

Propiedades métricas

Contenido

1	ANGULO ENTRE DOS RECTAS.....	2
2	ANGULO ENTRE DOS PLANOS.....	5
3	ANGULO QUE FORMAN UNA RECTA Y UN PLANO.....	7
4	PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO	8
5	PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO	10
6	DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.....	14
7	DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO	15
8	DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS	17
9	DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA	19
10	DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS	20
11	DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.....	21
11.1	POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS	21
11.2	MÉTODO PLANO PARALELO.....	21
11.3	MÉTODO PRODUCTO MIXTO.....	22
11.4	PERPENDICULARIDAD COMÚN A DOS RECTAS	23
12	ÁREAS DE PARALELOGRAMOS Y TRIÁNGULOS	26
13	VOLÚMENES DE PARALELEPÍPEDOS Y TETRAEDROS	30

1 Angulo entre dos rectas

El angulo que forman dos rectas r y s en el espacio viene determinado por el angulo menor que forman sus vectores de dirección $\vec{u}_r, \vec{u}_s$

ANGULO AGUDO FORMADO POR LAS RECTAS

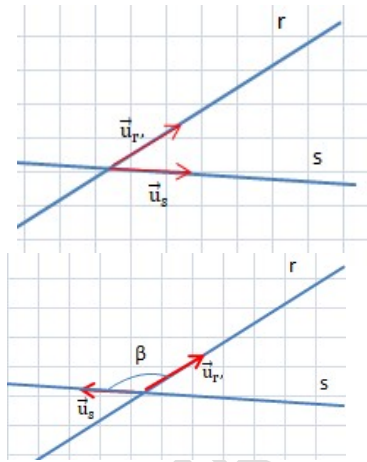
$$\cos(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| |\vec{u}_s|}$$

ANGULO OBTUSO FORMADO POR LAS RECTAS

$$\cos(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| |\vec{u}_s|} \text{ el producto escalar será}$$

negativo. Para que no varíe tomamos el valor absoluto

$$\cos(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r| |\vec{u}_s|} = \frac{|aa_1 + bb_1 + cc_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$



1. Ejercicio

Calcular el angulo que forman las rectas $r: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{4}$ y $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+5}{-2}$

Solución

$$r: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{4}, \vec{u}_r = (-1, 2, 4)$$

$$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+5}{-2}, \vec{u}_s = (3, 1, -2)$$

$$\cos(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = \frac{|aa_1 + bb_1 + cc_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{|(-1)3 + 2 \cdot 1 + 4(-2)|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}} =$$

$$\frac{|-3 + 2 - 8|}{\sqrt{21} \sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{294}}$$

$$\cos(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 0,524890659; \text{Angulo} = 58,339117^\circ = 58^\circ, 20', 20,8212''$$

2. Ejercicio

Calcular el angulo que forman las rectas $r: \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 1 \\ z = -2 \end{cases}$

Solución

$$r: \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = \lambda \\ \lambda - 2y - z = 0; z = \lambda - 2y; \text{ sustituyo en } \lambda + y + 3(\lambda - 2y) = -1 \\ \lambda + y + 3z = -1 \end{cases}$$

$$\lambda + y + 3\lambda - 6y = -1; 5y = 4\lambda + 1; y = \frac{4}{5}\lambda + \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{4}{5}\lambda + \frac{1}{5} \\ z = \lambda - 2y \end{cases} = \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{4}{5}\lambda + \frac{1}{5} \\ z = \lambda - 2(\frac{4}{5}\lambda + \frac{1}{5}) \end{cases} = \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{4}{5}\lambda + \frac{1}{5} \\ z = -\frac{3}{5}\lambda - \frac{2}{5} \end{cases} \vec{u}_r = (1, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$$

$$s: \begin{cases} x = 1 \\ z = -2 \end{cases}; t = \frac{x-1}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+2}{0} = \begin{cases} x-1=0 \\ y=t \\ z+2=0 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=-2 \end{cases} \vec{u}_s(0,1,0)$$

$$\cos(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{4}{5} + 0 \cdot (-\frac{3}{5})|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + (\frac{4}{5})^2 + (-\frac{3}{5})^2}} = \frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1} \sqrt{\frac{50}{25}}} = \frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{5\sqrt{2}} = 0,5656854$$

$$\text{Angulo} = 55,550098^\circ = 55^\circ, 33', 03528''$$

3. Ejercicio

Hallar el valor de d para que las rectas sean secantes y halla el angulo que forman para ese valor de d

$$r: \begin{cases} x + y + z + 3 = 0; \\ x - y - z - 1 = 0; \end{cases} \text{ y } s: \frac{x+1}{2} = y+1 = \frac{z+d}{-2}$$

Solución

$$r: \begin{cases} x + y + z + 3 = 0; \\ x - y - z - 1 = 0; \end{cases}$$

$$y = \lambda \begin{cases} x + \lambda + z + 3 = 0; \\ x - \lambda - z - 1 = 0; \end{cases} \text{ sumamos } \begin{cases} 2x + 0 + 0 = -2; \\ x = -1; \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda; \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda; \\ z = -2 - \lambda; \end{cases} \begin{cases} P_r(-1, 0, -2); \\ \vec{u}_r(0, 1, -1); \end{cases}$$

$$s: \frac{x+1}{2} = y+1 = \frac{z+d}{-2}; \begin{cases} x = 2\mu - 1 \\ y = \mu - 1; \\ z = -2\mu - d; \end{cases} \begin{cases} P_s(-1, -1, -d); \\ \vec{u}_s(2, 1, -2); \end{cases}$$

si se cortan ha de cumplir que tienen un punto comun

$$\text{igualamos } \begin{cases} 2\mu - 1 = -1 \\ \mu - 1 = \lambda; \\ -2\mu - d = -2 - \lambda; \end{cases} \begin{cases} \mu = 0; \\ -1 = \lambda; \\ -d = -2 - (-1); \end{cases} \begin{cases} \mu = 0; \\ \lambda = -1; \\ d = 1; \end{cases}$$

$$\text{punto de interseccion en } s \begin{cases} x = 2\mu - 1 \\ y = \mu - 1; \\ z = -2\mu - d; \end{cases} \text{ sustituimos } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1; \\ z = 1; \end{cases} (-1, -1, 1)$$

$$\text{punto de interseccion en } r \begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda; \\ z = -2 - \lambda; \end{cases} \text{ sustituimos } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1; \\ z = 1; \end{cases} (-1, -1, 1)$$

$$\text{Cose}(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = \frac{|0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1)(-2)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1+2}{\sqrt{2} \sqrt{9}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071068;$$

$$\text{Angulo} = 45^\circ$$

4. Ejercicio

Estudia la posicion relativa de las siguientes rectas. Calcular el angulo que forman.

$$r: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0; \\ 2x - y + z - 1 = 0; \end{cases} \text{ y } s: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0; \\ x - y - 2z + 1 = 0; \end{cases}$$

