

Planos y rectas en el espacio

Contenido

1	SISTEMAS DE REFERENCIA EN EL ESPACIO	3
2	VECTORES DEFINIDOS POR DOS PUNTOS.....	4
3	ECUACIONES DE LA RECTA.....	7
3.1	ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA	7
3.2	ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA	7
3.3	ECUACIÓN CONTINUA.....	7
3.4	ECUACIÓN IMPLÍCITA.....	8
4	ECUACIÓN DEL PLANO	14
4.1	ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO.....	14
4.2	ECUACIÓN PARAMÉTRICA.....	14
4.3	ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA DEL PLANO	14
5	PLANOS COORDENADOS.....	17
5.1	PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS XY, XZ, YZ.....	17
5.2	ECUACIÓN DEL PLANO QUE PASA POR TRES PUNTOS	18
6	VECTOR NORMAL A UN PLANO	19
7	SIMETRÍAS 22	
7.1	SIMETRÍA DE UN PUNTO RESPECTO A OTRO PUNTO.....	22
7.2	SIMETRÍA DE UN PUNTO RESPECTO A UNA RECTA.....	22
7.3	SIMETRÍA DE UN PUNTO RESPECTO A UN PLANO	24
8	POSICIÓN RELATIVA DE UNA RECTA Y UN PLANO	25
8.1	COMPROBAMOS SI TIENEN PUNTOS COMUNES	25
8.2	COMPROBAMOS MEDIANTE LA DISCUSIÓN DEL SISTEMA	25
9	POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS.....	30
9.1	DETERMINACIÓN DE LA RECTA INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS	32
10	POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS.....	34

11	POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS	38
12	HACES DE PLANOS.....	43
12.1	HAZ DE PLANOS PARALELOS.....	43
12.2	HAZ DE PLANOS SECANTES.....	44

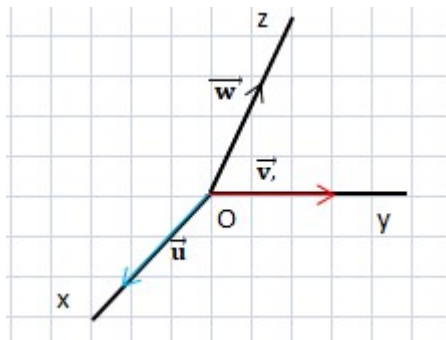
ANGEL HERNANDEZ DE CASTRO

1 Sistemas de referencia en el espacio

Todo punto en el espacio viene definido por tres números (coordenadas)

Para determinar las coordenadas de un punto en el espacio hemos de definir previamente un sistema de referencia (base del espacio vectorial).

El sistema de referencia viene definido por un punto fijo O (origen de coordenadas) una base vectorial $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$



Si estos vectores son una base en R^3 han de cumplir:

1º Que los vectores sean linealmente independientes

2º Que sean conjunto de generadores

Sistema de referencia ortonormal:

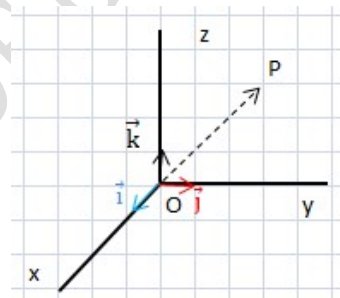
Base Ortogonal: Una base se dice que es ortogonal si sus vectores son perpendiculares

Base normada: Una base se dice que es normada si los vectores que la forman son unitarios

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1;$$

Base ortonormal : Una base se dice que es ortonormal

si es a la vez ortogonal y normada



Para simplificar los calculos se toma una base ortonormal $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;

donde $O = (0,0,0)$; $\vec{i} = (1,0,0)$; $\vec{j} = (0,1,0)$ y $\vec{k} = (0,0,1)$

Todo punto P del espacio se puede representar por su vector de posicion

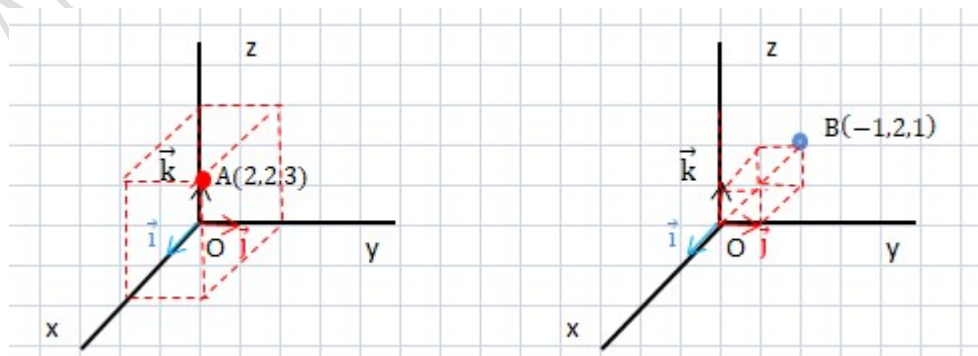
$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donde (x,y,z) son las coordenadas del punto P

1. Ejercicio

Representar los puntos del espacio de tres dimensiones $A(2,2,3)$ $B(-1,2,1)$ tomando

$\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ com referencia

Solución



2. Ejercicio

En el cubo se toma como referencia $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\}$

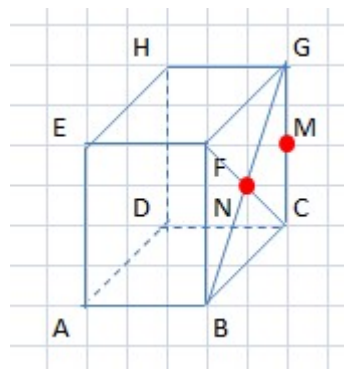
calcula las coordenadas de los puntos F, G, C, M y N

Solución

$$F = (1,0,1); G = (1,1,1); C = (1,1,0)$$

$$M = \frac{G + C}{2} = \frac{(1,1,1) + (1,1,0)}{2} = \frac{(2,2,1)}{2} = (1,1,\frac{1}{2})$$

$$N = \frac{F + C}{2} = \frac{(1,0,1) + (1,1,0)}{2} = \frac{(2,1,1)}{2} = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$



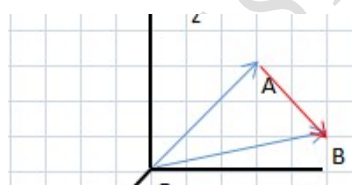
2 Vectores definidos por dos puntos

Todo punto A en el espacio viene definido por

su vector de posición $\overrightarrow{OA}$ que tiene origen en O

y extremo en A

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



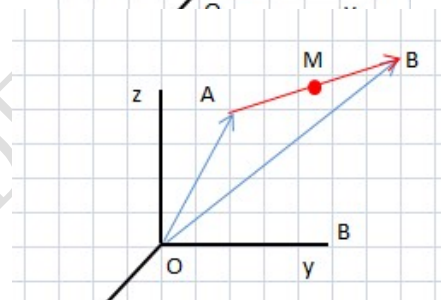
Coordenadas del punto medio de un segmento

El punto medio M (m_1, m_2, m_3) del segmento

A (a_1, a_2, a_3) y B (b_1, b_2, b_3)

$$M = \frac{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3}{2} =$$

$$M = \frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} = (m_1, m_2, m_3)$$



3. Ejercicio

Calcula las coordenadas de los vectores que tienen origen en A y extremo en B

a) $A(2,0,-3); B(0,-3,5)$

b) $A(\frac{1}{2}, -2, \frac{2}{2}); B(-1, \frac{3}{5}, 2)$

Solución

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{AB} = (0, -3, 5) - (2, 0, -3) = (-2, -3, 8)$

b) $\overrightarrow{AB} = B - A; \overrightarrow{AB} = (-1, \frac{3}{5}, 2) - (\frac{1}{2}, -2, \frac{2}{2}) = ((-1 - \frac{1}{2}), (\frac{3}{5} - (-2)), (2 - \frac{2}{2})) =$

$$\overrightarrow{AB} = (-\frac{3}{2}, \frac{13}{5}, 1)$$

4. Ejercicio

Las coordenadas de un vector son $(4,0,-2)$ y las de su origen A $(-3,2,-1)$. Calcula las coordenadas de su extremo

Solución

Las coordenadas de un vector $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA};$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = (4,0,-2) + (-3,2,-1) = (1,2,-3)$$

Coordenadas del extremo $(1,2,-3)$

5. Ejercicio

Calcular las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo de vértices

$A(2,2,-1)$; $B(-1,3,2)$ y $C(0,-2,4)$

Solución

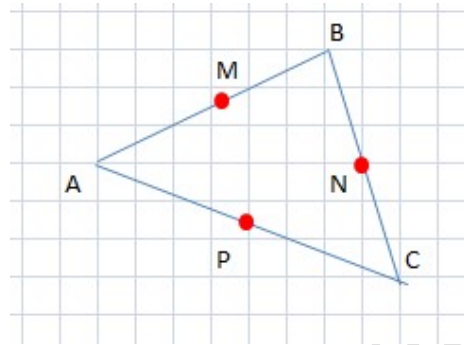
$$M = \frac{B + A}{2} = \frac{(-1,3,2) + (2,2,-1)}{2} = \frac{(1,5,1)}{2}$$

$$M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$N = \frac{B + C}{2} = \frac{(-1,3,2) + (0,-2,4)}{2} = \frac{(-1,1,6)}{2}$$

$$N\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$$

$$P = \frac{C + A}{2} = \frac{(0,-2,4) + (2,2,-1)}{2} = \frac{(2,0,3)}{2} = \left(\frac{2}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) = \left(1, 0, \frac{3}{2}\right)$$



6. Ejercicio

Dado el segmento AB donde $A(-5,4,-2)$ y $B(-2,1,-2)$

a) Calcular las coordenadas del punto M tal que $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

b) Calcular las coordenadas del punto N tal que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

c) Calcular las coordenadas del punto medio de MN.

Solución

a) Calcular las coordenadas del punto M tal que $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$;

$$\overrightarrow{AB} = (-2,1,-2) - (-5,4,-2) = (3,-3,0)$$

$$M \text{ será } (x, y, z); \overrightarrow{AM} = (x, y, z) - (-5,4,-2) = ((x+5), (y-4), (z+2))$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow ((x+5), (y-4), (z+2)) = \frac{4}{3}(3,-3,0) = (4-4,0) \text{ igualamos}$$

$$\overrightarrow{AM} = \begin{cases} x+5 = 4; x = -1; \\ y-4 = -4; y = 0; \\ z+2 = 0; z = -2; \end{cases} \overrightarrow{AM} = (-1,0,-2) \text{ el punto } M = (-1,0,-2)$$

b) Calcular las coordenadas del punto N tal que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

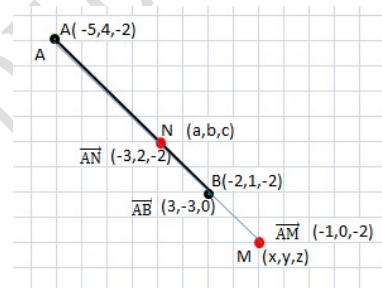
$$N = (a, b, c); \overrightarrow{AN} = (a, b, c) - (-5,4,-2) = ((a+5), (b-4), (c+2))$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}; ((a+5), (b-4), (c+2)) = \frac{2}{3}(3,-3,0) = (2,-2,0) \text{ igualamos}$$

$$\overrightarrow{AN} = \begin{cases} a+5 = 2; a = -3; \\ b-4 = -2; b = 2; \\ c+2 = 0; c = -2; \end{cases} \overrightarrow{AN} = (-3,2,-2) \text{ el punto } N = (-3,2,-2)$$

c) Calcular las coordenadas del punto medio de MN.

$$\text{Punto medio MN} = \frac{M + N}{2} = \frac{(-1,0,-2) + (-3,2,-2)}{2} = \frac{(-4,2,-4)}{2} = (-2,1,-2) = B$$



7. Ejercicio

Halla las coordenadas de los puntos C y D que dividen al segmento de extremos A(1,2,1) y B(-1,0,3) en tres partes iguales.

Solución

Si dividimos el segmento en 3 partes

el vector $\vec{AB} = 3 \vec{AC}$

$$\vec{AB} = B - A = (-1,0,3) - (1,2,1) = (-2,-2,2); C = (x,y,z);$$

$$\vec{AC} = (x,y,z) - (1,2,1) = ((x-1), (y-2), (z-1))$$

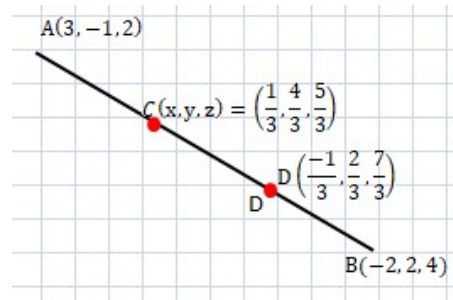
$$\vec{AB} = 3 \vec{AC}; (-2,-2,2) = 3((x-1), (y-2), (z-1)); \text{Igualamos } \begin{cases} -2 = 3x - 3; x = \frac{1}{3}; \\ -2 = 3y - 6; y = \frac{4}{3}; \\ 2 = 3z - 3; z = \frac{5}{3}; \end{cases}$$

$$C(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Tenemos que D es punto medio C y B podemos calcularlo directamente

$$D = \frac{B(-1,0,3) + C\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)}{2} = \frac{(-1,0,3) + \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)}{2} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)}{2} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right);$$

$$D\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right);$$



8. Ejercicio

Halla las coordenadas de los puntos A, B, C que dividen al segmento de extremos

$$P\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right) \text{ y } Q\left(-3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

en cuatro segmentos iguales.

Solución

Si dividimos el segmento en 4 partes el vector $\vec{PQ} = 4 \vec{PA}$

$$\vec{PQ} = Q - P = \left(-3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right) - \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right) = (-4, 1, \frac{4}{3}); A = (x,y,z);$$

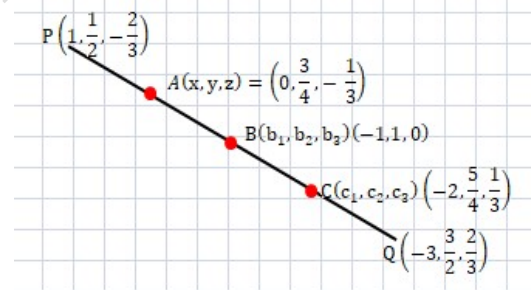
$$\vec{PA} = (x,y,z) - \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right) = \left((x-1), \left(y-\frac{1}{2}\right), \left(z+\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$\vec{PQ} = 4 \vec{PA}; (-4, 1, \frac{4}{3}) = 4\left((x-1), \left(y-\frac{1}{2}\right), \left(z+\frac{2}{3}\right)\right); \text{Igualamos } \begin{cases} -4 = 4x - 4; x = 0; \\ 1 = 4y - 2; y = \frac{3}{4}; \\ \frac{4}{3} = 4z + \frac{8}{3}; z = -\frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$A(x,y,z) = \left(0, \frac{3}{4}, -\frac{1}{3}\right)$$

Tenemos que A es punto medio del segmento P y B; podemos calcularlo directamente

$$A(x,y,z) = \left(0, \frac{3}{4}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{P\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right) + B(b_1, b_2, b_3)}{2}; \left(0, \frac{3}{4}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right) + (b_1, b_2, b_3)}{2};$$



$$(b_1, b_2, b_3) = 2\left(0, \frac{3}{4}, -\frac{1}{3}\right) - \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right) = \left(-1, \frac{2}{2}, 0\right) = (-1, 1, 0); B(b_1, b_2, b_3)(-1, 1, 0)$$

Tenemos que C es punto medio del segmento B y Q; podemos calcularlo directamente

$$C(c_1, c_2, c_3) = \frac{B(-1, 1, 0) + Q\left(-3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{(-1, 1, 0) + \left(-3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{\left(-4, \frac{5}{2}, \frac{2}{3}\right)}{2} = \left(-2, \frac{5}{4}, \frac{1}{3}\right)$$

$$C(c_1, c_2, c_3) \left(-2, \frac{5}{4}, \frac{1}{3}\right);$$

3 Ecuaciones de la recta

3.1 Ecuación vectorial de la recta

Una recta viene definida por un vector que lleve su dirección, (*vector director* $\vec{d}$) y un punto de la recta (*punto de paso* P).

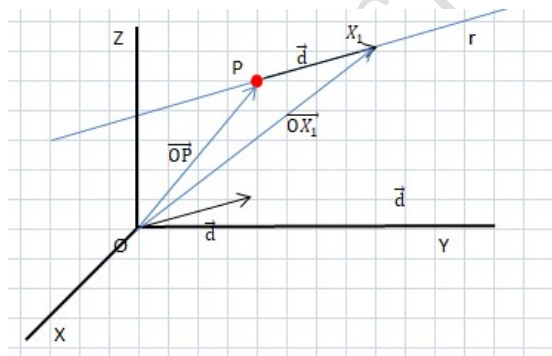
Si tenemos un vector $\vec{d}$ y un punto P cualquiera de la recta r

Tendremos que $\overrightarrow{OX_1} = \overrightarrow{OP} + \vec{d}$

Si tomamos un vector $\lambda\vec{d}$ ire obteniendo distintos vectores $\overrightarrow{OX_1}, \overrightarrow{OX_2}, \overrightarrow{OX_3} \dots \overrightarrow{OX_n}$
Obtendremos distintos puntos de la recta

La ecuación vectorial de la recta será $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{d}$

Ecuación vectorial $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{d}$



3.2 Ecuación paramétrica de la recta

Para hallar la ecuación paramétrica de la recta sustituimos en la ecuación vectorial, las coordenadas de los elementos que intervienen

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{d}; \begin{cases} \overrightarrow{OX} \text{ parte del origen de coordenadas; será el vector de posición del punto } X; X(x, y, z) \\ \overrightarrow{OP} \text{ será el vector de posición del punto } P(a, b, c) \\ \lambda\vec{d} = \lambda(d_1, d_2, d_3) \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda(d_1, d_2, d_3); (x, y, z) = ((a + \lambda d_1), (b + \lambda d_2), (c + \lambda d_3));$$

igualamos
$$\begin{cases} x = a + \lambda d_1 \\ y = b + \lambda d_2 \\ z = c + \lambda d_3 \end{cases} \text{ Ecuación Paramétrica de la recta}$$

3.3 Ecuación Continua

La ecuación continua se halla despejando el parámetro en la ecuación Paramétrica

$$\begin{cases} x = a + \lambda d_1 \\ y = b + \lambda d_2 \\ z = c + \lambda d_3 \end{cases}; \begin{cases} x = a + \lambda; \lambda = \frac{x-a}{d_1} \\ y = b + \lambda d_2; \lambda = \frac{y-b}{d_2} \\ z = c + \lambda d_3; \lambda = \frac{z-c}{d_3} \end{cases}; \text{igualamos } \frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} = \frac{z-c}{d_3}$$

$$\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} = \frac{z-c}{d_3}; \text{Ecuación continua}$$

3.4 Ecuación Implícita

A partir de la ecuación paramétrica de la recta obtenemos las ecuaciones implícitas

$$\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} = \frac{z-c}{d_3}; \begin{cases} \frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} \\ \frac{x-a}{d_1} = \frac{z-c}{d_3} \end{cases}; \begin{cases} d_2(x-a) = d_1(y-b); d_2(x-a) - d_1(y-b) = 0; \\ d_3(x-a) = d_1(z-c); d_3(x-a) - d_1(z-c) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_2x - d_1y - d_2a + d_1b = 0; d_2x - d_1y + (d_1b - d_2a) = 0 \\ d_3x - d_1z - d_3a + d_1c = 0; d_3x - d_1z + (d_1c - d_3a) = 0 \end{cases}$$

$$Ax + By + C = 0; \begin{cases} A = d_2; \\ B = -d_1; \\ C = d_1b - d_2a; \end{cases}$$

$$A'x + B'y + C' = 0; \begin{cases} A' = d_3; \\ B' = -d_1; \\ C' = d_1c - d_3a; \end{cases}$$

$$\text{Ecuación Implícita} \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

9. Ejercicio

Comprueba si los puntos $A(-3,1,3)$, $B(3,1,5)$ y $C(1, -1,2)$ pertenecen a la recta que pasa por $P(-1,1, -1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-2,0, -3)$. Calcula dos puntos más de la recta

Solución

$$\begin{cases} x = a + \lambda d_1 \\ y = b + \lambda d_2 \\ z = c + \lambda d_3 \end{cases}; \text{ecuación paramétrica} \begin{cases} x = -1 + \lambda(-2) \\ y = 1 + \lambda(0) \\ z = -1 + \lambda(-3) \end{cases} \text{ comprobamos si los puntos pertenecen}$$

$$\text{para } A(-3,1,3) \begin{cases} -3 = -1 + \lambda(-2) \\ 1 = 1 + \lambda(0) \\ 3 = -1 + \lambda(-3) \end{cases} \begin{cases} -2 = \lambda(-2); \lambda = 1 \\ 1 = 1 + \lambda(0); \\ 4 = \lambda(-3); \lambda = -\frac{4}{3} \end{cases} \text{ (No pertenece a la recta)}$$

$$\text{para } B(3,1,5) \begin{cases} 3 = -1 + \lambda(-2) \\ 1 = 1 + \lambda(0) \\ 5 = -1 + \lambda(-3) \end{cases} \begin{cases} 4 = \lambda(-2); \lambda = -\frac{4}{2} = -2 \\ 1 = 1 + \lambda(0); \text{ para todo } \lambda \\ 6 = \lambda(-3); \lambda = -\frac{6}{3} = -2 \end{cases} \text{ (pertenece a la recta)}$$

$$\text{para } C(1, -1,2) \begin{cases} -2 = -1 + \lambda(-2) \\ 0 = 1 + \lambda(0) \\ -3 = -1 + \lambda(-3) \end{cases} \begin{cases} -1 = \lambda(-2); \lambda = -\frac{1}{2} \\ 0 = 1 + \lambda(0); 0 \neq 1 \\ -2 = \lambda(-3); \lambda = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ (No pertenece a la recta)}$$

$$\text{Otros puntos de la recta para } \lambda = 1 \begin{cases} x = -1 + \lambda(-2) \\ y = 1 + \lambda(0) \\ z = -1 + \lambda(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 1(-2); x = -3 \\ y = 1 + 1(0); y = 1; \\ z = -1 + 1(-3); z = -4 \end{cases} (-3,1, -4)$$

$$\text{para } \lambda = 0 \begin{cases} x = -1 + \lambda(-2) \\ y = 1 + \lambda(0) \\ z = -1 + \lambda(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 0(-2); x = -1 \\ y = 1 + 0(0); y = 1; \\ z = -1 + 0(-3); z = -1 \end{cases} (-1,1, -1)$$

10. Ejercicio

Considera la recta que pasa por el punto S (1, -2, 5) y lleva la dirección del vector $\vec{v}(-2, 2, 0)$

- calcula la ecuación vectorial
- Halla su ecuación paramétrica.

