

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} \Rightarrow \text{sustituyo } \frac{x - 0}{-2} = \frac{y - 0}{1/3}; \frac{1}{3}x = -2y; \frac{1}{3}x + 2y = 0;$$

Vector director $\vec{u} = (-2, 1/3)$

Vector normal $\vec{u} = (\frac{1}{3}, 2)$

9. Ejercicio

Hallar la ecuación general de la recta r que tiene como vector normal $\vec{n} = (2, -3)$ y pasa por el punto $A(-1, 2)$

Solución

si tiene como vector normal $\vec{n} = (2, -3)$, su vector director será $\vec{u} = (3, 2)$

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} \Rightarrow \text{sustituyo } \frac{x - (-1)}{3} = \frac{y - 2}{2}; \frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{2}; 2(x + 1) = 3(y - 2)$$

$$2x + 2 = 3y - 6; \quad 2x - 3y + 8 = 0;$$

10. Ejercicio

Hallar la ecuación perpendicular a $3x - 6y = 1$ y que pasa por $A(-3, 2)$

Solución

El vector director de la recta $3x - 6y = 1$ es $\vec{u} = (6, 3)$. El vector normal será $\vec{n} = (-3, 6)$.

La recta pedida será $Ax + By + C = 0$ sustituyo $6x + 3y + C = 0$;

Si ha de pasar por $A(-3, 2)$ sustituyo en $6x + 3y + C = 0$

$$6 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + C = 0; \quad -18 + 6 + C = 0; \quad C = 12;$$

$$\text{la recta pedida será } 6x + 3y + 12 = 0;$$

11. Ejercicio

Hallar la ecuación perpendicular a

$5x + 4y - 3 = 0$ y que corta a la recta

$$6(x - 1) - (y - 1) = 0 \text{ en } x = 1;$$

Solución

La recta perpendicular a $5x + 4y - 3 = 0$, será a $4x - 5y + C = 0$;

$$6(x - 1) - (y - 1) = 0;$$

$$6x - 6 - y + 1 = 0; \quad 6x - y - 5 = 0;$$

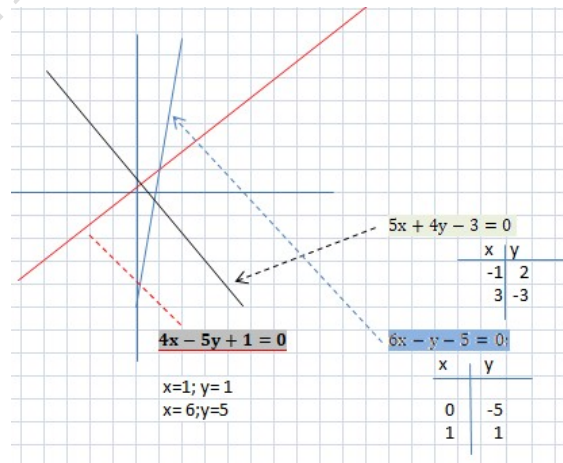
Compruebo en la recta $6x - y - 5 = 0$;

el valor de y en $x = 1$; $6 \cdot 1 - y - 5 = 0$

; $y = 1$; Se cortan en $(1, 1)$

Esta ecuación $4x - 5y + C = 0$ ha de pasar por $(1, 1)$ $4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + C = 0$; $C = 1$;

$$\text{la ecuación será } 4x - 5y + 1 = 0;$$

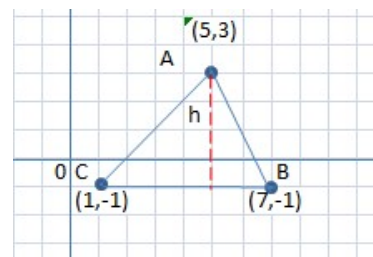


12. Ejercicio

Sea el triángulo de vértices $A(5, 3)$, $B(7, -1)$

y $C(1, -1)$

Hallar la ecuación de la altura correspondiente al vértice A



Solución

Hallo la recta CB $y = mx + n$; $\begin{cases} \text{pasa por } (1, -1); -1 = m + n \\ \text{pasa por } (7, -1); -1 = 7m + n \end{cases} \Rightarrow 0 = 6m \Rightarrow m = 0$

$0 = 6m; m = 0$; la recta será $y = n = -1$; $n = -1$ La recta CB será $y = -1$

La altura desde A será una recta perpendicular a la recta CB; $y = -1$ y que pasa por A

La recta perpendicular a CB será paralela al eje y; $x = 5$;

13. Ejercicio

Halla la recta que tiene doble pendiente
que la bisectriz del primero y tercer cuadrante
y que pasa por el origen

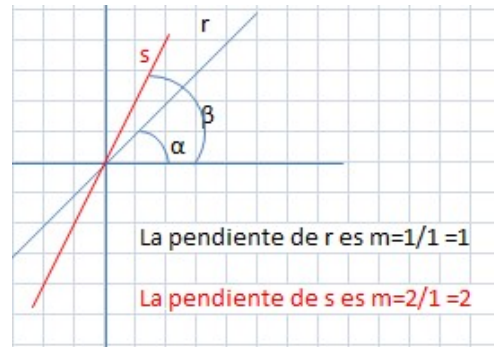
Solución

La pendiente de la bisectriz $r = 1$;

Si m de la recta pedida es el doble $m = 2$;

$y = mx + n$; $m = 2$; y pasa por el origen

$0 = 2 * 0 + n$; $n = 0$; la recta será la s ; $y = 2x$;



14. Ejercicio

Halla la ecuación de la recta que pasa por A $(-2, 5)$ y forma un ángulo de 120°
con la parte positiva del eje x

Solución

La pendiente de la recta $m = \tan 120^\circ = -1,7321$

$y = mx + n$; si ha pasar por $(-2, 5)$ será; $5 = -1,7321 * (-2) + n$;

$5 = 3,464 + n$; $n = 1,536$ La recta será $y = -1,7321x + 1,536$;

3 Posiciones relativas de las rectas

De la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$ podemos deducir:

Las rectas **secantes** se cortan en un punto y cumplen $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

Las rectas **paralelas** no se cortan y cumplen $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$

Las rectas **coincidentes** todos sus puntos coinciden y cumplen $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

Rectas	Respectos al vector director	Respecto a la pendiente m
Secantes	Sus vectores directores y normales no son paralelos	Sus pendientes son diferentes
Paralelas	Sus vectores directores y normales son paralelos	Sus pendientes son iguales

Haz de rectas secantes es el conjunto de todas las rectas del plano que pasan por un punto

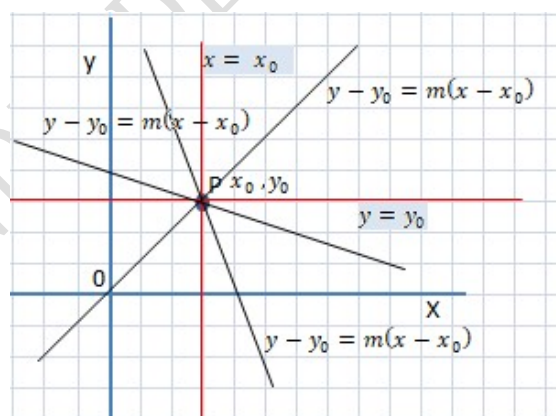
Se ha de cumplir $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$

$Ax + By + C + k(A'x + B'y + C') = 0, K \in \mathbb{R}$

De la ecuación de la recta punto pendiente

$y - y_0 = m(x - x_0)$ siendo (x_0, y_0)

el punto de corte $m \in \mathbb{R} \cup x = x_0$



Haz de rectas Paralelas es el conjunto de todas las rectas del plano paralelas a una dada

El haz de rectas paralelas a $Ax + By + C = 0$, serán $Ax + By + k = 0; K \in \mathbb{R}$

15. Ejercicio

Determina la posición relativa de las rectas y si son secantes el punto de cruce.

$$r \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \quad s \begin{cases} x = 2s \\ y = -s; \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \begin{cases} x = 2s \\ y = -s; \end{cases} \begin{cases} 2 - 4t = 2s; s = \frac{2-4t}{2} \\ s = -3 - 2t; \end{cases} \quad \frac{2-4t}{2} = -3 - 2t;$$

$2 - 4t = -6 - 4t; 4t - 4t = -4; 0 = -4; \text{no se cortan, son paralelas}$

16. Ejercicio

Determina la posición relativa de las rectas y si son secantes el punto de cruce.

$$r: 2x + 5y - 5 = 0; \quad s: 3x - 5y + 5 = 0;$$

Solución

$$\begin{cases} 2x + 5y - 5 = 0; & y = \frac{-2x + 5}{5} \\ 3x - 5y + 5 = 0; & y = \frac{3x - 5}{5} \end{cases}; \frac{-2x + 5}{5} = \frac{3x - 5}{5}; -2x + 5 = 3x - 5;$$

$$3x + 2x = 10; x = 2;$$

$$y = \frac{3x - 5}{5}, \text{ sustituyo } y = \frac{3 \cdot 2 - 5}{5} = \frac{1}{5}; y = \frac{1}{5}$$

Son secantes, se cortan en $\left(2, \frac{1}{5}\right)$

17. Ejercicio

Calcula la posición de la recta paralela a r: $2x + y + 1 = 0$; que pasa por el punto intersección de las rectas s: $x - y + 5 = 0$; t: $x + y + 1 = 0$