Solución

$$r: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0; \\ 2x - y + z - 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \lambda; \\ \lambda + y - 2z + 1 = 0; \\ 2\lambda - y + z - 1 = 0; \end{cases} \text{ sumamos } \begin{cases} x = \lambda; \\ 3\lambda + 0 - z + 0 = 0; \\ z = 3\lambda; \end{cases}$$

$$2\lambda - y + z - 1 = 0 \text{ sustituimos } 2\lambda - y + 3\lambda - 1 = 0; y = 5\lambda - 1;$$

$$r: \begin{cases} x = \lambda; \\ y = 5\lambda - 1; \\ z = 3\lambda; \end{cases} \begin{cases} P_r(0, -1, 0); \\ \vec{u}_r(1, 5, 3); \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0; \\ x - y - 2z + 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \mu; \\ 2\mu + y - z - 1 = 0; \\ \mu - y - 2z + 1 = 0; \end{cases} \text{ sumamos } \begin{cases} x = \mu; \\ 3\mu + 0 - 3z = 0; \\ z = \mu \end{cases}$$

$$x - y - 2z + 1 = 0; \text{ sustituimos } \mu - y - 2\mu + 1 = 0; y = 1 - \mu$$

$$s: \begin{cases} x = \mu; \\ y = 1 - \mu; \\ z = \mu; \end{cases} \begin{cases} P_s(0, 1, 0); \\ \vec{u}_s(1, -1, 1); \end{cases}$$

$$\vec{u}_r(1, 5, 3) \text{ y } \vec{u}_s(1, -1, 1) \text{ no son proporcionales, se cortan}$$

$$\text{Cose}(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = \frac{|1 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (5)^2 + (3)^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{105}} = 0,09759$$

$$\text{arc cos } \frac{1}{\sqrt{105}} = 84,3995908 = 84^\circ, 23', 58,52688''$$

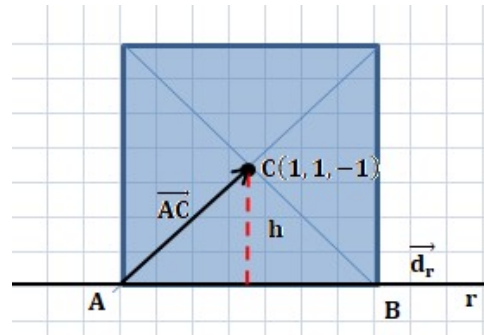
5. Ejercicio

Considera un cuadrado cuyo centro es el punto

$C(1,1,-1)$ y tiene uno de sus lados en la recta

$$r: \begin{cases} x - 2 = y - 1; \\ z = 1; \end{cases}$$

- calcula la ecuación del plano en que se encuentra el cuadrado
- Calcula la longitud del lado del cuadrado



Solución

$$r: \begin{cases} x - 2 = y - 1; \\ z = 1; \end{cases}; \quad r: \begin{cases} x - y - 1 = 0; \\ z = 1; \end{cases}; \quad x = \lambda; \quad r: \begin{cases} \lambda - 2 + 1 = y; \\ z = 1; \end{cases}; \quad r: \begin{cases} x = \lambda; \\ y = \lambda - 1; \\ z = 1; \end{cases}$$

- calcularemos la ecuación del plano en que se encuentra

Hallamos dos puntos de la recta A para $\lambda = 0$ $\begin{cases} x = 0; \\ y = -1; \\ z = 1 \end{cases}$ A(0, -1, 1)

Hallamos dos puntos de la recta B para $\lambda = 1$ $\begin{cases} x = 1; \\ y = 0; \\ z = 1 \end{cases}$ B(1, 0, 1)

$$\overrightarrow{AC} = C(1, 1, -1) - A(0, -1, 1) = (1, 2, -2)$$

$$\overrightarrow{BC} = C(1, 1, -1) - B(1, 0, 1) = (0, 1, -2)$$

Ecuación del plano: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4x + 4 + z + 1 + 2y - 2 + 2x - 2 = -2x + 2y + z + 1 = 0;$

- Calcula la longitud del lado del cuadrado

Lado del cuadrado = 2 Distancia de C a la recta r;

$$\overrightarrow{d_r} = (1, 1, 0), \quad \overrightarrow{AD} = C(1, 1, -1) - A(0, -1, 1) = (1, 2, -2)$$

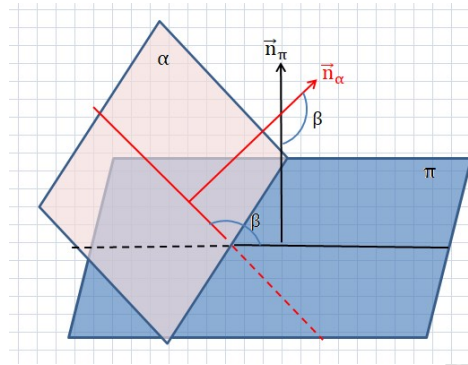
$$h = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{d_r}|}{|\overrightarrow{d_r}|}; \quad h = \frac{|(1, 2, -2) \times (1, 1, 0)|}{\sqrt{1^2 + (1)^2 + (0)^2}} = \frac{|(2, -2, -1)|}{\sqrt{1^2 + (1)^2 + (0)^2}} = \frac{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}}{\sqrt{1^2 + (1)^2 + (0)^2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}};$$

$$(1, 2, -2) \times (1, 1, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k - 2j - 2k + 2i = 2i - 2j - k; \quad (2, -2, -1)$$

Longitud del lado del cuadrado = $2h = 2 \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$

2 Angulo entre dos planos

El angulo β que forman dos planos es igual al angulo que forman sus vectores normales β
Si tenemos dos planos α y π , sus vectores normales serán $\vec{n}_\alpha$ y $\vec{n}_\pi$
siendo $\vec{n}_\alpha (a, b, c)$ y $\vec{n}_\pi (a_1, b_1, c_1)$



$$\cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\pi) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\alpha| |\vec{n}_\pi|} = \frac{|aa_1 + bb_1 + cc_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

6. Ejercicio

Calcula el angulo que forman las siguientes parejas de planos

$$a \begin{cases} \alpha: x + y + z = 0; \\ \pi: 3x - z = -2; \end{cases} \text{ y } b \begin{cases} \alpha: -x + 4y + 2z = 3; \\ \pi: y = 5; \end{cases}$$

Solución

$$a) \begin{cases} \alpha: x + y + z = 0; & \vec{n}_\alpha(1,1,1) \\ \pi: 3x - z = -2; & \vec{n}_\pi(3,0,-1) \end{cases}$$

$$\cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\pi) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\alpha| |\vec{n}_\pi|} = \frac{|1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3} \sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{30}} = 0,36514837$$

$$\arccos 0,36514837 = 68,583286^\circ = 68^\circ, 34', 59,856''$$

$$b) \begin{cases} \alpha: -x + 4y + 2z = 3; & \vec{n}_\alpha(-1,4,2) \\ \pi: y = 5; & \vec{n}_\pi(0,1,0) \end{cases}$$

$$\cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\pi) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\alpha| |\vec{n}_\pi|} = \frac{|(-1) \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{4}{\sqrt{21} \sqrt{1}} = \frac{4}{\sqrt{21}} = 0,87287156$$

$$\arccos 0,87287156 = 29,205932^\circ = 29^\circ, 12', 21,3552''$$

7. Ejercicio

Determina el valor de k para que el plano que pasa por $A(2, -2, 3)$, $B(0, 0, 0)$, $C(k, -1, k)$ sea perpendicular al plano $\pi(2x + y = 3)$;

Solución

Para hallar la formula del plano necesitamos conocer dos vectores de direccion y un punto de paso

$$\vec{AB} = B(0,0,0) - A(2,-2,3) = (-2, 2, -3)$$

$$\vec{AC} = C(k, -1, k) - A(2, -2, 3) = (k - 2, -1 + 2, k - 3) = (k - 2, 1, k - 3)$$

Punto de paso $B(0,0,0)$

$$\alpha \begin{vmatrix} -2 & k-2 & x-0 \\ 2 & 1 & y-0 \\ -3 & k-3 & z-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & k-2 & x \\ 2 & 1 & y \\ -3 & k-3 & z \end{vmatrix} = -2z - 3ky + 6y + 2kx - 6x + 3x - 2kz + 4z + 2ky - 6y$$

$$\alpha: (2k - 3)x + (-k)y + (-2k + 2)z = 0;$$

$$\text{Si } \alpha: (2k - 3)x + (-k)y + (-2k + 2)z = 0 \text{ ha de ser perpendicular a } \pi(2x + y = 3); \vec{n}_\alpha(2, 1, 0);$$

su producto escalar ha de ser 0;

$$((2k - 3), (-k), (-2k + 2)) \cdot (2, 1, 0) = 4k - 6 - k + 0 = 3k - 6 = 0; k = 2;$$