Solución

- calcula la ecuación vectorial

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \lambda \vec{d}; \Rightarrow \vec{OX} = (1, -2, 5) + \lambda(-2, 2, 0)$$

- Halla su ecuación paramétrica.

$$\begin{cases} x = a + \lambda d_1 \\ y = b + \lambda d_2 \\ z = c + \lambda d_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda(-2) \\ y = -2 + \lambda 2 \\ z = 5 + \lambda(0) \end{cases}$$

11. Ejercicio

Calcula en cada caso, unas ecuaciones implícitas de la recta que cumple las siguientes condiciones

- Pasa por A(-1, 1, 3) y tiene la dirección del vector $\vec{u}(-1, -2, 4)$
- Pasa por los puntos A(2, 2, -1) y B(2, -4, 2)
- Pasa por el punto A(-1, -2, 0) y es paralela al segmento de extremos B(0, -3, 1) y C(1, 1, 0)
- Pasa por el punto A(2, -2, -3) y es paralela al eje Y.

Solución

- Pasa por A(-1, 1, 3) y tiene la dirección del vector $\vec{u}(-1, -2, 4)$

$$\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} = \frac{z-c}{d_3}; \frac{x-(-1)}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{x-(-1)}{-1} = \frac{y-1}{-2}; -2x-2 = -y+1; 2x-y+3=0; \\ \frac{x-(-1)}{-1} = \frac{z-3}{4}; 4x+4 = -z+3; 4x+z+1=0; \end{cases} \begin{cases} 2x-y+3=0 \\ 4x+z+1=0 \end{cases}$$

- Pasa por los puntos A(2, 2, -1) y B(2, -4, 2)

$$\text{El vector } \vec{d} = B - A; \vec{d} = (2, -4, 2) - (2, 2, -1) = (0, -6, 3)$$

Tengo un punto de paso A y vector director $\vec{d}$

$$\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} = \frac{z-c}{d_3}; \frac{x-2}{0} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-(-1)}{3};$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{0} = \frac{y-2}{-6}; -6x+12=0 \\ \frac{x-2}{0} = \frac{z-(-1)}{3}; 3x-6=0; \end{cases} \begin{cases} 6x-12=0 \\ 3x-6=0 \end{cases} \begin{cases} x-2=0 \\ x-2=0 \end{cases} \text{ como son iguales tomo la otra}$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{0} = \frac{y-2}{-6}; -6x+12=0 \\ \frac{y-2}{-6} = \frac{z-(-1)}{3}; 3y-6 = -6z-6; \end{cases} \begin{cases} 6x-12=0 \\ 3y+6z=0 \end{cases} \begin{cases} x-2=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$$

- Pasa por el punto A(-1, -2, 0) y es paralela al segmento de extremos B(0, -3, 1) y C(1, 1, 0)

Si es paralela al segmento tendrá el mismo vector que la recta; El vector del segmento = $\vec{d}$

$$\vec{d} = C - B; \vec{d} = (1, 1, 0) - (0, -3, 1) = (1, 4, -1)$$

Tenemos punto de paso A y vector director $\vec{d}$

$$\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} = \frac{z-c}{d_3}; \frac{x-(-1)}{1} = \frac{y-(-2)}{4} = \frac{z-0}{-1}$$

$$\begin{cases} \frac{x - (-1)}{1} = \frac{y - (-2)}{4}; 4x + 4 = y + 2; 4x - y + 2 = 0 \\ \frac{x - (-1)}{1} = \frac{z - 0}{-1}; -x - 1 = z; x + z + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x - y + 2 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

d) Pasa por el punto A(2, -2, -3) y es paralela al eje Y

Paralela al eje Y $\Rightarrow \vec{d} = (0, 1, 0)$

$$\frac{x - 2}{0} = \frac{y - (-2)}{1} = \frac{z - (-3)}{0} \begin{cases} \frac{x - 2}{0} = \frac{y - (-2)}{1}; x - 2 = 0; \\ \frac{y - (-2)}{1} = \frac{z - (-3)}{0}; z + 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x - 2 = 0; \\ z + 3 = 0 \end{cases}$$

12. Ejercicio

Halla unas ecuaciones parametricas para las rectas de ecuaciones implícitas

a) r: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ b) s: $\begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$

Solución

Para pasar de ecuacion implicita a parametrica tengo que hallar dos puntos de paso de la recta

doy valores a una de las variables ej $x = 0$

r: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0; \begin{cases} 0 + y = 0 \\ 0 - y + z = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = 0 \\ y = -z; \end{cases}$ Un punto de paso será (0,0,0)

doy valores a otra variable ej $y = 1$

r: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 1; \begin{cases} x + 1 = 0; \\ 2x - 1 + z = 0; \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ -3 + z = 0; z = 3; \end{cases}$ otro punto de paso será (-1,1,3)

Punto de paso (0,0,0); vector director $\vec{d} = (-1, 1, 3) - (0, 0, 0) = (-1, 1, 3)$

$$\begin{cases} x = a + \lambda d_1 \\ y = b + \lambda d_2 \\ z = c + \lambda d_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + \lambda(-1) \\ y = 0 + \lambda(1) \\ z = 0 + \lambda(3) \end{cases}; \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

b) s: $\begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$

Doy valores a una de las variables ej $x = 0; \begin{cases} 3 \cdot 0 - 2y - z = 0 \\ 0 + y + z - 3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} -2y - z = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$ sumo las dos

$-y - 3 = 0; y = -3; \text{sustituyo en } -2y - z = 0; \Rightarrow 6 - z = 0; z = 6$ Un punto será (0, -3, 6)

Doy valores a una de las variables ej $y = 0; \begin{cases} 3x - 2 \cdot 0 - z = 0 \\ x + 0 + z - 3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x - z = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$ sumo las dos

$4x - 3 = 0; x = \frac{3}{4}; \text{sustituyo en } 3x - z = 0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{3}{4} - z = 0; z = \frac{9}{4};$

otro punto será $(\frac{3}{4}, 0, \frac{9}{4})$

Punto de paso (0, -3, 6); vector director $\vec{d} = (\frac{3}{4}, 0, \frac{9}{4}) - (0, -3, 6) = (\frac{3}{4}, 3, -\frac{15}{4})$

$$\begin{cases} x = a + \lambda d_1 \\ y = b + \lambda d_2 \\ z = c + \lambda d_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + \lambda \frac{3}{4} \\ y = -3 + \lambda \cdot 3 \\ z = 6 + \lambda(-\frac{15}{4}) \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{3}{4}\lambda \\ y = 3\lambda - 3 \\ z = -\frac{15}{4}\lambda + 6 \end{cases}$$

PRUEBA para $\lambda = 0 \begin{cases} x = \frac{3}{4}\lambda \\ y = 3\lambda - 3 \\ z = -\frac{15}{4}\lambda + 6 \end{cases} (0, -3, 6); \text{ Para } \lambda = 1 \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 0 \\ z = \frac{9}{4} \end{cases} (\frac{3}{4}, 0, \frac{9}{4})$

13. Ejercicio

Dada la recta $r: \begin{cases} x = y \\ x + z = 0 \end{cases}$

a) Calcula dos puntos de ella

b) Calcula los puntos simétricos de los hallados en el punto anterior respecto al origen de coordenadas

c) Calcula la recta simétrica respecto al origen de coordenadas

Solución

a) Calcula dos puntos de ella

$$r: \begin{cases} x = y \\ x + z = 0 \end{cases} \text{ Para } x = 0; \begin{cases} 0 = y \\ z = 0 \end{cases}; \text{ Punto } (0,0,0)$$

$$r: \begin{cases} x = y \\ x + z = 0 \end{cases} \text{ Para } x = 1; \begin{cases} 1 = y \\ z = -1 \end{cases}; \text{ Punto } (1,1,-1)$$

b) Calcula los puntos simétricos de los hallados en el punto anterior respecto al origen de coordenadas

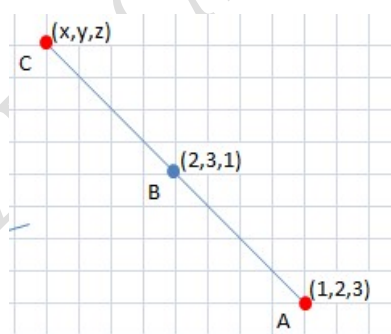
Punto simétrico de A respecto B será un punto C donde B será el punto medio del segmento AC

$$C = \begin{cases} 2 = \frac{1+x}{2} \\ 3 = \frac{2+y}{2} \\ 1 = \frac{3+z}{2} \end{cases}; C \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{cases} \text{ Punto } C(3,4,-1)$$

$$A(0,0,0); B(0,0,0); \Rightarrow C$$

$$= \begin{cases} 0 = \frac{0+x}{2} \\ 0 = \frac{0+y}{2} \\ 0 = \frac{0+z}{2} \end{cases}; C \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ Punto } C(0,0,0)$$

$$A(1,1,-1); B(0,0,0); \Rightarrow C = \begin{cases} 0 = \frac{1+x}{2} \\ 0 = \frac{1+y}{2} \\ 0 = \frac{-1+z}{2} \end{cases}; C \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \text{ Punto } C(-1,-1,1)$$



c) Calcula la recta simétrica respecto al origen de coordenadas

Para calcular una recta simétrica a otra respecto

a un punto (a, b, c) ;

Hallamos dos puntos de la recta s y calculamos sus simétricos respecto al origen de simetría

$$r: \begin{cases} x = y \\ x + z = 0 \end{cases} \text{ dos puntos son } A(0,0,0) \text{ y } B(1,1,-1)$$

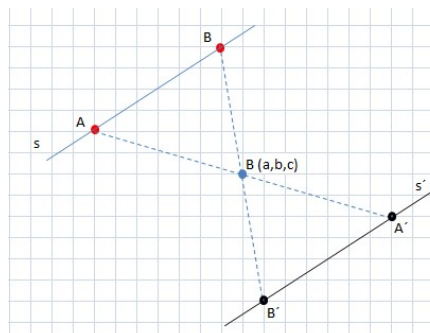
Los puntos simétricos a A y B son; $A'(0,0,0)$

y $B'(-1,-1,1)$

La recta simétrica tendrá punto de paso $(0,0,0)$

$$\vec{d} \text{ (vector director) } B'(-1,-1,1) - A'(0,0,0) = (-1,-1,1)$$

$$\text{la recta simétrica será } r': \begin{cases} x = a + \lambda d_1 \\ y = b + \lambda d_2 \\ z = c + \lambda d_3 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 + \lambda(-1) \\ y = 0 + \lambda(-1) \\ z = 0 + \lambda(1) \end{cases} = r': \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$



14. Ejercicio

Calcular dos puntos de cada una de las siguientes rectas

$$a) \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad b) \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}; \quad c) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

Solución

$$a) \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \text{ para } \lambda = 0; \begin{cases} x = -2 + 0 \\ y = -1 + 0 \\ z = -1 + 0 \end{cases} \text{ Punto } (-2, -1, -1)$$

$$\text{para } \lambda = 1; \begin{cases} x = -2 + 2 \cdot 1 \\ y = -1 + 1 \\ z = -1 + 2 \cdot 1 \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \text{ Punto } (0, 0, 1)$$

$$b) \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = -y - 2; \\ -2y - 4 = 2z \end{cases} \begin{cases} 2x + y = 0; \\ 2y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{para } x = 0 \begin{cases} 0 + y = 0; y = 0; \\ 2y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \text{ sustituyo } 2 \cdot 0 + 2z + 4 = 0; z = -2; (0, 0, -2)$$

$$\text{para } x = 1 \begin{cases} 2 + y = 0; y = -2; \\ 2y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \text{ sustituyo } 2 \cdot (-2) + 2z + 4 = 0; z = 0; (1, -2, 0)$$

$$c) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}; \text{ para } x = 0; \begin{cases} 0 - 2y + z = 0 \\ 0 - y - z = 0 \end{cases} \text{ sumo las dos } -3y = 0; y = 0;$$

$$\text{sustituyo } 2x - y - z = 0 \Rightarrow 0 - 0 - z = 0; z = 0; (0, 0, 0)$$

$$\text{para } x = 1; \begin{cases} 1 - 2y + z = 0; \\ 2 - y - z = 0; \end{cases} \begin{cases} -2y + z + 1 = 0 \\ -y - z + 2 = 0 \end{cases} \text{ sumo las dos } -3y + 3 = 0; y = 1;$$

$$\text{sustituyo } 2x - y - z = 0 \Rightarrow 2 - 1 - z = 0; z = 1; (1, 1, 1)$$

15. Ejercicio

Calcular un punto y un vector de dirección de cada una de las siguientes rectas

$$a) \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad b) \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}; \quad c) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

Solución

$$a) \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} P(2, -1, -1); \vec{d}(2, 1, 2)$$

$$b) \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}; P(1, -2, 0); \vec{d}(-1, 2, -2)$$

$$c) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \text{ podriamos hallarlo determinando dos puntos de la recta}$$

del ejercicio anterior tenemos (0,0,0) y (1,1,1); $\vec{d} = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1)$; $\vec{d} = (1,1,1)$

Por otro lado dado que esta recta viene determinada como la intersección de dos planos su vector director será perpendicular a los planos, será igual al producto vectorial de los vectores normales de los planos.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3i - (-3)j + 3k \text{ vector director de la recta } \vec{d}(3, 3, 3)$$

16. Ejercicio

Escribir las ecuaciones de las rectas paralelas o los ejes y que pasen por el punto P(3,3,4)

Solución

Recta paralela al eje X : $\begin{cases} \text{Punto de paso } P(3,3,4) \\ \text{Vector director } \vec{d}(1,0,0) \end{cases}$

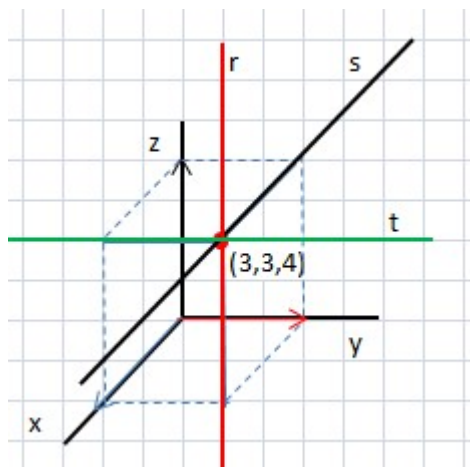
$$s: \begin{cases} x = a + \lambda d_1 \\ y = b + \lambda d_2 \\ z = c + \lambda d_3 \end{cases} \begin{cases} x = 3 + \lambda * 1 \\ y = 3 + \lambda * 0 \\ z = 4 + \lambda * 0 \end{cases}; s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$$

Recta paralela al eje y : $\begin{cases} \text{Punto de paso } P(3,3,4) \\ \text{Vector director } \vec{d}(0,1,0) \end{cases}$

$$t: \begin{cases} x = a + \lambda d_1 \\ y = b + \lambda d_2 \\ z = c + \lambda d_3 \end{cases} \begin{cases} x = 3 + \lambda * 0 \\ y = 3 + \lambda * 1 \\ z = 4 + \lambda * 0 \end{cases}; t: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

Recta paralela al eje Z : $\begin{cases} \text{Punto de paso } P(3,3,4) \\ \text{Vector director } \vec{d}(0,0,1) \end{cases}$

$$r: \begin{cases} x = a + \lambda d_1 \\ y = b + \lambda d_2 \\ z = c + \lambda d_3 \end{cases} \begin{cases} x = 3 + \lambda * 0 \\ y = 3 + \lambda * 0 \\ z = 4 + \lambda * 1 \end{cases}; r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$



17. Ejercicio

Comprobar si los puntos pertenecen a una misma recta

a) A(5, -1, -4); B(3,3,2) y C(2,5,5)

b) A(1, -1, 1); B(-1, -2, 1) y C(3, -1, 1)

Solución

a) A(5, -1, -4); B(3,3,2) y C(2,5,5) **podemos comprobarlo viendo si pertenecen a la recta:**

Hallo la recta que pasa por A y B $\begin{cases} \text{Punto de paso } P(3,3,2) \\ \text{Vector director } \vec{d} = B(3,3,2) - A(5, -1, -4) = (-2, 4, 6) \end{cases}$

$$\text{recta que pasa por A y B} \begin{cases} x = 3 + \lambda * (-2) \\ y = 3 + \lambda * 4 \\ z = 2 + \lambda * 6 \end{cases} = \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = 2 + 6\lambda \end{cases}$$

$$\text{compruebo si } C(2,5,5) \text{ pertenece a la recta} \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = 2 + 6\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 3 - 2\lambda; \lambda = \frac{1}{2} \\ 5 = 3 + 4\lambda; \lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ 5 = 2 + 6\lambda; \lambda = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Como pertenece a la recta los tres puntos están alineados

b) A(1, -1, 1); B(-1, -2, 1) y C(3, -1, 1) **lo comprobamos viendo si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$**

son proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = B(-1, -2, 1) - A(1, -1, 1) = (-2, -1, 0) \\ \overrightarrow{BC} = C(3, -1, 1) - B(-1, -2, 1) = (4, 1, 0) \end{cases} \text{ compruebo } \frac{-2}{4} = \frac{-1}{1} = \frac{0}{0}$$

no son proporcionales, luego no pertenecen a la misma recta

4 Ecuación del plano

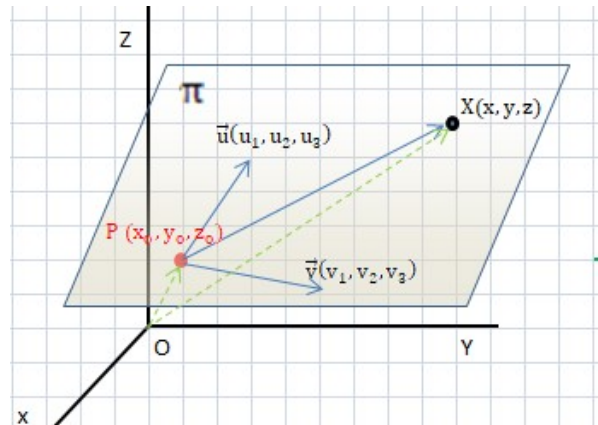
Un plano π queda determinado por un

puntos $P(x_0, y_0, z_0)$ y dos vectores

(linealmente independientes)

(vectores directores), $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$

y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, que pertenezcan al plano.



4.1 Ecuación vectorial del plano

Si tomamos un punto cualquiera

del plano $X(x, y, z)$

$$\vec{PX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

el vector $\vec{PX} = X - P = X(x, y, z) - P(x_0, y_0, z_0)$

$$\vec{PX} = ((x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)) = \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

Ecuación Vectorial del plano $\vec{X} = \vec{P} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$

4.2 Ecuación paramétrica

Igualando ecuaciones $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1; \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2; \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

4.3 Ecuación General o Implícita del Plano

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1; \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2; \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = \lambda u_1 + \mu v_1; \\ y - y_0 = \lambda u_2 + \mu v_2; \\ z - z_0 = \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

El sistema ha de ser compatible y determinado para las incógnitas λ y μ , por lo que el

$$\text{determinante será igual a } 0; \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

El desarrollo del determinante nos da la ecuación general $Ax + By + Cz + D = 0$;

18. Ejercicio

Comprobar si los puntos $A(3, -2, -2)$; $B(1, 0, 1)$ y $C(2, 1, -1)$ pertenecen o no al plano

$$\mu: \begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu; \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2 - \lambda - \mu \end{cases}$$

Solución

$$\text{Hallamos la ecuación de forma implícita} \begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu; \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2 - \lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -\lambda + \mu; \\ y = \lambda - \mu \\ z - 2 = -\lambda - \mu \end{cases} \quad \text{Halla el determinante}$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & -1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z - 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & -1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z - 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (x - 1)(-2) - y * 2 + (z - 2)0 = 0;$$

$$-2x + 2 - 2y + 0 = 0; \quad -2x - 2y + 2 = 0;$$

COMPRUEBO LOS PUNTOS

$A(3, -2, -2)$; sustituyo en $-2x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow -2 * 3 - 2 * (-2) + 2 = -6 + 4 + 2 = 0$; pertenece

$B(1, 0, 1)$; sustituyo en $-2x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow -2 * 1 - 2 * (0) + 2 = -2 + 0 + 2 = 0$; pertenece

$C(2, 1, -1)$ sustituyo en $-2x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow -2 * 2 - 2 * 1 + 2 = -4 - 2 + 2 = -4$ No pertenece

19. Ejercicio

Comprobar si los puntos $A(0,9,-1)$; pertenecen o no al plano μ : $\begin{cases} x = -1 + \lambda + \mu; \\ y = 2 - \lambda + 2\mu \\ z = 4\lambda - 3\mu \end{cases}$

Solución

Hallamos la ecuación de forma implícita $\begin{cases} x + 1 = \lambda + \mu; \\ y - 2 = -\lambda + 2\mu \\ z = 4\lambda - 3\mu \end{cases}$ igualo el determinante a 0

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ y-2 & -1 & 2 \\ z & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0; (x+1)(-5) - (y-2)(-7) + z(3) = -5x - 5 + 7y - 14 + 3z = 0$$

$$-5x + 7y + 3z - 19 = 0;$$

$$\text{Sustituyo } A(0,9,-1) \Rightarrow -5 \cdot 0 + 7 \cdot 9 + 3(-1) - 19 = 0; 21 - 3 - 19 = 0 \text{ Pertenecce}$$

20. Ejercicio

Calcular las ecuaciones paramétricas e Implícitas del plano que cumple las siguientes condiciones

a) Contienen $A(2,2,2)$ y lleva las direcciones $\vec{u}(0,-2,1)$ y $\vec{v}(3,-1,2)$

b) Pasa $A(2,2,2)$ contine como vectores de dirección $\vec{u}(-3,-2,1)$ y $\overrightarrow{AB}$ donde $B(1,2,-1)$

Solución

a) Contienen $A(2,2,2)$ y lleva las direcciones $\vec{u}(0,-2,1)$ y $\vec{v}(3,-1,2)$

$$\text{Parametrica } \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1; \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2; \\ z = y_0 + \lambda u_3 + \mu v_3; \end{cases} \Rightarrow \text{sustituyo } \begin{cases} x = 2 + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 3; \\ y = 2 + \lambda(-2) + \mu(-1); \\ z = 2 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 2; \end{cases} \begin{cases} x = 2 + 3\mu; \\ y = 2 - 2\lambda - \mu \\ z = 2 + \lambda + 2\mu; \end{cases}$$

$$\text{Implícita } \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 3 \\ y-2 & -2 & -1 \\ z-2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-2)(-3) - (y-2)(-3) + (z-2)(6) =$$

$$-3x + 6 + 3y - 6 + 6z - 12 = 0; -3x + 3y + 6z - 12 = 0 \Rightarrow x - y - 2z + 4 = 0$$

b) Pasa $A(2,2,2)$ contine como vectores de dirección $\vec{u}(-3,-2,1)$ y $\overrightarrow{AB}$ donde $B(1,2,-1)$

$$\overrightarrow{AB} = B(1,2,-1) - A(2,2,2) = (-1,0,-3);$$

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \cdot (-3) + \mu \cdot (-1); \\ y = 2 + \lambda(-2) + \mu \cdot 0 \\ z = 2 + \lambda \cdot 1 + \mu(-3); \end{cases} \begin{cases} x = 2 - 3\lambda - \mu; \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 2 + \lambda - 3\mu; \end{cases} \text{ parametrica}$$

$$\text{Implícita } \begin{vmatrix} x-2 & -3 & -1 \\ y-2 & -2 & 0 \\ z-2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-2)(6) - (y-2)(10) + (z-2)(-2) =$$

$$6x - 12 - 10y + 20 - 2z + 4 = 0; 6x - 10y - 2z + 12 = 0 \Rightarrow 3x - 5y - z + 6 = 0;$$

21. Ejercicio

Calcular unas ecuaciones paramétricas del plano de la ecuación $x + y + z = 3$.