Solución

Hallo el punto de intersección r:

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0; & y = x + 5 \\ x + y + 1 = 0; & y = -x - 1 \end{cases}; x + 5 = -x - 1; 2x = -6; x = -3;$$

$$y = x + 5; \text{ sustituyo } y = -3 + 5 = 2; y = 2;$$

Se cortan en $(-3, 2)$

$$\text{Hallo la recta paralela } 2x + y + 1 = 0; y = -2x - 1;$$

La recta paralela tendría la misma pendiente y pasaría por $(-3, 2)$

$$y = -2x + C; \text{ si pasa por } -3, 2 \text{ ha de cumplir; } -3 = -2 \cdot 2 + C; C = 1;$$

$$y = -2x + 1;$$

18. Ejercicio

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen y pertenece al haz de rectas con vértice en $P(2, -1)$

Solución

El haz de rectas será $y - y_0 = m(x - x_0)$ siendo (x_0, y_0) ; $y - (-1) = m(x - 2)$

$$y + 1 = m(x - 2);$$

Si ha de pasar por el origen $(0, 0)$ ha de cumplir $0 + 1 = m(0 - 2)$; $1 = -2m$

$$m = -\frac{1}{2}; \text{ La recta pedida será } y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 2); y = -\frac{1}{2}x$$

19. Ejercicio

Calcula la ecuación de la recta que pasa por A (-1,3) y B (2,5)

Solución

$$y - y_0 = m(x - x_0); y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0);$$

$$y - 3 = \frac{y_1 - 3}{x_1 - (-1)}(x - (-1)); y - 3 = \frac{5 - 3}{2 + 1}(x + 1); y - 3 = \frac{2}{3}(x + 1);$$

$$y - 3 = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}; y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + 3; y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3};$$

20. Ejercicio

Calcula la posición de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas

s: $2x - 3y + 1 = 0$; r: $4x + y - 3 = 0$ y corta al eje de abscisas en el punto P(4,0)

Solución

Hallo el punto de intersección:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0; & y = \frac{2x + 1}{3}; & \frac{2x + 1}{3} = -4x + 3; & 2x + 1 = -12x + 9; & 14x = 8; \\ 4x + y - 3 = 0; & y = -4x + 3, \end{cases}$$

$$x = \frac{8}{14}; \text{ sustituyo } y = -4x + 3; y = -4\left(\frac{8}{14}\right) + 3 = \frac{-32 + 42}{14} = \frac{10}{14}; y = \frac{10}{14};$$

$$\text{Se cortan en el punto } \left(\frac{8}{14}, \frac{10}{14}\right)$$

La recta que pasa por $\left(\frac{8}{14}, \frac{10}{14}\right)$ y P(4,0) utilizamos la fórmula de la recta punto pendiente

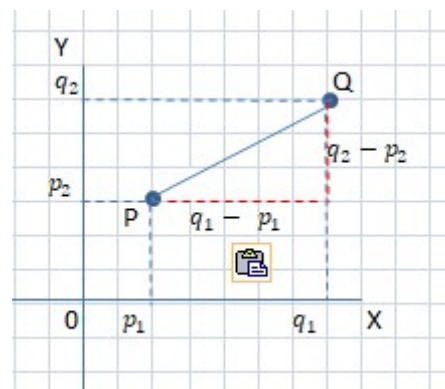
$$y - y_0 = m(x - x_0); y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0);$$

$$y - 0 = \frac{\frac{10}{14} - 0}{\frac{8}{14} - 4}(x - 4); y - 0 = -\frac{46}{8}x + 4; y = -\frac{46}{8}x + 4;$$

4 Distancia entre dos puntos

La distancia entre PQ teorema de Pitágoras

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_2 - p_2)^2 + (q_1 - p_1)^2}$$



5 Distancia de un punto a una recta

Sea $r: Ax + By + C = 0$; $P(p_1, p_2)$ Aplicamos la formula $d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

21. Ejercicio

Calcula la distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta $s: 3x + 4y = 0$;

Solución

$$d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}; d(P, r) = \frac{|3 \cdot 2 + 4(-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 - 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{2}{5};$$

$$d(P, r) = \frac{2}{5}$$

Otra forma de resolverlo

Hallamos la recta perpendicular a la dada desde el punto P

$s: 3x + 4y = 0$; $y = -\frac{3}{4}x$ la recta perpendicular sera $r: y = \frac{4}{3}x + C$;

$y = \frac{4}{3}x + C$ ha de pasar po $P(2, -1) \Rightarrow (-1) = \frac{4}{3} \cdot 2 + C$; $C = -\frac{11}{3}$; $r: y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$

el punto de interseccion de las dos rectas r y s será $\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3} \end{cases}$

$-\frac{9}{12}x = \frac{16}{12}x - \frac{44}{12}$; $\frac{25}{12}x = \frac{44}{12}$; $x = \frac{44}{25}$; sustituyo $y = -\frac{3}{4}x$, $y = -\frac{3}{4} \cdot \frac{44}{25}$; $y = -\frac{33}{25}$

= el punto de corte será $Q = \left(\frac{44}{25}, -\frac{33}{25}\right)$

Calculamos la distancia entre dos puntos

$$d(P, Q) = \sqrt{\left(2 - \frac{44}{25}\right)^2 + \left(-1 - \left(-\frac{33}{25}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^2} = \frac{10}{25} = 2/5$$

$$d(P, Q) = \frac{2}{5}$$

6 Distancia entre dos rectas

Las rectas han de ser paralelas pues si son secantes, se cortan en un punto y la distancia sería=0;

Tenemos dos rectas paralelas $s: Ax + By + C = 0$ y $r: Ax + By + C' = 0$

Tomo un punto cualquiera de una de ellas $P(p_1, p_2)$

Al se rectas paralelas $Ax + By = Ax + By$

$$d(s, r) = d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ si sustituyo } Ap_1 + Bp_2 \text{ por su valor en la otra}$$

$$Ap_1 + Bp_2 = C \Rightarrow d(s, r) = d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

22. Ejercicio

Calcula la distancia entre las rectas s: $3x - 4y + 4 = 0$; r: $9x - 12y - 4 = 0$

Solución

Comparamos las pendientes para ver si son paralelas;

$$\begin{cases} 3x - 4y + 4 = 0; y = \frac{3}{4}x + \frac{4}{4}; y = \frac{3}{4}x + 1 \\ 9x - 12y - 4 = 0; y = \frac{9}{12}x - \frac{4}{12}; y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{3} \end{cases} \text{ Tienen la misma pendiente son paralelas}$$

Tomo un punto de s ejemplo P(0,1) aplico $d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$d(P, r) = \frac{|(9 * 0) + ((-12) * 1) + 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|0 - 12 + 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{8}{5} = \frac{16}{10}; d(P, r) = \frac{16}{10}$$

1. Ejercicio

Calcula la distancia entre las rectas s: $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+5}{1}$; r: $\begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 1 + k \end{cases}$

Solución

Comparamos las pendientes para ver si son paralelas;

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y+5}{1}; -3y - 15 = x + 3; x + 3y + 18 = 0; y = -\frac{x+18}{3} = -\frac{x}{3} - 6; y = -\frac{x}{3} - 6;$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - 3k; k = \frac{-x+2}{3} \\ y = 1 + k; k = y - 1; \end{cases} = \frac{-x+2}{3} = y - 1; y + \frac{x}{3} - \frac{2}{3} - 1 = 0;$$

$$x + 3y - 5 = 0; y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3};$$

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{3} - 6 \\ y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3} \end{cases} \text{ Son paralelas}$$

Tomo un punto P(0, -6) de una de ellas y hallo la distancia a la otra $x + 3y - 5 = 0$

$$d(P, r) = \frac{|(1 * 0) + (3 * (-6)) - 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|0 - 18 - 5|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{23}{\sqrt{10}}; d(P, r) = \frac{23}{\sqrt{10}}$$

23. Ejercicio

Calcula el area del triangulo determinado por O(0,0) y las intersecciones de la recta

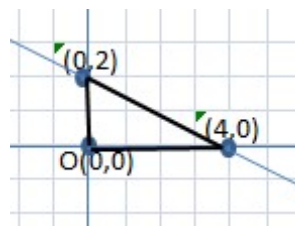
$x + 2y = 4$ y los ejes

Solución

Hallo los puntos en que la recta corta los ejes

$$x + 2y = 4; y = \frac{4-x}{2}; y = -\frac{1}{2}x + 2;$$

los puntos de corte serán (0,2) y (4,0)



x	y
0	2
4	0

El area del triangulo será $= \frac{B * h}{2}$; $A = \frac{4 * 2}{2} = 4$

24. Ejercicio

Calcula el area comprendida entre la recta

$x + y = 10$, el eje OX y las rectas $x = 2$

$y = 8$;

Solución

Representamos la figura

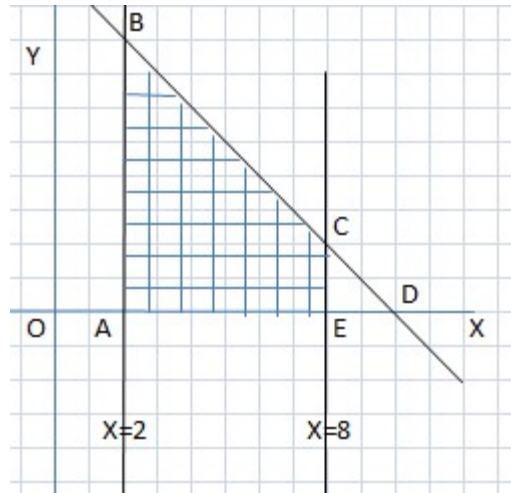
Area de la figura ABCE =

= area ABCD – area ECD

$$\text{Area ABD} = \frac{B * h}{2} = \frac{8 * 8}{2} = 32$$

$$\text{Area CDE} = \frac{B * h}{2} = \frac{2 * 2}{2} = 2$$

Area de la figura ABCE = $32 - 2 = 30$



25. Ejercicio

Calcula el area del triangulo de vertices

$A(3,4)$, $B(2,-1)$ y $C(-3,5)$.