8. Ejercicio

Hallar el ángulo que forma los planos π determinado por los puntos $A(0,0,8)$, $B(-5,1,2)$ y $C(0,-2,0)$

y η que es el plano perpendicular a la recta $x - 1 = y - 2 = \frac{z}{6}$ y que pasa por el punto $(0,0,1)$

Solución

$$\overrightarrow{AB} = B(-5,1,2) - A(0,0,8) = (-5,1,-6)$$

$$\overrightarrow{AC} = C(0,-2,0) - A(0,0,8) = (0,-2,-8)$$

Punto de paso $A(0,0,8)$

$$\pi: \begin{vmatrix} -5 & 0 & x-0 \\ 1 & -2 & y-0 \\ -6 & -8 & z-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & x \\ 1 & -2 & y \\ -6 & -8 & z-8 \end{vmatrix} = 10z - 80 - 8x - 12x - 40y = 0; \pi: -20x - 40y + 10z - 80 = 0$$

$$\pi: 2x + 4y - z + 8 = 0; \overrightarrow{VN_\pi} = (2,4,-1);$$

Si el plano η es perpendicular a la recta su vector normal será igual al vector director de la recta

$$\text{recta: } x - 1 = y - 2 = \frac{z}{6}; \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = 6\lambda \end{cases} \overrightarrow{vd_r} (1,1,6)$$

$$\eta: Ax + By + Cz + D = 0 \text{ sustituyo el vector director } \overrightarrow{vd_r}; x + y + 6z + D = 0$$

$$\eta: x + y + 6z + D = 0 \text{ como ha de pasar por } (0,0,1) \Rightarrow \eta: 0x + 0y + 6 \cdot 1 + D = 0; D = -6;$$

$$\eta: x + y + 6z - 6 = 0; \overrightarrow{VN_\eta} = (1,1,6)$$

$$\cos(\overrightarrow{VN_\pi}, \overrightarrow{VN_\eta}) = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 6|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 6^2}} = \frac{0}{\sqrt{21} \sqrt{38}} = \frac{0}{\sqrt{798}} = 0;$$

$\arccos 0 = 90^\circ$ los planos son perpendiculares

9. Ejercicio

Hallar el ángulo que forma los planos π determinado por las rectas $r: x = \frac{y}{3} = \frac{3-z}{2}$ y $s: \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda - 1 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases}$

$$\text{y } \eta: 2x - y + z = 1;$$

Solución

$$r: x = \frac{y}{3} = \frac{3-z}{2}; \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2\lambda + 3 \end{cases} \overrightarrow{vd_r} (1,3,-2); \text{Punto de paso } (0,0,3)$$

$$s: \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda - 1 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases} \overrightarrow{vd_s} (1,1,-1)$$

$$\pi: \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-0 \\ 3 & 1 & y-0 \\ -2 & -1 & z-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 3 & 1 & y \\ -2 & -1 & z-3 \end{vmatrix} = z - 3 - 3x - 2y + 2x + y - 3z + 9 = 0; -x - y - 2z + 6 = 0$$

$$\pi: x + y + 2z - 6 = 0; \overrightarrow{VN_\pi} (1,1,2)$$

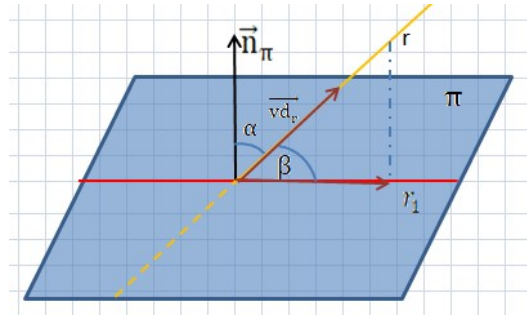
$$\eta: 2x - y + z = 1; \overrightarrow{VN_\eta} = (2,-1,1)$$

$$\cos(\overrightarrow{VN_\pi}, \overrightarrow{VN_\eta}) = \frac{|1 \cdot 2 + 1(-1) + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{36}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$$

3 Angulo que forman una recta y un plano

El ángulo que forma un plano π con una recta r es igual al ángulo formado por el vector director de la recta r y el vector director de la recta proyectada sobre el plano π .
El ángulo β es el complementario del ángulo α ;
 $\sin \beta = \cos \alpha$;



$$\sin \beta = \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_{N_\pi}) = \frac{|\vec{v}_r * \vec{v}_{N_\pi}|}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_{N_\pi}|} = \frac{|aa_1 + bb_1 + cc_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

$$\beta = \arcsen \frac{|aa_1 + bb_1 + cc_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

10. Ejercicio

Hallar el ángulo que forma los planos π y rectas r a) $\pi: x + y - 2z = -1$; $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$

b) $\pi: -3x + 2y + z = 3$; $r: \begin{cases} y = -3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

Solución

a) $\pi: x + y - 2z = -1$; $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$

$\pi: x + y - 2z = -1$; $\vec{v}_{N_\pi}(1, 1, -2)$

$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$, $\vec{v}_r(2, -1, 1)$

$$\sin \beta = \frac{|\vec{v}_r * \vec{v}_{N_\pi}|}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_{N_\pi}|} = \frac{|1 * 2 + 1(-1) + (-2) * 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6};$$

$$\arcsen \frac{1}{6} = 9,594068^\circ = 9^\circ, 35' 38,6448''$$

b) $\pi: -3x + 2y + z = 3$; $\vec{v}_{N_\pi}(-3, 2, 1)$

$r: \begin{cases} y = -3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 \\ \lambda + 2z = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 \\ z = \frac{1-\lambda}{2} \end{cases}$ $\vec{v}_r(1, 0, -\frac{1}{2})$

$$\sin \beta = \frac{|\vec{v}_r * \vec{v}_{N_\pi}|}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_{N_\pi}|} = \frac{|(-3) * 1 + 2 * 0 + 1 * (-\frac{1}{2})|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + (-\frac{1}{2})^2}} = \frac{|(-3 - \frac{1}{2})|}{\sqrt{14} \sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{14} \sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{70}} = \frac{7}{\sqrt{70}};$$

$$\arcsen \frac{7}{\sqrt{70}} = 56,789089^\circ = 56^\circ, 47' 20,7204''$$

11. Ejercicio

Para que valores de m son el plano $\pi: x + my - z + 1 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x - 2y + 1 = 0; \\ 2x - 2y + z + 1 = 0; \end{cases}$

a) paralelos;

b) Perpendiculares c) Calcula en funcion del parametro m que angulo forman la recta y el plano

