

Cónicas

Contenido

1	CIRCUNFERENCIA	2
1.1	ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA	2
1.2	CENTRO Y RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA	2
1.3	POSICIÓN DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA	2
1.4	POSICIÓN DE UNA RECTA RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA	2
1.5	POSICIÓN RELATIVA DE DOS CIRCUNFERENCIAS	3
2	POTENCIA DE UN PUNTO	8
3	EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS.....	9
4	CENTRO RADICAL DE TRES CIRCUNFERENCIAS	11
5	ELIPSE	12
6	HIPÉRBOLA	15
7	PARÁBOLA	17

1 Circunferencia

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo llamado centro. La distancia de cualquiera de esos punto al centro es el radio.

1.1 Ecuación de la circunferencia

Siendo $p(x, y)$ un punto de la circunferencia y $C(c_1, c_2)$ el centro de la circunferencia

$$d(P, C) = \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} = r;$$

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2; \quad x^2 + c_1^2 - 2xc_1 + y^2 + c_2^2 - 2yc_2 = r^2;$$

$$x^2 + y^2 - 2c_1x - 2c_2y + c_1^2 + c_2^2 - r^2 = 0;$$

$$\text{si sustituyo } D = -2c_1; E = -2c_2; F = c_1^2 + c_2^2 - r^2$$

$$\text{La ecuación de la circunferencia es } x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

1.2 Centro y radio de la circunferencia

$$\text{Centro de la circunferencia } C(c_1, c_2); \quad c_1 = -\frac{D}{2}; \quad c_2 = -\frac{E}{2}; \quad C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

$$\text{Radio de la circunferencia } r^2 = -F + c_1^2 + c_2^2 = -F + \left(-\frac{D}{2}\right)^2 + \left(-\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2}{4} - F$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2}{4} - F} \quad \text{Para } \frac{D^2 + E^2}{4} - F > 0$$

Criterios para que una ecuación sea una circunferencia

Los coeficientes de x^2 e y^2 sean iguales a la unidad. Si tuvieran ambos un mismo coeficiente distinto de 1, podríamos dividir por él todos los términos de la ecuación.

No tenga término en xy .

$$\frac{D^2 + E^2}{4} - F > 0$$

1.3 Posición de un punto respecto a una circunferencia

La posición del punto dependerá de la distancia del punto al centro de la circunferencia

Exterior a la circunferencia: $D(pC) > r$;

En la circunferencia (es un punto de la circunferencia): $D(pC) = r$

Interior a la circunferencia: $D(pC) < r$;

1.4 Posición de una recta respecto a una circunferencia

La posición de la recta s : dependerá de la distancia de la recta al centro de la circunferencia

Exterior a la circunferencia: $D(sC) > r$;

Tangente a la circunferencia: $D(sC) = r$

Secante a la circunferencia: $D(sC) < r$;

1.5 Posición relativa de dos circunferencias

La posición de las circunferencias dependerá de la suma o resta de sus radios

Exteriores : La distancia de sus centros $D(C_1, C_2) > r_1 + r_2$;

Tangentes exteriores : La distancia de sus centros $D(C_1, C_2) = r_1 + r_2$;

Secantes: La distancia de sus centros $D(C_1, C_2) < r_1 + r_2$;

Tangentes interiores : La distancia de sus centros $D(C_1, C_2) = r_1 - r_2$;

Interiores : La distancia de sus centros $D(C_1, C_2) < r_1 - r_2$;

Concéntricas : La distancia de sus centros $D(C_1, C_2) < r_1 - r_2$;

1. Ejercicio

Halla las ecuaciones de las circunferencias cuyo centro y radio son:

a) $C(3, -2)$ y $r = 4$; b) $C(0, 3)$ y $r = 3$;

Solución

$$\text{a) } d(P, C) = \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} = r; \sqrt{(x - 3)^2 + (y - (-2))^2} = 4;$$
$$x^2 + 9 - 6x + y^2 + 4 + 4y - 16 = 0; \quad x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

$$\text{a) } d(P, C) = \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} = r; \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 3)^2} = 3;$$
$$x^2 + y^2 + 9 - 6y - 9 = 0; \quad x^2 + y^2 - 6y = 0$$

2. Ejercicio

Comprueba que la ecuación $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y - 14 = 0$ representan a una circunferencia y hallar su centro y su radio

Solución

$$3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y - 14 = 0; \text{divido por } 3 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - \frac{14}{3} = 0$$

$$\text{Aplico formulas } C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right); C = \left(-\frac{(-2)}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (1, -2); \quad C(1, -2)$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2}{4}} - F; r = \sqrt{\frac{(-2)^2 + 4^2}{4}} - \left(-\frac{14}{3}\right) = \sqrt{\frac{20}{4} + \frac{14}{3}} = \sqrt{\frac{116}{12}}; \quad r = \sqrt{\frac{116}{12}}$$

es una circunferencia

3. Ejercicio

indica la posición relativa de la recta $3x + 4y = 25$ respecto a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0;$$

Solución

$$\text{Compruebo si se cortan } 3x + 4y = 25; y = \frac{25 - 3x}{4}$$

$$\text{sustituyo } x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0; x^2 + \left(\frac{25 - 3x}{4}\right)^2 - 6x + 8\left(\frac{25 - 3x}{4}\right) - 25 = 0$$

$$x^2 + 442x + 400 = 0; \text{ la raíz tiene dos soluciones luego la corta en dos puntos}$$

Otra forma:

Hallo centro $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$;

$$C\left(-\frac{(-6)}{2}, -\frac{8}{2}\right); C(3-4)$$

$$\text{Hallo el radio } r = \sqrt{\frac{(-6)^2 + 8^2}{4} - (-25)};$$

$$r = \sqrt{\frac{36 + 64}{4} + 25} = \sqrt{50}; R = \sqrt{50}$$

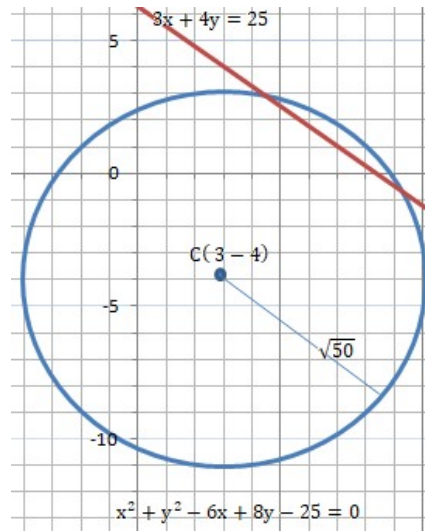
Distancia de un punto a una recta

$$d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

$$d(C, r) = \frac{|3 \cdot 3 + 4(-4) - 25|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$\frac{|9 - 16 - 25|}{\sqrt{25}} = \frac{|-32|}{5} = \frac{32}{5}$$

la recta es secante la $D(C, r) < \text{radio}; \frac{32}{5} < \sqrt{50}; 6,4 < 7,07$



4. Ejercicio

indica la posición relativa de la recta $4x + 3y - 40 = 0$; respecto a la circunferencia de radio 5 y centro (3,1) $C(3,1)$

Solución

La circunferencia de radio 5 y centro (3,1) será $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$;

$$3 = -\frac{D}{2}; D = -6; 1 = -\frac{E}{2}; E = -2;$$

$$5 = \sqrt{\frac{(-6)^2 + (-2)^2}{4}} - F;$$

$$5 = \sqrt{\frac{36 + 4 - 4F}{4}}$$

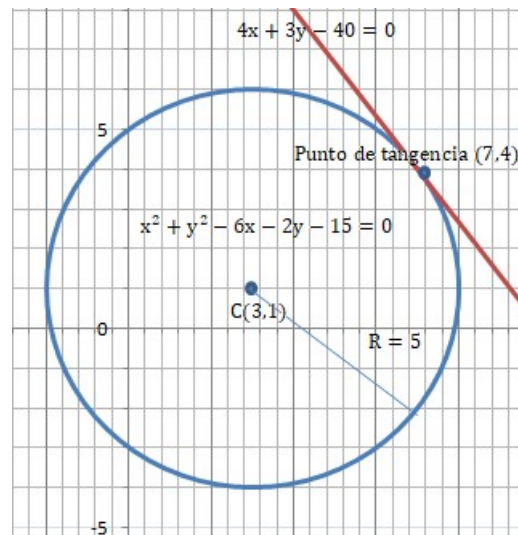
$$10 = \sqrt{40 - 4F}; 100 - 40 = -4F;$$

$$F = -\frac{60}{4} = -15$$

$$d(C, r) = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - 40|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} =$$

$$\frac{25}{5} = \frac{25}{5}; d(C, r) = 5;$$

$d(C, r) = R$ luego es tangente



Punto de tangencia

Hallo el punto donde se cortan recta y circunferencia $4x + 3y - 40 = 0$; $y = \frac{40 - 4x}{3}$