Indica uno de sus puntos y dos vectores de dirección independientes

Solución

$x + y + z = 3$ para hallar los puntos podemos dar valores a las variables.

$$y = \lambda; z = \mu \Rightarrow x = 3 - \lambda - \mu; \text{ Ecuación paramétrica } \begin{cases} x = 3 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \text{ Un punto podría ser } (3,0,0). \text{ Un vector } \vec{u}(-1,1,0) \text{ y otro vector } \vec{v}(-1,0,1)$$

22. Ejercicio

Comprueba que las siguientes ecuaciones parametricas representan el mismo plno. para ello:

a) Obten tres puntos no alineados del mimo

b) comprueba que los puntos obtenidos tambien pertenecen al segundo plano

$$\pi: \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = -\mu \\ z = 2 - \lambda + \mu \end{cases} \quad \pi: \begin{cases} x = s \\ y = t - s \\ z = 4 - 2t + s \end{cases}$$

Solución

a) Obten tres puntos no alineados del mimo

Damos valores a λ y μ ;

$$\lambda = \mu = 0; \quad \pi: \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = -\mu \\ z = 2 - \lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 0 + 0 \\ y = -0 \\ z = 2 - 0 + 0 \end{cases} = \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}; A(2,0,2)$$

$$\lambda = \mu = 1; \quad \pi: \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = -\mu \\ z = 2 - \lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 1 + 1 \\ y = -1 \\ z = 2 - 1 + 1 \end{cases} = \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}; B(4,-1,2)$$

$$\lambda = 1 \text{ y } \mu = 2; \quad \pi: \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = -\mu \\ z = 2 - \lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 1 + 2 \\ y = -2 \\ z = 2 - 1 + 2 \end{cases} = \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}; C(5,-2,3)$$

Para ver si los puntos estan alineados comprobamos si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales

$$\overrightarrow{AB} = (4, -1, 2) - (2, 0, 2) = (2, -1, 0);$$

$$\overrightarrow{AC} = (5, -2, 3) - (2, 0, 2) = (3, -2, 1)$$

No son proporcionales lo ue implica que no estan alineados

b) comprueba que los puntos obtenidos tambien pertenecen al segundo plano

$$\pi: \begin{cases} x = s \\ y = t - s \\ z = 4 - 2t + s \end{cases} \quad \text{Implicita} \quad \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z - 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = x(-1) - y(2) + (z - 4)(-1) = -x - 2y - z + 4 = 0;$$

$$\pi: x + 2y + z - 4 = 0 \quad \begin{cases} \text{Punto } A(2,0,2); 2 + 2 \cdot 0 + 2 - 4 = 0; \text{pertenece} \\ \text{B}(4,-1,2); 4 + 2 \cdot (-1) + 2 - 4 = 0 \text{ pertenece} \end{cases}$$

23. Ejercicio

Hallar la ecuacion Parametrica e implicita del plano que pasa por los puntos

$A(-1,1,-1)$, $B(0,1,1)$ y $C(4,-3,2)$:

Solución

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1; \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Hallamos dos vectores directores:

$$\overrightarrow{AB} = B(0,1,1) - A(-1,1,-1) = (1,0,2) \vec{u}$$

$$\overrightarrow{AC} = C(4,-3,2) - A(-1,1,-1) = (5,-4,3) \vec{v}$$

con los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y $A(-1,1,-1)$ sustituyo $\pi: \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1; \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$

$$\pi: \begin{cases} x = -1 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 5; \\ y = 1 + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot (-4) \\ z = -1 + \lambda \cdot 2 + \mu \cdot 3 \end{cases} = \pi: \begin{cases} x = -1 + \lambda + 5\mu; \\ y = 1 - 4\mu \\ z = -1 + 2\lambda + 3\mu \end{cases}$$

$$\text{Ecuación Implicita} \quad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 5 \\ y-1 & 0 & -4 \\ z+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (y-1) \cdot 2 \cdot 5 + (z+1) \cdot 1 \cdot (-4) - (x+1) \cdot 2 \cdot (-4) - (y-1) \cdot 1 \cdot 3$$

$$= 10y - 10 - 4z - 4 + 8x + 8 - 3y + 3 = 8x + 7y - 4z - 3 = 0$$

5 Planos coordenados

Son planos formados por las rectas de los ejes de coordenadas.

Los planos coordenados tienen punto común (0,0,0)

Planos formados por las rectas X e Y ; recta X $\begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{d} X(1,0,0) - O(0,0,0) = (1,0,0) \end{cases}$

$$\overrightarrow{OP}(x,y,z) = O(0,0,0) + \lambda \vec{d}(1,0,0); \begin{cases} x = 0 + \lambda * 1 \\ y = 0 + \lambda * 0 \\ z = 0 + \lambda * 0 \end{cases} \text{ OX } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

recta Y $\begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{d} Y(0,1,0) - O(0,0,0) = (0,1,0) \end{cases}$

$$\overrightarrow{OP}(x,y,z) = O(0,0,0) + \lambda \vec{d}(0,1,0); \begin{cases} x = 0 + \lambda * 0 \\ y = 0 + \lambda * 1 \\ z = 0 + \lambda * 0 \end{cases} \text{ OY } \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

recta Z $\begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{d} Z(0,0,1) - O(0,0,0) = (0,0,1) \end{cases}$

$$\overrightarrow{OP}(x,y,z) = O(0,0,0) + \lambda \vec{d}(0,0,1); \begin{cases} x = 0 + \lambda * 0 \\ y = 0 + \lambda * 0 \\ z = 0 + \lambda * 1 \end{cases} \text{ OZ } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\text{Plano XY} = \begin{vmatrix} x-0 & 1 & 0 \\ y-0 & 0 & 1 \\ z-0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = z * (1);$$

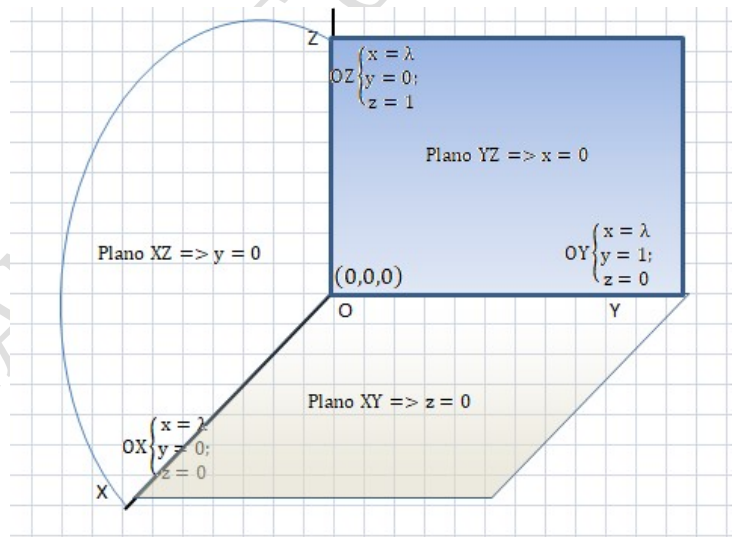
$$\text{Plano XY} \Rightarrow z = 0$$

$$\text{Plano XZ} = \begin{vmatrix} x-0 & 1 & 0 \\ y-0 & 0 & 0 \\ z-0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -y(-1);$$

$$\text{Plano XZ} \Rightarrow y = 0$$

$$\text{Plano YZ} = \begin{vmatrix} x-0 & 0 & 0 \\ y-0 & 1 & 0 \\ z-0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x(1);$$

$$\text{Plano YZ} \Rightarrow x = 0$$



5.1 Planos paralelos a los planos XY, XZ, YZ

Si es un plano paralelo tendrá los mismos vectores de dirección y el punto será distinto del (0,0,0)

Un punto del plano podría ser (a, b, c)

$$\text{Plano paralelo al XY} = \begin{vmatrix} x-a & 1 & 0 \\ y-b & 0 & 1 \\ z-c & 0 & 0 \end{vmatrix} = (z-c) * (1); \text{ Plano paralelo al XY} = z - c = 0;$$

$$\text{Plano paralelo al XZ} = \begin{vmatrix} x-a & 1 & 0 \\ y-b & 0 & 0 \\ z-c & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(y-b) * (1) = -y + b; \text{ Plano paralelo al XZ} = -y + b = 0;$$

$$\text{Plano paralelo al YZ} = \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ y-b & 1 & 0 \\ z-c & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-a) * (1) = x - a; \text{ Plano paralelo al YZ} = x - a = 0;$$

5.2 Ecuación del plano que pasa por tres puntos

La ecuación del plano que pasa por los puntos A, B, C Ejemplo

A(-1,1,-1), B(0,1,1) y C(4,-3,2):

Solución

$$\pi \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1; \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Hallamos dos vectores directores:

$$\overrightarrow{AB} = B(0,1,1) - A(-1,1,-1) = (1,0,2) \vec{u}$$

$$\overrightarrow{AC} = C(4,-3,2) - A(-1,1,-1) = (5,-4,3) \vec{v}$$

con los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y el punto A(-1,1,-1) sustituyo $\pi \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1; \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$

$$\pi \begin{cases} x = -1 + \lambda * 1 + \mu * 5; \\ y = 1 + \lambda * 0 + \mu * (-4) \\ z = -1 + \lambda * 2 + \mu * 3 \end{cases} = \pi \begin{cases} x = -1 + \lambda + 5\mu; \\ y = 1 - 4\mu \\ z = -1 + 2\lambda + 3\mu \end{cases}$$

$$\text{Ecuación Implícita} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 5 \\ y-1 & 0 & -4 \\ z+1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (y-1) * 2 * 5 + (z+1) * 1 * (-4) - (x+1) * 2 * (-4) - (y-1) * 1 * 3$$

$$= 10y - 10 - 4z - 4 + 8x + 8 - 3y + 3 = 8x + 7y - 4z - 3 = 0$$

24. Ejercicio

En el tetraedro de vertices O, A, B, C :

Calcular los planos que contienen las caras del tetraedro

O(0,0,0); A(2,0,0), B(0,3,0) y C(0,0,5)

Plano π , limitado por los puntos AOB;

Plano η , limitado por los puntos AOC;

Plano α , limitado por los puntos BOC

Plano β , limitado por los puntos ABC ;

Solución

π limitado por los puntos AOB;

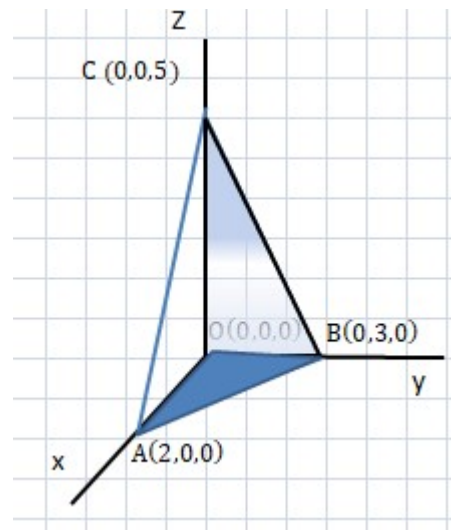
Hallamos dos vectores directores y el punto O(0,0,0)

$$\overrightarrow{OA} = A(2,0,0) - O(0,0,0) = (2,0,0);$$

$$\overrightarrow{OB} = B(0,3,0) - O(0,0,0) = (0,3,0);$$

con los vectores directores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ y O(0,0,0) sustituyo $\pi \begin{cases} x = 0 + \lambda 2 + \mu 0; \\ y = 0 + \lambda 0 + \mu 3 \\ z = 0 + \lambda 0 + \mu 0 \end{cases}$

$$\pi \text{ limitado por los puntos AOB; } \begin{cases} x = 2\lambda; \\ y = 3\mu \\ z = 0 \end{cases}$$



η limitado por los puntos AOC;

Hallamos dos vectores directores y el punto $O(0,0,0)$

$$\overrightarrow{OA} = A(2,0,0) - O(0,0,0) = (2,0,0);$$

$$\overrightarrow{OC} = C(0,0,5) - O(0,0,0) = (0,0,5);$$

con los vectores directores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ y $O(0,0,0)$ sustituyo $\pi \begin{cases} x = 0 + \lambda 2 + \mu 0; \\ y = 0 + \lambda 0 + \mu 0 \\ z = 0 + \lambda 0 + \mu 5 \end{cases}$

$$\eta \text{ limitado por los puntos AOC; } \begin{cases} x = 2\lambda; \\ y = 0 \\ z = 5\mu \end{cases}$$

α limitado por los puntos BOC;

Hallamos dos vectores directores y el punto $O(0,0,0)$

$$\overrightarrow{OC} = C(0,0,5) - O(0,0,0) = (0,0,5);$$

$$\overrightarrow{OB} = B(0,3,0) - O(0,0,0) = (0,3,0);$$

con los vectores directores $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OB}$ y $O(0,0,0)$ sustituyo $\beta \begin{cases} x = 0 + \lambda 0 + \mu 0; \\ y = 0 + \lambda 0 + \mu 3 \\ z = 0 + \lambda 5 + \mu 0 \end{cases}$

$$\alpha \text{ limitado por los puntos BOC; } \begin{cases} x = 0; \\ y = 3\mu \\ z = 5\lambda \end{cases}$$

β limitado por los puntos ABC

Hallamos dos vectores directores y el punto $A(2,0,0)$

$$\overrightarrow{AC} = C(0,0,5) - A(2,0,0) = (-2,0,5);$$

$$\overrightarrow{AB} = B(0,3,0) - A(2,0,0) = (-2,3,0);$$

con los vectores directores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ y $A(2,0,0)$ sustituyo $\beta \begin{cases} x = 2 + \lambda(-2) + \mu(-2); \\ y = 0 + \lambda 0 + \mu 3 \\ z = 0 + \lambda 5 + \mu 0 \end{cases}$

$$\beta \text{ limitado por los puntos ABC; } \begin{cases} x = 2 - 2\lambda - 2\mu; \\ y = 3\mu \\ z = 5\lambda \end{cases};$$

$$\text{Implicita } \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -2 \\ y-0 & 0 & 3 \\ z-0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -2 \\ y & 0 & 3 \\ z & 5 & 0 \end{vmatrix} = -6z - 10y - 15(x-2) = 0$$

$$= -6z - 10y - 15x + 30 = 0; 15x + 10y + 6z - 30 = 0;$$

$$\beta \text{ limitado por los puntos ABC} = 15x + 10y + 6z - 30 = 0$$

6 Vector normal a un plano

Dada la ecuación implícita de un plano

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

Un vector normal al mismo será (A, B, C)

Un vector normal a un plano es cualquier

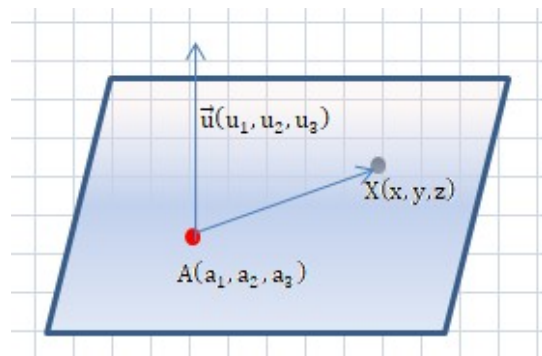
vector perpendicular a dicho plano

Si tenemos un punto del plano $A(a_1, a_2, a_3)$

y queremos hallar un vector normal al plano

en ese punto el vector $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$

será perpendicular a todos los vectores



directores del plano.

Si tomo otro punto cualquiera del plano $X(x, y, z)$. El vector $\overrightarrow{AX}$, será perpendicular a $\vec{u}$

Si dos vectores son perpendiculares su producto escalar será 0.

$$\overrightarrow{AX} = X(x, y, z) - A(a_1, a_2, a_3) = (x - a_1, y - a_2, z - a_3)$$

$$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{u} = 0 \text{ producto escalar}$$

$$(x - a_1, y - a_2, z - a_3) \cdot (u_1, u_2, u_3) = (x - a_1)u_1 + (y - a_2)u_2 + (z - a_3)u_3 = 0;$$

Esto también nos valdría para conocer la ecuación del plano, conociendo un punto del mismo y un vector normal

25. Ejercicio

Hallar un vector director y otro normal al plano de ecuación $-2x + 2y + z = 0$.

Solución

Vector normal al plano $\vec{u}(-2, 2, 1)$

Vector director: Hallo dos puntos del plano y calculo su vector director

$$\text{doy valores } y = \lambda; \quad z = \mu \Rightarrow -2x + 2\lambda + \mu = 0; \quad x = \lambda + \frac{\mu}{2}$$

$$\text{Ecuación paramétrica } \begin{cases} x = \lambda + \frac{\mu}{2} \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Para $\lambda = \mu = 0$ un punto sería $(0, 0, 0)$

Para $\lambda = 0$ y $\mu = 2$ un punto sería y otro $(1, 0, 2)$. Un vector director $\vec{d}$ será $(1, 0, 2) - (0, 0, 0) = (1, 0, 2)$

Prueba si son perpendiculares se ha de cumplir $\vec{u} \cdot \vec{d} = 0$;

$$\vec{u} \cdot \vec{d} (-2, 2, 1) \cdot (1, 0, 2) = -2 + 0 + 2 = 0;$$

26. Ejercicio

Un plano tiene como vector normal el $\vec{u}(2, -3, 2)$ y pasa por el punto $A(-1, 2, -5)$. Escribre las ecuaciones del plano

Solución

Dado que sabemos que el vector normal al plano $Ax + By + Cz + D = 0$;

tiene las coordenadas (A, B, C)

El plano que tiene como vector normal $\vec{u}(2, -3, 2)$ tendrá la forma $2x - 3y + 2z + D = 0$

Si contiene el punto $A(-1, 2, -5)$ cumplirá la función $\Rightarrow$

$$2(-1) - 3 \cdot 2 + 2(-5) + D = 0; \quad -2 - 6 - 10 + D = 0; \quad D = 18;$$

El plano será $2x - 3y + 2z + 18 = 0$

$$\text{doy valores } y = \lambda; \quad z = \mu \Rightarrow 2x - 3\lambda + 2\mu + 18 = 0; \quad x = \frac{3}{2}\lambda - \frac{2\mu}{2} - \frac{18}{2}; \quad x = \frac{3}{2}\lambda - \mu - 9$$

$$\text{Ecuación paramétrica } \begin{cases} x = \frac{3}{2}\lambda - \mu - 9 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

27. Ejercicio

Halla la recta perpendicular al plano $x + z = 2$ y que pasa por el punto $A(1,2,0)$.