Solución

$$\pi: x + my - z + 1 = 0; \overrightarrow{VN_{\pi}}(1, m, -1)$$

$$r: \begin{cases} x - 2y + 1 = 0; \\ 2x - 2y + z + 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1+\lambda}{2} \\ 2\lambda - 2\left(\frac{1+\lambda}{2}\right) + z + 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} \\ z = -\lambda; \end{cases} \overrightarrow{vd_r}\left(1, \frac{1}{2}, -1\right)$$

$$\sin \beta = \frac{|\overrightarrow{vd_r} * \overrightarrow{VN_{\pi}}|}{|\overrightarrow{vd_r}| |\overrightarrow{VN_{\pi}}|} = \frac{|1 * 1 + m * \frac{1}{2} + (-1)(-1)|}{\sqrt{1^2 + m^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 + \frac{m}{2}|}{\sqrt{2 + m^2} \sqrt{2 + \frac{1}{4}}} =$$

$$\frac{|\frac{4+m}{2}|}{\sqrt{2+m^2} \sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{|\frac{4+m}{2}|}{\frac{\sqrt{9(2+m^2)}}{2}} = \frac{4+m}{\sqrt{9(2+m^2)}};$$

$$\sin \beta = \frac{4+m}{\sqrt{9(2+m^2)}}$$

a) paralelos $\Rightarrow \frac{4+m}{\sqrt{9(2+m^2)}} = 0; m = 0;$

b) Perpendiculares $\frac{4+m}{\sqrt{9(2+m^2)}} = 1; 4+m = \sqrt{9(2+m^2)}; 4m^2 - 4m + 1 = 0;$

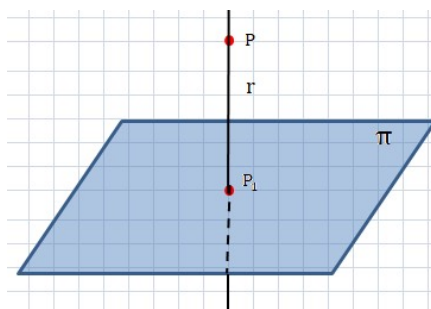
$$m = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 * 4 * 1}}{2 * 4} = \frac{1}{2}; m = \frac{1}{2}$$

c) Calcula en funcion del parametro m que angulo forman la recta y el plano

$$\sin \beta = \frac{4+m}{\sqrt{9(2+m^2)}}$$

4 Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

Se llama proyeccion de un punto P sobre un plano π , al punto P_1 que se obtiene como la interseccion de la recta r perpendicular al plano π que pasa por P



12. Ejercicio

El triangulo de vertice $A(2,0,3), B(-1,1,1) C(0,1,2)$ se proyecta ortogonalmente sobre el plano de ecuación $\pi: x + 2y - z - 2 = 0$; Halla los vertices del triangulo proyectado

Solución

$$\pi: x + 2y - z - 2 = 0; \overrightarrow{VN_{\pi}}(1, 2, -1)$$

Recta perpendicular al plano por el punto $A(2,0,3) \overrightarrow{vd_s}(1, 2, -1)s: \begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda + 3 \end{cases}$

Punto de interseccion recta s: $\begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda + 3 \end{cases}$ y plano $\pi: x + 2y - z - 2 = 0$

Sutituimos $\lambda + 2 + 2 * 2\lambda - (-\lambda + 3) - 2 = 0$; $\lambda + 2 + 4\lambda + \lambda - 3 - 2 = 0$; $6\lambda = 3$; $\lambda = \frac{1}{2}$;

El punto A(2,0,3) proyectado sobre el plano será: $\begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda + 3 \end{cases}$ sustituyo $\lambda = \frac{1}{2}$; $\begin{cases} x = \frac{5}{2}; \\ y = 1 \\ z = \frac{5}{2}; \end{cases}$

Recta perpendicular al plano por el punto B(-1,1,1); $\overrightarrow{vd_s} (1,2,-1)$ r: $\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}$

Punto de interseccion recta r: $\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}$ y plano $\pi: x + 2y - z - 2 = 0$

Sutituimos $\lambda - 1 + 2 * (2\lambda + 1) - (-\lambda + 1) - 2 = 0$; $\lambda - 1 + 4\lambda + 2 + \lambda - 1 - 2 = 0$; $6\lambda = 2$; $\lambda = \frac{1}{3}$;

El punto B(-1,1,1) proyectado sobre el plano será: $\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}$ sustituyo $\lambda = \frac{1}{3}$; $\begin{cases} x = -\frac{2}{3}; \\ y = \frac{5}{3}; \\ z = \frac{2}{3}; \end{cases}$

Recta perpendicular al plano por el punto C(0,1,2); $\overrightarrow{vd_s} (1,2,-1)$; t: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = -\lambda + 2 \end{cases}$

Punto de interseccion recta t: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = -\lambda + 2 \end{cases}$ y plano $\pi: x + 2y - z - 2 = 0$

Sutituimos $\lambda + 2 * (2\lambda + 1) - (-\lambda + 2) - 2 = 0$; $\lambda + 4\lambda + 2 + \lambda - 2 - 2 = 0$; $6\lambda = 2$; $\lambda = \frac{1}{3}$;

El punto C(0,1,2) proyectado sobre el plano será: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = -\lambda + 2 \end{cases}$ sustituyo $\lambda = \frac{1}{3}$; $\begin{cases} x = \frac{1}{3}; \\ y = \frac{5}{3}; \\ z = \frac{5}{3}; \end{cases}$

13. Ejercicio

Hallar la proyeccion ortogonal del punto P(0,0,0) sobre el plano $\pi: x + y + z - 1 = 0$;

Solución

$\pi: x + y + z - 1 = 0$; $\overrightarrow{VN_\pi} (1,1,1)$

Recta perpendicular al plano por el punto P(0,0,0) $\overrightarrow{vd_s} (1,1,1)$ s: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Punto de interseccion recta s: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y plano $\pi: x + y + z - 1 = 0$

Sutituimos $\lambda + \lambda + \lambda - 1 = 0$; $3\lambda = 1$; $\lambda = \frac{1}{3}$;

El punto P(0,0,0) proyectado sobre el plano será: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ sustituyo $\lambda = \frac{1}{3}$; $\begin{cases} x = \frac{1}{3}; \\ y = \frac{1}{3}; \\ z = \frac{1}{3}; \end{cases}$

14. Ejercicio

Hallar las coordenadas del punto simétrico

a $A(-2, -2, -3)$ respecto al plano

$\eta: 2x + y + z - 3 = 0$;

Solución

El vector normal al plano $2x + y + z - 3 = 0$

$\overrightarrow{VN}_\eta$ es $(2, 1, 1)$.

$$r \begin{cases} \overrightarrow{D_r}(2, 1, 1) \\ A(-2, -2, -3) \end{cases}; r \begin{cases} x = 2\lambda - 2 \\ y = 1\lambda - 2 \\ z = 1\lambda - 3 \end{cases}$$

Punto P_1 de corte de la recta r y el plano η

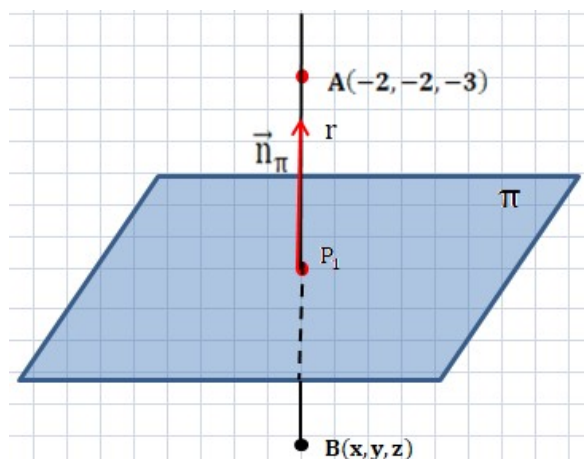
$$r \begin{cases} x = 2\lambda - 2 \\ y = 1\lambda - 2 \\ z = 1\lambda - 3 \end{cases}; \eta: 2x + y + z - 3 = 0 \text{ sustituimos } 2(2\lambda - 2) + (\lambda - 2) + (\lambda - 3) - 3 = 0$$

$$4\lambda - 4 + \lambda - 2 + \lambda - 3 - 3 = 0; 6\lambda - 12 = 0; \lambda = 2;$$

$$\text{Punto } P_1 \text{ ssutituyo en } r \begin{cases} x = 2\lambda - 2 \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 3 \end{cases} \lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 * 2 - 2 \\ y = 2 - 2 \\ z = 2 - 3 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} P_1(2, 0, -1)$$