Sustituyo $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$; $x^2 + \left(\frac{40 - 4x}{3}\right)^2 - 6x - 2\left(\frac{40 - 4x}{3}\right) - 15 = 0$

$$25x^2 - 350x + 122500; x = \frac{350}{50} = 7$$

Sustituyo para hallar $y = \frac{40 - 4x}{3}$; $y = \frac{40 - 4 \cdot 7}{3} = 4$

Punto de tangencia (7,4)

5. Ejercicio

Calcular la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (2, -3) y es tangente al eje de abscisas

Solución

La recta eje de abscisas es $y=0$;

$$D(C, r) \frac{|1(-3)|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|-3|}{1} = 3$$

Ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$;

$$2 = -\frac{D}{2}; D = -4; (-3) = -\frac{E}{2}; E = 6; 3 = \sqrt{\frac{(-4)^2 + (6)^2}{4}} - F; 3 = \sqrt{\frac{(-4)^2 + (6)^2}{4}} - F$$

$$6 = \sqrt{16 + 36 - 4F}; 36 = 16 + 36 - 4F; F = \frac{16}{4} = 4$$

Sustituyo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

6. Ejercicio

Estudiar la posición relativa de las

circunferencia $x^2 + y^2 = 25$

y $2x^2 + 2y^2 + 3y - 3 = 0$;

Solución

Ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$;

$$x^2 + y^2 - 25 = 0;$$

$$D = 0; E = 0; C(0,0);$$

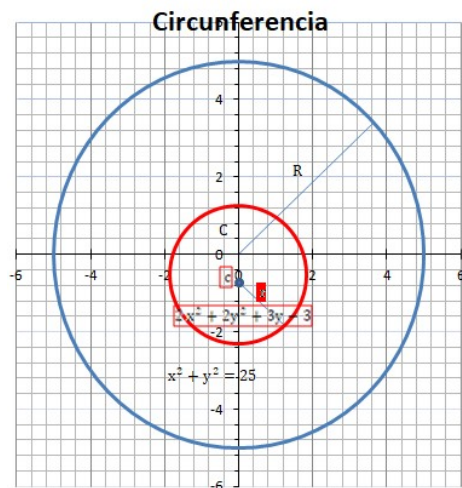
$$R = \sqrt{\frac{0 + 0}{4} - (-25)}; R = 5;$$

Ecuación de la circunferencia

$$2x^2 + 2y^2 + 3y - 3 = 0;$$

$$c_1 = -\frac{0}{2}; c_1 = 0; c_2 = -\frac{3}{2}; c\left(0, -\frac{3}{2}\right);$$

$$r = \sqrt{\frac{(0)^2 + (3)^2}{4}} - 3 = \sqrt{\frac{9}{4} + 3} = \sqrt{\frac{21}{4}}; r = \sqrt{7};$$



$$D(C, c) = \sqrt{(0-0)^2 + \left(0 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}; \quad D(R, r) = \frac{3}{2};$$

$$D(C, c) = \frac{3}{2} < (R - r)(5 - \sqrt{7}) \Rightarrow \text{circunferencias interiores}$$

7. Ejercicio

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(1,4), B(4,7) y C(7,4)

Solución

Ecuación de la circunferencia será $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$;

Si pasa por A(1,4) será $1^2 + 4^2 + D \cdot 1 + E \cdot 4 + F = 0$; $1 + 16 + D + 4E + F = 0$;

$$D + 4E + F = -17$$

Si pasa por B(4,7) será $4^2 + 7^2 + D \cdot 4 + E \cdot 7 + F = 0$; $16 + 49 + 4D + 7E + F = 0$

$$4D + 7E + F = -65;$$

Si pasa por C(7,4) será $7^2 + 4^2 + D \cdot 7 + E \cdot 4 + F = 0$; $49 + 16 + 7D + 4E + F = 0$

$$7D + 4E + F = -65;$$

$$\begin{cases} D + 4E + F = -17; & E_1 & D + 4E + F = -17; & E_1, & D + 4E + F = -17 \\ 4D + 7E + F = -65; & E_2 = 4E_1 - E_2 & 0 + 9E + 3F = -3; & E_2 & 9E + 3F = -3 \\ 7D + 4E + F = -65; & E_3 = 7E_1 - E_3 & 0 + 24E + 6F = -54; & E_3 = 2E_2 - E_3 - 6E + 0 = 48; \end{cases}$$

$$E = -\frac{48}{6}; \quad E = -8;$$

$$9E + 3F = -3; 9 \cdot (-8) + 3F = -3; F = \frac{69}{3} = 23; F = 23$$

$$D + 4E + F = -17; D + 4(-8) + 23 = -17; D = -8;$$

$$\text{circunferencia } x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 8y + 23 = 0$$

8. Ejercicio

Calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por A(0,2) y B(0,-2) y es tangente a la recta $y = 3x + 2$;

Solución

La mediatriz del segmento AB :

$$\text{Punto medio del segmento AB } \left(\frac{0+0}{2}, \frac{-2+2}{2}\right);$$

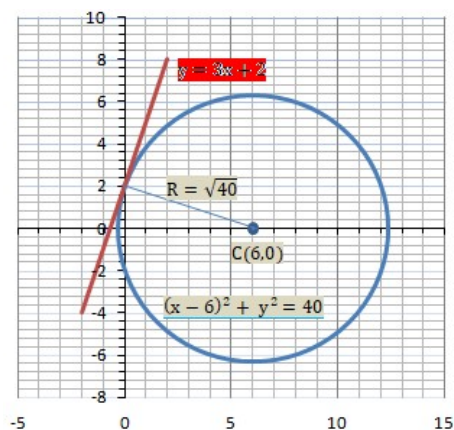
punto medio de AB (0,0)

Si la recta $y = 3x + 2$ es tangente pasará por un punto de la circunferencia.

Dado que para $x = 0$; $y = 2 \Rightarrow$ que el punto (0,2) es el punto de tangencia.

La recta perpendicular a $y = 3x + 2$; será $y = -\frac{1}{3}x + C$ en el punto (0,2)

pasará por el centro de la circunferencia $2 = -\frac{1}{3} \cdot 0 + C$; $C = 2$;



la recta será $y = -\frac{1}{3}x + 2$

La mediatriz del segmento AB pasará por el centro de la recta;

La perpendicular a la recta AB ($x = 0$) será $y = 0$;

Se cortarán en el centro $C \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 2 \\ y = 0; \end{cases} -\frac{1}{3}x + 2 = 0; 2 = \frac{1}{3}x; x = 6; C(6,0)$

El radio de la circunferencia es la distancia del punto de tangencia (0,2) al centro (6,0)

$$D(C, T) = \sqrt{(6-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}; R = \sqrt{40};$$

Ecuacion de la circunferencia $(x-6)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{40})^2; (x-6)^2 + y^2 = 40;$

$$x^2 + y^2 - 12x - 4 = 0$$

9. Ejercicio

Calcula la ecuacion de la circunferencia que

pasa por A(4,0) y B(0,6) y su centro está

en la recta $y = x - 1$;

Solución

La mediatriz del segmento AB :

Punto medio del segmento AB $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{6+0}{2}\right);$

punto medio de AB (2,3)