Solución

Si es perpendicular al plano tendrá por vector director el vector normal al plano. $\vec{d}(1,0,1)$

La ecuación vectorial r :

$$\vec{OX} = \vec{OA} + \lambda \vec{d}; \Rightarrow \vec{OX} = (1,2,0) + \lambda(1,0,1)$$

ecuación paramétrica.

$$r: \begin{cases} x = a + \lambda d_1 \\ y = b + \lambda d_2 \\ z = c + \lambda d_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda(1) \\ y = 2 + \lambda(0) \\ z = 0 + \lambda(1) \end{cases} = \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

28. Ejercicio

Halla el plano perpendicular a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = z$ y que pasa por el origen de coordenadas

Solución

Hallamos el vector director de la recta $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = z \Rightarrow \vec{d}(2,1,1)$

Si el plano ha de ser perpendicular a la recta el vector director $\vec{d}(2,1,1)$ ha de ser el vector normal del plano $\vec{u} \Rightarrow$ el plano será $AX + BY + CZ + D = 0$; $2x + y + z + D = 0$;

Si ha de pasar por $O(0,0,0)$ cumplirá $2 \cdot 0 + 0 + 0 + D = 0$; $\Rightarrow D = 0$

Ecuación del plano $2x + y + z = 0$;

29. Ejercicio

Halla el plano perpendicular a la recta $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ y que pasa por el punto $A(1,0,1)$

Solución

Obtenemos dos puntos de la recta para $x = 0$, sustituyo $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + y + z = 3 \\ 2 \cdot 0 + y = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} y + z = 3 \\ y = 3 \end{cases}; y = 3, z = 0 \text{ Punto } B(0,3,0)$$

para $y = 0$, sustituyo $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 0 + z = 3 \\ 2x + 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2}; z = \frac{3}{2} \text{ Punto } C(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2})$

$$\vec{d} = C(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}) - B(0,3,0) = \vec{d}(\frac{3}{2}, -3, \frac{3}{2})$$

Si el plano ha de ser perpendicular a la recta el vector director $\vec{d}(\frac{3}{2}, -3, \frac{3}{2})$ ha de ser el vector

normal del plano $\vec{u} \Rightarrow$ el plano será $AX + BY + CZ + D = 0$; $\frac{3}{2}x - 3y + \frac{3}{2}z + D = 0$;

Si ha de pasar por $A(1,0,1)$ cumplirá $\frac{3}{2} \cdot 1 - 3 \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 1 + D = 0$; $\Rightarrow D = -\frac{6}{2}$

$$\frac{3}{2}x - 3y + \frac{3}{2}z - \frac{6}{2} = 0; \frac{3}{2}x - \frac{6}{2}y + \frac{3}{2}z - \frac{6}{2} = 0; 3x - 6y + 3z - 6 = 0;$$

Ecuación del plano $x - 2y + z - 2 = 0$;

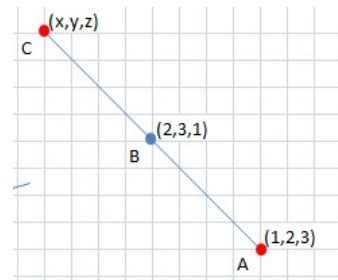
7 Simetrías

7.1 Simetría de un punto respecto a otro punto

Punto simétrico de A respecto B será un punto C

donde B será el punto medio del segmento AC

$$C(x, y, z) = \begin{cases} 2 = \frac{1+x}{2} \\ 3 = \frac{2+y}{2} \\ 1 = \frac{3+z}{2} \end{cases}; C \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{cases} \text{ Punto } C(3, 4, -1)$$



7.2 Simetría de un punto respecto a una recta

El punto simétrico a otro A, respecto a una recta r,

consiste en hallar un punto C que equidiste de

la recta.

Para poder calcularlo, hallo un plano perpendicular

a la recta que contenga el punto A.

después lo único que hay que hacer es hallar D

que será el punto de corte

por último el punto C será el simétrico D

$$D = \frac{A + C}{2}; C = 2D - A$$

Aunque hablamos de puntos, con lo que trabajamos son con

vectores que tienen el origen en el origen de coordenadas

y el extremo en A, D, C ...

EJEMPLO:

Hallar el punto simétrico a A(1, -1, 2) respecto a la

$$\text{recta } r \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

1º Hallo el vector director de la recta para ello paso la recta a paramétrica

$$\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases} \text{ para } x = \lambda \text{ sustituyo } \begin{cases} \lambda + y - z - 3 = 0 \\ \lambda + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{-1 - \lambda}{2} = -\frac{1 + \lambda}{2}$$

$$\text{sustituyo } \lambda + y - \left(-\frac{1 + \lambda}{2}\right) - 3 = 0; \lambda + y + \frac{1 + \lambda}{2} - 3 = 0; y = 3 - \frac{1 + \lambda}{2} - \lambda;$$

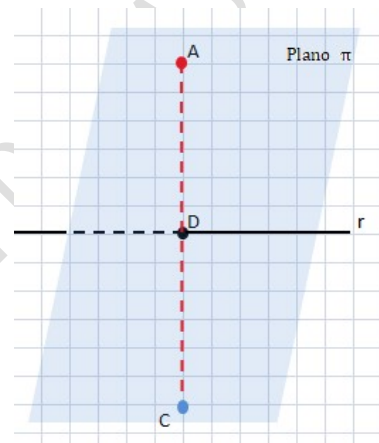
$$y = 3 - \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} - \lambda = \frac{6}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda - \lambda = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda$$

$$\text{recta } r \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \end{cases}; \text{ vector director de la recta } \vec{u} \left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

El vector director de la recta es el vector normal del plano perpendicular a la recta

$$\text{el Plano } \pi Ax + By + Cz + D = 0 \text{ sera; } 1x - \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + D = 0;$$

$$\text{Como el plano ha de contener a } A(1, -1, 2) \Rightarrow 1 * 1 - \frac{3}{2}(-1) - \frac{1}{2} * 2 + D = 0;$$



$$1 + \frac{3}{2} - 1 + D = 0; D = -\frac{3}{2}; \text{Plano } \pi: x - \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{3}{2} = 0; \pi: 2x - 3y - z - 3 = 0$$

1º Hallo el punto de corte del plano y la recta

$$\pi: 2x - 3y - z - 3 = 0; \text{ recta } r \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

$$\text{sustituyo } 2 * \lambda - 3 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda \right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \right) - 3 = 0; 2\lambda - \frac{15}{2} + \frac{9}{2}\lambda + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda - 3 = 0$$

$$\frac{20}{2} + \frac{14}{2}\lambda = 0; \lambda = -\frac{20}{14}; \lambda = \frac{10}{7}$$

$$\text{Sustituyo y tendre el punto de corte } r \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} * \frac{10}{7} = \frac{5}{14} \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} * \frac{10}{7} = -\frac{17}{14} \end{cases} \text{ Punto de corte } C \left(\frac{10}{7}, \frac{5}{14}, -\frac{17}{14} \right)$$

3º Comprobamos si el punto pertenece a la recta y al plano

$$\text{recta } r \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}; \text{ recta } r \begin{cases} \frac{10}{7} + \frac{5}{14} + \frac{17}{14} - 3 = 0 \\ \frac{10}{7} + 2 * \left(-\frac{17}{14} \right) + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{20}{14} + \frac{5}{14} + \frac{17}{14} - \frac{42}{14} = 0 \\ \frac{20}{14} - \frac{34}{14} + \frac{14}{14} = 0 \end{cases}$$

$$\pi: 2x - 3y - z - 3 = 0; \pi: 2 * \frac{10}{7} - 3 * \frac{5}{14} - \frac{17}{14} - 3 = \frac{20}{7} - \frac{15}{14} + \frac{17}{14} - 3 = 0$$

4º Hallamos el punto simetrico

$$\text{Punto medio entre dos puntos ; } D = \frac{A + C}{2}; D \left(\frac{10}{7}, \frac{5}{14}, -\frac{17}{14} \right) = \frac{A(1, -1, 2) + C(x, y, z)}{2};$$

$$C(x, y, z) = \left(\frac{10}{7}, \frac{5}{14}, -\frac{17}{14} \right) * 2 - (1, -1, 2) = \left(\left(\frac{20}{7} - 1 \right), \left(\frac{10}{14} + 1 \right), \left(\frac{34}{14} - 2 \right) \right)$$

$$C(x, y, z) = \left(\frac{13}{7}, \frac{24}{14}, \frac{6}{14} \right)$$

30. Ejercicio

Halla el punto C simetrica a A (-4,4,0) respecto a la recta r: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2z - y = -1 \end{cases}$

Solución

Hallo el vector director de la recta; hago $x = \lambda$; $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2z - y = -1 \end{cases} \begin{cases} \text{despejo } y = 5 - 2\lambda \\ \text{despejo } z; z = \frac{(5 - 2\lambda) - 1}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = \frac{(5 - 2\lambda) - 1}{2} \end{cases} = \begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = \frac{5}{2} - \frac{2\lambda}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \begin{cases} \text{Punto de paso } (0, 5, 2) \\ \vec{d} (1, -2, -1) \end{cases}$$

Dado que el vector normal al plano es igual al vector $\vec{d} (1, -2, -1)$

El Plano será $Ax + By + Cz + D = 0$; $1x - 2y - 1z + D = 0$; $x - 2y - z + D = 0$

Como el plano debe conener a A (-4,4,0) $\Rightarrow 1(-4) - 2 * 4 - 1 * 0 + D = 0$; $-4 - 8 + D = 0$;

$D = 12$; Plano perpendicular a la recta será $x - 2y - z + 12 = 0$

Hallo el punto de corte entre el plano y la recta $r: \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2z - y = -1 \\ x - 2y - z + 12 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

Sustituyo $x - 2y - z + 12 = 0$; $\lambda - 2(5 - 2\lambda) - (2 - \lambda) + 12 = 0 \Rightarrow$

$\lambda - 10 + 4\lambda - 2 + \lambda + 12 = 0$; $6\lambda + 0 = 0$; $\lambda = 0$ punto de cruce $\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 - 2 \cdot 0 \\ z = 2 - 0 \end{cases} (0, 5, 2)$

Punto D de cruce recta plano D (0,5,2)

$D = \frac{A + C}{2}$; $C = 2D - A$; $C = 2(D (0,5,2)) - A (-4,4,0) = (0,10,4) - 4,4,0 = (4,6,4)$

El punto C simetrico A respecto a la recta r es, C(4,6,4)

7.3 Simetría de un punto respecto a un plano

EJEMPLO

Hallar el punto C simetrico a A (5, -1, 0)

respecto el plano $\pi: 2x + y - 3z = -5$;

Si he de encontrar un punto imetrico respecto

a un plano, implica que la recta que contenga

a los dos puntos, será perpendicular al plano

Recta r perpendicular al plano tendra como

vector director $\vec{d}$ = al vector normal al plano $\vec{n}$

$r \begin{cases} \text{Punto de paso } (5, -1, 0) \\ \vec{d} (2, 1, -3) \end{cases} \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 0 - 3\lambda \end{cases} \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$

Hallamos punto D (punto de interseccion plano y recta) $\begin{cases} r \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases} \\ x + y - 3z = -5 \end{cases} = \begin{cases} r \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases} \\ x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$

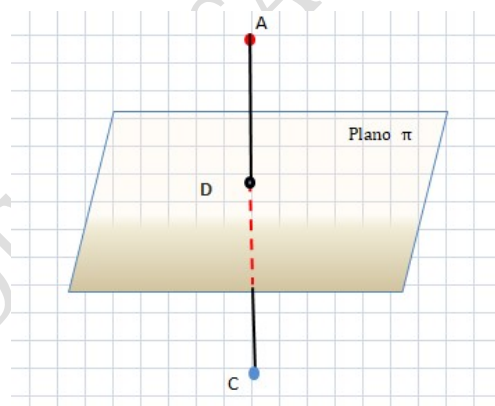
Sustituyo valores en el plano $2x + y - 3z + 5 = 0 \Rightarrow 2(5 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) - 3(-3\lambda) + 5 = 0$

$10 + 4\lambda - 1 + \lambda + 9\lambda + 5 = 0$; $14\lambda = -14$; $\lambda = -1$; Punto de corte. sustituyo $\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$

$\begin{cases} x = 5 + 2 \cdot (-1) \\ y = -1 + (-1) \\ z = -3(-1) \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$ punto de corte D(3, -2, 3)

$D = \frac{A + C}{2}$; $C = 2D - A$; $C = 2D(3, -2, 3) - A (5, -1, 0) = (6, -4, 6) - (5, -1, 0)$

Punto simetrico de A respecto al plano π ; C(1, -3, -6)



8 Posición relativa de una recta y un plano

Podemos tener tres supuestos:

- a) Que la recta pertenezca al plano (este contenida en el plano)
- b) Que sea paralela al plano
- c) Que corte al plano en un punto

8.1 Comprobamos si tienen puntos comunes

Sustituimos los valores de la recta (en forma paramétrica) en la ecuación del plano y nos da los posibles supuestos.

- Recta contenida en el plano: nos dará infinitos valores para λ
- Recta paralela al plano: nos dará un valor de λ indeterminado
- Recta que corta al plano: nos dará un único valor de λ

8.2 Comprobamos mediante la discusión del sistema

Consideramos la recta definida por la intersección de dos planos r $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Ecuación del plano π : $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$

Para estudiar la posición relativa de la recta y el plano discutimos el sistema:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

Representamos por R el rango de la matriz de coeficientes y por R^1 el rango de la matriz ampliada

Posición	R	R ¹
Recta contenida en el plano	2	2
Recta y plano son paralelos	2	3
Recta y plano son secantes	3	3

31. Ejercicio

Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π :

$$a) \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -2 + 4\lambda \end{cases} \quad \pi: 3x - y + 2z + 1 = 0;$$

$$b) \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases} \quad \pi: x - 3y + z - 8 = 0;$$

Solución

Para ver la posición, comprobamos si la recta y el plano se cortan.

$$a) \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -2 + 4\lambda \end{cases} \quad \pi: 3x - y + 2z + 1 = 0; \text{ sustituyo las variables en el plano.}$$

$$\pi: 3(2 + 3\lambda) - 2\lambda + 2(-2 + 4\lambda) + 1 = 0; 6 + 9\lambda - 2\lambda - 4 + 8\lambda + 1 = 0; 15\lambda + 3 = 0;$$

$$\lambda = -\frac{3}{15} = -\frac{1}{5} \text{ La recta y el plano se cortan en un punto } \begin{cases} x = 2 + 3(-\frac{1}{5}) \\ y = 2(-\frac{1}{5}) \\ z = -2 + 4(-\frac{1}{5}) \end{cases} \begin{cases} x = 7/5 \\ y = -\frac{2}{5} \\ z = -\frac{14}{5} \end{cases}$$

Punto de interseccion $(\frac{7}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{14}{5})$

$$b) \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases} \quad \pi: (2t + 3) - 3(t - 1) + (t + 2) - 8 = 0; 2t + 3 - 3t + 3 + t + 2 - 8 = 0$$

$0t = 0; t = 0$; recta contenida en el plano

SOLUCION DISCUTIENDO RANGOS

$$a) \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -2 + 4\lambda \end{cases} \quad \pi: 3x - y + 2z + 1 = 0$$

Pasamos la recta en forma general $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda; \lambda = \frac{x-2}{3} \\ y = 2\lambda; \lambda = \frac{y}{2}; \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{4} \\ z = -2 + 4\lambda; \lambda = \frac{z+2}{4} \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2}; 2x-4 = 3y; 2x-3y-4 = 0 \\ \frac{y}{2} = \frac{z+2}{4}; 4y = 2z+4; 4y-2z-4 = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x-3y-4 = 0 \\ 4y-2z-4 = 0 \end{cases}$$

$$R = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & +2 \end{vmatrix} = 16 + 18 - 4 = 30; R = 3;$$

$$R1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}; R1 = 3;$$

$R = R1 = 3$; recta y plano son secantes

$$b) \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases} \quad \pi: x - 3y + z - 8 = 0;$$

Pasamos la recta en forma general $\begin{cases} x = 2t + 3; t = \frac{x-3}{2} \\ y = t - 1; t = y + 1; \frac{x-3}{2} = y + 1 = z - 2 \\ z = t + 2; t = z - 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = y + 1; x - 3 = 2y + 2; x - 2y - 5 = 0 \\ y + 1 = z - 2; y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & +1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 3 = 0; R = 2;$$

$$R1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & +1 & -8 \end{vmatrix} \text{ Estudiamos } \begin{vmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & +1 & -8 \end{vmatrix} = -16 - 5 + 6 + 15 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & +1 & -8 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3; R1 = 3$$

$R = 2; R1 = 3$; Rectas y planos son paralelos

32. Ejercicio

Estudia la posición relativa del plano $\pi: x - 2y - z + 2 = 0$;

y la recta $\begin{cases} y - z = 2; \\ x - 3y + 7 = 0; \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} y - z = 2; \\ x - 3y + 7 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ \frac{\lambda + 7}{3} - z = 2; z = \frac{\lambda + 7}{3} - 2; z = \frac{\lambda + 1}{3} \\ \lambda - 3y + 7 = 0; 3y = \lambda + 7; y = \frac{\lambda + 7}{3} \end{cases}$$

$$\pi: \lambda - 2\left(\frac{\lambda + 7}{3}\right) - \frac{\lambda + 1}{3} + 2 = 0; \lambda - \frac{2\lambda + 14}{3} - \frac{\lambda + 1}{3} + 2 = 0; 3\lambda - (2\lambda + 14) - (\lambda + 1) + 6 = 0$$

$$3\lambda - 2\lambda - 14 - \lambda - 1 + 6 = 0; 0\lambda = 9 \text{ Indeterminado, rectas y plano paralelas}$$

SOLUCION DISCUTIENDO RANGOS

$$\begin{cases} y - z = 2; \\ x - 3y + 7 = 0; \end{cases} \begin{cases} y - z - 2 = 0; \\ x - 3y + 7 = 0; \end{cases} \quad \pi: x - 2y - z + 2 = 0; ;$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 3 = 0; R = 2$$

$$R1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \text{ estudiamos } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 14 - 6 + 7 = +9; R1 = 3$$

rectas y plano paralelas

33. Ejercicio

Calcula el valor de k para que la recta $\begin{cases} 2x + y = 0; \\ x + z = k; \end{cases}$ esté contenida en el plano $\pi: x + y - z - 1 = 0$;

Solución

$$\begin{cases} 2x + y = 0; \\ x + z = k; \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = k - \lambda \end{cases}$$

$$\text{sustituimos en } x + y - z - 1 = 0; \lambda - 2\lambda - (k - \lambda) - 1 = 0; \lambda - 2\lambda - k + \lambda - 1 = 0$$

$$0\lambda = 1 + k; 0 = 1 + k; k = -1; 0\lambda = 0$$

SOLUCION DISCUTIENDO RANGOS

$$R = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 2 = 0 \quad R = 2;$$

$$R1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -k \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \text{ para } k = -1 \Rightarrow F_1 = F_2 + F_3 \Rightarrow R1 = 2;$$

rectas contenida en el plano

34. Ejercicio

Calcula la posición relativa de una recta y un plano en base a unos parámetros

$$r: \begin{cases} x - 2y = -5; \\ 3y + z = -9; \end{cases} \text{ plano } \pi: ax + y - z = b;$$

Solución

$$\text{hallo la recta paramétrica } \begin{cases} x + 2y = -5; \\ 3y + z = -9; \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{-\lambda - 5}{2} \\ z = -9 - 3\left(\frac{-\lambda - 5}{2}\right) \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{-\lambda - 5}{2} \\ z = -9 + \frac{3\lambda + 15}{2} \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{-\lambda - 5}{2} \\ z = \frac{3\lambda - 3}{2} \end{cases}$$

$$\text{sustituimos en } ax + y - z = b; a\lambda + \frac{-\lambda - 5}{2} - \frac{3\lambda - 3}{2} = b; 2a\lambda - \lambda - 5 - 3\lambda + 3 = 2b$$

$$2a\lambda - \lambda - 5 - 3\lambda + 3 = 2b; \lambda(2a - 1 - 3) = 2b + 2; \lambda(2a - 4) = 2b + 2;$$

$$\text{Si } (2a - 4) = 0; \Rightarrow a = 2 \text{ tendremos } \begin{cases} \text{Si } 2b + 2 = 0 \Rightarrow b = -1; r \text{ contenida en } \pi \\ \text{Si } 2b + 2 \neq 0; b \neq -1 \text{ r paralela a } \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Si } a = 2 \text{ y } b = -1 \text{ r contenida en } \pi \\ \text{Si } a = 2 \text{ y } b \neq -1 \text{ r y } \pi \text{ son paralelas} \\ \text{Si } a \neq 2 \text{ y } b \neq -1 \text{ r corta a } \pi \text{ en un punto} \end{cases}$$

SOLUCION DISCUTIENDO RANGOS

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 + 2a - 1 = 2a - 4 = 0; a = 2; \text{ Pueden ser paralelas o contenidas}$$

$$R1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ a & 1 & -1 & -b \end{vmatrix} \text{ para } a = 2; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & -b \end{vmatrix}$$

$$\text{estudiamos } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -b \end{vmatrix} = -2b - 15 - 5 + 18 = -2b - 2 = 0; b = -1$$

$$\begin{cases} \text{Si } a = 2 \text{ y } b = -1 \text{ r contenida en } \pi \\ \text{Si } a = 2 \text{ y } b \neq -1 \text{ r y } \pi \text{ son paralelas} \\ \text{Si } a \neq 2 \text{ y } b \neq -1 \text{ r corta a } \pi \text{ en un punto} \end{cases}$$

35. Ejercicio

Calcular a y b para que la recta este contenida en el plano

$$r: \begin{cases} x + 2y + 5 = 0; \\ 3y + z + 9 = 0; \end{cases} \text{ plano } \pi: ax + y - z - b = 0;$$

Solución

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2a - 1 = 0; a = 2 \text{ Para } a = 2; R = 2;$$

$$R1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ a & 1 & -1 & -b \end{vmatrix} \text{ Estudio } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -b \end{vmatrix} = -2b - 15 - 5 + 18 = 0;$$

Para $b = -1; R1 = 2; \text{ Para } a = 2 \text{ y } b = -1;$ la recta está contenida en el plano

36. Ejercicio

Calcular a y b para que la recta este contenida en el plano

$$r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1; \\ x + 3y - z = 3; \end{cases} \quad \text{plano } \pi: 2x + ay + z = b;$$