Solución

Representamos la figura

Hallo distancia BC

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_2 - p_2)^2 + (q_1 - p_1)^2}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(5 - (-1))^2 + ((-3) - 2)^2}$$

$$d(B, C) = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}; \quad d(B, C) = \sqrt{61}$$

Hallo la recta BC

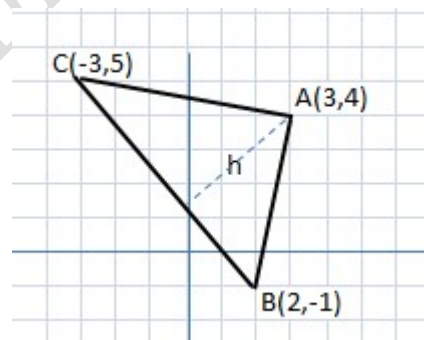
$$y - y_0 = m(x - x_0); \quad y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0); \quad y - (-1) = \frac{5 - (-1)}{(-3) - 2}(x - 2);$$

$$y + 1 = \frac{6}{-5}(x - 2); \quad y + \frac{6}{5}x + 1 - \frac{12}{5} = 0; \quad \frac{6}{5}x + y - \frac{7}{5} = 0;$$

$$\text{hallo la altura } h = d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad d(P, r) = \frac{|\frac{6}{5} * 3 + 1 * 4 - \frac{7}{5}|}{\sqrt{(\frac{6}{5})^2 + 1^2}}$$

$$d(P, r) = \frac{|\frac{18}{5} + 4 - \frac{7}{5}|}{\sqrt{\frac{36}{25} + 1}} = \frac{|\frac{31}{5}|}{\sqrt{\frac{61}{25}}} = \frac{31}{\sqrt{61}}; \quad d(P, r) = \frac{31}{\sqrt{61}}$$

$$\text{Area ABD} = \frac{B * h}{2} = \frac{\sqrt{61} * \frac{31}{\sqrt{61}}}{2} = \frac{31}{2} = 15,5$$



26. Ejercicio

Dadas las rectas: $-mx + 4y - 1 = 0$ y $r: (m - 1)x - my + 2 = 0$. Hallar el valor de m para que las rectas sean a) paralelas y b) perpendiculares;

Solución

$$s: -mx + 4y - 1 = 0; 4y - mx - 1 = 0; y = \frac{m}{4}x + \frac{1}{4};$$

$$r: (m - 1)x - my + 2 = 0; y = \frac{(m - 1)}{m} + \frac{2}{m};$$

$$a) \text{ para que sean paralelas } \frac{m}{4} = \frac{(m - 1)}{m}; m^2 = 4m - 4; m^2 - 4m + 4 = 0;$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 * 1 * 4}}{2 * 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4}{2}; m = 2;$$

$$b) \text{ para que sean perpendiculares } \frac{m}{4} = \frac{-m}{(m - 1)}; m^2 - m = -4m; m^2 + 3m = 0;$$

$$m(m + 3) = 0; m = 0; m = -3$$

7 Ángulos entre rectas

Para calcular el ángulo entre rectas aplicamos el producto escalar de sus vectores directores.

Tenemos dos rectas paralelas $s: Ax + By + C = 0$ y $r: Ax + By + C' = 0$;

Hallamos la posición de las rectas:

Si son paralelas no se cortan $\frac{A}{B} = \frac{A}{B}$

Si son perpendiculares $\frac{A}{B} = -\frac{B}{A}$ se cortan el 90°

Si son secantes hallamos los vectores directores y aplico,

$$\cos \widehat{r, s} = \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|}; \alpha = \arccos \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|};$$

$$\cos \widehat{r, s} = \frac{|A * A + B * B|}{\sqrt{A^2 + B^2} * \sqrt{A^2 + B^2}}; \alpha = \arccos \frac{|A * A + B * B|}{\sqrt{A^2 + B^2} * \sqrt{A^2 + B^2}};$$

27. Ejercicio

Hallar el ángulo que forman las rectas $s: 4x - y - 7 = 0$ y $r: 4x - 7y - 6 = 0$;

Solución:

$$4x - y - 7 = 0; y = 4x - 7; \text{vector director } \vec{v}(v_1, v_2) = (1, 4)$$

$$r: 4x - 7y - 6 = 0; y = \frac{4}{7}x - \frac{6}{7}; \vec{u}(u_1, u_2) = (7, 4)$$

$$\cos \widehat{r, s} = \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|}; \alpha = \arccos \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|};$$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|} = \arccos \frac{(7 * 1) + (4 * 4)}{\sqrt{7^2 + 4^2} * \sqrt{1^2 + 4^2}} = \arccos \frac{7 + 16}{\sqrt{49 + 16} * \sqrt{1 + 16}} =$$

$$\arccos \frac{23}{\sqrt{65} * \sqrt{17}} = \arccos \frac{23}{\sqrt{1105}} = \arccos 0,6919; \alpha = 46,2189^\circ$$

28. Ejercicio

Hallar el ángulo que forman las rectas $s: x - 3y - 1 = 0$ con el eje de abscisas

Solución:

$$x - 3y - 1 = 0; y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}; \text{vector director } \vec{v}(v_1, v_2) = (3, 1)$$

eje de abscisas; $y = 0$; vector director $\vec{u}(u_1, u_2) = (1, 0)$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \arccos \frac{(1 \cdot 3) + (0 \cdot 1)}{\sqrt{1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \arccos \frac{3}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{10}} = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\arccos 0,948683; \alpha = 18,43495^\circ$$

29. Ejercicio

Hallar el valor de m para que el ángulo que forman las dos rectas sea 45°

$$s: \begin{cases} x = -1 + 2t; \\ y = -t; \end{cases} \text{ y } r: mx - y + 2 = 0;$$

Solución

$$s: \begin{cases} x = -1 + 2t; \\ y = -t; \end{cases} \text{ t} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}; \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = -y; y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}; \text{vector director } \vec{v}(2, -1)$$

$mx - y + 2 = 0; y = mx + 2$; vector director $\vec{u}(u_1, u_2) = (1, m)$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(2 \cdot 1) + (m \cdot (-1))}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(1)^2 + m^2}} = \frac{2 - m}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + m^2}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 - m}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + m^2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 - m}{\sqrt{5 + 5m^2}}; \sqrt{5 + 5m^2} = \sqrt{2}(2 - m); \text{elevo al cuadrado}$$

$$(\sqrt{5 + 5m^2})^2 = (\sqrt{2}(2 - m))^2; 5 + 5m^2 = 2(4 + m^2 - 4m) = 8 + 2m^2 - 8m;$$

$$5 + 5m^2 = 8 + 2m^2 - 8m; 3m^2 + 8m - 3 = 0; m = \frac{-8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3}$$

$$m = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 36}}{6} = \frac{-8 \pm 10}{6}; m = \frac{1}{3}; m = -3$$

8 Puntos y rectas simétricos

8.1 Simetría central de un punto

Los puntos P y Q son simétricos respecto a M dado que M es el punto medio del segmento PQ

30. Ejercicio

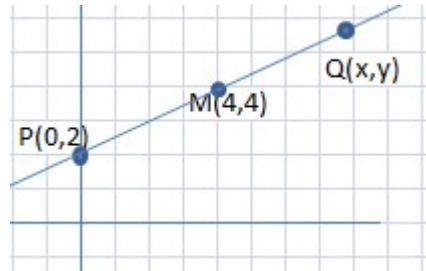
Hallar las coordenadas del punto simétrico del punto $P(0,2)$ respecto al punto $M(4,4)$

Solución

El punto simétrico respecto a M , sería $Q(x,y)$

Se ha de cumplir que M es el punto medio del segmento PQ ;

$$\text{Punto medio } M(4,4) = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+2}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = 4; \frac{y+2}{2} = 4; x = 8, y = 6; \boxed{Q(8,6)}$$



8.2 Simetría axial

Un punto es simétrico respecto a una recta r cuando el segmento PQ es perpendicular a la recta r (eje de simetría) y M es el punto medio de PQ .