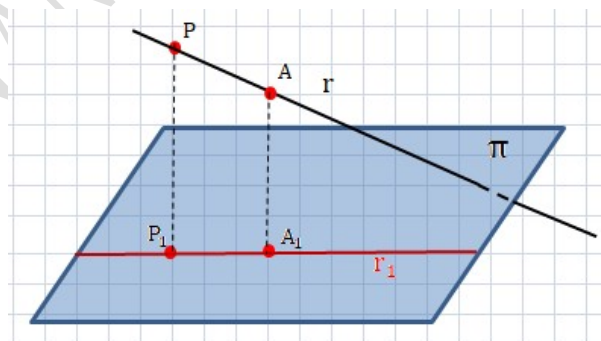
$$P_1 = \frac{1}{2}(A + B); P_1(2, 0, -1) = \frac{1}{2}(A(-2, -2, -3) + B(x, y, z)); B(x, y, z) = 2P_1(2, 0, -1) - A(-2, -2, -3)$$

$$B(x, y, z) = (4, 0, -2) - (-2, -2, -3) = (6, 2, 1)$$



5 Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

Se llama proyección de una recta r sobre un plano π , a la recta r_1 , que se obtiene como la proyección de dos puntos de la recta r sobre el plano π .



Otra forma:

La proyección de una recta r sobre un plano π , se obtiene como intersección de plano π_1 perpendicular al plano π y que contiene a la recta

15. Ejercicio

Hallar la proyección ortogonal de la recta $r: \begin{cases} x + y = -1 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$ sobre el plano $\pi: x - 3y + z + 3 = 0$;

Solución

$$\pi: x - 3y + z + 3 = 0; \overrightarrow{VN}_\pi(1, -3, 1)$$

$$r: \begin{cases} x + y = -1 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda - 1 \\ 3\lambda - (-\lambda - 1) + 2z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda - 1 \\ z = -2\lambda - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ Un punto de la recta sera } P(0, -1, -\frac{1}{2})$$

$$\overrightarrow{Vd_r} = (1, -1, -2)$$

$$\text{La ecuacion del plano } \pi_1 = \begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z+\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y+1 & z+\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -x - 2y - 2 - 3z - \frac{3}{2} + z + \frac{1}{2} - y - 1 - 6x = -7x - 3y - 2z - 4 = 0; 7x + 3y + 2z + 4 = 0;$$

$$\text{Recta pedida es la interseccion de los dos planos } \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 7x + 3y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ \lambda - y + \left(-\frac{8}{3}\lambda - \frac{7}{3}\right) + 3 = 0 \\ z = -\frac{8}{3}\lambda - \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{5}{3}\lambda + \frac{2}{3} \\ z = -\frac{8}{3}\lambda - \frac{7}{3} \end{cases}$$

16. Ejercicio

Hallar la proyeccion ortogonal de la recta $r: \frac{x-4}{2} + \frac{y-1}{2} + \frac{z}{2}$ sobre el plano $\pi: x + y + z = 0$;

Solución

$$r: \frac{x-4}{2} + \frac{y-1}{2} + \frac{z}{2} = \begin{cases} x = 2\lambda + 4 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = 2\lambda \end{cases} \text{ hallamos dos puntos de la recta } \lambda = 0; P(4,1,0); \lambda = 1; A(6,3,2)$$

$$\pi: x + y + z = 0; \overrightarrow{VN_\pi} (1,1,1)$$

$$\text{Recta perpendicular al plano por el punto } P(4,1,0) \overrightarrow{vd_s} (1,1,1)s: \begin{cases} x = \lambda + 4 \\ y = \lambda + 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\text{Punto de interseccion recta s: } \begin{cases} x = \lambda + 4 \\ y = \lambda + 1 \text{ y plano } \pi: x + y + z = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\text{Sutituimos } \lambda + 4 + \lambda + 1 + \lambda = 0; 3\lambda = -5; \lambda = -\frac{5}{3};$$

$$\text{El punto } P(4,1,0) \text{ proyectado sobre el plano serás: } \begin{cases} x = \lambda + 4 \\ y = \lambda + 1 \\ z = \lambda \end{cases} \text{ sustituyo } -\frac{5}{3}; P_1 \begin{cases} x = \frac{7}{3}; \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{5}{3}; \end{cases}$$

$$\text{Recta perpendicular al plano por el punto } A(6,3,2) \overrightarrow{vd_s} (1,1,1)t: \begin{cases} x = \lambda + 6 \\ y = \lambda + 3 \\ z = \lambda + 2 \end{cases}$$

$$\text{Punto de interseccion recta t: } \begin{cases} x = \lambda + 6 \\ y = \lambda + 3 \text{ y plano } \pi: x + y + z = 0 \\ z = \lambda + 2 \end{cases}$$

$$\text{Sutituimos } \lambda + 6 + \lambda + 3 + \lambda + 2 = 0; 3\lambda = -11; \lambda = -\frac{11}{3};$$

$$\text{El punto } A(6,3,2) \text{ proyectado sobre el plano serás: } \begin{cases} x = \lambda + 6 \\ y = \lambda + 3 \\ z = \lambda + 2 \end{cases} \text{ sustituyo } \lambda = -\frac{11}{3}; A_1 \begin{cases} x = \frac{7}{3}; \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{5}{3}; \end{cases}$$

La proyeccion ortogonal de la recta $r: \frac{x-4}{2} + \frac{y-1}{2} + \frac{z}{2}$ sobre el plano $\pi: x + y + z = 0$,

es un punto $\left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

El vector normal del plano $\overrightarrow{VN_\pi} (1,1,1)$ es igual al vector director de la recta $\overrightarrow{vd_s} (1,1,1)$

17. Ejercicio

Hallar la proyección ortogonal de la recta $r: \begin{cases} x+y=-1 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$ sobre el plano $\pi: x-3y+z+3=0$;

Solución

$$\pi: x-3y+z+3=0; \overrightarrow{VN_{\pi}}(1, -3, 1)$$

$$r: \begin{cases} x+y=-1 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}; \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda-1 \\ 3\lambda-(-\lambda-1)+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda-1 \\ z=-2\lambda-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ hallamos dos puntos de la recta}$$

$$\text{para } \lambda=0 \text{ sustituyo } \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda-1 \\ z=-2\lambda-\frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} A(0, -1, -\frac{1}{2});$$

$$\text{para } \lambda=-1 \text{ sustituyo } \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda-1 \\ z=-2\lambda-\frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=\frac{3}{2} \end{cases} B(-1, 0, \frac{3}{2})$$

$$\text{Recta perpendicular al plano por el punto } A(0, -1, -\frac{1}{2}) \overrightarrow{vd_s}(1, -3, 1)s: \begin{cases} x=\lambda \\ y=-3\lambda-1 \\ z=\lambda-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Punto de intersección recta } s: \begin{cases} x=\lambda \\ y=-3\lambda-1 \\ z=\lambda-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ y plano } \pi: x-3y+z+3=0$$

$$\text{Sustituimos } \lambda-3(-3\lambda-1)+\lambda-\frac{1}{2}+3=0; \lambda+9\lambda+3+\lambda-\frac{1}{2}+3=0; 11\lambda=-\frac{11}{2}; \lambda=-\frac{1}{2}$$