La recta AB será $(y-0) = \frac{(6-0)}{(0-4)}(x-4);$

$$y = -\frac{6}{4}(x-4); y = -\frac{6}{4}x + 6;$$

La mediatriz será $y = \frac{4}{6}x + C$; si pasa por (2,3) será $3 = \frac{4}{6} * 2 + C; C = \frac{10}{6};$

La mediatriz del segmento AB $y = \frac{4}{6}x + \frac{10}{6}$ pasará por el centro

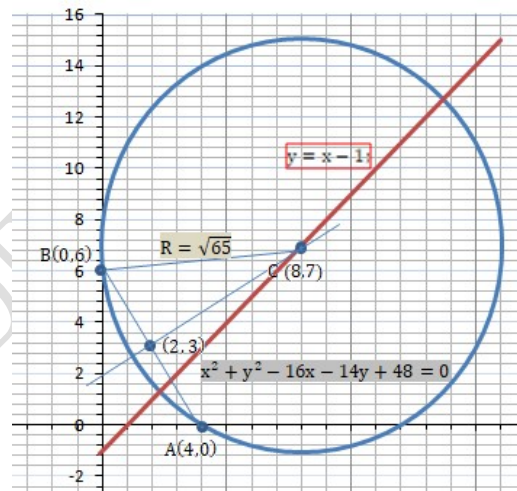
Se cortarán en el centro $C \begin{cases} y = \frac{4}{6}x + \frac{10}{6} \\ y = x - 1; \end{cases} \frac{4}{6}x + \frac{10}{6} = x - 1; x = 8;$

Sustituyo en $y = x - 1; y = 8 - 1 = 7$ Centro de la circunferencia C (8,7)

$$D(C, r) = C(8,7) B(0,6) = R; R = \sqrt{(8-0)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}; R = \sqrt{65};$$

Ecuacion de la circunferencia $(x-8)^2 + (y-7)^2 = (\sqrt{65})^2; (x-8)^2 + (y-7)^2 = 65;$

$$(x-8)^2 + (y-7)^2 = 65; x^2 + y^2 - 16x - 14y + 48 = 0$$



10. Ejercicio

Calcula la máxima y mínima distancia del punto $P(9,9)$ a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

Solución

Calculamos centro y radio de la circunferencia:

$$c_1 = -\frac{D}{2}; c_1 = -\frac{(-6)}{2}; c_1 = 3; c_2 = -\frac{E}{2}; c_2 = -\frac{(-2)}{2}; c_2 = 1; C(3,1)$$

$$R = \sqrt{\frac{(D)^2 + (E)^2}{4} - F}; R = \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} + \frac{(-2)^2}{4} - (-15)} = \sqrt{\frac{36}{4} + \frac{4}{4} + 15} = \sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{10}{2};$$

$$R = 5;$$

$$D(C, P) = \sqrt{(9-3)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100}; D(C, P) = 10;$$

$$\text{Distancia máxima de P a la circunferencia} = 10 + 5 = 15$$

$$\text{Distancia mínima de P a la circunferencia} = 10 - 5 = 5$$

2 Potencia de un punto

En geometría la expresión potencia de un punto respecto una circunferencia se refiere al valor constante que resulta de multiplicar las longitudes de dos segmentos definidos en una misma recta que pasa por dicho punto y es secante o tangente a dicha circunferencia.

La potencia de un punto respecto a una circunferencia nos permite conocer la posición relativa del punto respecto a la circunferencia

La secante r corta a la circunferencia en

A y B ;

La secante s corta a la circunferencia en

A' y B' ;

Al ser el ángulo $\hat{P}$ común a los dos triángulos

PBA' y $PB'A$ y los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{B}'$ iguales

pues abarcan el mismo arco se cumple

Triángulos semejantes lados proporcionales

$$\frac{PA'}{PB} = \frac{PA}{PB'} \Rightarrow PA' \cdot PB' = PA \cdot PB.$$

Para cualquier secante que pase por P se cumple

$$PA \cdot PB = \text{cte}$$

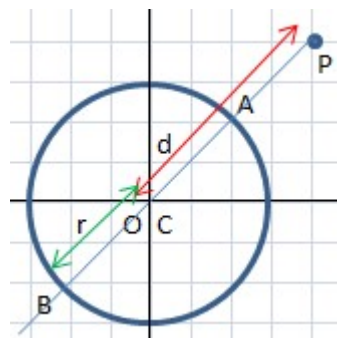
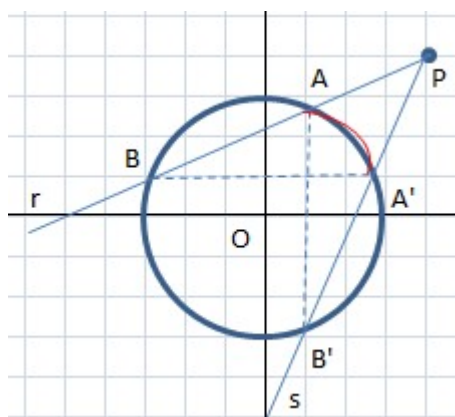
Potencia de un punto respecto a una circunferencia

$$\text{Pot}_{cf}(P) = \text{cte}$$

Esto se cumplirá para una secante que pase por el

centro de la circunferencia

$$\text{Pot}_{cf}(P) = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2 \text{ siendo } d \text{ la distancia del punto al centro y } r \text{ el radio}$$



11. Ejercicio

Hallar la posición relativa del punto $P_1(7, -4)$; $P_2\left(\frac{9}{2}, -4\right)$; $P_3\left(2, -\frac{3}{2}\right)$

Respecto a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 8x + 3y + 12 = 0$$

Solución

$$P_1(7, -4); x^2 + y^2 - 8x + 3y + 12 = 0; \text{ sustituyo } 7^2 + (-4)^2 - 8 \cdot 7 + 3(-4) + 12$$

$$49 + 16 - 56 - 12 + 12 = 9 > 0; \mathbf{d^2 - r^2 > 0 \text{ punto exterior}}$$

$$P_2\left(\frac{13}{2}, -\frac{3}{2}\right); \left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 8 \cdot \frac{13}{2} + 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 12 = 16$$

$$\frac{169}{4} + \frac{9}{4} - \frac{104}{2} - \frac{9}{2} + 12 = \frac{169 + 9 - 208 - 18 + 48}{4} = 0;$$

$$\mathbf{d^2 - r^2 = 0 \text{ punto en la circunferencia}}$$

$$P_3\left(2, -\frac{3}{2}\right); x^2 + y^2 - 8x + 3y + 12 = 0; \text{ sustituyo } 2^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 8 \cdot 2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 12$$

$$4 + \frac{9}{4} - 16 - \frac{9}{2} + 12 = 0; \frac{16 + 9 - 64 - 18 + 48}{4} = -\frac{9}{4}; \mathbf{d^2 - r^2 < 0 \text{ Interior}}$$

12. Ejercicio

Hallar la posición relativa del punto $P(m+1, m)$ respecto a la circunferencia

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9; \text{ en función del valor de } m$$

Solución

Sustituyo en la ecuación para ver los valores que hacen que el punto esté en la circunferencia

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9; ((m+1)-3)^2 + (m+1)^2 = 9; (m-2)^2 + (m+1)^2 = 9;$$

$$m^2 + 4 - 4m + m^2 + 1 + 2m - 9 = 0; 2m^2 - 2m - 4 = 0; m = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2}$$

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{4} = \frac{2 \pm 6}{4}; m = 2; m = -1;$$

$$\text{Para } m = 2; m = -1, \text{Pot}_{cf}(P) = 0; \text{ punto en la circunferencia}$$

$$\text{Para } m \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty); \text{Pot}_{cf}(P) > 0; \text{ punto exterior}$$

$$\text{Para } m \in (-1, 2) \text{Pot}_{cf}(P) < 0; \text{ punto interior}$$

3 Eje radical de dos circunferencias

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen el mismo potencial respecto a las dos circunferencias.