31. Ejercicio

Hallar las coordenadas del punto simétrico del punto $P(0,2)$ respecto a la recta r ;

$$y = 2x - 1;$$

Solución

Hallamos la recta s perpendicular a r y que pasa por $P(0,2)$

$r; y = 2x - 1$; la recta s : será

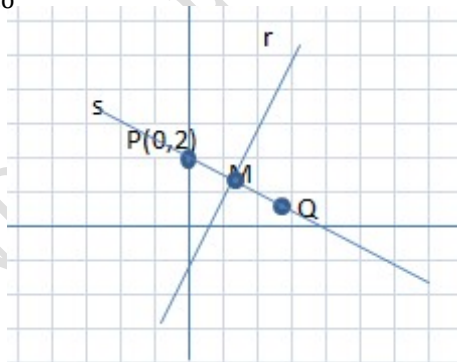
$$s: y = -\frac{1}{2}x + C$$

como ha de pasar por P ha de cumplir

$$2 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + C; C = 2; \Rightarrow s: y = -\frac{1}{2}x + 2;$$

$$r, y \text{ se cortan en } \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow 2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 2; 4x - 2 = -x + 4; 5x = 6; x = \frac{6}{5}; y = \frac{7}{5}$$

$$\text{Punto medio } M\left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right) = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+2}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{6}{5}; \frac{y+2}{2} = \frac{7}{5}; x = \frac{12}{5}, y = \frac{4}{5}; \boxed{Q\left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right)}$$



32. Ejercicio

Hallar las coordenadas del punto simétrico del punto $P(4,2)$ respecto a la recta r ;

$$2y + 3x = 6;$$

Solución

$$2y + 3x = 6; y = -\frac{3}{2}x + 3;$$

Para hallar el punto simétrico, hallo la recta s perpendicular a r que pasa por P

$$\text{Recta perpendicular a } r: y = -\frac{3}{2}x + 3; \text{ será } s: y = \frac{2}{3}x + C$$

Si ha de pasar por P cumplirá $2 = \frac{2}{3} * 4 + C$; $2 = \frac{8}{3} + C$; $C = -\frac{2}{3}$; $s: y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$;

Hallo el pnto donde se cortan $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 3 \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{2}x + 3 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}; -9x + 18 = 4x - 4$

$-9x + 18 = 4x - 4$; $x = \frac{22}{13}$; $y = -\frac{3}{2} * (\frac{22}{13}) + 3 = \frac{6}{13}$; $y = \frac{6}{13}$; se cortan $(\frac{22}{13}, \frac{6}{13})$

Hallo el punto simétrico

Punto medio M $(\frac{22}{13}, \frac{6}{13}) = (\frac{x+4}{2}, \frac{y+2}{2}) \Rightarrow \frac{x+4}{2} = \frac{22}{13}; \frac{y+2}{2} = \frac{6}{13}$;

$x = \frac{-8}{13}, y = \frac{-14}{13}$; $Q(-\frac{8}{13}, -\frac{14}{13})$

33. Ejercicio

Hallar la ecuacion de la recta s simétrica
al eje de ordenadas respecto al punto P (2,4)

Solución

Tomo dos puntos cualquiera de la recta x=0

A(0,7)y C(0,0)y hallo sus simetricos respecto a P(2,4)

Segmneto AB, Punto medio $P = (2,4) = (\frac{x+0}{2}, \frac{y+7}{2}) \Rightarrow$

$\frac{x}{2} = 2$; $x = 4$; $\frac{y+7}{2} = 4$; $y = 1$; B(4,1)

Segmneto CD, Punto medio $P = (2,4) = (\frac{x+0}{2}, \frac{y+0}{2}) \Rightarrow$

$\frac{x}{2} = 2$; $x = 4$; $\frac{y}{2} = 4$; $y = 8$; D(4,8)

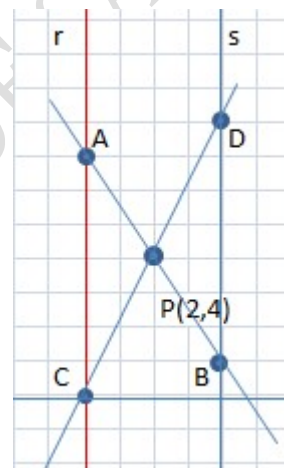
La recta pedida pasará por B(4,1) y D(4,8)

$y - y_0 = m(x - x_0)$; $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$; $y - 1 = \frac{8 - 1}{4 - 4}(x - 4)$

$y - 1 = \frac{7}{0}(x - 4)$; $0 = 7(x - 4)$; $x = 4$

Otra forma

La recta s simétrica a otra respecto a un punto P es una recta r paralela a la primera.



34. Ejercicio

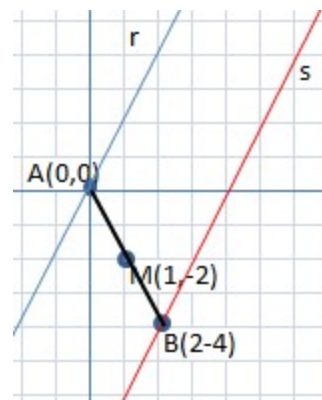
Hallar la ecuacion de la recta s simétrica
a la recta r $2x - y = 0$ respecto a la simetria
central con centro M(1, -2)

Solución

r: $2x - y = 0, y = 2x$; la recta simetrica s será paralela

s: $y = 2x + C$

Tomo un punto cualquiera de la recta $y = 2x$



A(0,0) y hallo sus simetricos respecto a P(1, -2)

Segmento AB, Punto medio $M = (1, -2) = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+0}{2}\right) \Rightarrow$

$$\frac{x}{2} = 1; x = 2; \frac{y}{2} = -2; y = -4; B(2, -4)$$

Este punto pertenece a la recta $s: y = 2x + C$; sustituyo el punto B(2, -4) en s:

$$-4 = 2 * 2 + C; C = -8; \text{ La recta pedida ser\'a } s: y = 2x - 8$$

35. Ejercicio

Hallar el extremo del segmento AB

siendo A(2,1) y la mediatriz del

segmento r: $x + 2y - 8 = 0$;

Soluci\'on

$$r: x + 2y - 8 = 0; y = -\frac{1}{2}x + 4;$$

La recta s que contiene el segmento AB

sera perpendicular r:

$s: y = 2x + C$ y ha de pasar por A(2,1) por lo que cumplir\'a

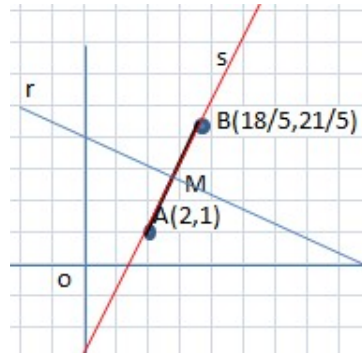
$$1 = 2 * 2 + C; C = -3 \Rightarrow s: y = 2x - 3;$$

$$\text{La recta s y r se cortaran en } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}x + 4 = 2x - 3; x = \frac{14}{5}$$

$$y = 2x - 3; \text{ sustituyo; } y = 2 * \frac{14}{5} - 3; y = \frac{13}{5}; M\left(\frac{14}{5}, \frac{13}{5}\right)$$

$$\text{Segmento AB, Punto medio } M = \left(\frac{14}{5}, \frac{13}{5}\right) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \Rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{14}{5}; x = \frac{18}{5}$$

$$\frac{y+1}{2} = \frac{13}{5}; y = \frac{21}{5}; B\left(\frac{18}{5}, \frac{21}{5}\right)$$



9 Lugares geométricos

Lugar geométrico del plano es el conjunto de todos los puntos del plano que cumplen la misma prioridad

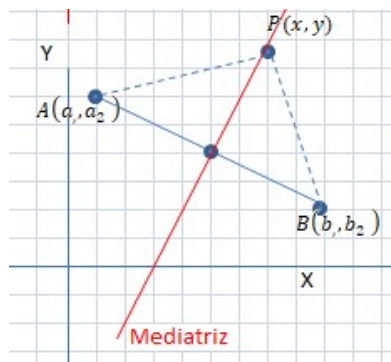
9.1 Mediatriz de un segmento:

Es el lugar geométrico de los puntos de la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

$$d(PB) = d(PA);$$

$$d(PB) = \sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2}$$

$$d(PA) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}$$



$$\sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2} = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}; \quad (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2;$$

$$x^2 + b_1^2 - 2b_1x + y^2 + b_2^2 - 2b_2y = x^2 + a_1^2 - 2a_1x + y^2 + a_2^2 - 2a_2y;$$

$$b_1^2 - 2b_1x + b_2^2 - 2b_2y = a_1^2 - 2a_1x + a_2^2 - 2a_2y; \text{ obtenemos la ecuación de la recta}$$

36. Ejercicio

Hallar la mediatriz de la figura anterior. Segmento A(1,6), B(9,2)

Solución

$$\sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2} = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} \text{ sustituyo por los valores de A y B}$$

$$\sqrt{(x - 9)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 6)^2};$$

$$9^2 - 2 \cdot 9x + 2^2 - 2 \cdot 2y = 1^2 - 2 \cdot 1x + 6^2 - 2 \cdot 6y;$$

$$81 - 18x + 4 - 4y = 1 - 2x + 36 - 12y; 12y - 4y - 18x + 2x + 81 + 4 - 1 - 36;$$

$$8y - 16x + 48 = 0; y - 2x + 6 = 0;$$

Otra forma de calcularlo:

La mediatriz será perpendicular al segmento y pasará su punto medio :

Ecuación de la recta que contiene el segmento;

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0); y - 6 = \frac{2 - 6}{9 - 1}(x - 1); y - 6 = \frac{-4}{8}(x - 9);$$

$$8y - 48 = -4x + 36; y = \frac{-4x + 84}{8} = \frac{-4x + 84}{8} = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{2}; y = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{2};$$

$$\text{Segmento AB, Punto medio } M = (x, y) = \left(\frac{1 + 9}{2}, \frac{6 + 2}{2}\right) = 5, 4; M(5, 4)$$

La mediatriz será $y = 2x + C$; como pasa por M (5,4); $4 = 2 \cdot 5 + C$; $C = -6$;

$$y = 2x - 6; y - 2x + 6 = 0$$

9.2 Bisectriz de un ángulo:

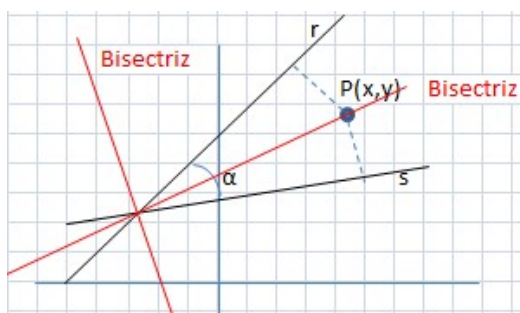
Es la recta que divide el ángulo formado por las rectas en dos partes iguales.