Solución

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1; \\ x + 3y - z = 3; \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ \lambda - 2y - 2z = 1 \\ \lambda + 3y - z = 3; \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ -2y - 2z = 1 - \lambda \\ +3y - z = 3 - \lambda; \end{cases} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = 2F_3 - F_2 \end{matrix} \begin{cases} x = \lambda \\ -2y - 2z = 1 - \lambda \\ 8y + 0 = (6 - 2\lambda) - (1 - \lambda); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ -2y - 2z = 1 - \lambda \\ 8y = 6 - 2\lambda - 1 + \lambda; \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ -2y - 2z = 1 - \lambda \\ 8y = 5 - \lambda; y = \frac{5 - \lambda}{8} \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ -2\left(\frac{5 - \lambda}{8}\right) - 2z = 1 - \lambda; 2z = -(1 - \lambda) - 2\left(\frac{5 - \lambda}{8}\right) \\ y = \frac{5 - \lambda}{8} \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ 2z = -1 + \lambda - \left(\frac{5 - \lambda}{4}\right) \\ y = \frac{5 - \lambda}{8} \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ 8z = -4 + 4\lambda - 5 + \lambda \\ y = \frac{5 - \lambda}{8} \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ z = \frac{-9 + 5\lambda}{8} \\ y = \frac{5 - \lambda}{8} \end{cases}$$

$$\text{Sustituimos en el plano } \pi: 2x + ay + z = b \Rightarrow 2\lambda + a\frac{5 - \lambda}{8} + \frac{-9 + 5\lambda}{8} = b;$$

$$16\lambda + 5a - a\lambda - 9 + 5\lambda = 8b; 21\lambda + 5a - a\lambda - 9 = 8b; \lambda = \frac{-5a + 9 + 8b}{21 - a}$$

$$\text{Sustituimos en el plano } \pi: 2x + ay + z = b \begin{cases} -5a + 9 + 8b = 0 \\ 21 - a = 0 \end{cases} \begin{cases} -5a + 9 + 8b = 0 \\ a = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 * 21 + 9 + 8b = 0 \\ a = 21 \end{cases} \begin{cases} b = \frac{9}{8} = 12; \\ a = 21 \end{cases}; \begin{cases} b = 12; \\ a = 21 \end{cases} \text{ la recta está contenida en el plano}$$

SOLUCION DISCUTIENDO RANGOS

$$r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1; \\ x + 3y - z = 3; \end{cases} \quad \text{plano } \pi: 2x + ay + z = b;$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2a + 4 + 12 + 2 + a = -a + 21 = 0; a = 21; R = 2$$

para a = 21 la recta está contenida en el plano o es paralela

$$\text{para } a = 21; R1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & a & 1 & -b \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 21 & 1 & -b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 21 & 1 & -b \end{vmatrix} = -2b - 3 + 126 - 21 - 6b - 6 = -8b + 96 = 0; b = 12$$

Si a = 21 y b = 12 r contenida en π

PRUEBA

Para a = 21 y b = 12; SUSTITUIMOS $\pi: 2x + ay + z = b \Rightarrow 16\lambda + 5a - a\lambda - 9 + 5\lambda = 8b;$

$$16\lambda + 5 * 21 - 21\lambda - 9 + 5\lambda = 8 * 12; 0\lambda = 0;$$

9 Posiciones relativas de dos planos

Dado los planos $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$

Representamos por R el rango de la matriz de coeficientes y por R¹ el rango de la matriz ampliada

Posición	R	R ¹	
Planos coincidentes	1	1	$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}$
Planos paralelos	1	2	$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} \neq \frac{D}{D_1}$
Planos secantes	2	2	$\frac{A}{A_1} \neq \frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1}$

37. Ejercicio

Estudia la posición relativa de dos planos π y μ en los siguientes casos:

$$\text{a) } \begin{cases} \pi: 2x - y - z = 0; \\ \mu: -6x + 3y + 3z - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \pi: x - y - 2z + \frac{1}{2} = 0; \\ \mu: -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \pi: 2x - y - z = 0; \\ \mu: 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Solución

$$\text{a) } \begin{cases} \pi: 2x - y - z = 0; \\ \mu: -6x + 3y + 3z - 3 = 0 \end{cases}; \quad \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3} = \frac{-1}{3} = \frac{0}{-3}; \Rightarrow \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3} = \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3};$$

$$\frac{2}{-6} = \frac{-1}{3} = \frac{-1}{3} \neq \frac{0}{-3}; \text{ Son planos paralelos}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \pi: x - y - 2z + \frac{1}{2} = 0; \\ \mu: -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}; \quad \frac{1}{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = \frac{-2}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}}; \quad -2 = -2 = -2 = -2 \text{ Son coincidentes}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \pi: 2x - y - z = 0; \\ \mu: 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}; \quad \frac{2}{2} = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{0}{-3}; \quad 1 \neq -1 = 1 \neq 0; \text{ Son secantes}$$

38. Ejercicio

Estudia la posición relativa de dos planos π y μ en los siguientes casos:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 1 + \lambda + \beta; \\ y = -\lambda + 2\beta \\ z = 3 \end{cases} \quad \mu: z = 3; \quad \text{b) } \pi \begin{cases} x = \lambda; \\ y = \beta \\ z = \lambda + 2\beta - 1 \end{cases} \quad \mu \begin{cases} x = 3 - 2\lambda + \beta; \\ y = \lambda - 1 \\ z = \beta \end{cases}$$

Solución

$$\text{a) } \pi \begin{cases} x = 1 + \lambda + \beta; \\ y = -\lambda + 2\beta \\ z = 3 \end{cases} \quad \mu: z = 3;$$

$$\pi \begin{cases} x = 1 + \lambda + \beta; \\ y = -\lambda + 2\beta \\ z = 3 \end{cases}; \quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & -1 & 2 \\ z-3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2z - 6 + z - 3 = 3z - 9 = 0; \quad \pi: z - 3 = 0$$

$$\begin{cases} \pi: z - 3 = 0 \\ \mu: z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi: z - 3 = 0 \\ \mu: z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Son coincidentes}$$

$$\text{b) } \pi \begin{cases} x = \lambda; \\ y = \beta \\ z = \lambda + 2\beta - 1 \end{cases} \quad \mu \begin{cases} x = 3 - 2\lambda + \beta; \\ y = \lambda - 1 \\ z = \beta \end{cases}$$

$$\pi \begin{cases} x = \lambda; \\ y = \beta \\ z = \lambda + 2\beta - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z+1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = z + 1 - 2y - x = 0; \quad \pi: -x - 2y + z + 1 = 0;$$

$$\mu \begin{cases} x = 3 - 2\lambda + \beta; \\ y = \lambda - 1 \\ z = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -2 & 1 \\ y+1 & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow x - 3 + 2y + 2 - z = 0; \mu: x + 2y - z - 1 = 0;$$

$$\begin{cases} \pi: -x - 2y + z + 1 = 0 \\ \mu: x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}; \frac{-1}{1} = \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1}; \text{son coincidentes}$$

39. Ejercicio

Dados los puntos A(1,2,3), B(-1,1,0), C(2,1,-1) y D (4,2,2), Estudia la posición de los planos determinados por A, B, C y por A, B, D.

¿ Como son los puntos A, B, C, D

Solución

Plano limitado por los puntos ABC

Hallamos dos vectores directores y el punto A(1,2,3)

$$\overrightarrow{AC} = C(2,1,-1) - A(1,2,3) = (1, -1, -4);$$

$$\overrightarrow{AB} = B(-1,1,0) - A(1,2,3) = (-2, -1, -3);$$

con los vectores directores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ y A(1,2,3); Plano ABC $\begin{cases} x = 1 + \lambda(1) + \mu(-2); \\ y = 2 + \lambda(-1) + \mu(-1) \\ z = 3 + \lambda(-4) + \mu(-3) \end{cases}$

$$\text{Plano ABC} \begin{cases} x = 1 + \lambda - 2\mu; \\ y = 2 - \lambda - \mu; \\ z = 3 - 4\lambda - 3\mu; \end{cases} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y-2 & -1 & -1 \\ z-3 & -4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$3x - 3 + 8y - 16 - z + 3 - 2z + 6 + 3y - 6 - 4x + 4 = -x + 11y - 3z - 12 = 0$$

$$\text{Plano ABC: } -x + 11y - 3z - 12 = 0$$

Plano limitado por los puntos ABD

Hallamos dos vectores directores y el punto A(1,2,3)

$$\overrightarrow{AD} = D(4,2,2) - A(1,2,3) = (3, 0, -1);$$

$$\overrightarrow{AB} = B(-1,1,0) - A(1,2,3) = (-2, -1, -3);$$

con los vectores directores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AB}$ y A(1,2,3); Plano ABD $\begin{cases} x = 1 + \lambda(3) + \mu(-2); \\ y = 2 + \lambda(0) + \mu(-1) \\ z = 3 + \lambda(-1) + \mu(-3) \end{cases}$

$$\text{ABD} \begin{cases} x = 1 + 3\lambda - 2\mu; \\ y = 2 - \mu; \\ z = 3 - \lambda - 3\mu; \end{cases} \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -2 \\ y-2 & 0 & -1 \\ z-3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2y - 4 - 3z + 9 + 9y - 18 - x + 1 =$$

$$\text{Plano ABD} = -x + 11y - 3z - 12 = 0;$$

Los plano ABCy ABD son coincidentes

¿ Como son los puntos A, B, C, D ?

Dos o mas puntos son coplanarios si los vectores determinados por ellos son coplanarios.

Dos o mas vectores son coplanarios si son linealmente independientes, $\text{Rango}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 2$

A(1,2,3), B(-1,1,0), C(2,1,-1) y D (4,2,2),

$$\overrightarrow{AB} = B(-1,1,0) - A(1,2,3) = (-2, -1, -3);$$

$$\overrightarrow{AC} = C(2,1,-1) - A(1,2,3) = (1, -1, -4)$$

$$\overrightarrow{AD} = D(4,2,2) - A(1,2,3) = (3, 0, -1)$$

Si son independientes $\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 12 - 9 - 1 = 0; \Rightarrow \text{ran } 2$

los vectores son coplanarios y los puntos tambien

9.1 Determinación de la recta intersección de dos planos

Despues de estudiar la posicion de dos planos. Si los panos son secantes, se cortan en una recta.

La recta se puede calcular de la siguiente forma:

- Dado que los planos se cortan, los puntos de la recta interccion son puntos que pertenecen a los dos planos. Si asignamos valor 0 a (x, y o z) y sustituimos el valor en los planos, tendre un sistema de ecuaciones y determinaré los puntos de la recta. con dos puntos de la recta puedo calcular vector director y punto de paso.
- Por otro lado el vector director de la recta ha de ser perpendicular a los vectores normales de los planos El producto vectorial de los planos normales me dará el vector director de la recta.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad (a, b, c) \text{ vector Normal de un plano. } (d, e, f) \text{ vector normal del otro plano}$$

Calculo un punto de paso y ya tendre la ecuacion de la recta interseccion.

40. Ejercicio

Estudia la posicion relativa de dos planos π y μ $\begin{cases} \pi: x + y = -4 + 5z; \\ \mu: 3x - y = 1 - 15z; \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} \pi: x + y = -4 + 5z; \\ \mu: 3x - y = 1 - 15z; \end{cases} \quad \begin{cases} \pi: x + y - 5z + 4 = 0; \\ \mu: 3x - y + 15z - 1 = 0; \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-5}{15} \neq \frac{4}{-1}; \quad \frac{1}{3} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-1}{3} \neq \frac{4}{-1} \quad \text{Los planos son secantes, se cortan}$$

Calculamos la recta donde se cortan los dos planos (interseccion de los planos)

$$\text{calculamos un punto para } x = 0; \quad \begin{cases} x + y - 5z + 4 = 0; \\ 3x - y + 15z - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 + y - 5z + 4 = 0; \\ 0 - y + 15z - 1 = 0; \end{cases} \quad \text{sumamos}$$

$$0 + 0 + 10z + 3 = 0; \quad 0 + 0 + 10z + 3 = 0; \quad z = -\frac{3}{10};$$

$$\text{sustituyo en una de la ecuaciones } x + y - 5z + 4 = 0; \quad 0 + y - 5\left(-\frac{3}{10}\right) + 4 = 0; \quad y = -\frac{55}{10};$$

$$\text{Un punto A será } \left(0, -\frac{55}{10}, -\frac{3}{10}\right)$$

$$\text{calculamos un punto para } z = 0; \quad \begin{cases} x + y - 5z + 4 = 0; \\ 3x - y + 15z - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - 0 + 4 = 0; \\ 3x - y + 0 - 1 = 0; \end{cases} \quad \text{sumamos } 4x = -3;$$

$$x = -\frac{3}{4}; \quad \text{sustituyo } x + y - 5z + 4 = 0 \Rightarrow -\frac{3}{4} + y - 0 + 4 = 0; \quad y = -4 + \frac{3}{4} = -\frac{13}{4};$$

$$\text{otro punto B será } \left(-\frac{3}{4}, -\frac{13}{4}, 0\right)$$

$$\text{El vector director de la recta } \vec{d} = B - A = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{13}{4}, 0\right) - \left(0, -\frac{55}{10}, -\frac{3}{10}\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, \frac{3}{10}\right); \quad (-30, 90, 12);$$

$$; \quad (-30, 90, 12) = (-10, 30, 4); \quad \vec{d} = (-10, 30, 4)$$

$$\text{recta interseccion} \begin{cases} x = 0 - 10\lambda \\ y = -\frac{55}{10} + 30\lambda \\ z = -\frac{3}{10} + 4\lambda \end{cases}$$

Si dos planos de cortan, el vector director de la recta interseccion de los dos planos, será perpendicular a los vectores normales de los planos

$$\begin{cases} \pi: x + y = -4 + 5z; \\ \mu: 3x - y = 1 - 15z; \end{cases} \begin{cases} \pi: x + y - 5z + 4 = 0; \\ \mu: 3x - y + 15z - 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} \vec{N}_\pi = (1, 1, -5) \\ \vec{N}_\mu = (3, -1, 15) \end{cases};$$

$$\text{Vector director de la recta sera } \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 10i - 30j - 4k; \vec{d} = (10, -30, -4)$$

41. Ejercicio

Estudia la posición relativa de dos planos π y μ y si se cortan hallar la recta intersección

$$\begin{cases} \pi: 2x + 5y + 4z + 15 = 0; \\ \mu: -2x + 5y - 2z + 35 = 0; \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} \pi: 2x + 5y + 4z + 15 = 0; \\ \mu: -2x + 5y - 2z + 35 = 0; \end{cases} \frac{2}{-2} \neq \frac{5}{+5} \neq \frac{4}{-2} \neq \frac{15}{35} \Rightarrow \text{que los planos son secantes se cortan}$$

Calculamos un punto de la recta dando valores para x o y o $z = 0$

$$\text{para } x = 0 \begin{cases} \pi: 2x + 5y + 4z + 15 = 0; \\ \mu: -2x + 5y - 2z + 35 = 0; \end{cases} \begin{cases} \pi: 0 + 5y + 4z + 15 = 0; \\ \mu: 0 + 5y - 2z + 35 = 0; \end{cases} \text{restamos } 6z = +20; z = \frac{20}{6}$$

$$\text{sustituimos en } \pi: 2x + 5y + 4z + 15 = 0; 0 + 5y + 4\left(\frac{20}{6}\right) + 15 = 0; y = -\frac{170}{30}; \text{Punto A } \left(0, -\frac{170}{30}, \frac{20}{6}\right)$$

$$\text{para } z = 0 \begin{cases} \pi: 2x + 5y + 4z + 15 = 0; \\ \mu: -2x + 5y - 2z + 35 = 0; \end{cases} \begin{cases} \pi: 2x + 5y + 0 + 15 = 0; \\ \mu: -2x + 5y - 0 + 35 = 0; \end{cases} \text{sumamos } 10y = -50; y = -5;$$

$$\text{sustituimos en } \pi: 2x + 5y + 4z + 15 = 0; 2x + 5(-5) + 0 + 15 = 0; x = \frac{10}{2} = 5; \text{Punto B } (5, -5, 0)$$

$$\text{El vector director de la recta } \vec{d} = B - A = B(5, -5, 0) - A\left(0, -\frac{170}{30}, \frac{20}{6}\right) = \left(5, +\frac{170}{30}, -\frac{20}{6}\right) = \left(\frac{150}{30}, \frac{20}{30}, -\frac{100}{30}\right);$$

$$\text{El vector director de la recta } \vec{d} = (15, 2, -10)$$

Si dos planos de cortan, el vector director de la recta interseccion de los dos planos, será perpendicular a los vectores normales de los planos

$$\begin{cases} \pi: 2x + 5y + 4z + 15 = 0; \\ \mu: -2x + 5y - 2z + 35 = 0; \end{cases} \begin{cases} \vec{N}_\pi = (2, 5, 4) \\ \vec{N}_\mu = (-2, +5, -2) \end{cases};$$

$$\text{Vector director de la recta sera } \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -30i - 4j + 20k; \vec{d} = (-30, -4, 20) = (-15, -2, 10)$$

$$\text{recta interseccion } \begin{cases} \vec{d}(-15, -2, 10) \\ \text{Punto } ((5, -5, 0)) \end{cases} \begin{cases} x = 5 - 15\lambda \\ y = -5 - 2\lambda \\ z = 0 + 10\lambda \end{cases} \begin{cases} x = 5 - 15\lambda \\ y = -5 - 2\lambda \\ z = 10\lambda \end{cases}$$

10 Posición relativa de tres planos

Dado los planos η :
$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1x + C_1x + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2x + C_2x + D_2 = 0 \end{cases}$$

Representamos por R el rango de la matriz de coeficientes y por R^1 el rango de la matriz ampliada

R	R^1	Posición
3	3	1 Planos secantes en un punto
2	3	2.1 planos secantes dos a dos
		2.2 Dos planos paralelos y el tercero secante
2	2	3.1 Dos planos coincidentes y el otro secante
		3.2 Los tres planos se cortan en una recta
1	2	4.1 tres planos paralelos
		4.2 dos planos coincidentes y el otro paralelo
1	1	5 Planos coincidentes

42. Ejercicio

Estudia la posición relativa de tres planos π , μ y η .

$$\begin{cases} \pi: x - 3y - 2z = 2; \\ \mu: -2x + 6y + 4z = -4; \\ \eta: 3x - 9y - 6z = 6; \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} \pi: x - 3y - 2z = 2; \\ \mu: -2x + 6y + 4z = -4; \\ \eta: 3x - 9y - 6z = 6; \end{cases} = \begin{cases} \pi: x - 3y - 2z - 2 = 0; \\ \mu: -2x + 6y + 4z + 4 = 0; \\ \eta: 3x - 9y - 6z - 6 = 0; \end{cases}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & -9 & -6 \end{vmatrix}; R^1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 4 & 4 \\ 3 & -9 & -6 & -6 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & -9 & -6 \end{vmatrix} = -36 - 36 - 36 + 36 + 36 + 36 = 0; R \leq 2; R = 1;$$

todos los planos son linealmente dependientes $\begin{cases} \pi: x - 3y - 2z - 2 = 0; \\ \mu: -2x + 6y + 4z + 4 = 0; F_2 = -2F_1; F_3 = F_1 - F_2 \\ \eta: 3x - 9y - 6z - 6 = 0; \end{cases}$

$$R^1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 4 & 4 \\ 3 & -9 & -6 & -6 \end{vmatrix} = 1;$$

$R = 1 = R^1$ los planos son coincidentes

43. Ejercicio

Estudia la posición relativa de tres planos π , μ y η .

$$\begin{cases} \pi: x - y - 3z = 1; \\ \mu: -2x + 2y + 6z = -2; \\ \eta: x + y + z = 0; \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} \pi: x - y - 3z = 1; \\ \mu: -2x + 2y + 6z = -2; \\ \eta: x + y + z = 0; \end{cases} = \begin{cases} \pi: x - y - 3z - 1 = 0; \\ \mu: -2x + 2y + 6z + 2 = 0; \\ \eta: x + y + z = 0; \end{cases}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; R^1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 + 6 + 6 - 6 - 2 = 0; R \leq 2, \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4; R = 2;$$

$$R^1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 - 2 + 6 + 2 = 0; \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 6 - 2 = 0;$$

$$R^1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 2 - 2 = 0; R^1 = 2$$

$R = 2 = R^1$ los planos son coincidentes

$$= \begin{cases} \pi: x - y - 3z - 1 = 0; \\ \mu: -2x + 2y + 6z + 2 = 0; F_2 = -2F_1; F_3 \text{ independiente}; \\ \eta: x + y + z = 0; \end{cases}$$

Plano π coincidente con plano μ y el plano η los corta.