13. Ejercicio

a) Hallar el eje radical de las siguientes circunferencias

$$C1: x^2 + y^2 + 2x - 3y + 1 = 0 \text{ y } C2: x^2 + y^2 + 5x = 0$$

b) Comprueba que el eje radical es perpendicular a la recta que pasa por sus centros

Solución

Tomo un punto $P(x,y)$ y sustituyo en las dos ecuaciones de las circunferencias

La potencia de este punto debe ser el mismo para las dos circunferencias

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y + 1 = x^2 + y^2 + 5x; 2x - 3y + 1 = 5x;$$

$$3x + 3y - 1 = 0; y = -x + \frac{1}{3} \text{ es el eje radical de las dos circunferencias}$$

b) Comprueba que el eje radical es perpendicular a la recta que pasa por sus centros

La recta perpendicular al eje radical $y = -x + \frac{1}{3}$ tendrá una pendiente $m = 1$

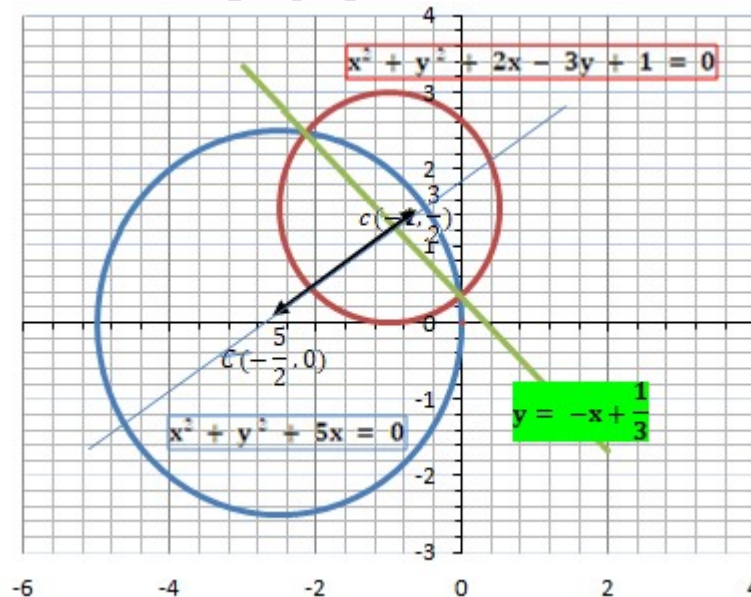
Hallo los centros de las circunferencias

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y + 1 = 0 \begin{cases} c_1 = -\frac{D}{2} = -\frac{2}{2} = -1; \\ c_2 = -\frac{E}{2} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} c(-1, \frac{3}{2})$$

$$x^2 + y^2 + 5x = 0 \begin{cases} c_1 = -\frac{D}{2} = -\frac{5}{2} = -\frac{5}{2}; \\ c_2 = -\frac{E}{2} = -\frac{0}{2} = 0 \end{cases} (-\frac{5}{2}, 0)$$

La recta que une los centros será $(y - 0) = \left(x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right) \frac{\frac{3}{2} - 0}{-1 - \left(-\frac{5}{2}\right)}$;

$$y = \left(x + \frac{5}{2}\right) \left(\frac{\frac{3}{2}}{-1 + \frac{5}{2}}\right); y = x + \frac{5}{2}; \text{ se cumple que es perpendicular}$$



4 Centro radical de tres circunferencias

Es el punto que tiene la misma potencia respecto a las tres circunferencias

14. Ejercicio

Hallar el centro radical de las siguientes circunferencias

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 14x - 8y + 49 = 0$$

$$C_3: x^2 + y^2 - 14x + 4y + 37 = 0$$

Solución

Hallamos los ejes radicales de las conferencias dos a dos

$$\begin{cases} C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0 \\ C_2: x^2 + y^2 - 14x - 8y + 49 = 0 \end{cases} \quad -4x - 2y - 4 = -14x - 8y + 49$$

$$10x + 6y - 53 = 0;$$

$$\begin{cases} C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0 \\ C_3: x^2 + y^2 - 14x + 4y + 37 = 0 \end{cases} \quad -4x - 2y - 4 = -14x + 4y + 37$$

$$10x - 6y - 41 = 0;$$

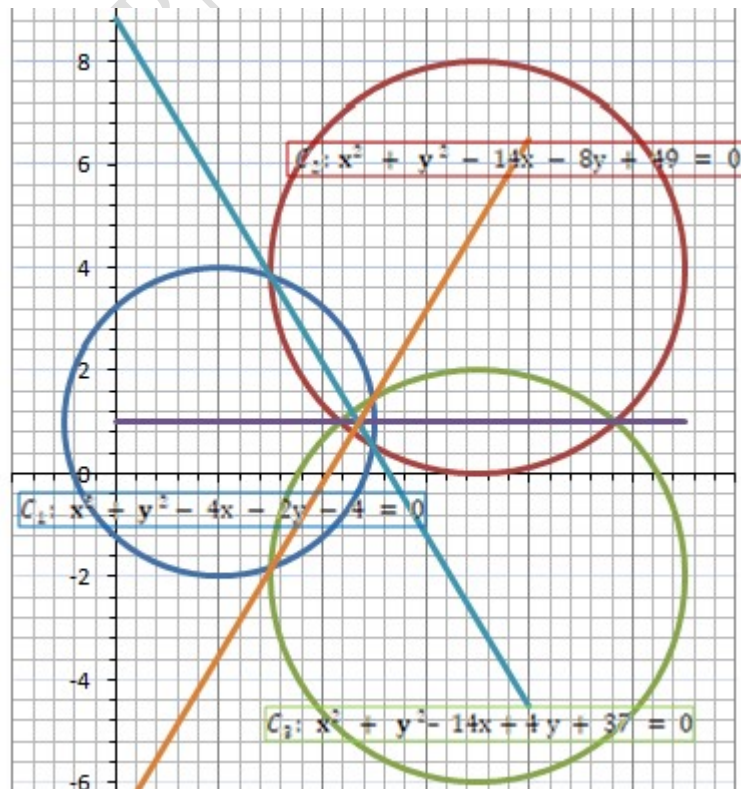
$$\begin{cases} C_2: x^2 + y^2 - 14x - 8y + 49 = 0 \\ C_3: x^2 + y^2 - 14x + 4y + 37 = 0 \end{cases} \quad -14x - 8y + 49 = -14x + 4y + 37$$

$$-12y + 12 = 0; y = 1$$

Hallamos la interseccion de los ejes radicales

$$\text{Aplico reduccion } \begin{cases} 10x + 6y - 53 = 0 \\ 10x - 6y - 41 = 0 \end{cases}; \quad 0 + 12y - 12 = 0; y = 1; x = \frac{47}{10}; \left(\frac{47}{10}, 1\right)$$

Compruebo que este punto se cumple también en la tercera ecuación $y=1$



5 Elipse

Es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de su distancia a dos puntos fijos llamados focos es constante.

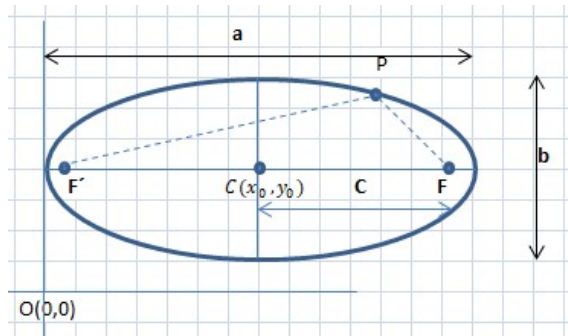
$C(x_0, y_0)$ Coordenadas centro de la elipse

a Semieje mayor de la elipse

b Semieje menor de la elipse

c semi distancia focal

Focos: son los puntos fijos F y F' La suma de las distancias desde un punto cualquiera de la elipse hasta cada foco es constante para todos los puntos de la elipse.