$$\text{El punto } A(0, -1, -\frac{1}{2}) \text{ proyectado sobre el plano será: } \begin{cases} x=\lambda \\ y=-3\lambda-1 \\ z=\lambda-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ sustituyo } -\frac{1}{2}; A_1 \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=-1 \end{cases};$$

$$\text{Recta perpendicular al plano por el punto } B(-1, 0, \frac{3}{2}) \overrightarrow{vd_s}(1, -3, 1)t: \begin{cases} x=\lambda-1 \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda+\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Punto de intersección recta } t: \begin{cases} x=\lambda-1 \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda+\frac{3}{2} \end{cases} \text{ y plano } \pi: x-3y+z+3=0$$

$$\text{Sustituimos } \lambda-1-3(-3\lambda)+\lambda+\frac{3}{2}+3=0; \lambda-1+9\lambda+\lambda+\frac{3}{2}+3=0; 11\lambda=-\frac{7}{2}; \lambda=-\frac{7}{22}$$

$$\text{El punto } B(-1, 0, \frac{3}{2}) \text{ proyectado sobre el plano será: } t: \begin{cases} x=\lambda-1 \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda+\frac{3}{2} \end{cases} \text{ sustituyo } -\frac{7}{22}; B_1 \begin{cases} x=-\frac{29}{22} \\ y=\frac{21}{22} \\ z=\frac{26}{22} \end{cases};$$

$$\text{proyección de la recta } \overrightarrow{vd_r} = B_1(-\frac{29}{22}, \frac{21}{22}, \frac{26}{22}) - A_1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) = (-\frac{18}{22}, \frac{10}{22}, \frac{48}{22})$$

$$\text{Recta proyectada } \overrightarrow{vd_r}(-\frac{18}{22}, \frac{10}{22}, \frac{48}{22}), A_1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) t: \begin{cases} x=-\frac{18}{22}\mu-\frac{1}{2} \\ y=\frac{10}{22}\mu+\frac{1}{2} \\ z=\frac{48}{22}\mu-1 \end{cases}$$

18. Ejercicio

Hallar la proyección ortogonal de la recta $r: \begin{cases} x+y=-1 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$ sobre el plano $\pi: 4x-3y+z+3=0$;

Solución

$$\pi: 4x-3y+z+3=0; \overrightarrow{VN_{\pi}}(4, -3, 1)$$

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda-1 \\ 3\lambda-(-\lambda-1)+2z=0 \end{cases} \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda-1 \\ z=-2\lambda-\frac{1}{2} \end{cases} \text{vd}_s(1, -1, -2) P(0, -1, -\frac{1}{2})$$

$$\text{La ecuación del plano } \pi_1 = \begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z+\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y+1 & z+\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -x-8y-8-3z-\frac{3}{2}+4z+\frac{4}{2}-y-1-6x=-7x-9y+z-\frac{17}{2}=0; 7x+9y-z+\frac{17}{2}=0;$$

$$\text{Recta pedida es la intersección de los dos planos} \begin{cases} 4x-3y+z+3=0 \\ 7x+9y-z+\frac{17}{2}=0 \end{cases} \begin{cases} 4x-3y+z+3=0 \\ 14x+18y-2z+17=0 \end{cases}$$

$$\text{La recta proyectada será} \begin{cases} x=\pi \\ y=-\frac{22}{12}\pi-\frac{23}{12} \\ z=-\frac{114}{12}\pi-\frac{105}{12} \end{cases}$$

$$\text{Intersección entre las dos rectas} \begin{cases} x=\pi \\ y=-\frac{22}{12}\pi-\frac{23}{12} \\ z=-\frac{114}{12}\pi-\frac{105}{12} \end{cases} \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda-1 \\ z=-2\lambda-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda=\pi \\ -\lambda-1=-\frac{22}{12}\pi-\frac{23}{12} \\ -2\lambda-\frac{1}{2}=-\frac{114}{12}\pi-\frac{105}{12} \end{cases} \text{sustituyo} \Rightarrow -\pi-1=-\frac{22}{12}\pi-\frac{23}{12}; -12\pi-12=-22\pi-23; \pi=-\frac{11}{10}$$

$$\text{Para } \pi=-\frac{11}{10} \begin{cases} x=\pi \\ y=-\frac{22}{12}\pi-\frac{23}{12} \\ z=-\frac{114}{12}\pi-\frac{105}{12} \end{cases} \begin{cases} x=-\frac{11}{10} \\ y=-\frac{22}{12} * -\frac{11}{10} - \frac{23}{12} \\ z=-\frac{114}{12} * -\frac{11}{10} - \frac{105}{12} \end{cases} = \begin{cases} x=-\frac{11}{10} \\ y=\frac{120}{120} \\ z=\frac{204}{120} \end{cases} \begin{cases} x=-\frac{11}{10} \\ y=\frac{1}{10} \\ z=\frac{17}{10} \end{cases} \left(-\frac{11}{10}, \frac{1}{10}, \frac{17}{10}\right)$$

6 Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos es $d(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$

19. Ejercicio

Hallar la ecuación del plano mediador del segmento de extremos A(1,3,-1) y B(4,6,0)

Solución

$$d(A, X) = d(B, X)$$

$$d(A, X) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2}$$

$$d(B, X) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z+0)^2}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z+0)^2} \Rightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-4)^2 + (y-6)^2 + (z+0)^2;$$

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 9 - 6y + z^2 + 1 + 2z = x^2 + 16 - 8x + y^2 + 36 - 12y + z^2$$

$$1 - 2x + 9 - 6y + 1 + 2z = +16 - 8x + 36 - 12y;$$

$$1 - 2x + 9 - 6y + 1 + 2z = +16 - 8x + 36 - 12y;$$

$$6x + 6y + 2z - 41 = 0;$$

20. Ejercicio

Hallar el punto del plano $\pi: x + y + z - 1 = 0$; que

equidista de los puntos A(1,-1,2) B(3,1,2) C(1,1,0)

Solución

$$d(A, X) = d(B, X) = d(C, X) \text{ son los puntos de una recta}$$

$$d(A, X) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2}$$

$$d(B, X) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$$

$$d(C, X) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+0)^2}$$

$$d(A, X) = d(B, X), (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2$$

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 + 2y + z^2 + 4 - 4z = x^2 + 9 - 6x + y^2 + 1 - 2y + z^2 + 4 - 4z$$

$$1 - 2x + 1 + 2y + 4 - 4z = +9 - 6x + 1 - 2x + 4 - 4z; 4x + 4y - 8 = 0;$$

$$d(A, X) = d(C, X), (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+0)^2$$

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 + 2y + z^2 + 4 - 4z = x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 - 2y + z^2$$

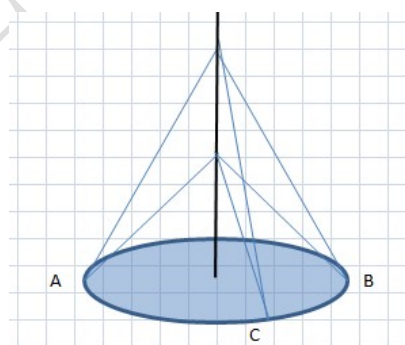
$$1 - 2x + 1 + 2y + 4 - 4z = +1 - 2x + 1 - 2y; 4y - 4z + 4 = 0$$

El punto pedido es la intersección de la recta $\begin{cases} 4x + 4y - 8 = 0 \\ 4y - 4z + 4 = 0 \end{cases}$ con el plano $\pi: x + y + z - 1 = 0$

$$\begin{cases} 4x + 4y - 8 = 0 \\ 4y - 4z + 4 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda + 2 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases}$$

sustituimos en el plano $\pi: x + y + z - 1 = 0 \Rightarrow \lambda - \lambda + 2 - \lambda + 3 - 1 = 0; \lambda = 4;$

$$\text{punto pedido para } \lambda = 4 \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda + 2 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -4 + 2 \\ z = -4 + 3 \end{cases} (4, -2, -1)$$