44. Ejercicio

Estudia la posición relativa de tres planos π , μ y η .

$$\begin{cases} \pi: 2x + 4y - 2z = 0; \\ \mu: x + 2y - z = 0; \\ \eta: -\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z = 0; \end{cases}$$

Solución

$$R = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}; R^1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 + 2 + 2 - 2 - 2 - 2 = 0; R \leq 2; R = 1; R^1 = 1$$

$$\text{todos los planos son linealmente dependientes} \begin{cases} \pi: 2x + 4y - 2z = 0; \\ \mu: x + 2y - z = 0; F_1 = 2F_2; F_3 = -\frac{1}{2}F_2 \\ \eta: -\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z = 0; \end{cases}$$

$R = 1 = R^1$ los planos son coincidentes

45. Ejercicio

Estudia la posición relativa de tres planos π , μ y η .

$$\begin{cases} \pi: x - y - 2z = 1; \\ \mu: 2x - 3y + z = 15; \\ \eta: x + z = -4; \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} \pi: x - y - 2z = 1; \\ \mu: 2x - 3y + z = 15; \\ \eta: x + z = -4; \end{cases} = \begin{cases} \pi: x - y - 2z - 1 = 0; \\ \mu: 2x - 3y + z - 15 = 0; \\ \eta: x + z + 4 = 0; \end{cases}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; R^1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -15 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 1 - 6 + 2 = -6; R = 3; R^1 = 3$$

$R = 3 = R^1$ los planos se cortan en un punto

46. Ejercicio

Calcula el valor de k para que los tres planos π , μ y η formen un prisma

$$\begin{cases} \pi: x - 3y - 2z = 2; \\ \mu: -2x + y - z = -3; \\ \eta: 5y + 5z = k; \end{cases}$$

Solución

Para que formen un prisma ha de cumplirse que los planos sean secantes dos a dos $R = 2$ y $R^1 = 3$;

$$\begin{cases} \pi: x - 3y - 2z = 2; \\ \mu: -2x + y - z = -3; \\ \eta: 5y + 5z = k; \end{cases} = \begin{cases} \pi: x - 3y - 2z - 2 = 0; \\ \mu: -2x + y - z + 3 = 0; \\ \eta: 5y + 5z - k = 0; \end{cases}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}; R^1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -k \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 20 - 30 + 5 = 0; R = 2$$

$$R^1 = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & -k \end{vmatrix} = -3k - 10 - 30 - 5 + 30 - 2k = -5k - 15; \text{ para que sea distinto de } 0$$

$k \neq -3$; Para $k \neq -3 \Rightarrow R^1 = 3$

47. Ejercicio

Calcula el valor de k para que los tres planos π , μ y η se corten en una recta

$$\begin{cases} \pi: x - y = 2; \\ \mu: 2x + y - z = -3; \\ \eta: 5x + y - kz = -4; \end{cases}$$

Solución

Para que los tres planos se corten en una recta $R = 2 = R^1$;

$$\begin{cases} \pi: x - y = 2; \\ \mu: 2x + y - z = -3; \\ \eta: 5x + y - kz = -4; \end{cases} = \begin{cases} \pi: x - y - 2 = 0; \\ \mu: 2x + y - z + 3 = 0; \\ \eta: 5x + y - kz + 4 = 0; \end{cases}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -k \end{vmatrix}; R^1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -k & 4 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -k \end{vmatrix} = -k + 5 - 2k + 1 = -3k + 6; \text{ para } K = 2 \Rightarrow R = 2$$

$$R^1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 4 - 2 - 6 = 0; \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 8 - 10 + 6 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 15 - 4 + 10 - 3 + 8 = 0$$

$$R = 2 = R^1;$$

48. Ejercicio

Calcula la posición relativa de tres planos π , μ y η , en función del parámetro a

$$\begin{cases} \pi: x + y + z = a - 1; \\ \mu: 2x + y + az = a; \\ \eta: x + ay + z = 1; \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} \pi: x + y + z = a - 1; \\ \mu: 2x + y + az = a; \\ \eta: x + ay + z = 1; \end{cases} \begin{cases} \pi: x + y + z - a + 1 = 0; \\ \mu: 2x + y + az - a = 0; \\ \eta: x + ay + z - 1 = 0; \end{cases}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}; R^1 = \begin{vmatrix} 1 & +1 & 1 & -1+1 \\ 2 & 1 & a & -a \\ 1 & a & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & +1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2a + a - 1 - 2 - a^2 = -a^2 + 3a - 2; \text{ si esto es distinto de } 0,$$

el sistema es compatible determinado y existe un único punto común a los tres planos

estudiamos la ecuación $-a^2 + 3a - 2 = 0; \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} a = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ a = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Para cualquier valor de $a \neq 2$ o $a \neq 1$ implica $R = 3 = R^1$ y los planos tienen un único punto común

estudiamos para $a \neq 2$ y $a \neq 1$ ejemplo para $a = 0$;

$$\text{Para } a = 2 \begin{cases} \pi: x + y + z - a + 1 = 0; \\ \mu: 2x + y + az - a = 0; \\ \eta: x + ay + z - 1 = 0; \end{cases} \text{ sustituyo } \begin{cases} \pi: x + y + z - 2 + 1 = 0; \\ \mu: 2x + y + z - 2 = 0; \\ \eta: x + 2y + z - 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi: x + y + z - 1 = 0; \\ \mu: 2x + y + 2z - 2 = 0; \\ \eta: x + 2y + z - 1 = 0; \end{cases} \text{ no hay planos paralelos ni coincidentes}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}; R^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 2 - 1 - 2 - 4 = 0; R = 2;$$

$$R^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 - 1 + 4 + 2 + 1 = 0;$$

$$R^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 2 + 2 + 2 + 2 = 0$$

$$R^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 - 4 + 1 + 4 + 2 = 0; R^1 = 2$$

para $a = 2$; $R = 2 = R^1$; los planos se cortan en una recta.

$$\text{Para } a = 1 \begin{cases} \pi: x + y + z - a + 1 = 0; \\ \mu: 2x + y + az - a = 0; \\ \eta: x + ay + z - 1 = 0; \end{cases} \text{ sustituyo } \begin{cases} \pi: x + y + z - 1 + 1 = 0; \\ \mu: 2x + y + z * 1 - 1 = 0; \\ \eta: x + 1y + z - 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi: x + y + z = 0; \\ \mu: 2x + y + z - 1 = 0; \\ \eta: x + y + z - 1 = 0; \end{cases} \text{ el plano } \pi \text{ y el plano } \eta \text{ son paralelos}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; R^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 2 - 2 - 1 - 1 = 0; R = 2;$$

$$R^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 1 + 1 = -2; R^1 = 3;$$

para $a = 1$; $R = 2$ y $R^1 = 3$;

como los planos π y η son paralelos el plano μ y η será secante a los dos

11 Posición relativa de dos rectas

La posición que ocupan dos rectas r y s en el espacio pueden ser :

Rectas coincidentes: $\begin{cases} \text{sus vectores de dirección } \vec{d}_r \text{ y } \vec{d}_s \text{ son paralelos} \\ \text{los puntos de paso } P_r \text{ y } P_s \text{ pertenecen a las dos rectas} \end{cases}$

Rectas paralelas: $\begin{cases} \text{sus vectores de dirección } \vec{d}_r \text{ y } \vec{d}_s \text{ son paralelos} \\ \text{los puntos de paso } P_r \text{ no pertenece a } s \text{ y } P_s \text{ no pertenece a } r \end{cases}$

Rectas secantes : $\begin{cases} \text{sus vectores de dirección } \vec{d}_r \text{ y } \vec{d}_s \text{ no son paralelos} \\ \text{hallamos un vector } \vec{P_r P_s} \text{ que una las dos rectas} \\ \text{El producto mixto de } (\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{P_r P_s}) = 0 \text{ todos son vectores coplanarios} \end{cases}$

Rectas se cruzan: $\begin{cases} \text{sus vectores de dirección } \vec{d}_r \text{ y } \vec{d}_s \text{ no son paralelos} \\ \text{hallamos un vector } \vec{P_r P_s} \text{ que una las dos rectas} \\ \text{El producto mixto de } (\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{P_r P_s}) \neq 0; \text{ los vectores no son coplanarios} \end{cases}$

El producto mixto de $(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{P_r P_s}) = \vec{d}_r \cdot (\vec{d}_s \times \vec{P_r P_s})$

Ejemplo:

Para calcular la posición de dos rectas, calculo el vector de dirección de cada recta y su punto de paso

$$\text{Hallar posición relativa de las rectas } r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}; s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} \text{Punto de paso } P(1,0,1) \\ \text{Vector director } \vec{d}(2,1,1) \end{cases} s: \begin{cases} \text{Punto de paso } P(0,0,0) \\ \text{Vector director } \vec{d}(1,-1,-1) \end{cases}$$

Comprobamos si los Vectores de dirección son paralelos; implicaría que son proporcionales

$$\Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} \text{ rectas no son ni paralelas ni coincidentes.}$$

Comprobamos si tienen un punto en comun:

$$r: (1,0,1) + (2,1,1)\lambda;$$

$$s: (0,0,0) + (1,-1,-1)\lambda \text{ cambiamos el esclar } \lambda \text{ por } \beta \text{ en una } (0,0,0) + (1,-1,-1)\beta$$

$$(1,0,1) + (2,1,1)\lambda = (0,0,0) + (1,-1,-1)\beta;$$

$$(1+2\lambda, \lambda, 1+\lambda) = (\beta, -\beta, -\beta) \Rightarrow \begin{cases} 1+2\lambda = \beta \\ \lambda = -\beta \\ 1+\lambda = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+2(-\beta) = \beta; 3\beta = 1; \beta = \frac{1}{3} \\ \lambda = -\beta \\ 1+(-\beta) = -\beta; 1=0; \end{cases}$$

No hay punto en comun son oblicuas

49. Ejercicio

Comprobar la posicion relativa de las dos rectas:

$$r: \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases} \quad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$$

Solución

$$r: \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}; \begin{cases} x=\lambda \\ \lambda+y+z=3; \\ 2\lambda-y+z=2; \end{cases} \begin{cases} x=\lambda \\ y+z=3-\lambda; \\ -y+z=2-2\lambda; \end{cases} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 = F_2 + F_3 \\ F_3 \end{matrix} \begin{cases} x=\lambda \\ 0+2z=3-\lambda+2-2\lambda; \\ -y+z=2-2\lambda; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\lambda \\ 2z=5-3\lambda; \\ -y+z=2-2\lambda; \end{cases} \begin{cases} x=\lambda \\ z=\frac{5-3\lambda}{2}; \\ -y+\frac{5-3\lambda}{2}=2-2\lambda; \end{cases} \begin{cases} x=\lambda \\ z=\frac{5-3\lambda}{2}; \\ y=\frac{5-3\lambda}{2}-\frac{4}{2}+\frac{4\lambda}{2} \end{cases} \begin{cases} x=\lambda \\ z=\frac{5-3\lambda}{2}; \\ y=\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} \text{Punto de paso } P\left(0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \text{Vector director } \vec{d}\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}; S: \begin{cases} \text{Punto de paso } P(1,1,1) \\ \text{Vector director } \vec{d}(2,1,3) \end{cases}$$

Comprobamos si los Vectores de dirección son paralelos; implicaria que son proporcionales

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{3}; \frac{1}{2} \neq -\frac{3}{2} \neq \frac{1}{6} \text{ rectas no son ni paralelas ni coincidentes.}$$

$$\text{Comprobamos si se cortan o son oblicuas } \left(0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\lambda = (1,1,1) + (2,1,3)\beta$$

$$\begin{cases} 0+\lambda=1+2\beta \\ \frac{5}{2}-\frac{3}{2}\lambda=1+\beta \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda=1+3\beta \end{cases} \begin{cases} \lambda=1+2\beta \\ 5-3\lambda=2+2\beta \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda=1+3\beta \end{cases} \begin{cases} \lambda=1+2\beta \\ 3\lambda=5-2-2\beta \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda=1+3\beta \end{cases} \begin{cases} \lambda=1+2\beta \\ \lambda=\frac{3}{3}-\frac{2\beta}{3} \\ \frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{2}+3\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+2\beta=\frac{3}{3}-\frac{2\beta}{3} \\ \frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{2}+3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+6\beta=3-2\beta \\ \frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{2}+3\beta \end{cases} \begin{cases} 4\beta=0; \beta=0; \\ \frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{2}+3\lambda=1 \end{cases} \text{ sustituyo } \frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{2}+3\beta$$

$$\frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{2}+3*0; \lambda=1; \text{ Para } \lambda=1 \text{ y } \beta=0 \text{ se cortan;}$$

PRUEBA:

$$r = \begin{cases} x = \lambda \\ z = \frac{5}{2} - \frac{3\lambda}{2} \\ y = +\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} \end{cases}; \text{ para } \lambda = 1, \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ Punto de corte } (1,1,1)$$

Comprobamos si el punto (1,1,1) pertenece a s: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow$

$$\frac{1-1}{2} = \frac{1-1}{1} = \frac{1-1}{3} = \frac{0}{2} = \frac{0}{1} = \frac{0}{3} = 0;$$

50. Ejercicio

Dadas las rectas r: $x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2}$ s: $\frac{x - 1}{1 + a} = \frac{y - 2}{-a} = \frac{z - 3}{3a}$

- Determinar para que valor de a las rectas se corten
- determinar para que vlaor de a las rectas son perpendiculares

Solución

- Determinar para que valor de a las rectas se corten

r: $x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2}$; $\begin{cases} \text{Punto de paso } P(2,0,1) \\ \text{Vector director } \vec{d}(1, -1, 2) \end{cases}$

s: $\frac{x - 1}{1 + a} = \frac{y - 2}{-a} = \frac{z - 3}{3a}$; $\begin{cases} \text{Punto de paso } P(1,2,3) \\ \text{Vector director } \vec{d}(1 + a, -a, 3a) \end{cases}$

$$(2,0,1) + (1, -1, 2)\lambda = (1,2,3) + (1 + a, -a, 3a)\beta$$

$$\begin{cases} 2 + \lambda = 1 + (1 + a)\beta \\ 0 - \lambda = 2 - a\beta \\ 1 + 2\lambda = 3 + 3a\beta \end{cases} \begin{cases} 2 + \lambda = 1 + \beta + a\beta \\ \lambda = -2 + a\beta \\ 1 + 2\lambda = 3 + 3a\beta \end{cases} \text{ sustituyo } \begin{cases} 2 - 2 + a\beta = 1 + \beta + a\beta \\ \lambda = -2 + a\beta \\ 1 + 2\lambda = 3 + 3a\beta \end{cases} \begin{cases} -1 = \beta \\ \lambda = -2 + a(-1) \\ 1 + 2\lambda = 3 + 3a\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = \beta \\ \lambda = -2 - a \\ 1 + 2\lambda = 3 + 3a\beta \end{cases} \text{ sustituyo } \lambda \text{ y } \beta \Rightarrow 1 + 2(-2 - a) = 3 + 3a(-1); 1 - 4 - 2a = 3 - 3a;$$

$$1 - 4 - 2a = 3 - 3a; -6 = -a; a = 6;$$

COMPROBAMOS SI SE CORTAN PARA a = 6;

r: $x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2}$

s: $\frac{x - 1}{1 + a} = \frac{y - 2}{-a} = \frac{z - 3}{3a}$; sustituyo a = 6; s: $\frac{x - 1}{1 + 6} = \frac{y - 2}{-(6)} = \frac{z - 3}{3(6)}; \frac{x - 1}{7} = \frac{y - 2}{-6} = \frac{z - 3}{18};$

para ver si se cortan $\begin{cases} 2 + \lambda = 1 + 7\beta \\ 0 - \lambda = 2 - 6\beta \\ 1 + 2\lambda = 3 + 18\beta \end{cases} \begin{cases} \lambda = -1 + 7\beta \\ \lambda = -2 + 6\beta \\ 1 + 2\lambda = 3 + 18\beta \end{cases} \Rightarrow -1 + 7\beta = -2 + 6\beta; \beta = -1;$

$$1 + 2\lambda = 3 + 18(-1); 2\lambda = -1 + 3 - 18; \lambda = -\frac{16}{2} = -8; \begin{cases} \beta = -1; \\ \lambda = -8 \end{cases}$$

r: $x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2}$ ecuacion parametrica $\begin{cases} x = 2 + 1\lambda \\ y = 0 - 1\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \text{ para } \lambda = -8 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 1 * (-8) \\ y = 0 - 1 * (-8) \\ z = 1 + 2 * (-8) \end{cases} \begin{cases} x = -6 \\ y = 8 \\ z = -15 \end{cases}$

s: $\frac{x - 1}{7} = \frac{y - 2}{-6} = \frac{z - 3}{18}$; Parametrica $\begin{cases} x = 1 + 7\beta \\ y = 2 - 6\beta \\ z = 3 + 18\beta \end{cases} \text{ para } \beta = -1 \begin{cases} x = 1 + 7(-1) \\ y = 2 - 6(-1) \\ z = 3 + 18(-1) \end{cases} \begin{cases} x = -6 \\ y = 8 \\ z = -15 \end{cases}$

PUNTO DE CRUCE (-6,8,-15)

b) determinar para que valor de a las rectas son perpendiculares

Si son verticales el producto escalar de sus vectores directores sería cero.

$$\text{Vector director } \vec{d}(1, -1, 2) * \text{Vector director } \vec{d}(1 + a, -a, 3a) = 0; (1, -1, 2) * (1 + a, -a, 3a) = 0$$

$$1(1 + a) + (-1)(-a) + 2 * 3a = 0; 1 + a + a + 6a = 8a + 1 = 0; a = -\frac{1}{8}$$

51. Ejercicio

Estudia la posición relativa de dos rectas r y s

$$r = \begin{cases} x = 2 - 2\lambda, \\ y = 3 - \lambda; \\ z = 1 + \lambda; \end{cases} \quad s = \begin{cases} x = \mu; \\ y = -1 + 2\mu; \\ z = 7 - 3\mu; \end{cases}$$

Solución

$$r = \begin{cases} x = 2 - 2\lambda, \\ y = 3 - \lambda; \\ z = 1 + \lambda; \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{d}_r = (2, -1, 1) \\ P_r = (2, 3, 1) \end{cases} \quad s = \begin{cases} x = \lambda; \\ y = -1 + 2\lambda; \\ z = 7 - 3\lambda; \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{d}_s = (1, 2, -3) \\ P_s = (0, -1, 7) \end{cases} \quad \vec{d}_r \text{ y } \vec{d}_s \text{ no son paralelos}$$

las rectas no son coincidentes ni paralelas. Hallo, $\overrightarrow{P_r P_s} = P_s(0, -1, 7) - P_r(2, 3, 1) = (-2, -4, 6)$

$$\text{El producto mixto de } (\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 6 - 4 + 4 - 24 + 6 = 0;$$

las rectas r y s son secantes;

Hallamos el punto de intersección

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda, \\ y = 3 - \lambda; \\ z = 1 + \lambda; \end{cases} \quad s = \begin{cases} x = \mu; \\ y = -1 + 2\mu; \\ z = 7 - 3\mu; \end{cases} \quad \text{igualamos} \quad \begin{cases} \mu = 2 - 2\lambda; \\ 1 + 2\mu = 3 - \lambda; \\ 7 - 3\mu = 1 + \lambda; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = 2 - 2\lambda; \\ 1 + 2\mu = 3 - \lambda; \\ 7 - 3\mu = 1 + \lambda; \end{cases} \quad 1 + 2(2 - 2\lambda) = 3 - \lambda; 1 + 2 - 4\lambda = 3 - \lambda; 3\lambda = 0; \lambda = 0;$$

$$\text{Punto de corte} \quad \begin{cases} x = 2 - 2\lambda, \\ y = 3 - \lambda; \\ z = 1 + \lambda; \end{cases} \quad \text{sustituimos} \quad \begin{cases} x = 2 - 2 * 0, \\ y = 3 - 0; \\ z = 1 + 0; \end{cases} = \begin{cases} x = 2, \\ y = 3; \\ z = 1; \end{cases} \quad (2, 3, 1)$$

52. Ejercicio

Estudia la posición relativa de dos rectas r y s

$$r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2} = z+1; \quad s: \frac{x+2}{1} = \frac{y+8}{2} = z+5$$

Solución

$$r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2} = z+1 = r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}, \quad \begin{cases} \vec{d}_r = (-1, 2, 1) \\ P_r = (2, 0, -1) \end{cases}$$

$$s: \frac{x+2}{1} = \frac{y+8}{2} = z+5 = s: \frac{x+2}{1} = \frac{y+8}{2} = \frac{z+5}{1}, \quad \begin{cases} \vec{d}_s = (1, 2, 1) \\ P_s = (-2, -8, -5) \end{cases}$$

$\vec{d}_r \neq \vec{d}_s$ rectas son secantes o se cruzan

las rectas no son coincidentes ni paralelas. Hallo, $\overrightarrow{P_r P_s} = P_s(-2, -8, -5) - P_r(2, 0, -1) = (-4, -8, -4)$

$$\text{El producto mixto de } (\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & -8 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 8 - 8 + 8 - 8 + 8 = 0; \text{ rectas secantes}$$

53. Ejercicio

Estudia la posición relativa de dos rectas r y s

$$r: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}; s: \begin{cases} x = 2t; \\ y = -2t; \\ z = -3t; \end{cases}$$

Solución

$$r: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}, \begin{cases} \vec{d}_r = (-2, 2, 3) \\ P_r = (0, -1, 0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 2t; \\ y = -2t; \\ z = -3t; \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_s = (2, -2, -3) \\ P_s = (0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\vec{d}_r = (-2, 2, 3) = -\vec{d}_s = (2, -2, -3) \text{ rectas paralelas o coincidentes}$$

$$\text{Sustituyo } P_s = (0, 0, 0) \text{ en } r: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{0}{-2} = \frac{0+1}{2} = \frac{0}{3}; 0 \neq \frac{1}{2}; P_s \text{ no pertenece a } r$$

P_s no pertenece a $r \Rightarrow$ rectas paralelas

54. Ejercicio

Estudia la posición relativa de dos rectas r y s

$$r: \begin{cases} x + y - z = 2; \\ 2x - z = 3; \end{cases}; s: \begin{cases} x - 2y - 2z = 3; \\ 2x - 3y = 0; \end{cases}$$

Solución

$$r: \begin{cases} x + y - z = 2; \\ 2x - z = 3; \end{cases}; s: \begin{cases} x + y - z - 2 = 0; \\ 2x - z - 3 = 0; \end{cases} \text{ hallamos dos puntos,}$$

$$\text{damos valores } x = 0; \begin{cases} 0 + y - z = 2; \\ 2 \cdot 0 - z = 3; \end{cases} z = -3; \text{ sustituyo en } x + y - z = 2; y = -1; A(0, -1, -3)$$

$$\text{damos valores } z = 3; \begin{cases} x + y - 3 = 2; \\ 2x - 3 = 3; \end{cases} x = 3; y = 2; B(3, 2, 3)$$

$$r: \begin{cases} x + y - z = 2; \\ 2x - z = 3; \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_r = B(3, 2, 3) - A(0, -1, -3) = (3, 3, 6) = (1, 1, 2) \\ P_r = (0, -1, -3) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x - 2y - 2z = 3; \\ 2x - 3y = 0; \end{cases} = s: \begin{cases} x - 2y - 2z - 3 = 0; \\ 2x - 3y = 0; \end{cases}$$

$$\text{damos valores } x = 0; s: \begin{cases} 0 - 2y - 2z = 3; \\ 2 \cdot 0 - 3y = 0; \end{cases} y = 0; z = -\frac{3}{2}; A(0, 0, -\frac{3}{2})$$

$$\text{damos valores } y = 2; s: \begin{cases} x - 2 \cdot 2 - 2z = 3; \\ 2x - 3 \cdot 2 = 0; \end{cases} x = 3; z = -2; B(3, 2, -2)$$

$$s: \begin{cases} x - 2y - 2z = 3; \\ 2x - 3y = 0; \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_s = B(3, 2, -2) - A(0, 0, -\frac{3}{2}) = (3, 2, -\frac{1}{2}) = (3, 2, -\frac{1}{2}) \\ P_s = (3, 2, -2) \end{cases}$$

$$\vec{d}_r = (1, 1, 2) \neq \vec{d}_s = (3, 2, -\frac{1}{2}) \text{ rectas no son paralelas}$$

$$\text{las rectas no son coincidentes ni paralelas. Hallo } \overrightarrow{P_r P_s} = P_s(3, 2, -2) - P_r(0, -1, -3) = (3, 3, 1)$$

$$\text{El producto mixto de } (\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 18 - \frac{3}{2} - 12 - 3 + \frac{3}{2} = 5; \text{ rectas secantes}$$