Todos los puntos de la bisectriz cumplen que la distancia a las rectas r y s son iguales

$$d(Pr) = d(Ps) =$$

$$\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{|A'x + B'y + C'|}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

según tomemos el valor $+$ o $-$ tendremos una bisectriz u otra



37. Ejercicio

Dadas las rectas $r: y = x + 1$; $s: y = -x + 3$; hallar las bisectrices

Solución

$$r: y = x + 1; y - x - 1 = 0;$$

$$s: y = -x + 3; y + x - 3 = 0$$

$$d(Pr) = d(Ps) =$$

$$\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{|A'x + B'y + C'|}{\sqrt{A'^2 + B'^2}};$$

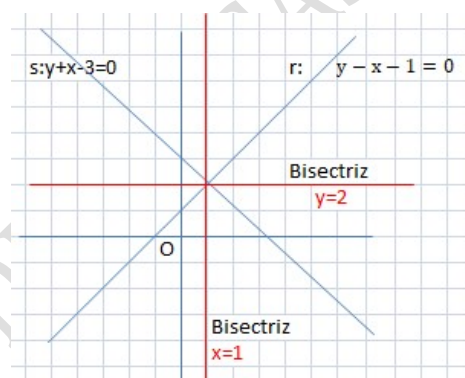
$$\frac{|-x + y - 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = + \frac{|x + y - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}};$$

$$\frac{|-x + y - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x + y - 3|}{\sqrt{2}};$$

$$-x + y - 1 = x + y - 3; 2x = 2; \mathbf{x = 1}$$

$$\frac{|-x + y - 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = - \frac{|x + y - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}; \frac{|-x + y - 1|}{\sqrt{2}} = - \frac{|x + y - 3|}{\sqrt{2}};$$

$$-x + y - 1 = -x - y + 3; 2y = 4; \mathbf{y = 2}$$



38. Ejercicio

Dado el triángulo $A(5,1)$, $B(3,7)$ y $C(-2,3)$. Hallar: a) circuncentro, b) incentro y C baricentro

Solución

Hallo las medianas de los segmentos

$$M(AB) = M_1 = \left(\frac{5+3}{2}, \frac{1+7}{2} \right) = (4,4);$$

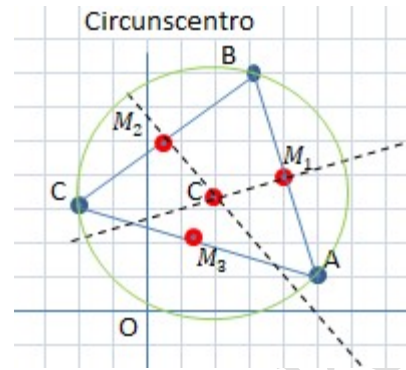
$$M(BC) = M_2 = \left(\frac{3+(-2)}{2}, \frac{7+3}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 5 \right)$$

$$M(AC) = M_3 = \left(\frac{5+(-2)}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 2 \right)$$

a) **Circuncentro:** Es el punto de corte de las tres mediatrices

Mediatriz es cada una de las rectas

perpendiculares trazadas a un lado por su punto medio.



Hallo la recta AB; $y - 1 = \frac{7-1}{3-5}(x-5)$;

$y - 1 = \frac{6}{-2}(x-5)$; $y = -3x + 16$;

Hallo la recta perpendicular AB que pase por M_1 ;

$y = \frac{1}{3}x + C$; $4 = \frac{1}{3} \cdot 4 + C$; $C = \frac{8}{3}$;

$y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$;

Hallo la recta BC; $y - 7 = \frac{3-7}{(-2)-3}(x-3)$; $y - 7 = \frac{-4}{-5}(x-5)$; $y = \frac{4}{5}x + 3$;

Hallo la recta perpendicular BC que pase por M_2 ; $y = -\frac{5}{4}x + C$; $5 = -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} + C$; $C = \frac{35}{6}$;

$y = -\frac{5}{4}x + \frac{35}{6}$

Hallo la intersección de las perpendiculares que pasan por los puntos medios;

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}; & \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} = -\frac{5}{4}x + \frac{35}{6}; & \frac{4}{12}x + \frac{32}{12} = -\frac{15}{12}x + \frac{70}{12}; \\ y = -\frac{5}{4}x + \frac{35}{6} \end{cases}$$

$19x = 38$; $x = \frac{38}{19} = 2$; $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$; $y = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$;

Circuncentro $(2, \frac{10}{3})$

c) **Baricentro:** Es el punto de corte

de las tres medianas

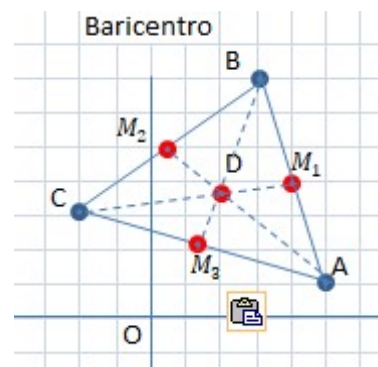
Mediana es cada una de las rectas que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto

Hallo las medianas de los segmentos

$M(AB) = M_1 = \left(\frac{5+3}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = (4, 4)$;

$M(BC) = M_2 = \left(\frac{3+(-2)}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 5\right)$

$M(AC) = M_3 = \left(\frac{5+(-2)}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$



Hallo la recta AM_2 ; $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$; $y - 1 = \frac{5-1}{\frac{1}{2}-5}(x-5)$;

$$y - 1 = \frac{4}{-\frac{9}{2}}(x - 5); y - 1 = -\frac{8}{9}x + \frac{40}{9}; y + \frac{8}{9}x - \frac{40}{9} - 1 = 0; y = -\frac{8}{9}x + \frac{49}{9}$$

Hallo la rectas CM_1 ; $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$; $y - 3 = \frac{4 - 3}{4 - 2}(x - 2); y - 3 = \frac{1}{2}x - 1$

$$y = \frac{1}{2}x + 2;$$

Hallo el punto de corte $\begin{cases} y = -\frac{8}{9}x + \frac{49}{9} \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} -\frac{8}{9}x + \frac{49}{9} = \frac{1}{2}x + 2; -16x + 98 = 9x + 36;$

$$16x + 9x = 98 - 36; x = \frac{62}{25}; y = \frac{1}{2} * \frac{62}{25} + 2 = \frac{81}{25}; D \text{ Baricentro}(\frac{62}{25}, \frac{81}{25})$$

b) Incentro Punto de corte de las bisectrices

Bisectriz es cada una de las rectas que divide a un ángulo en dos ángulos iguales

Hallo la recta BA; $y - 7 = \frac{1-7}{5-3}(x - 3);$

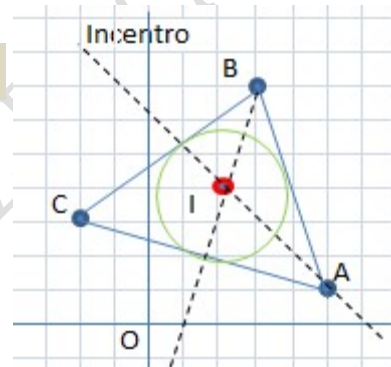
$$y - 7 = \frac{-6}{2}(x - 3); y = -3x + 16; 3x + y - 16 = 0;$$

Hallo la recta BC; $y - 7 = \frac{3-7}{(-2)-3}(x - 3);$

$$y - 7 = \frac{-4}{-5}(x - 3); y = \frac{4}{5}x - \frac{23}{5}; \frac{4}{5}x - y + \frac{23}{5} = 0$$

Hallo la recta AC; $y - 1 = \frac{3-1}{(-2)-5}(x - 5)$

$$; y - 1 = \frac{2}{-7}(x - 5); y = -\frac{2}{7}x + \frac{17}{7}; \frac{2}{7}x + y - \frac{17}{7} = 0$$