21. Ejercicio

Calcula los puntos de la recta que pasa por $A(-1,2,3)$ $B(3,5,0)$ y cuya distancia al punto $C(-1,0,1)$ es 12

Solución

$$\text{recta } r \begin{cases} \vec{v}_d = B(3,5,0) - A(-1,2,3) = (4,3,-3) \\ \text{Punto de paso } B(3,5,0) \end{cases} \begin{cases} x = 4\lambda + 3 \\ y = 3\lambda + 5 \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

distancia de un punto de la recta (x, y, z) al punto $C(-1,0,1)$

$$d(A, X) = 12; \sqrt{(x - (-1))^2 + (y - 0)^2 + (z - 1)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + (y)^2 + (z - 1)^2} \text{ sustituyo } x \text{ por su valor}$$

$$\sqrt{((4\lambda + 3) + 1)^2 + (3\lambda + 5)^2 + (-3\lambda - 1)^2} = \sqrt{(4\lambda + 4)^2 + (3\lambda + 5)^2 + (-3\lambda - 1)^2} = 12$$

$$(4\lambda + 4)^2 + (3\lambda + 5)^2 + (-3\lambda - 1)^2 = 144; 16\lambda^2 + 16 + 32\lambda + 9\lambda^2 + 25 + 30\lambda + 9\lambda^2 + 1 + 6\lambda = 144$$

$$34\lambda^2 + 68\lambda - 102 = 0; \lambda = \frac{-68 \pm \sqrt{68^2 - 4 \cdot 34 \cdot (-102)}}{2 \cdot 34} = \frac{-68 \pm \sqrt{4624 + 13872}}{68} = \frac{-68 \pm \sqrt{18496}}{68}$$

$$\lambda = \frac{-68 \pm 136}{68}; \begin{cases} \lambda = \frac{-68 + 136}{68} = 1 \\ \lambda = \frac{-68 - 136}{68} = -3; \end{cases}$$

$$\text{Para } \lambda = 1 \begin{cases} x = 4\lambda + 3 \\ y = 3\lambda + 5 \\ z = -3\lambda \end{cases} \begin{cases} x = 4 + 3 \\ y = 3 + 5 \\ z = -3 \end{cases} \begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \\ z = -3 \end{cases} \text{ Punto } (7, 8, -3)$$

$$\text{Para } \lambda = -3 \begin{cases} x = 4\lambda + 3 \\ y = 3\lambda + 5 \\ z = -3\lambda \end{cases} \begin{cases} x = 4 \cdot (-3) + 3 \\ y = 3 \cdot (-3) + 5 \\ z = -3 \cdot (-3) \end{cases} \begin{cases} x = -9 \\ y = -4 \\ z = 9 \end{cases} \text{ Punto } (-9, -4, 9)$$

7 Distancia entre un punto y un Plano

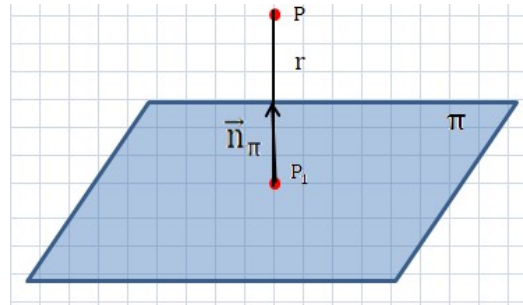
Para calcular la distancia de un punto a un plano, con el vector normal al plano como vector director trazamos una recta que pase por el punto P , donde corte la recta al plano P_1 , hallamos la distancia entre el punto P y P_1

Formula

$$P(x_1, y_1, z_1)$$

$$\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$d(P, \alpha) = \frac{|a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



22. Ejercicio

Hallar la distancia de un punto $P(3,1,-2)$ al plano $\pi: 2x + y - z + 1 = 0$;

Solución

$$\vec{V}_{N_\pi} \text{ del plano } (2, 1, -1); \text{ recta } r \begin{cases} \vec{v}_d = (2, 1, -1) \\ \text{Punto de paso } p(3, 1, -2) \end{cases} r. \begin{cases} x = 2\lambda + 3 \\ y = \lambda + 1 \\ z = -\lambda - 2 \end{cases}$$

interseccion recta y el plano $\pi: 2x + y - z + 1 = 0$ sustituyo

$$2(2\lambda + 3) + (\lambda + 1) - (-\lambda - 2) + 1 = 0; 4\lambda + 6 + \lambda + 1 + \lambda + 2 + 1; 6\lambda = 10; \lambda = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{Punto de intersección} \begin{cases} x = 2\lambda + 3 \\ y = \lambda + 1 \\ z = -\lambda - 2 \end{cases} \text{ sustituyo } \begin{cases} x = 2\left(-\frac{5}{3}\right) + 3 \\ y = -\frac{5}{3} + 1 \\ z = -\left(-\frac{5}{3}\right) - 2 \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$d(P, \pi) = \sqrt{\left(3 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2 + \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2 + \left(-2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2}$$

$$d(P, \pi) = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{25}{9} + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{150}{9}};$$

23. Ejercicio

a) Demuestra que los planos $\eta: 2x + 3y - 4z = 6$ y $\pi: -3x + 4y - 2z = 2$ no son paralelos y calcula sus planos bisectores. b) Calcula el ángulo que forman los planos bisectores.

Solución

a) Demuestra que los planos

$$\eta: 2x + 3y - 4z = 6 \text{ y}$$

$$\pi: -3x + 4y - 2z = 2$$

no son paralelos

y calcula sus planos bisectores.

Los vectores normales de los planos

$$\overrightarrow{VN}_{\eta}(2, 3, -4); \overrightarrow{VN}_{\pi}(-3, 4, -2)$$

no son proporcionales lo que implica que no son paralelos.

Los planos bisectores son el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos planos.

$$\text{Siendo } P(x, y, z) \text{ y } \eta: 2x + 3y - 4z = 6 \quad d(P, \eta) = \frac{|2x + 3y - 4z - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{|2x + 3y - 4z - 6|}{\sqrt{29}}$$

$$\text{Siendo } P(x, y, z) \text{ y } \pi: -3x + 4y - 2z = 2 \quad d(P, \pi) = \frac{|-3x + 4y - 2z + 2|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{|-3x + 4y - 2z + 2|}{\sqrt{29}}$$

$$\frac{|2x + 3y - 4z - 6|}{\sqrt{29}} = \frac{|-3x + 4y - 2z + 2|}{\sqrt{29}}; |2x + 3y - 4z - 6| = |-3x + 4y - 2z + 2|$$

Si las ecuaciones son iguales en valor absoluto es porque $\begin{cases} 2x + 3y - 4z - 6 = -3x + 4y - 2z + 2 \\ 2x + 3y - 4z - 6 = -(-3x + 4y - 2z + 2) \end{cases}$

$$\text{planos bisectores } \begin{cases} 5x - y - 2z - 8 = 0; \\ -x + 7y - 6z - 4 = 0; \end{cases}$$

Los planos bisectores son siempre perpendiculares.