55. Ejercicio

Calcula el valor de k para que las rectas r y s se corten en un punto. Hallar las coordenadas de

$$\text{dicho punto } r = \begin{cases} x = 2 - \lambda, \\ y = 2 + \lambda; \\ z = 3\lambda; \end{cases} s = \begin{cases} x = -1 + 2\mu; \\ y = -1 + \mu; \\ z = k - 3\mu; \end{cases}$$

Solución

$$r = \begin{cases} x = 2 - \lambda, \\ y = 2 + \lambda; \\ z = 3\lambda; \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_r = (-1, 1, 3) \\ P_r = (2, 2, 0) \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} x = -1 + 2\mu; \\ y = -1 + \mu; \\ z = k - 3\mu; \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_s = (2, 1, -3) \\ P_s = (-1, -1, k) \end{cases}$$

$\vec{d}_r = (-1, 1, 3) \neq \vec{d}_s = (2, 1, -3)$ no son paralelos no coincidentes

Hallo, $\overrightarrow{P_r P_s} = P_s(-1, -1, k) - P_r(2, 2, 0) = (-3, -3, k)$

El producto mixto de $(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & k \end{vmatrix} = 0$; para que se corten han de ser coplanarios;

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & k \end{vmatrix} = -k + 9 - 18 + 9 + 9 - 2k = 9 - 3k = 0; k = 3;$$

$$r = \begin{cases} x = 2 - \lambda, \\ y = 2 + \lambda; \\ z = 3\lambda; \end{cases} s = \begin{cases} x = -1 + 2\mu; \\ y = -1 + \mu; \\ z = k - 3\mu; \end{cases} \text{ para } k = 3; = \begin{cases} x = 2 - \lambda, \\ y = 2 + \lambda; \\ z = 3\lambda; \end{cases} = \begin{cases} x = -1 + 2\mu; \\ y = -1 + \mu; \\ z = 3 - 3\mu; \end{cases} \text{ igualo}$$

$$\begin{cases} 2 - \lambda = -1 + 2\mu \\ 2 + \lambda = -1 + \mu; \\ 3\lambda = 3 - 3\mu; \lambda = \frac{3 - 3\mu}{3} = 1 - \mu \end{cases} \text{ sustituyo en } 2 + \lambda = -1 + \mu \Rightarrow 2 + (1 - \mu) = -1 + \mu;$$

$$4 = 2\mu; \mu = 2; \text{ sustituyo } \lambda = 1 - 2 = -1; \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\text{Punto de corte } r = \begin{cases} x = 2 - \lambda, \\ y = 2 + \lambda; \\ z = 3\lambda; \end{cases} \text{ sustituyo } \lambda \begin{cases} x = 2 - (-1); \\ y = 2 + (-1); \\ z = 3(-1); \end{cases} \begin{cases} x = 3; \\ y = 1; \\ z = -3; \end{cases} (3, 1, -3)$$

$$\text{Punto de corte } s = \begin{cases} x = -1 + 2\mu; \\ y = -1 + \mu; \\ z = k - 3\mu; \end{cases} \text{ sustituyo } \mu \begin{cases} x = -1 + 2 * 2; \\ y = -1 + 2; \\ z = 3 - 3 * 2; \end{cases} \begin{cases} x = 3; \\ y = 1; \\ z = -3; \end{cases} (3, 1, -3)$$

12 Haces de planos

12.1 Haz de planos paralelos

Dado que dos planos son paralelos, siempre que los coeficientes (A, B, C) de sus ecuaciones sean proporcionales

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

son paralelos si $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} \neq \frac{D}{D_1}$

El haz de planos paralelos a $Ax + By + Cz + D = 0$

serán $Ax + By + Cz + K = 0$

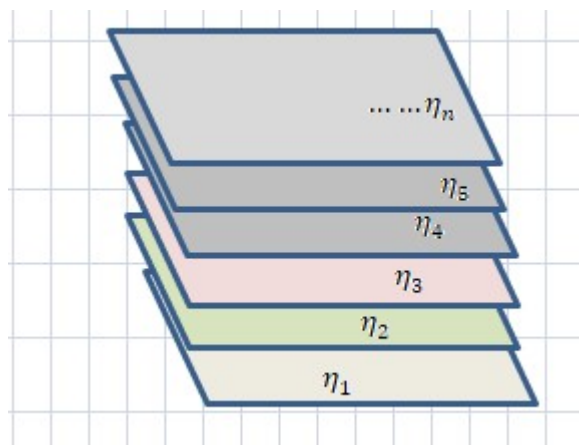
Ejemplo:

Calcular el haz de planos paralelos a $x + 2y - 3z - 5 = 0$ y que pase por $(3, -1, 2)$

El haz de planos será $x + 2y - 3z + k = 0$; si ha de pasar por $P(3, -1, 2)$ ha de cumplir

$x + 2y - 3z + k = 0$ sustituyo $\Rightarrow 3 + 2(-1) - 3(2) + k = 0; 3 - 2 - 6 + k = 0; k = 5;$

el plano del haz que pasa por $(3, -1, 2)$ será $x + 2y - 3z + 5 = 0$;



12.2 Haz de planos secantes

Dado que la ecuación implícita

de una recta

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases} \text{ esta definida como}$$

la intersección de dos planos.

Por tanto cualquier punto $P(a, b, c)$ de la recta ha de cumplir las dos ecuaciones de los planos.

Por lo que cualquier plano de la forma

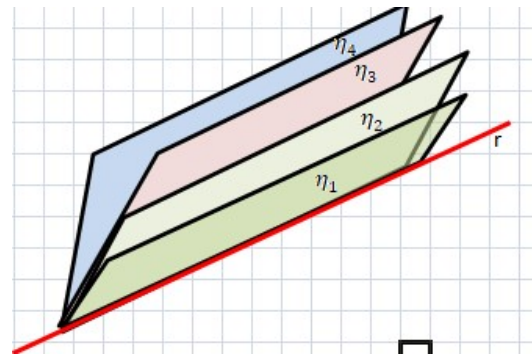
$$(Ax + By + Cz + D) + k(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0;$$

contiene a dicha recta

Ejemplo:

Hallar la ecuación del haz de planos secantes en la recta $r: \begin{cases} x + y - z = 2; \\ 2x - z = 3; \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y - z - 2 = 0; \\ 2x - z - 3 = 0; \end{cases} \text{ haz de planos } = (x + y - z - 2) + k(2x - z - 3) = 0$$



56. Ejercicio

Escribe la ecuación de los siguientes haces de planos

a) paralelos al plano $\pi: 3x + 3y - z - 3 = 0$;

b) que tiene como vector normal $\vec{n} = (-1, 2, -3)$

c) Que contiene a la recta $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

d) Paralelo al plano de coordenadas XZ

e) Que contiene al eje de coordenadas Y

Solución

a) paralelos al plano $\pi: 3x + 3y - z - 3 = 0$; $3x + 3y - z + k = 0$

b) que tiene como vector normal $\vec{n} = (-1, 2, -3)$; $-x + 2y - 3z + k = 0$

c) Que contiene a la recta $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \quad x - y + z + k(2x - y + z) = 0;$

$$\begin{cases} x - y + z + k(2x - y + z) = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

d) Paralelo al plano de coordenadas XZ. El plano de coordenadas XZ = y

$$y + k = 0$$

e) Que contiene al eje de coordenadas Y; el eje de coordenadas Y esta definido por los planos

$$y = \begin{cases} \text{plano XY } z = 0; \\ \text{Plano XZ } y = 0; \end{cases} \quad z + ky = 0; \text{ y hay que añadir el plano } y = 0;$$

57. Ejercicio

Escribe la ecuación del haz de planos secantes que contienen a la bisectriz del ángulo formado por X e Y

Solución

Dos puntos de la bisectriz de XY serían (0,0,0)

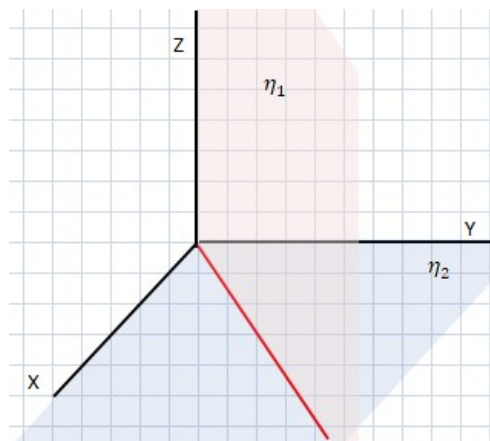
otro podría ser (1,1,0)

$$\text{recta bisectriz} = \begin{cases} P (0,0,0); \\ \vec{d}_s = (1,1,0) - (0,0,0) = (1,1,0) \end{cases}$$

$$\text{recta bisectriz XY} \begin{cases} x = 0 + 1\lambda \\ y = 0 + 1\lambda \\ z = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = 1\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{recta bisectriz paramétrica} = \begin{cases} \lambda = \frac{x}{1} \\ \lambda = \frac{y}{1} \\ z = 0 \end{cases} \text{ implícita } \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

haz de planos secantes que contiene a recta bisectriz XY; $x - y + kz = 0$ y el plano $Z = 0$



58. Ejercicio

Escribe la ecuación del haz de planos secantes que contienen a la recta que pasa por A(1, -1, 3) y B(0, -2, 1)

Solución

$$\text{ecuación de la recta} = \begin{cases} P (1, -1, 3); \\ \vec{d}_s = B(0, -2, 1) - A(1, -1, 3) = (-1, -1, -2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 1\lambda \\ y = -1 - 1\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases} \begin{cases} \lambda = -x + 1 \\ \lambda = -y - 1 \\ \lambda = \frac{-z + 3}{2} \end{cases} \frac{-x + 1}{1} = \frac{-y - 1}{1} = \frac{-z + 3}{2}; \begin{cases} -x + 1 = -y - 1 \\ -x + 1 = \frac{-z + 3}{2} \end{cases} \begin{cases} -x + y + 2 = 0 \\ -2x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Haz de planos $-x + y + 2 + k(-2x + z - 1) = 0$; añadiendo el plano $-2x + z - 1 = 0$

59. Ejercicio

Escribe la ecuación del haz de planos que contiene a la recta de ecuación paramétrica $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \begin{cases} t = x - 1 \\ t = y + 2 \\ t = \frac{z - 2}{2} \end{cases} \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 2}{2} = \begin{cases} x - 1 = y + 2 \\ x - 1 = \frac{z - 2}{2} \end{cases} \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

Haz de planos $x - y - 3 + k(2x - z) = 0$; añadiendo el plano $2x - z = 0$

60. Ejercicio

Halla la recta que está contenida en todos los planos de la forma $\pi: x - 2y + \lambda z = 0$;

Solución

Haz de planos $\pi: x - 2y + \lambda z = 0$;

$$\text{recta} \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

61. Ejercicio

Calcula la ecuación de la recta que es perpendicular al plano $\pi: 2x + 2y - 3z = 6$;

y pasa por el punto $A(-2, 3, 4)$

Solución

Si la recta es perpendicular al plano, su vector director será igual al vector normal del plano

$$\pi: 2x + 2y - 3z = 6; 2x + 2y - 3z - 6 = 0$$

$$\text{Ecuación de la recta } \begin{cases} P(-2, 3, 4); \\ \vec{d}_s = (2, 2, -3) \end{cases}; \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \quad t = \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{-z+4}{3}; \begin{cases} 2x+4=2y-6 \\ 3x+6=-2z+8 \end{cases} \begin{cases} 2x-2y+10=0 \\ 3x+2z-2=0 \end{cases} \begin{cases} 2x-y+5=0 \\ 3x+2z-2=0 \end{cases}$$

62. Ejercicio

Calcula la ecuación del plano que es perpendicular a $\pi: x - y + 3z = 4$; y que contiene a la recta

$$r = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Solución

Para calcular la ecuación de un plano necesitamos conocer dos vectores contenidos en el plano

y un punto del mismo

Un plano η perpendicular a $\pi: x - y + 3z = 4$ contendrá el vector normal del plano π

Vector director del plano η será $\vec{n} = \vec{N}_\pi$ (vector normal del plano π) = (1, -1, 3)

Si ha de contener a la recta otro vector director del plano η será el $\vec{d}_r$ (Vector director de la recta) (1, -1, 2)

Por otro lado si el plano contiene a la recta en P punto de la recta (1, 2, 3) pertenecerá al plano

$$\text{Ecuación implícita del plano } \eta \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & -1 & y-2 \\ 3 & 2 & z-3 \end{vmatrix} = -z + 3 - 2x + 2 + 3y - 6 + 3x - 3 + z - 3 - 2y + 4 = 0$$

$$\text{Ecuación implícita del plano } \eta \quad x + y - 3 = 0;$$

63. Ejercicio

Verificar si los puntos A, B, C están o no alineados

a) A(2, 2, -1) B(1, 3, 1) C(0, 4, 3)

b) A(1, -2, 3) B(4, 3, -1) C(7, 8, -4)

Solución

a) A(2, 2, -1) B(1, 3, 1) C(0, 4, 3). Hallamos la recta que pasa por AB y comprobamos si C pertenece a la recta.

$$\text{Ecuación de la recta } \begin{cases} P(2, 2, -1); \\ \vec{d}_{sAB} = B(1, 3, 1) - A(2, 2, -1) = (-1, 1, 2) \end{cases}; \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

$$\text{Comprobamos si } C(0, 4, 3) \text{ pertenece } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \text{ sustituimos } \begin{cases} 0 = 2 - t; t = 2 \\ 4 = 2 + t; t = 2 \\ 3 = -1 + 2t; t = 2 \end{cases} \text{ pertenece a la recta}$$

A(2, 2, -1) B(1, 3, 1) C(0, 4, 3) están alineados

b) A(1, -2, 3) B(4, 3, -1) C(7, 8, -4)

$$\text{Ecuación de la recta } \begin{cases} P(1, -2, 3); \\ \vec{d}_{sAB} = B(4, 3, -1) - A(1, -2, 3) = (3, 5, -4) \end{cases}; \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$$

$$\text{Comprobamos si } C(7, 8, -4) \text{ pertenece } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \text{ sustituimos } \begin{cases} 7 = 1 + 3t; t = 2; \\ 8 = -2 + 5t; t = 2 \\ -4 = 3 - 4t; t = \frac{7}{4} \end{cases} \text{ no pertenece}$$

$A(1, -2, 3)$ $B(4, 3, -1)$ $C(7, 8, -4)$ no están alineados

64. Ejercicio

Verificar si los puntos A, B, C, D son coplanarios

a) $A(2, 1, 0)$ $B(4, 2, 0)$ $C(1, -2, 0)$ $D(1, 2, 0)$

b) $A(1, 1, 1)$ $B(2, 2, -1)$ $C(-1, 2, 2)$ $D(2, 1, 2)$

Solución

Dos o mas puntos son coplanarios si los vectores determinados por ellos son coplanarios.

Dos o mas vectores son coplanarios si son linealmente independientes, $\text{Rango}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 2$

$$\overrightarrow{AB} = B(4, 2, 0) - A(2, 1, 0) = (2, 1, 0);$$

$$\overrightarrow{AC} = C(1, -2, 0) - A(2, 1, 0) = (-1, -3, 0)$$

$$\overrightarrow{AD} = D(1, 2, 0) - A(2, 1, 0) = (-1, 1, 0)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 ; \text{son coplanarios}$$

$$\overrightarrow{AB} = B(2, 2, -1) - A(1, 1, 1) = (1, 1, -2);$$

$$\overrightarrow{AC} = C(-1, 2, 2) - A(1, 1, 1) = (-2, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = D(2, 1, 2) - A(1, 1, 1) = (1, 0, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 2 + 2 = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{No son coplanarios}$$

65. Ejercicio

Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta r y al punto A

a) $r \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ y = z \end{cases} \quad A(2, 2, -2)$

b) $r \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = -t; \end{cases} \quad A(2, 2, 2)$

Solución

a) $r \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ y = z \end{cases} \quad A(2, 2, -2); \quad r \begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0 \\ y - z = 0; \end{cases} \quad A(2, 2, -2)$

Hallamos dos puntos de la recta $r \begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0 \\ y - z = 0; \end{cases}$

$x = 0; \begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0 \\ y - z = 0; \end{cases} \quad y = z; \quad 0 - 2y + 3y - 6 = 0; \quad y = 6; \text{ un punto B será } (0, 6, 6)$

$x = 1; \begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0 \\ y - z = 0; \end{cases} \quad y = z; \quad 1 - 2y + 3y - 6 = 0; \quad y = 5 \text{ Un punto C será } (1, 5, 5)$

$$\overrightarrow{AB} = B(0, 6, 6) - A(2, 2, -2) = (-2, 4, 8)$$

$$\overrightarrow{AC} = C(1, 5, 5) - A(2, 2, -2) = (-1, 3, 7)$$

Formula del plano con dos vectores directores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y un punto B

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & x-2 \\ 4 & 3 & y-2 \\ 8 & 7 & z+2 \end{vmatrix} = -6z - 12 + 28x - 56 - 8y + 16 - 24x + 48 + 4z + 8 + 14y - 28 = 0;$$

$$4x + 6y - 2z - 24 = 0 \Rightarrow 2x + 3y - z - 12 = 0$$

El plano pedido será $2x + 3y - z - 12 = 0$;

RESOLUCION POR EL HAZ DE PLANOS

$$r \begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0 \\ y = z \end{cases}; \quad x - 2y + 3z - 6 + t(y - z) = 0; \text{Plano que pase por } A(2, 2, -2)$$

$$2 - 2 \cdot 2 + 3(-2) - 6 + t(2 - (-2)) = 0; 2 - 4 - 6 - 6 + 4t = 0; t = \frac{14}{4} = \frac{7}{2};$$

$$x - 2y + 3z - 6 + t(y - z) = 0; \text{sustituyo } t \Rightarrow x - 2y + 3z - 6 + \frac{7}{2}(y - z) =$$

$$x - 2y + 3z - 6 + \frac{7}{2}y - \frac{7}{2}z = 0; x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z - 6 = 0; 2x + 3y - z - 12 = 0$$

$$b) r \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = -t; \end{cases} \quad A(2, 2, 2), \vec{d_s} = (1, 1, -1); P(-1, 0, 0)$$

$$\vec{AP} = A(2, 2, 2) - P(-1, 0, 0) = (3, 2, 2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x+1 \\ 1 & 2 & y \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix} = 2z + 2x + 2 - 3y + 2x + 2 - 3z - 2y = 4x - 5y - z + 4 = 0$$

El plano pedido será $4x - 5y - z + 4 = 0$;

66. Ejercicio

Dados los puntos $A(-1, 2, 0)$ y $B(5, -2, 4)$ calcular las coordenadas del punto C , tal que la distancia de C a B sea el triple de que la distancia de C a A

Solución

$$\vec{AB} = B(5, -2, 4) - A(-1, 2, 0) = (6, -4, 4)$$

$$\vec{CB} = C(x, y, z) - B(5, -2, 4) = (x - 5, y + 2, z - 4)$$

$$\vec{AC} = A(-1, 2, 0) - C(x, y, z) = (-1 - x, 2 - y, -z)$$

$$3\vec{AC} = \vec{CB}; 3(-1 - x, 2 - y, -z) = (x - 5, y + 2, z - 4); \begin{cases} 3(-1 - x) = x - 5 \\ 3(2 - y) = y + 2 \\ 3(-z) = z - 4 \end{cases} \begin{cases} -3 - 3x = x - 5 \\ 6 - 3y = y + 2 \\ -3z = z - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 - 3x = x - 5 \\ 6 - 3y = y + 2 \\ -3z = z - 4 \end{cases} \begin{cases} 4x = -2; x = -\frac{1}{2} \\ 4y = 4; y = 1 \\ 4z = 4; z = 1 \end{cases} C(-\frac{1}{2}, 1, 1)$$

67. Ejercicio

Calcula el valor de a para que los puntos $A(2, 0, -1)$, $B(1, 2, -2)$ y $C(1, a, a)$ pertenezcan a la misma recta

Solución

$$\text{Ecuación de la recta } \begin{cases} P(1, a, a); \\ \vec{d_s} AB = B(1, 2, -2) - A(2, 0, -1) = (-1, 2, -1); \end{cases} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = a + 2t \\ z = a - t; \end{cases} \begin{cases} t = \frac{1 - x}{-1} \\ t = \frac{y - a}{2} \\ t = \frac{a - z}{-1}; \end{cases}$$

Si los pntos pertenecen a la recta cumplan la ecuación

$$\text{para } A(2, 0, -1) \begin{cases} t = \frac{1 - x}{-1} \\ t = \frac{y - a}{2} \\ t = a - z; \end{cases} \begin{cases} t = \frac{1 - 2}{-1} \\ t = \frac{0 - a}{2} \\ t = a - (-1); \end{cases} \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{-a}{2}; a = 2 \\ t = a + 1; a = -2 \end{cases}; \text{ el sistema es incompatible}$$

No existe ningún valor de a que cumpla la condición

68. Ejercicio

Calcula el valor de a y b para que los puntos A(2,0,-1), B(1,2,-2) y C(1,a,b) pertenezcan a la misma recta

Solución

$$\text{Ecuación de la recta } \begin{cases} P(1,a,b); \\ \vec{d}_{AB} = B(1,2,-2) - A(2,0,-1) = (-1,2,-1); \end{cases} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = a + 2t; \\ z = b - t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{1-x}{2}; \\ t = \frac{y-a}{2}; \\ t = b-z; \end{cases} \begin{cases} 1-x = \frac{y-a}{2}; \\ 1-x = b-z; \end{cases} \begin{cases} 2-2x-y+a=0; \\ 1-x+z-b=0; \end{cases}$$

$$\text{Solución compruebo A } \begin{cases} 2-2 \cdot 2-0+a=0; a=2; \\ 1-2-1-b=0; b=-2; \end{cases} \text{ ecuación de la recta } \begin{cases} t = \frac{1-x}{2}; \\ t = \frac{y-2}{2}; \\ t = -2-z; \end{cases}$$