Hallo la bisectriz de las recta BA - BC: $\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{|A'x + B'y + C'|}{\sqrt{A'^2 + B'^2}};$

$$\frac{|3x + y - 16|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|\frac{4}{5}x - y + \frac{23}{5}|}{\sqrt{(\frac{4}{5})^2 + (-1)^2}}; \frac{|3x + y - 16|}{\sqrt{10}} = \frac{|\frac{4}{5}x - y + \frac{23}{5}|}{\sqrt{\frac{16}{25} + 1}} = + \frac{|\frac{4}{5}x - y + \frac{23}{5}|}{\sqrt{\frac{41}{25}}}$$

$$(3x + y - 16) * \frac{\sqrt{41}}{5} = -(\frac{4}{5}x - y + \frac{23}{5})\sqrt{10};$$

$$\frac{3\sqrt{41}}{5}x + \frac{\sqrt{41}}{5}y - \frac{16\sqrt{41}}{5} = -(\frac{4\sqrt{10}}{5}x - \sqrt{10}y + \frac{23}{5}\sqrt{10});$$

$$3,842x + 1,281y - 20,49 = -2,53x + 3,16y - 14,55; 6,37x - 1,88y - 5,94 = 0$$

Hallo la bisectriz de las recta AB - AC: $\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{|A'x + B'y + C'|}{\sqrt{A'^2 + B'^2}};$

$$\frac{|3x + y - 16|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|\frac{2}{7}x + y - \frac{17}{7}|}{\sqrt{(\frac{2}{7})^2 + (-1)^2}}; \frac{|3x + y - 16|}{\sqrt{10}} = \frac{|\frac{2}{7}x + y - \frac{17}{7}|}{\sqrt{\frac{4}{49} + 1}} = + \frac{|\frac{2}{7}x + y - \frac{17}{7}|}{\sqrt{\frac{53}{49}}}$$

$$(3x + y - 16) * \frac{\sqrt{53}}{7} = \pm \left(\frac{2}{7}x + y - \frac{17}{7} \right) \sqrt{10};$$

$$\frac{3\sqrt{53}}{7}x + \frac{\sqrt{53}}{7}y - \frac{16\sqrt{53}}{7} = - \left(\frac{2\sqrt{10}}{7}x + \sqrt{10}y - \frac{17\sqrt{10}}{7} \right);$$

$$3,12x + 1,04y - 16,64 = -0,9x - 3,16y + 7,68; 4,02x + 4,2y - 24,32 = 0$$

$$\text{Halla el punto de corte } \begin{cases} 6,37x - 1,88y - 5,94 = 0; y = \frac{6,37}{1,88}x - \frac{5,94}{1,88} \\ 4,02x + 4,2y - 24,32 = 0; y = -\frac{4,02}{4,2}x + \frac{24,32}{4,2} \end{cases}$$

$$\frac{6,37}{1,88}x - \frac{5,94}{1,88} = -\frac{4,02}{4,2}x + \frac{24,32}{4,2}; 3,39x - 3,16 = -0,96x + 5,79; x = \frac{8,95}{4,35} = 2$$

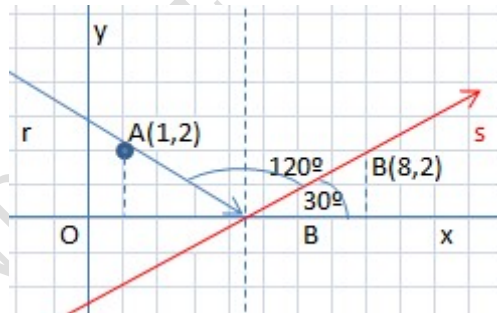
$$y = -\frac{4,02}{4,2}x + \frac{24,32}{4,2}; y = -\frac{4,02}{4,2} * 2 + \frac{24,32}{4,2}; y = -2 + 5,8; y = 3,8$$

$$I \text{ Incentro } \left(2, \frac{38}{10} \right)$$

39. Ejercicio

Un rayo de luz r que pasa por el punto $A(1,2)$ incide sobre el eje de abscisas y se refleja formando un ángulo de 30° . Halla la ecuación del rayo incidente y reflejado

Solución



El ángulo que forma con la superficie el rayo incidente y reflejado, por las leyes de la física, es igual. Esto implica que ángulo que forman los dos rayos será de 120°

$$\text{Angulo incidente: } \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \text{ Angulo reflejado: } \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$r: y - y_0 = m(x - x_0); y - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1); y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3} + 2; y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 + \sqrt{3}}{3}$$

$$s: y - y_0 = m(x - x_0); y - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 8); y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{3} + 2; y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 - 8\sqrt{3}}{3}$$

40. Ejercicio

Calcula el valor de K para que el área del triángulo de vértices $A(4,3)$,

$B(6, -3)$ y $C(6, k)$ sea 20 u^2

Solución

La ecuación de la recta BC es $x = 6$; $x - 6 = 0$;

$$\text{Distancia del punto a la recta } d(\text{Pr}) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d(\text{Pr}) = \frac{|4 - 6|}{\sqrt{1^2}} = 2;$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{B * h}{2} = \frac{x * 2}{2} = 20 \text{ u}^2; x = 20u$$

$$\text{Distancia entre los puntos } B(6, -3) \text{ y } C(6, k) = K - (-3) = 20; k = 17; C(6, 17)$$

41. Ejercicio

El paralelogramo de vertices ABCD A(0,3), B(1,0), C(6,1). Calcula las medidas de sus diagonales y el angulo que forman

Solución

Medida de las diagonales

$$d(AC) = \sqrt{(6-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

$$d(BD) = \sqrt{(5-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$r(AC) = y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0); y - 1 = \frac{3-1}{0-6}(x-6); y - 1 = -\frac{2}{6}(x-6)$$

$$y + \frac{2}{6}x - 1 - 2 = 0; y + \frac{2}{6}x - 3 = 0; y = -\frac{2}{6}x + 3$$

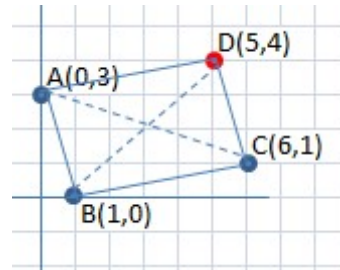
$$r(BD) = y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0); y - 0 = \frac{4-0}{5-1}(x-1); y = x - 1;$$

Ángulos de las diagonales

$$\vec{u} = (1,1); \vec{v}(-2,6)$$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|} = \arccos \frac{(1 * (-2)) + (1 * 6)}{\sqrt{1^2 + 1^2} * \sqrt{(-2)^2 + 6^2}} = \arccos \frac{-2 + 6}{\sqrt{2} * \sqrt{40}} =$$

$$\arccos \frac{4}{\sqrt{80}} = \arccos 0,4472; \alpha = 63,435^\circ; \beta = 180 - 63,435^\circ = 116,565$$



42. Ejercicio

Del cuadrado ABCD conocemos las coordenadas

del punto A(8,7) y sabemos que

los puntos B y C están en la recta $3x - 4y = 19$. Hallar:

a) los vertices b) Perimetro c) area del cuadrado

Solución

B y C están en la recta Recta DC $3x - 4y = 19; y = \frac{3}{4}x - \frac{19}{4}$

Los puntos A y B estarán en una paralela que pase por A(8,7)

$$y = \frac{3}{4}x + C; \Rightarrow 7 = \frac{3}{4} * 8 + C; C = 1; \text{ la recta AB será } y = \frac{3}{4}x + 1;$$

Al ser un cuadrado los lados AD estarán en una recta perpendicular a AB

$$\text{que pase por A(8,7) } y = -\frac{4}{3}x + C; \Rightarrow 7 = -\frac{4}{3} * 8 + C; 7 + \frac{32}{3} = C; C = \frac{53}{3}$$

$$\text{Recta AD } y = -\frac{4}{3}x + \frac{53}{3}; 4x + 3y - 53 = 0$$

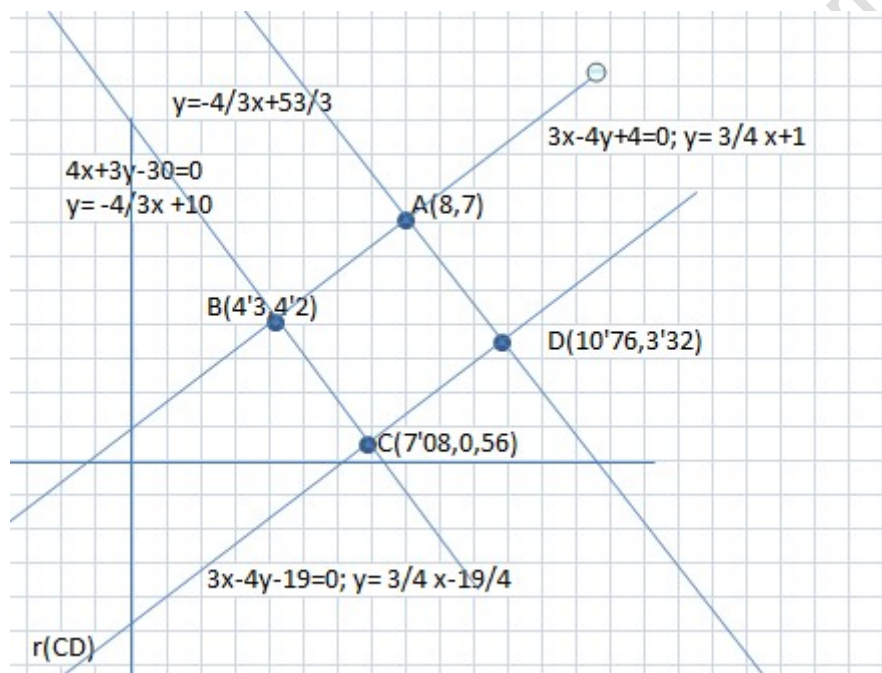
Para hallar D calculo el punto de corte $\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{53}{3} \\ y = \frac{3}{4}x - \frac{19}{4} \end{cases}$

$$-\frac{16}{12}x + \frac{212}{12} = \frac{9}{12}x - \frac{57}{12}; 9x + 16x = 212 + 57; 25x = 269; x = \frac{269}{25} = 10,76$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{19}{4}; y = \frac{3}{4} * \frac{269}{25} - \frac{19}{4} = \frac{807}{100} - \frac{475}{100} = \frac{242}{100}, y = \frac{332}{100} = 3,32; D(10,76, 3,32)$$