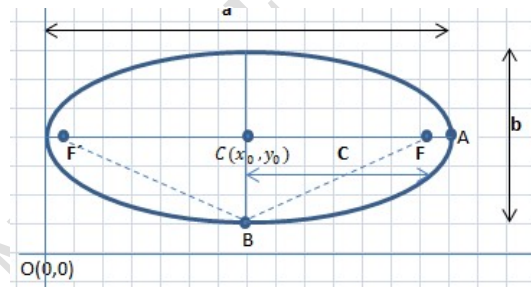


Relaciones de la elipse

Si tomo el punto A se ha de cumplir $AF + AF' = 2a$

Si tomo el punto B se ha de cumplir $BF = BF' \Rightarrow 2BF = 2a$; $BF = a$;

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Excentricidad de la elipse

$e = \frac{c}{a}$; Cuanto mas pequeño es, mas se parece a una circunferencia

Ecuacion general de la elipse

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1;$$

Ecuacion reducida de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

15. Ejercicio

¿Cuál es la ecuación de la elipse centrada en el punto $C(2,0)$ cuyo semieje mayor y menor miden 6 y 3 unidades respectivamente?

Solución

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1; \frac{(x - 2)^2}{6^2} + \frac{(y - 0)^2}{3^2} = 1; \frac{(x - 2)^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

16. Ejercicio

Calcula la ecuación de la elipse cuyo semieje principal (paralelo al eje de las abscisas) mide 13 unidades, su centro es el origen de coordenadas y la distancia desde su centro hasta uno de sus focos es de 5 unidades.

Solución

$$a^2 = b^2 + c^2; \quad b^2 = a^2 - c^2; \quad b^2 = 13^2 - 5^2;$$

$$b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12; \quad b = 12;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1; \quad \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1;$$

17. Ejercicio

Calcula la ecuación de la elipse que cumple con las siguientes características:

Su centro es el origen de coordenadas del plano cartesiano

Su distancia focal es igual a 6 unidades

Un punto de la elipse dista de sus focos 3 y 5 unidades

Solución

$$C(0,0); \quad FF' = 6;$$

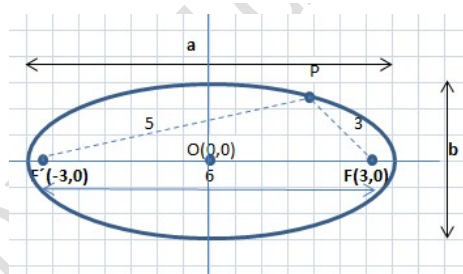
$$\text{Al ser } FF' = 6 \Rightarrow F(3,0); \quad F'(-3,0)$$

$$PF + PF' = 2a; \quad 3 + 5 = 2a; \quad a = \frac{8}{2}; \quad a = 4;$$

$$a^2 = b^2 + c^2; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}; \quad b = \sqrt{4^2 - 3^2}$$

$$b = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}; \quad b = \sqrt{7}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{\sqrt{7}^2} = 1; \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1;$$



18. Ejercicio

Hallar la ecuación canónica de la elipse de foco $F(7,2)$, de vértice $A(9,2)$

y de centro $C(4,2)$

Solución

Si el centro está en $(4,2)$ y $F(7,2)$

$$\Rightarrow F' \text{ estará } (1,2); \quad F'(1,2)$$

$$2C = 7 - 1 = 6; \quad C = 3;$$

Si el centro está en $(4,2)$ y $A(9,2)$

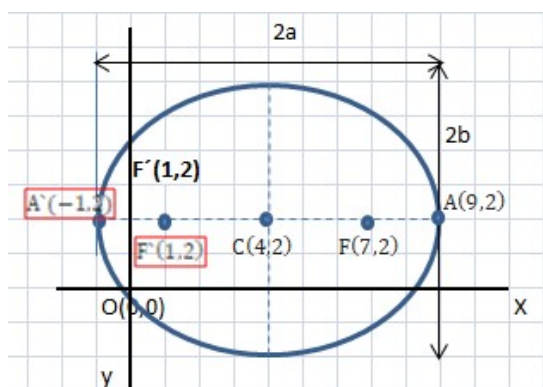
$$\Rightarrow A' \text{ estará } (-1,2); \quad A'(-1,2)$$

$$2a = 9 - (-1) = 10; \quad a = 5;$$

$$a^2 = b^2 + c^2; \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}; \quad b = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

$$b = 4;$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1; \quad \frac{(x - 4)^2}{5^2} + \frac{(y - 2)^2}{4^2} = 1; \quad \frac{(x - 4)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1;$$



19. Ejercicio

Dada la elipse $x^2 + 4y^2 + 4x - 12 = 0$. Hallar centro . distancia focal, focos vertices y excentricidad— ¿ Cual sería la ecuacion de la elipse que tiene los mismos elementos y centro en el origen de coordenadas.

Solución

Opero la ecuacion para obtener la ecuacion general $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Sumo y resto 4 $\Rightarrow x^2 + 4y^2 + 4x - 12 = 0$; $x^2 - 4x + 4 + 4y^2 - 12 - 4 = 0$;

$$(x - 2)^2 + 4y^2 = 16; \frac{(x - 2)^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = 1; \frac{(x - 2)^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1;$$

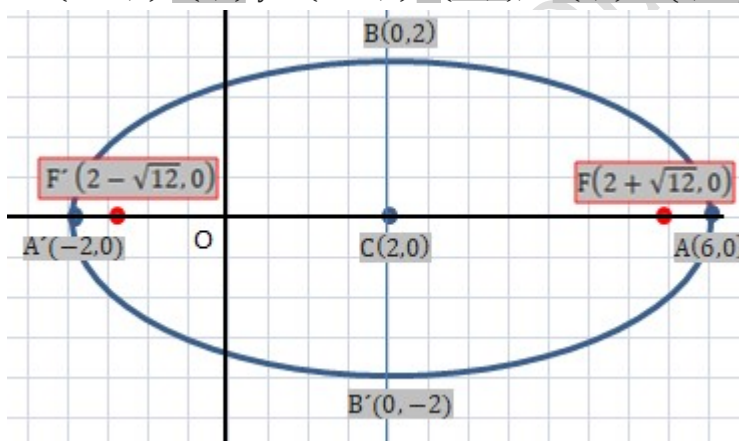
Centro $C(2,0)$;

$a = 4$; $b = 2$; $a^2 = b^2 + c^2$; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $c = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$; **distancia focal $2\sqrt{12}$**

Focos $F(2 + \sqrt{12}, 0)$ y $F'(2 - \sqrt{12}, 0)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{12}}{4} = 0,866$$

Vertices: $A(2 + 4, 0)$ **$A(6, 0)$** y $A'(2 - 4, 0)$ **$A'(-2, 0)$** ; $B(2, 2)$ $B'(2, -2)$



20. Ejercicio

Hallar la ecuación de la elipse conociendo $C(1, -1)$, $F(1, 2)$ y $A(1, 4)$

Solución

Si el centro es $C(1, -1)$ y el foco $F(1, 2)$ Distancia del foco al centro $c = 2 - (-1) = 3$; $c = 3$

Si el centro es $C(1, -1)$ y el vertice $A(1, 4)$ Distancia del vertice al centro $a = 4 - (-1) = 5$; $a = 5$;

$$a^2 = b^2 + c^2; b = \sqrt{a^2 - c^2}; c = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16}; c = 4;$$

Elipse con foco en el eje de ordenadas, vertical $\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$

$$\frac{(x - 1)^2}{4^2} + \frac{(y - (-1))^2}{5^2} = 1; \frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{(y + 1)^2}{25} = 1$$

6 Hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante en valor absoluto.

$C(x_0, y_0)$ Coordenadas centro de la hipérbola

a Semieje real

b Semieje imaginario

c semi distancia focal

Focos: son los puntos fijos F y F' La diferencia de las distancias desde un punto cualquiera de la hipérbola hasta cada foco es constante.