Si todos los puntos pertenecen a la recta estarán alineados:

$$\begin{cases} \vec{AB} = B(1,2,-2) - A(2,0,-1) = (-1,2,-1) \\ \vec{AC} = C(1,2,-2) - A(2,0,-1) = (-1,2,-1); \end{cases} \text{ están alineados pues B y C son el mismo punto}$$

69. Ejercicio

Calcula el valor de m para que los puntos del espacio A(0,1,2), B(1,0,3), C(1,m,1) y D(m,-1,2m) pertenezcan al mismo plano

Solución

Un plano viene definido por dos vectores directores y un punto del plano

$$\begin{cases} \vec{AB} = B(1,0,3) - A(0,1,2) = (1,-1,1) \\ \vec{AD} = D(m,-1,2m) - A(0,1,2) = (m,-2,2m-2); \end{cases} \text{ y el punto } C(1,m,1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m & x-1 \\ -1 & -2 & y-m \\ 1 & 2m-2 & z-1 \end{vmatrix} = -2z + 2 - 2mx + 2m + 2x - 2 + my - m^2 + 2x - 2 + mz - m - 2my + 2m^2 + 2y - 2m =$$

$$-2z - 2 - 2mx - m - my + m^2 + 4x + mz + 2y = 0$$

Como el plano ha de contener a todos los puntos, compruebo que el plano contiene a A(0,1,2),

$$\text{Sustituyo } \Rightarrow -2 \cdot 2 - 2 - 2m \cdot 0 - m - m \cdot 1 + m^2 + 4 \cdot 0 + m \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0;$$

$$-4 - 2 - m - m + m^2 + 2m + 2 = 0; -4 + m^2 = 0; m = \pm\sqrt{4}; \text{ Pertenecen al plano para } \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

OTRO METODO:

Si pertenecen al mismo plano serán coplanarios

$$\begin{cases} \vec{AB} = B(1,0,3) - A(0,1,2) = (1,-1,1) \\ \vec{AC} = C(1,m,1) - A(0,1,2) = (1,m-1,-1) \\ \vec{AD} = D(m,-1,2m) - A(0,1,2) = (m,-2,2m-2) \end{cases}$$

$$\text{Rag} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & m-1 & -2 \\ 1 & -1 & 2m-2 \end{vmatrix} = 2m^2 - 4m + 2 + m - 2 - m^2 + m - 2 + 2m - 2 = m^2 - 4 = 0;$$

$$\text{Son coplanarios para } \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

70. Ejercicio

Dado el plano $\eta: 6x + 4y - 3z - d = 0$

a) Calcula el valor de d para que el plano pase por P(2,0,0)

b) Calcula las coordenadas A, B, C que son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano η

c) Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices A, B, C

Solución

a) Calcula el valor de d para que el plano pase por P(2,0,0)

Si ha de contener el punto ha de cumplir la ecuación

Sustituyo P(2,0,0) en el plano $\eta: 6x + 4y - 3z - d = 0 \Rightarrow 6 \cdot 2 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - d = 0; d = 12$

b) Calcula las coordenadas A, B, C que son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano η

$$\eta: 6x + 4y - 3z - 12 = 0; \begin{cases} \text{corte con eje } x; (x, 0, 0) \Rightarrow 6x + 0 - 0 - 12 = 0; x = 2; A(2, 0, 0) \\ \text{corte con eje } y; (0, y, 0) \Rightarrow 0 + 4y - 0 - 12 = 0; y = 3; B(0, 3, 0) \\ \text{corte con eje } z; (0, 0, z) \Rightarrow 0 + 0 - 3z - 12 = 0; z = -4; C(0, 0, -4) \end{cases}$$

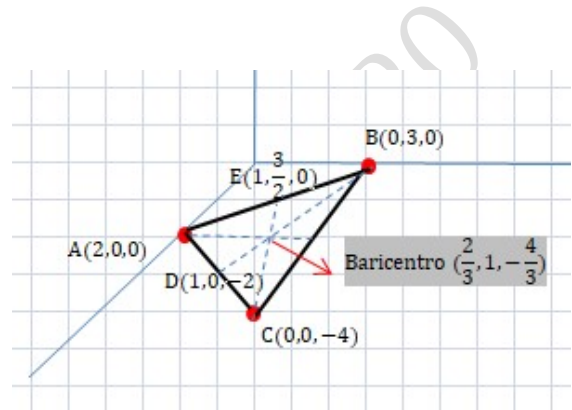
c) Calcula las coordenadas del baricentro del del triangulo de vertices A, B, C

$$\text{Punto medio AB} = \frac{A(2, 0, 0) + B(0, 3, 0)}{2} = E(1, \frac{3}{2}, 0)$$

$$\text{Punto medio AC} = \frac{A(2, 0, 0) + C(0, 0, -4)}{2} = D(1, 0, -2)$$

$$\text{Recta CE} \begin{cases} C(0, 0, -4) \\ \vec{d_s CE} = E(1, \frac{3}{2}, 0) - C(0, 0, -4) = (1, \frac{3}{2}, 4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + \frac{3}{2}t \\ z = -4 + 4t \end{cases}; \begin{cases} x = t \\ y = +\frac{3}{2}t \\ z = -4 + 4t \end{cases}$$



$$\text{Recta BD} \begin{cases} B(0, 3, 0) \\ \vec{d_s BD} = (1, 0, -2) - B(0, 3, 0) = (1, -3, -2) \end{cases} \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = 0 - 2\lambda \end{cases}; \begin{cases} x = +\lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

$$\text{El baricentro será el punto de cruce de las dos recta} \begin{cases} \lambda = t \\ 3 - 3\lambda = +\frac{3}{2}t \\ -2\lambda = -4 + 4t \end{cases}; \text{ sustituyo } t \Rightarrow 3 - 3\lambda = +\frac{3}{2}\lambda$$

$$3 = 3\lambda + \frac{3}{2}\lambda; 6 = 9\lambda; \lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \lambda = 2/3$$

$$\text{baricentro} = \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 3 - 3 \cdot \frac{2}{3} \\ z = -2 \cdot \frac{2}{3} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 1 \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases}; \text{ Baricentro } (\frac{2}{3}, 1, -\frac{4}{3})$$

71. Ejercicio

Calcular el valor de a para que los puntos A(3,0,2), B(0, a, a), C(1,2,2) y D(-1, -1, 0) sean coplanarios

Solución

Si los puntos pertenecen al mismo plano sus vectores tambien perteneceran

$$\begin{cases} \vec{AB} = B(0, a, a) - A(3, 0, 2) = (-3, a, a - 2) \\ \vec{AC} = C(1, 2, 2) - A(3, 0, 2) = (-2, 2, 0) \\ \vec{AD} = D(-1, -1, 0) - A(3, 0, 2) = (-4, -1, -2) \end{cases} \text{ si son coplanarios } \begin{vmatrix} -3 & a & a - 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} -3 & a & a - 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 2a - 4 + 8a - 16 - 4a = 6a - 8 = 0; a = \frac{8}{6}; a = \frac{4}{3};$$

$$\text{ecuacion del plano, dos vectores directores y un punto de paso} \begin{cases} A(3, 0, 2) \\ \vec{AC} (-2, 2, 0) \\ \vec{AD} (-4, -1, -2) \end{cases}$$

$$\text{ecuacion del plano } \begin{vmatrix} -2 & -4 & x-3 \\ 2 & -1 & y \\ 0 & -2 & z-2 \end{vmatrix} = 2z - 4 - 4x + 12 - 4y + 8z - 16 = 0$$

$$-4x - 4y + 10z - 8 = 0; \text{ Ecuacion del Plano } 2x + 2y - 5z + 4 = 0$$

COMPROBACION

$$\text{Punto A}(3,0,2) \text{ sustituyo en el Plano } 2x + 2y - 5z + 4 = 0 \Rightarrow 6 + 0 - 10 + 4 = 0; OK$$

$$\text{Punto B}\left(0, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ sustituyo en el Plano } 2x + 2y - 5z + 4 = 0 \Rightarrow 0 + \frac{8}{3} - \frac{20}{3} + 4 = 0; 8 - 20 + 12 = 0; OK$$

$$\text{Punto C}(1,2,2) \text{ sustituyo en el Plano } 2x + 2y - 5z + 4 = 0 \Rightarrow 2 + 4 - 10 + 4 = 0; OK$$

$$\text{Punto D}(-1,-1,0) \text{ sustituyo en el Plano } 2x + 2y - 5z + 4 = 0 \Rightarrow -2 - 2 - 0 + 4 = 0; OK$$

72. Ejercicio

Escribe la ecuacion del plano que pasa por los puntos A(3,1,-1), B(2,0,3) y es paralelo a la recta

$$r = \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4}$$

Solución

Para hallar la ecuacion de un plano necesito esto $\begin{cases} \text{P Punto de paso (punto del plano)} \\ \vec{V}_1 \text{ Vector director (vector paralelo al plano)} \\ \vec{V}_2 \text{ Vector director (vector paralelo al plano)} \end{cases}$

o esto $\begin{cases} \text{P Punto de paso (punto del plano)} \\ \vec{V}_1 \text{ Vector normal al plano (vector perpendicular al plano)} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{P Punto de paso A}(3,1,-1) \\ \vec{AB} \text{ Vector director B}(2,0,3) - \text{A}(3,1,-1) = (-1,-1,4) \\ \vec{V}_2 \text{ Vector director de la recta pues ha de ser paralela al plano } (1,3,4) \end{cases}$

$$\text{ecuacion del plano } \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-3 \\ -1 & 3 & y-1 \\ 4 & 4 & z+1 \end{vmatrix} = -3z - 3 + 4y - 4 - 4x + 12 - 12x + 36 + z + 1 + 4y - 4 = 0$$

$$-16x + 8y - 2z + 38 = 0; \text{ ecuacion del plano } -8x + 4y - z + 19 = 0;$$

73. Ejercicio

Halla la ecuacion de la recta que pasa por A(2,-3,0) y es paralela a la interseccion de los planos

$$\eta = 3x + 3y + z = 0 \text{ y } \pi = \begin{cases} x = 3 + t + s \\ y = t - s \\ z = 2 + 2t + s \end{cases}$$

Solución

$$\pi = \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = t - s \\ z = 2 + 2t + s \end{cases} = \begin{cases} x - 1 = t + s \\ y = t - s \\ z - 2 = 2t + s \end{cases} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ 2 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = -z + 2 + x - 3 + 2y + 2x - 6 - z + 2 - y$$

$$\pi = 3x + y - 2z - 5 = 0;$$

$$\text{interseccion } \begin{cases} \eta = 3x + 3y + z = 0 \\ \pi = 3x + y - 2z - 5 = 0; \text{ si se cortan tendran punto comunes} \end{cases}$$

$$\text{para } x = 0 \begin{cases} \eta = 0 + 3y + z = 0; z = -3y \\ \pi = 0 + y - 2z - 5 = 0; z = \frac{5-y}{2}; -3y = \frac{5-y}{2}; y = -1; (0,1,3) \end{cases}$$

$$\text{para } x = 1 \begin{cases} \eta = 3 + 3y + z = 0; z = -3y - 3 \\ \pi = 3 + y - 2z - 5 = 0; z = \frac{5-3-y}{2}; -3y - 3 = \frac{5-3-y}{2}; -5y = 5; y = -1; (1,-1,0); \end{cases}$$

$$\text{recta interseccion de los dos planos} = \begin{cases} \text{P Punto de paso A}(2,-3,0) \\ \vec{V}_1 \text{ Vector director } (1,-1,0) - (0,1,3) = (1,0,-3) \end{cases}$$

$$\text{ecuacion de la recta } \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 \\ z = -3\lambda; \end{cases}$$

74. Ejercicio

Determina la ecuación del plano que pasa por A(1, -1, 1) y B(0, 3, -2) y es paralelo al eje Z

Solución

vector del eje Z; $\vec{z} = (0, 0, \lambda)$

Para hallar la ecuación del plano $\begin{cases} \text{P Punto de paso } (1, -1, 1) \\ \vec{V}_1 \text{ Vector director } \vec{z} (0, 0, \lambda) \text{ podría ser } (0, 0, 1) \\ \vec{V}_2 \text{ Vector director } B(0, 3, -2) - A(1, -1, 1) = (-1, 4, -3) \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ 0 & 4 & y+1 \\ 1 & -3 & z-1 \end{vmatrix} = -y-1-4x+4 = -4x-y+3 = 0 \quad \text{Ecuación del plano } 4x + y - 3 = 0$$

75. Ejercicio

Determina la ecuación del plano paralelo a los ejes de coordenadas X, Y y que pasa por el punto

de intersección de la recta $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t; \\ z = 3t; \end{cases}$

y el plano $\pi = x + 2y - 2z + 3 = 0$;

Solución

El plano paralelo a los ejes de coordenadas

X, Y es $Z = 0$

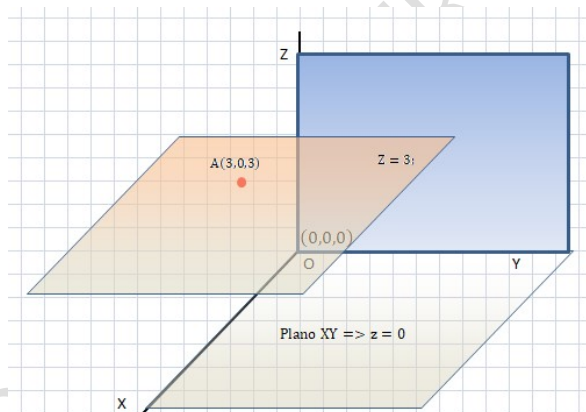
P de intersección sustituyo en el plano π los

valores de la recta $\Rightarrow 2 + t + 2(1 - t) - 2(3t) + 3 = 0$

$2 + t + 2 - 2t - 6t + 3 = 0; -7t = -7; t = 1;$

punto A de intersección $\begin{cases} x = 2 + 1 \\ y = 1 - 1; \\ z = 3 \cdot 1; \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = 0; \\ z = 3; \end{cases} A(3, 0, 3)$

Si el plano ha de ser paralelo a $Z = 0$ por el punto A(3, 0, 3). El plano será $Z = 3$;



76. Ejercicio

Dadas las rectas r: $\begin{cases} x - kz = 2; \\ y - z = -3; \end{cases}$ s: $\frac{x-1}{2} = y+1 = z$;

Hallar el valor de k para que las rectas sean secantes

Solución

r: $\begin{cases} x - kz = 2; \\ y - z = -3; \end{cases}$ s: $\frac{x-1}{2} = y+1 = z \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2y; \\ y+1 = z; \end{cases}$ s: $\begin{cases} x-2y-1 = 0 \\ y-z+1 = 0; \end{cases}$

r: $\begin{cases} x = 2 + kz; \\ y = -3 + z; \end{cases}$ s: $\begin{cases} x = 1 + 2y \\ y = z - 1; \end{cases}$ Si son secantes tendrán un punto común igualamos

$$\begin{cases} x = 2 + kz = 1 + 2y \Rightarrow 2 + kz = 1 + 2y; y = \frac{2 + kz - 1}{2}; \\ y = -3 + z = z - 1; -3 + z = z - 1; 0 = +2; \end{cases} \quad \text{El sistema es incompatible}$$

77. Ejercicio

Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1,2,3)$ y que toca los ejes de coordenadas X y Z

Solución

Si toca a los ejes X y Z , pasará por el punto $(0,0,0)$

$$\text{Recta OP} \begin{cases} \text{P paso } (0,0,0) \\ \vec{d}_s = (-1,2,3) - B(0,0,0) = (-1,2,3) \end{cases} \begin{cases} x = 0 - \lambda \\ y = 0 + 2\lambda \\ z = 0 + 3\lambda \end{cases} \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

78. Ejercicio

Dadas las rectas $r: \begin{cases} x + y - z = -6; \\ 2x - z = -2; \end{cases}$ y $s: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+1}{2}$ Estudia su posición dependiendo de m

Solución

$$r: \begin{cases} x + y - z = -6; \\ 2x - z = -2; \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ 2\lambda - z = -2 \\ x + y - z = -6 \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ 2\lambda - z = -2 \\ \lambda + y - z = -6 \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ z = 2\lambda + 2 \\ \lambda + y - z = -6 \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ z = 2\lambda + 2 \\ \lambda + y - (2\lambda + 2) = -6 \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ z = 2\lambda + 2 \\ y = \lambda - 4 \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 4 \\ z = 2\lambda + 2 \end{cases}$$

$$s: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+1}{2} \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = mt + 2 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

No pueden ser paralelas pues sus vectores directores no son proporcionales

$$\text{veremos si se cortan. Igualamos } \begin{cases} x = \lambda = 2t - 2 \\ y = \lambda - 4 = mt + 2 \\ z = 2\lambda + 2 = 2t - 1 \end{cases} \text{ sustituimos } \lambda \begin{cases} \lambda = 2t - 2 \\ 2t - 2 - 4 = mt + 2 \\ 2(2t - 2) + 2 = 2t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mt - 2t = -8 \\ 2t = 1; t = 1/2 \end{cases} \text{ sustituimos } m * \frac{1}{2} - 2 * \frac{1}{2} = -8; \frac{m}{2} - \frac{2}{2} = -8; m = -16 + 2; m = -14,$$

para $m = -14$ las rectas se cortan. Para $m \neq -14$ las rectas se cruzan

79. Ejercicio

Del paralelogramo ABCD conocemos $A(-2,0,1)$, $B(1,-1,2)$ y $C(4,2,-3)$.

- Calcular las coordenadas del cuarto vértice D
- Calcular la ecuación del plano que contiene el paralelogramo
- Calcular las ecuaciones de las diagonales del paralelogramo

Solución

- Calcular las coordenadas del cuarto vértice D

$$\text{Recta AB} \begin{cases} \text{P paso } (-2,0,1) \\ \vec{d}_{AB} = B(1,-1,2) - A(-2,0,1) = (3,-1,1) \end{cases}$$

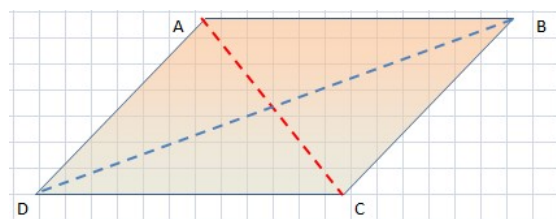
$$\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}; \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$\text{Recta BC} \begin{cases} \text{P paso } B(1,-1,2) \\ \vec{d}_{BC} = C(4,2,-3) - B(1,-1,2) = (3,3,-5) \end{cases} \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - 5t \end{cases}$$

Si es paralelogramo $\vec{d}_{AB} \times \vec{d}_{BC}$ producto escalar = 0 pues son perpendiculares

$$\vec{d}_{AB} \times \vec{d}_{BC} = (3, -1, 1) \times (3, 3, -5) = 9 - 3 - 5 = 1 \text{ es un rombo}$$

Recta AD al ser paralela a la recta BC tendrá el mismo V director $\begin{cases} \text{P paso } (-2,0,1) \\ \vec{d}_{BC} = (3,3,-5) \end{cases}$



$$\text{Recta AD} \begin{cases} x = -2 + 3s \\ y = 0 + 3s \\ z = 1 - 5s \end{cases};$$

$$\text{Recta CD al ser paralela a la recta AB tendra el mismo V director} \begin{cases} \text{P paso } C(4,2,-3) \\ \vec{d}_{AB} = (3,-1,1) \end{cases}$$

$$\text{Recta CD} \begin{cases} x = 4 + 3u \\ y = 2 - u \\ z = -3 + u \end{cases};$$

$$\text{El punto D será la interseccion de la recta Recta AD y CD} \begin{cases} x = -2 + 3s \\ y = 0 + 3s \\ z = 1 - 5s \end{cases} = \begin{cases} x = 4 + 3u \\ y = 2 - u \\ z = -3 + u \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -2 + 3s = 4 + 3u \\ y = 0 + 3s = y = 2 - u \\ z = 1 - 5s = -3 + u \end{cases} \begin{cases} s = \frac{6+3u}{3} = 2+u \\ y = 0 + 3s = y = 2 - u; s = \frac{2-u}{3} \\ z = 1 - 5s = -3 + u \end{cases} \Rightarrow 2+u = \frac{2-u}{3}; 6+3u = 2-u; u = -1;$$

$$\text{El punto D} = \begin{cases} x = 4 + 3u \\ y = 2 - u \\ z = -3 + u \end{cases}; \text{ sustituyo } u = -1 \begin{cases} x = 4 + 3(-1) \\ y = 2 - (-1) \\ z = -3 + (-1) \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -4 \end{cases}; D(1,3,-4)$$

b) Calcular la ecuacion del plano que contiene el paralelogramo

$$\text{La ecuacion del plano que se define por un punto y dos vectores directores} = \begin{cases} \text{P paso } (-2,0,1) \\ \vec{d}_{AB} = (3,-1,1) \\ \vec{d}_{BC} = (3,3,-5) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & x+2 \\ -1 & 3 & y \\ 1 & -5 & z-1 \end{vmatrix} = 9z - 9 + 3y + 5x + 10 - 3x - 6 + 15y + 3z - 3 = 2x + 18y + 12z - 8 = 0$$

$$\text{Ecuacion del plano que contiene el paralelogramo: } x + 9y + 6z - 4 = 0$$

c) Calcular las ecuaciones de las diagonales del paralelogramo

$$\text{Diagonal AC} \begin{cases} \text{P paso } C(4,2,-3) \\ \vec{d}_{AC} = C(4,2,-3) - A(-2,0,1) = (6,2,-4) \end{cases} \begin{cases} x = 4 + 6\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -3 - 4\lambda \end{cases};$$

$$\text{Diagonal DB} \begin{cases} \text{P paso } D(1,3,-4) \\ \vec{d}_{DB} = B(1,-1,2) - D(1,3,-4) = (0,-4,6) \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - 4t \\ z = -4 + 6t \end{cases};$$