Hallo la distancia DA lado del cuadrado $d(Ar) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$:

$$d(Pr) = \frac{|3 * 8 - 4 * 7 - 19|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|24 - 28 - 19|}{\sqrt{25}} = \frac{23}{5}; d(AB) = \frac{23}{5}$$



La recta BC es paralela a AD por lo que será $BC y = -\frac{4}{3}x + C; 4x + 3y - 3C = 0;$

La distancia, al ser un cuadrado, de la recta BC a A será $= \frac{|4x + 3y - 3C|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{23}{5};$

$$\frac{|4 * 8 + 3 * 7 - 3C|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{23}{5}; 32 + 21 - 3c = 23; 30 = 3C; C = 10$$

$$BC y = -\frac{4}{3}x + 10$$

Hallo el punto de corte entre AB y BC $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 1 \\ \frac{3}{4}x + 1 = -\frac{4}{3}x + 10 \\ y = -\frac{4}{3}x + 10 \end{cases}$

$$\frac{9}{12}x + \frac{12}{12} = -\frac{16}{12}x + \frac{120}{12}; 9x + 16x = 120 - 12; x = \frac{108}{25} = 4,32; x = 4,32$$

$$y = -\frac{4}{3}x + 10; y = -\frac{4}{3} * \frac{108}{25} + 10 = -5,76 + 10 = 4,24; y = 4,24; B(4,32, 4,24)$$

Halla el punto de corte entre DC y BC
$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{19}{4} \\ y = -\frac{4}{3}x + 10 \end{cases}$$

$$\frac{9}{12}x - \frac{57}{12} = -\frac{16}{12}x + \frac{120}{12}; 9x + 16x = 120 + 57; x = \frac{177}{25} = 7,08; x = 7,98$$

$$y = -\frac{4}{3}x + 10; y = -\frac{4}{3} * \frac{177}{25} + 10 = -9,44 + 10 = 0,56; y = 0,56; C(7,08; 0,56)$$

b) Perimetro del cuadrado $= 4 * \frac{23}{5} = 18,4 \text{ u}$

c) Area del cuadrado $= \frac{23}{5} * \frac{23}{5} = 21,16 \text{ u}^2$

43. Ejercicio

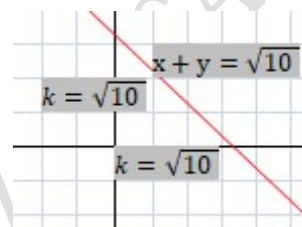
Hallar el valor de k para que la recta $x + y = k$ forme con los ejes de coordenadas un triangulo que tenga por area $5u^2$

Solución

x	y
0	K
k	0

Area del triangulo $A = \frac{b * h}{2}; 5 = \frac{K * k}{2};$

$k^2 = 10; k = \sqrt{10}; x + y = \sqrt{10}$



44. Ejercicio

Calcular las rectas que pasan por el punto P (1,2) y forman con los ejes de coordenadas un triangulo de area $5u^2$

Solución

x	y
0	n
$-\frac{n}{m}$	0

Si pasa por P(1,2) se cumplirá $y = mx + n; 2 = m + n; n = 2 - m$

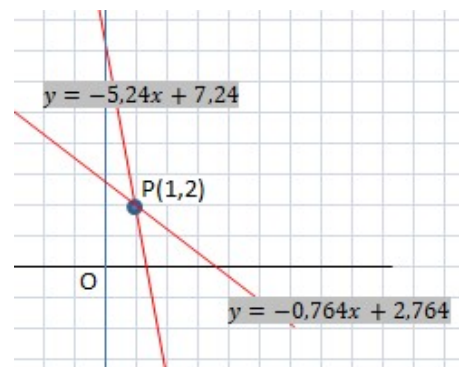
Si el area ha de ser $5u^2$ se cumplirá $\frac{n * (-\frac{n}{m})}{2} = 5u^2; n * (-\frac{n}{m}) = 10; -n^2 = 10m$

sustituyo n por su valor $-(2 - m)^2 = 10m; -(4 + m^2 - 4m) = 10m;$

$$-4 - m^2 + 4m = 10m; m^2 + 6m + 4 = 0; m = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 * 4}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$m = \frac{-6 + \sqrt{20}}{2}; m = -0,764; n = 2 - m; n = 2 - \frac{-6 + \sqrt{20}}{2}; n = 2,764;$$

$y = -0,764x + 2,764;$



$$m = \frac{-6 - \sqrt{20}}{2}; m = -5,24; n = 2 - m; n = 2 - \frac{-6 - \sqrt{20}}{2}; n = 7,24;$$

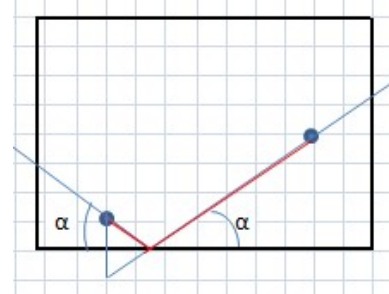
$$y = -5,24x + 7,24$$

45. Ejercicio

Deteminar el camino que seguira una bola de billar para ir del punto B(1,4) al punto N(8,1), despues de chocar con la banda $r: x + y - 4 = 0$;

Solución

Cuando una bola de billar choca contra una banda de la mesa, rebota de manera que el ángulo con el que llega es igual al de rebote



Hallamos una recta perpendicular a r desde B

$r: x + y + 4 = 0$; $y = -x + 4$; la recta perpendicular s ; $y = x + C$; $4 = C = 3$;

$s: y = x + 3$; $x - y + 3 = 0$;

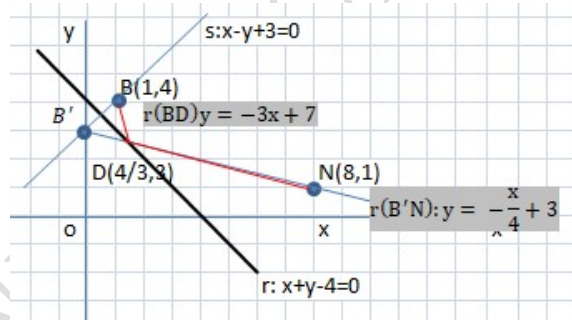
B' es el punto simétrico respecto a r (0,3)

Trazo la recta

$$a \ r(B'N) = y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

$$y - 3 = \frac{1 - 3}{8 - 0} (x - 0); y - 3 = \frac{-2}{8} x;$$

$$8y - 24 = -2x; r(B'N): x + 4y - 12 = 0; y = -\frac{x}{4} + 3$$



$$\text{Hallo el punto D en que la bola toca la banda} \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = -\frac{x}{4} + 3 \end{cases} \quad -x + 4 = -\frac{x}{4} + 3; x = \frac{4}{3};$$

$$\text{Sustituyo } y = -x + 4 \Rightarrow y = -\frac{4}{3} + 4; y = 3, \text{ Punto de choque } D\left(\frac{4}{3}, 3\right)$$

$$\text{Trazo la recta } r(BD): y - 4 = \frac{3 - 4}{\frac{4}{3} - 1} (x - 1); r(BD): y = -3x + 7; 3x + y - 7 = 0;$$

46. Ejercicio

Determinar las ecuaciones de los lados de un triángulo que cumple las siguientes

- a) tiene un vértice en $A(2, -7)$
- b) La recta $3x + y + 11 = 0$ es la altura relativa al vértice B
- c) La recta $x + 2y + 7 = 0$ es mediana correspondiente al vértice C

Solución

Hallo la recta perpendicular a la altura que pasa por A y contendrá a los puntos CA

$3x + y + 11 = 0$; $y = -3x - 11$; la perpendicular será $y = \frac{1}{3}x + C$, si pasa por A

$$-7 = \frac{1}{3} \cdot 2 + C; C = -\frac{23}{3}; \text{La recta será } y = \frac{1}{3}x - \frac{23}{3};$$