Relaciones de la hipérbola

Si tomo el punto A se ha de cumplir $|AF - AF'| = 2a$

Si tomo el punto B , al ser una diagonal de rectángulo, se ha de cumplir $AB = c$;

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Excentricidad de la hipérbola

$e = \frac{c}{a}$; Cuanto mas proximo a 1 sea

el valor mas cerradas seran

las ramas

Ecuacion general de la hipérbola

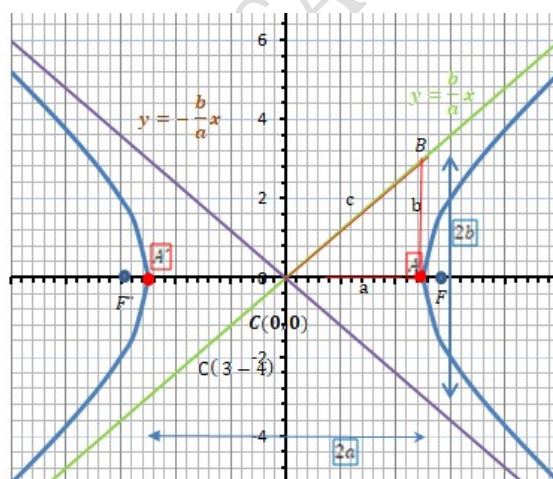
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1;$$

Ecuacion reducida de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

Asintotas de la hipérbola

$$r: y = \frac{b}{a}x; s: y = -\frac{b}{a}x;$$



21. Ejercicio

Representa y determina las coordenadas del centro, focos, vértices, excentricidad y asíntotas de la siguiente hipérbola

$$4x^2 - 3y^2 - 8x - 8 = 0;$$

Solución

Pongo la ecuación en forma de la ecuación general de la hipérbola

Le sumo y resto 4 para que quede identidad notable $4x^2 - 3y^2 - 8x - 8 + 4 - 4 = 0$;

$$4x^2 + 4 - 8x - 3y^2 - 12 = 0; \text{divido por 4; } x^2 + 1 - 2x - \frac{3}{4}y^2 = 3; (x - 1)^2 - \frac{3}{4}y^2 = 3;$$

Divido por 3;

$$\frac{(x-1)^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1;$$

Centro $C(1,0)$; $a = \sqrt{3}$; $b = 2$;

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}; c = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} \quad c = \sqrt{7}$$

Focos : $C \pm c$; $F(1 + \sqrt{7}, 0)$ y $F(1 - \sqrt{7}, 0)$

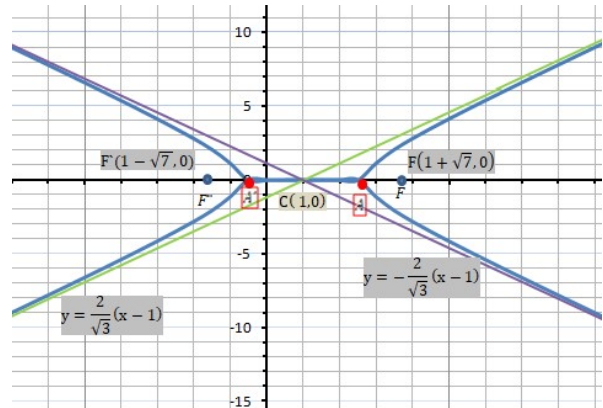
Vertices : $C \pm a$; $A(1 + \sqrt{3}, 0)$

y $A(1 - \sqrt{3}, 0)$

Excentricidad : $e = \frac{c}{a}$;

$$e = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}, e = \frac{\sqrt{21}}{3};$$

Asintotas $(y - y_0) = \frac{b}{a}(x - x_0)$; $y - 0 = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 1)$; s: $y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 1)$; r: $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x - 1)$



22. Ejercicio

Encuentra la ecuación de la hipérbola que tiene por focos $F(3,0)$ y $F'(-3,0)$ y que pasa por el punto $P(8,5\sqrt{3})$.

Solución:

Si los focos están en $F(3,0)$ y $F'(-3,0)$;

$$2c = (3 - (-3)) = 6; c = 3;$$

El centro será $C(0,0)$;

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1;$$

$$\text{con centro } (0,0) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x^2 = a^2 + b^2; 3^2 = a^2 + b^2;$$

$$a^2 = 9 - b^2$$

Si pasa por $P(8,5\sqrt{3})$

$$\begin{cases} \frac{8^2}{a^2} - \frac{(5\sqrt{3})^2}{b^2} = 1; \frac{64}{a^2} - \frac{25 \cdot 3}{b^2} = 1; \frac{64}{a^2} - \frac{75}{b^2} = 1 \\ a^2 = 9 - b^2 \end{cases} \text{ Sustituyo } \frac{64}{9 - b^2} - \frac{75}{b^2} = 1;$$

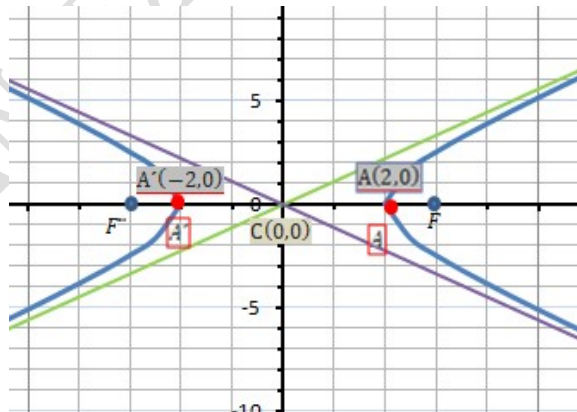
$$64 \cdot b^2 - 75(9 - b^2) = (9 - b^2)b^2; 64b^2 - 675 + 75b^2 = 9b^2 - b^4; b^4 + 130b^2 - 675 = 0$$

$$b^2 = t; \text{ cambio de variable } t^2 + 130t - 675 = 0; t = \frac{-130 \pm 140}{2};$$

$$t = \frac{10}{2} = 5; b = \pm\sqrt{5}; a^2 = 9 - b^2; a^2 = 9 - (\pm\sqrt{5})^2; a = \pm 2;$$

$$t = \frac{-170}{2} = -135; b = \pm\sqrt{-135} \text{ no existe en los números reales}$$

$$A(2,0) \text{ y } A'(-2,0) \quad \frac{x^2}{(\pm 2)^2} - \frac{y^2}{(\pm\sqrt{5})^2} = 1$$



23. Ejercicio

Encuentra la ecuación de la hipérbola que tiene por focos $F(0,10)$ y una asíntota $y = x$;

Solución

Si un foco está en $F(0,10)$ y las

asíntotas son $y = x$, la otra será $y = -x$;

Los focos y vértices estarán en el eje vertical

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1;$$

$$c = 10;$$

$$c^2 = a^2 + b^2; 10^2 = a^2 + b^2;$$

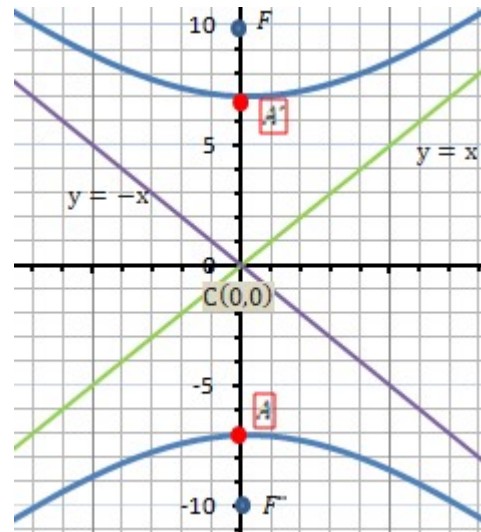
Las asíntotas son $y = \frac{b}{a}x$; $y = -\frac{b}{a}x$;

Si una asíntota es $y = x \Rightarrow a = b$;

$$\begin{cases} 10^2 = a^2 + b^2 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow 100 = a^2 + a^2; a^2 = \frac{100}{2} = 50; a = b = \sqrt{50}$$

$$\frac{(y - 0)^2}{(\sqrt{50})^2} - \frac{(x - 0)^2}{(\sqrt{50})^2} = 1; \frac{y^2}{50} - \frac{x^2}{50} = 1$$

Vértices $A = (0, \sqrt{50})$ y $A' = (0, -\sqrt{50})$



7 Parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco F y una recta fija llamada directriz d

$D(F, P) = d(P, d)$ distancia del foco al punto = distancia del punto a la recta

$2p$: distancia entre el foco y la directriz.