El punto de corte de estas dos rectas rectas perpendiculares será

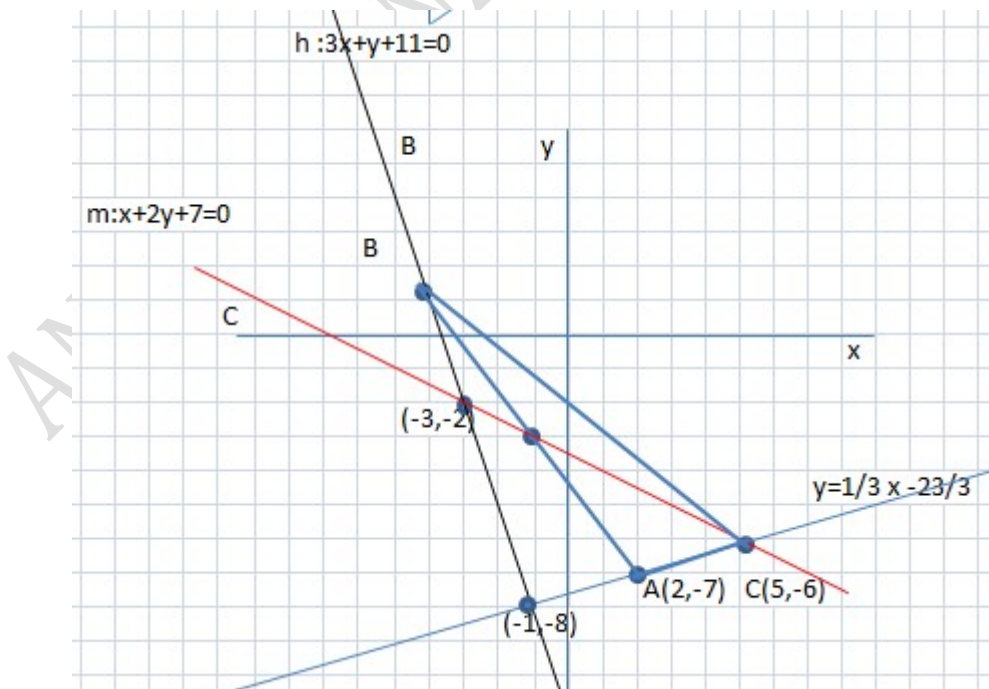
$$\begin{cases} y = -3x - 11 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{23}{3} \end{cases} \quad -3x - 11 = \frac{1}{3}x - \frac{23}{3}; -9x - 33 = x - 23; x = -\frac{10}{10} = -1; x = -1;$$

$$y = -3x - 11; \text{sustituyo } y = -3(-1) - 11; y = -8; (-1, -8)$$

El punto C estará en el punto de corte de las rect AC y la mediana

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{23}{3} \end{cases} \quad -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}x - \frac{23}{3}; -3x - 21 = 2x - 46; x = \frac{25}{5} = 5; x = 5;$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}; \text{sustituyo } y = -\frac{1}{2} \cdot 5 - \frac{7}{2} = -\frac{12}{2}; y = -6; C(5, -6)$$

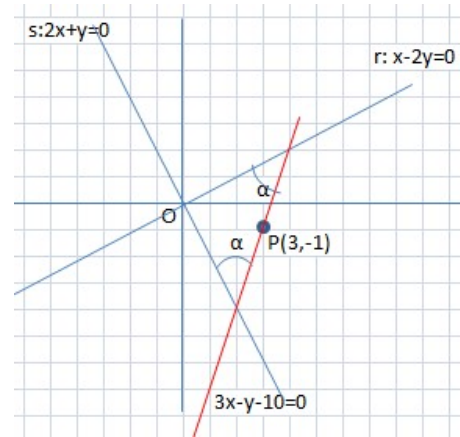


47. Ejercicio

Calcula la ecuación de la recta que pasa por $P(3, -1)$ y forma un triángulo isósceles con las rectas $r: x - 2y = 0$; y $s: 2x + y = 0$

Solución

$r: x - 2y = 0; y = \frac{1}{2}x$; y $s: 2x + y = 0$,
 $y = -2x$; las rectas son perpendiculares



Si el triángulo es isósceles los ángulos α son iguales ;

$$\alpha = \arccos \frac{|A * A + B * B|}{\sqrt{A^2 + B^2} * \sqrt{A^2 + B^2}}$$

la recta será $y = mx + n$ y que pase por $P(3, -1)$; $-1 = m * 3 + n$; $n = -1 - 3m$

la recta será $y = mx + (-1 - 3m)$; $mx - y + (-1 - 3m) = 0$

Ángulo formado por $x - 2y = 0$ y $mx - y + (-1 - 3m) = 0$

$$\alpha = \arccos \frac{|1 * m + (-2) * (-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2} * \sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|m + 2|}{\sqrt{5} * \sqrt{m^2 + 1}}$$

Ángulo formado por $2x + y = 0$ y $mx - y + (-1 - 3m) = 0$

$$\alpha = \arccos \frac{|2 * m + (1) * (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2} * \sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{2m - 1}{\sqrt{5} * \sqrt{m^2 + 1}}$$

Al ser isósceles ángulos iguales $\frac{m + 2}{\sqrt{5} * \sqrt{m^2 + 1}} = \frac{2m - 1}{\sqrt{5} * \sqrt{m^2 + 1}}$; $m + 2 = 2m - 1$

$m = 3$; sustituyo $n = -1 - 3m$; $n = -1 - 3 * 3 = -10$;

La recta será $y = 3x - 10$;

48. Ejercicio

Del rombo ABCD, se conocen las coordenadas $A(2,3)$, $C(-2, -5)$.

Sabiendo que su área es $20 u^2$. Hallar los

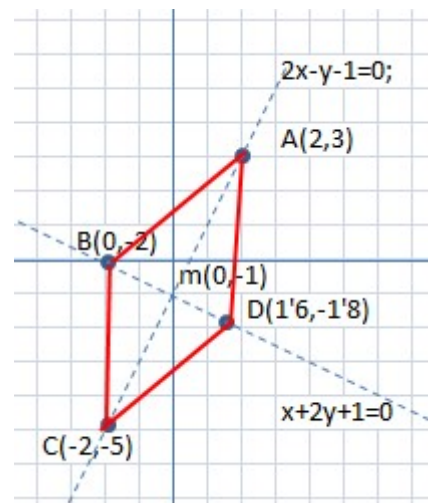
Vértices B y D y su perímetro

Solución

La diagonal AC estará en la recta

$$y - 3 = \frac{(-5) - 3}{(-2) - 2}(x - 2); y - 3 = \frac{-8}{-4}(x - 2)$$

$$y - 3 = 2x - 4; 2x - y - 1 = 0;$$



Los vértices BD estarán en la recta perpendicular que pase por el punto medio

$$\text{Punto medio } a = \frac{2 + (-2)}{2} = 0; a = \frac{3 + (-5)}{2} = -1; M(0, -1);$$

La recta perpendicular a $y = 2x - 1$; sera $y = -\frac{1}{2}x + C$; si pasa por $0, -1$)

$$-1 = -\frac{1}{2} * 0 + C; C = -1; \text{la recta que contiene a } BD \text{ ser\'a } y = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$\text{Se ha de cumplir Area} = \frac{D * d}{2} = 20; d = \frac{40}{D};$$

$$D = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (3 - (-5))^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80};$$

$$d = \frac{40}{\sqrt{80}} = 4,47$$

$$\text{El punto } B \text{ y el } D \text{ distara de } M \frac{4,47}{2} = 2,24$$

$$2,24 = \sqrt{(a - 0)^2 + (b - (-1))^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 1 + 2b}$$

$$\text{Estos puntos estar\'an en la recta } y = -\frac{1}{2}x - 1; b = -\frac{1}{2}a - 1; a = -2b - 2$$

$$\text{Sustituyo el valor de } a \text{ en } 2,24 = \sqrt{a^2 + b^2 + 1 + 2b} = \sqrt{(-2b - 2)^2 + b^2 + 1 + 2b}$$

$$(2,24)^2 = 5 = 4b^2 + 8b + 4 + b^2 + 1 + 2b = 5b^2 + 9b + 5; 5b^2 + 9b + (5 - 5) = 0;$$

$$5b^2 + 9b = 0; b(5b + 9) = 0; b = 0; b = -\frac{9}{5} = -1,8;$$

$$\begin{cases} \text{para } b = 0; a = -2; B(-2, 0) \\ \text{para } b = -1,8; a = 1,6; D(1,6, -1,8) \end{cases}$$

$$\text{medida del lado } AB = \sqrt{(0 - 2)^2 + ((-2) - 3)^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}; l = \sqrt{29}u$$

$$\text{Perimetro} = 4 * \sqrt{29}u = 4 * \sqrt{29}u$$

49. Ejercicio

Dadas las recta $r: x - 2y - 2 = 0$; y

$s: 2x - y + 6 = 0$, Hallar todas las rectas

que pasando por el punto $P(1,1)$

formen con r y s angulos iguales

Soluci3n

La recta pedida ser\'a $y = mx + n$ si ha de

pasar po $P(1,1)$; $1 = m * 1 + n$; $m = 1 - n$;

$$y = mx + (1 - m); mx - y + (1 - m) = 0$$

$$\text{Angulo } s \text{ y } t \begin{cases} 2x - y + 6 = 0, \\ mx - y + (1 - m) = 0 \end{cases} \cos \alpha = \frac{|2 * m + (-1) * (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2} * \sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{2m + 1}{\sqrt{5} * \sqrt{m^2 + 1}}$$

$$\text{Angulo } r \text{ y } t \begin{cases} x - 2y - 2 = 0, \\ mx - y + (1 - m) = 0 \end{cases} \cos \beta = \frac{|1 * m + (-2) * (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} * \sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{m + 2}{\sqrt{5} * \sqrt{m^2 + 1}}$$

Como quermoe que formen el mismo angulo $\cos \alpha = \cos \beta$

$$\frac{2m + 1}{\sqrt{5} * \sqrt{m^2 + 1}} = \frac{m + 2}{\sqrt{5} * \sqrt{m^2 + 1}}; 2m + 1 = m + 2; m = 1; n = 1 - m; n = 1 - 1 = 0;$$

La recta ser\'a $y = x$