Eje de simetría es la recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco

Vértice: Punto de intersección de la parábola con su eje.

Radio vector: Es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con el foco.

Ecuación reducida: $x^2 = 4py$

Ecuación general de la Parábola

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

Ecuación reducida: $x^2 = 4py$

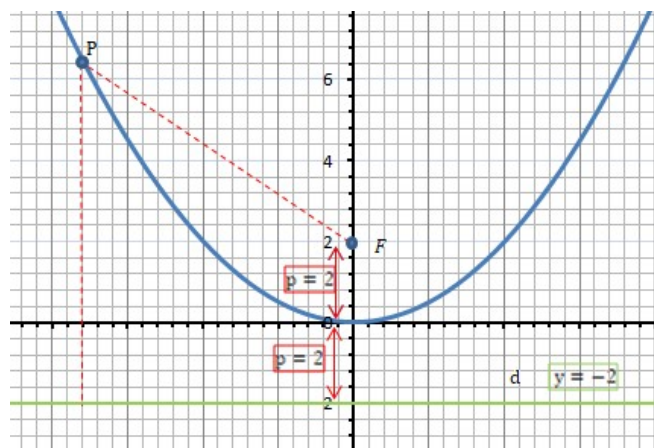
Posiciones de la parábola

$$x^2 = 4py \text{ ramas hacia arriba}$$

$$x^2 = -4py \text{ ramas hacia abajo}$$

$$y^2 = 4px \text{ ramas hacia la derecha}$$

$$y^2 = -4px \text{ ramas hacia la izquierda}$$



24. Ejercicio

Calcular el parametro, vertice, foco , directriz y el eje de simetria de la siguientes parábolas
 $y^2 + 4x = 0$; $x^2 - 5y = 0$

Solución:

Ecuacion general $x^2 = 4py$; ó $y^2 = 4px$;

$y^2 + 4x = 0$; $y^2 = -4x$;

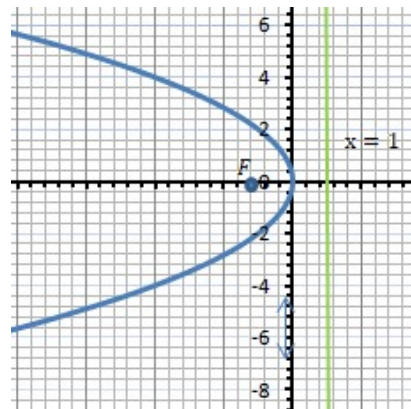
Parametro = -1 ; ramas hacia la izquierda

vertice = $(0,0)$;

Foco = $(-1,0)$;

directriz $x = 1$;

eje de simetria $y = 0$;



Ecuacion general $x^2 = 4py$;

$x^2 - 5y = 0$; $x^2 = 5y$;

operamos para que quede $4py$;

$$x^2 = \frac{5}{4} * 4y$$

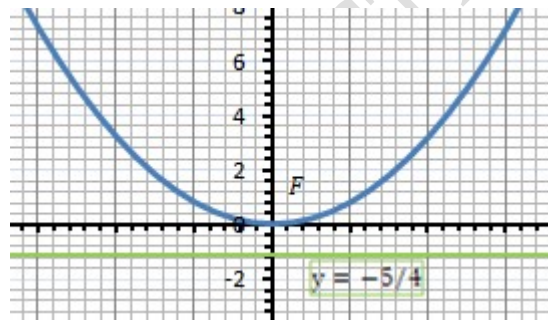
Parametro = $5/4$

vertice = $(0,0)$; ramas hacia la arriba

Foco = $(0, +\frac{5}{4})$;

directriz $y = -5/4$;

eje de simetria $x = 0$;



25. Ejercicio

Calcular el parametro, vertice, foco , directriz y el eje de simetria de la siguientes parábolas
 $(y - 1)^2 = 6(x + 2)$; $(x + 1)^2 = 2(y + 3)$

Solución:

Ecuacion general $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$

$(y - 1)^2 = 6(x + 2)$

operamos para que quede $4py$;

$$(y - 1)^2 = 6(x + 2) \Rightarrow (y - 1)^2 = \frac{3}{2} * 4(x + 2)$$

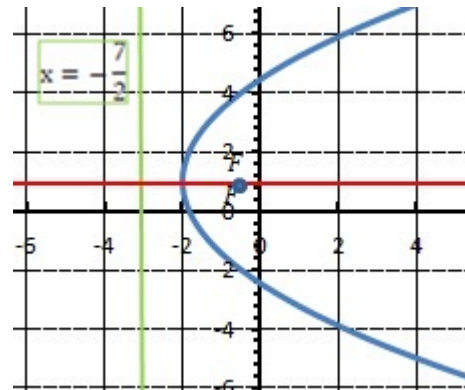
Parametro = $\frac{3}{2}$; ramas hacia la derecha

vertice = $V(-2,1)$;

Foco = $(-2 + \frac{3}{2}, 1)$;

directriz $x = (-2 - \frac{3}{2})$; $x = -\frac{7}{2}$

eje de simetria $y = 1$;



Ecuacion general $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$

$(x + 1)^2 = 2(y + 3)$

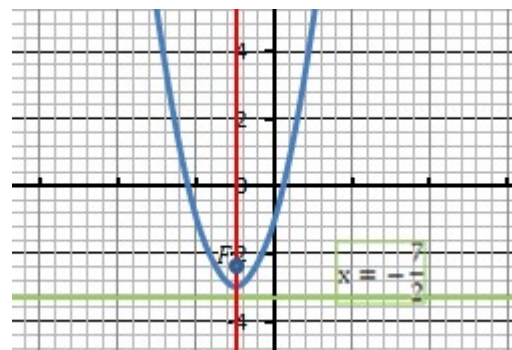
operamos para que quede $4py$;

$$(x + 1)^2 = 2(y + 3) \Rightarrow (x + 1)^2 = \frac{1}{2} * 4(y + 3)$$

Parametro = $\frac{1}{2}$; ramas hacia arriba

vertice = $(-1, -3)$;

Foco = $(-1, (-3 + \frac{1}{2})) = (-1, -\frac{5}{2})$;



$$\text{directriz } y = \left(-3 - \frac{1}{2}\right); x = -\frac{7}{2}$$

$$\text{eje de simetría } x = -1;$$

26. Ejercicio

Calcular el parámetro, vértice, foco, directriz y el eje de simetría de la siguiente parábola
 $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$;

Solución

$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$; buscamos la forma reducida de la parábola, $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$

Hallando la identidad notable.

Sumamos y restamos 9 $\Rightarrow$

$$y^2 - 6y + 9 - 8x + 17 - 9 = 0;$$

$$(y - 3)^2 = -8x + 8; (y - 3)^2 - 8(x - 1) = 0$$

$$(y - 3)^2 = 8(x - 1); (y - 3)^2 = 2 * 4(x - 1)$$

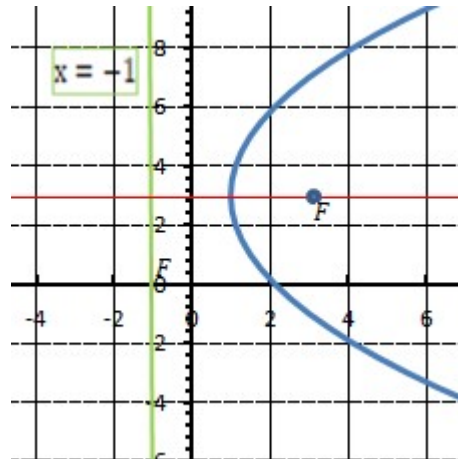
Parametro = 2; ramas hacia la derecha

vertice = V(1,3);

$$\text{Foco} = ((1 + 2, 3)); (3,3)$$

$$\text{directriz } x = (1 - 2); x = -1$$

eje de simetría y = 3;



27. Ejercicio

Calcular el parámetro, vértice, foco, directriz y el eje de simetría de la siguiente parábola

$$x^2 - 2x - 6y - 5 = 0;$$

Solución

$x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$; buscamos la forma reducida

de la parábola, $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$

Hallando la identidad notable.

Sumamos y restamos 1 $\Rightarrow$

$$x^2 - 2x + 1 - 6y - 5 - 1 = 0;$$

$$(x - 1)^2 = 6y + 6; (x - 1)^2 = 6(y + 1)$$

$$(x - 1)^2 = 6y + 6; (x - 1)^2 = \frac{3}{2} * 4(y + 1)$$

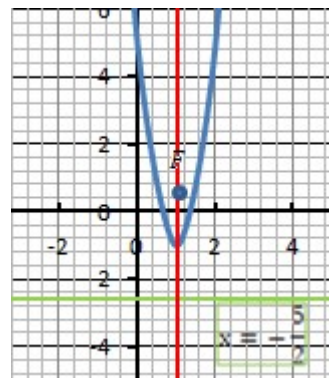
Parametro = 3/2; ramas hacia arriba

vertice = V(1, -1);

$$\text{Foco} = (1, (-1 + 3/2)); (1, \frac{1}{2})$$

$$\text{directriz } y = (-1 - 3/2); y = -\frac{5}{2}$$

eje de simetría x = 1;



28. Ejercicio

Clasificar los distintos tipos de cónicas

a) $x^2 + 10y^2 = 10$; b) $y^2 + 2y - 2x - 3 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 2y + 5 = 0$;

d) $3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y - 11 = 0$;

Solución

a) $x^2 + 10y^2 = 10$; si divido por 10 $\Rightarrow \frac{x^2}{10} + \frac{10y^2}{10} = 1$; $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{1} = 1$ es una elipse

pues es del tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; centrada en el origen y $a = \sqrt{10}$; $b = 1$

b) $y^2 + 2y - 2x - 3 = 0$ transformo en identidad notable $y^2 + 2y + 1 - 2x - 3 - 1 = 0$

$(y + 1)^2 = 2x + 4$; $(y + 1)^2 = 2(x + 2)$; $(y + 1)^2 = \frac{4}{2}(x + 2)$ es una parabola

tipo $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$; ramas a la derecha, $p = \frac{1}{2}$; vertice $(-1, -2)$

c) $x^2 + y^2 - 2y + 5 = 0$; sería una circunferencia tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$D = 0$; $E = -2$ y $F = 5$; Centro $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$; $C(0, 1)$; $r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$;

$r = \sqrt{\frac{0^2}{4} + \frac{(-2)^2}{4} - 5} = \sqrt{+ \frac{4}{4} - 5} = \sqrt{-4}$ $r = \sqrt{-4}$ no existe en R ; no es una conica

d) $3x^2 - 2y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$; podría ser una elipse o hipérbola

transformo en identidades notables $3x^2 - 6x - 2y^2 - 8y - 11 = 0$;

divido por el mcm de los coeficientes x^2 , $y^2 = 6$

$\frac{3x^2 - 2y^2 - 6x - 8y - 11}{6} = 0$; $\frac{x^2 - 2x}{2} - \frac{y^2 + 4y}{3} = \frac{11}{6}$;

$\frac{x^2 - 2x + 1}{2} - \frac{y^2 + 4y + 4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6}$; $\frac{(x - 1)^2}{2} - \frac{(y + 2)^2}{3} = \frac{11}{6} + \frac{1}{2} - \frac{4}{3}$;

$\frac{(x - 1)^2}{2} - \frac{(y + 2)^2}{3} = \frac{6}{6}$; $\frac{(x - 1)^2}{2} - \frac{(y + 2)^2}{3} = 1$;

Hipérbola $\frac{(x - 1)^2}{2} - \frac{(y + 2)^2}{3} = 1$;

29. Ejercicio

La máxima distancia que separa la tierra de la luna es de 63 veces el radio de la tierra (6357Km). Sabiendo que la excentricidad de la elipse es de 0,0678. Calcular la distancia mínima que separa la tierra de la luna

Solución

Máxima distancia = $63 * 6357 = 400491$ Km; $a = 400491$ Km

excentricidad $e = \frac{c}{a}$; c semidistancia focal; a semieje mayor, b semieje menor

$e = \frac{c}{a}$; $0,0678 = \frac{c}{400491}$; $c = 27153,3$ km

$$a^2 = c^2 + b^2 ; b = \sqrt{a^2 - c^2} ; b = \sqrt{(400491)^2 - (27153,3)^2} = 399569\text{Km}$$

30. Ejercicio

Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por A(0,0) y B(2,4) y su centro está en la recta determinada por C(7,2) y D(3,-2)

Solución

La mediatriz del segmento AB : Punto medio

del segmento AB $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$;

punto medio de AB (1,2)

La recta AB será $(y - 0) = \frac{(4 - 0)}{(2 - 0)}(x - 0)$;

$y = 2x$;

La mediatriz será $y = -\frac{1}{2}x + C$;

si pasa por (1,2) será $2 = -\frac{1}{2} * 1 + C$; $C = \frac{5}{2}$;

La mediatriz del segmento AB $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ pasará por el centro

La otra recta CD será $(y - 2) = \frac{(-2 - 2)}{(3 - 7)}(x - 7)$; $y - 2 = \frac{-4}{-4}(x - 7)$;

$y - 2 = x - 7$, $y = x - 5$;

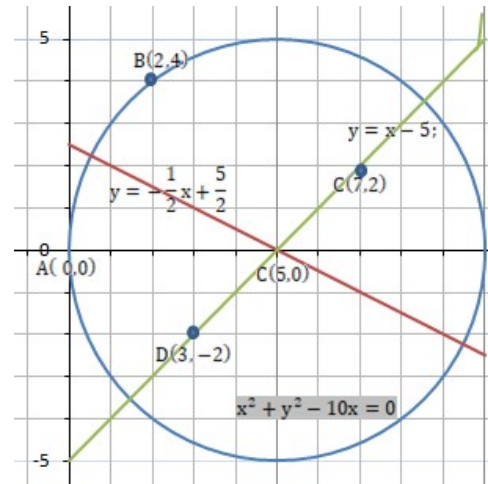
Se cortarán en el centro C $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = x - 5 \end{cases}$; $-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = x - 5$; $-x + 5 = 2x - 10$; $x = 5$;

Sustituyo en $y = x - 5$; $y = 5 - 5 = 0$ Centro de la circunferencia C (5,0)

$D(C, r) = C(5,0) A(0,0) = R$; $R = \sqrt{(5 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{25}$; $R = 5$;

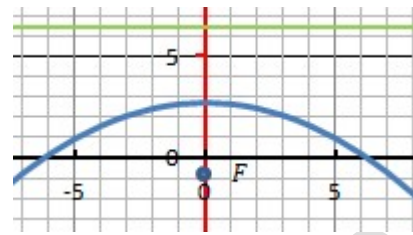
Ecuación de la circunferencia $(x - 5)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$; $(x - 5)^2 + y^2 = 25$;

$x^2 + y^2 - 10x = 0$



31. Ejercicio

Cuando el jugador A lanza un balón a la posición del B, este describe una trayectoria de una parábola. La distancia de A a B es de 12,5 m y la altura que alcanza el balón es 2,75m. Calcula la ecuación, vértice, foco, y directriz de la parábola.



Solución

El vértice de la parábola es el punto más alto que alcanza el balón

El origen de coordenadas $O(0,0)$ Vértice $(0, 2.75)$

La ecuación de la parábola será tipo $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$;

Si ha de pasar por $B(6.25, 0)$ cumplirá $(6.25 - 0)^2 = -4p(0 - 2.75)$; $6.25^2 = 11p$;

$p = 3.55$

La ecuación será $x^2 = -4(3.55)(y - 2.75)$. $x^2 = -14.2(y - 2.75)$;

Foco $(0, (2.75 - 3.55))$; $F(0, -0.8)$

Directriz $y = 2.75 + 3.55$; $y = 6.3$;