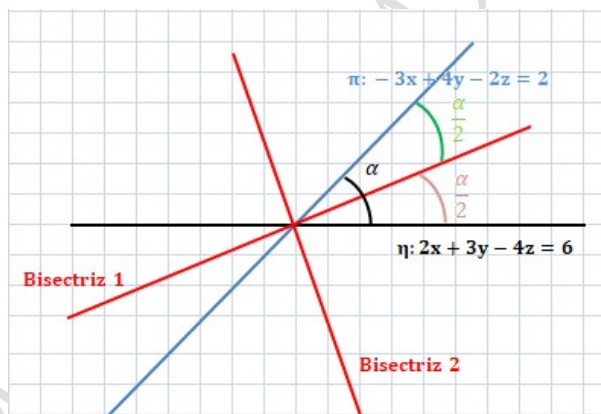
Demostración:

El ángulo que forman los planos es el que forman los vectores normales $\overrightarrow{\text{bisectriz 1}}(5, -1, -2)$

$$\overrightarrow{\text{bisectriz 2}}(-1, 7, -6)$$

$$\cos(\overrightarrow{b1}, \overrightarrow{b2}) = \frac{|(5 \cdot (-1) + (-1) \cdot 7 + (-2) \cdot (-6))|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + (-6)^2}} = \frac{|-5 - 7 + 12|}{\sqrt{25 + 1 + 4} \sqrt{1 + 49 + 36}}$$

$$\cos(\overrightarrow{b1}, \overrightarrow{b2}) = \frac{|0|}{\sqrt{30} \sqrt{86}} = \frac{0}{\sqrt{2580}} = 0; \alpha = 90^\circ$$

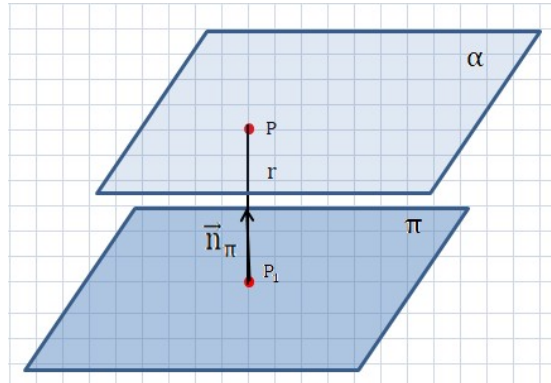


8 Distancia entre dos planos paralelos

Para calcular la distancia entre dos planos

paralelos (π y α), tomamos un punto P cualquiera de uno de ellos. Como los dos tienen el mismo vector normal, tomamos el vector normal como vector director de la recta que pasa por el punto P elegido y donde corte al otro plano tendremos el punto P_1 .

Hallamos la distancia entre el punto P y P_1 y tendremos la distancia entre planos



Formula

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$d(\pi \text{ y } \alpha) = \frac{|\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

24. Ejercicio

Hallar la distancia entre el plano α que pasa por el origen de coordenadas O y los puntos A(1,2,0) y B(-1,1,3) y plano paralelo π que pasa por el punto P(1,1,1)

Solución

$$\overrightarrow{OA} = A(1,2,0) - O(0,0,0) = (1,2,0); \quad \overrightarrow{OB} = B(-1,1,3) - O(0,0,0) = (-1,1,3)$$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6x + z + 2z - 3y = 0; 6x - 3y + 3z = 0;$$

$$2x - y + z = 0; \quad \overrightarrow{VN}_\alpha (2, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{VN}_\alpha \text{ del plano } (2, -1, 1); \text{ recta } r: \begin{cases} \overrightarrow{vd}_s = (2, -1, 1) \\ \text{Punto de paso } P(0,0,0) \end{cases} r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\text{plano paralelo } \pi: 2x - y + z + D = 0, \text{ como pasa por } P(1,1,1) \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 + 1 + D = 0; D = -2$$

$$\pi: 2x - y + z - 2 = 0;$$

$$\text{Punto de corte P de la recta } r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ y el plano } \pi: x - y + z - 2 = 0, \text{ sustituyo}$$

$$2 \cdot 2\lambda - (-\lambda) + \lambda - 2 = 0; 4\lambda + \lambda + \lambda - 2 = 0; 6\lambda = 2; \lambda = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Para } \lambda = \frac{1}{3} \text{ el punto } P_1: \begin{cases} x = 2\frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} P: \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} P(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$d(P, P_1) = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} =$$

$$d(P, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{3};$$

25. Ejercicio

Determina el punto del plano $\pi: x - z = 3$, que esta mas cerca del punto $P(3,1,4)$, asi como la distancia entre el punto P y el plano π

Solución:

$\pi: x - z - 3 = 0$; $\overrightarrow{VN_\pi} = (1, 0, -1)$ Un punto del plano seria (x, y, z)

la recta r perpendicular al plano $\begin{cases} \overrightarrow{vd_s} = (1, 0, -1) \\ \text{Punto de paso } P(3, 1, 4) \end{cases}$ $r: \begin{cases} x = \lambda + 3 \\ y = 1 \\ z = -\lambda + 4 \end{cases}$

punto de interseccion de la recta $r: \begin{cases} x = \lambda + 3 \\ y = 1 \\ z = -\lambda + 4 \end{cases}$ con el plano $\pi: x - z - 3 = 0$; sustituyo

$$x - z - 3 = 0 \Rightarrow \lambda + 3 - (-\lambda + 4) - 3 = 0; 2\lambda - 4 = 0; \lambda = \frac{4}{2}; \lambda = 2;$$

punto de interseccion $\lambda = 2$ $\begin{cases} x = \lambda + 3 \\ y = 1 \\ z = -\lambda + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3 \\ y = 1 \\ z = -2 + 4 \end{cases} ; \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} ; P_1(5, 1, 2)$

$$d(P, P_1) = \sqrt{(3-5)^2 + (1-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

26. Ejercicio

Calcula los puntos de la recta $r: \begin{cases} x - z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ que equidistan de los planos

$\alpha: 2x + y - 2z = 0$; $\pi: x - 2y + 2z - 1 = 0$;

Solución:

$r: \begin{cases} x - z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda + 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$

$\alpha: 2x + y - 2z = 0$, $\overrightarrow{VN_\alpha} = (2, 1, -2)$;

distancia del punto de $r \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda + 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$ al plano $\alpha: 2x + y - 2z = 0$, $\overrightarrow{VN_\alpha} = (2, 1, -2)$;

$$d(P, \alpha) = \frac{|a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow \frac{|2\lambda + 1(-\lambda + 2) - 2(\lambda - 1) + 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{-\lambda + 4}{\sqrt{9}} = \frac{4 - \lambda}{3}$$

$\pi: x - 2y + 2z - 1 = 0$, $\overrightarrow{VN_\pi} = (1, -1, 2)$

$$d(P, \pi) = \frac{|a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow \frac{|\lambda - 2(-\lambda + 2) + 2(\lambda - 1) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5\lambda - 7}{\sqrt{6}} = \frac{5\lambda - 7}{\sqrt{6}}$$

El punto de la recta equidistante de los dos planos será $\frac{4 - \lambda}{3} = \frac{5\lambda - 7}{\sqrt{6}}$; $4 - \lambda = 5\lambda - 7$; $\lambda = \frac{11}{6}$

$$\text{para } \lambda = \frac{11}{6} \text{ el punto de la recta será } \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda + 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{6} \\ y = -\frac{11}{6} + 2 \\ z = \frac{11}{6} - 1 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{11}{6} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases} P(\frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6})$$

27. Ejercicio

Determina la posicion relativa de los planos $\alpha: 3x + 2y - z - 4 = 0$ y

$\pi: 6x + 4y - 2z - 1 = 0$; y su distancia

Solución:

$\begin{cases} \alpha: 3x + 2y - z - 4 = 0; \overrightarrow{VN_\alpha}(3, 2, -1) \\ \pi: 6x + 4y - 2z - 1 = 0; \overrightarrow{VN_\pi}(6, 4, -2) \end{cases}$ $\overrightarrow{VN_\alpha}$ y $\overrightarrow{VN_\pi}$ son proporcionales (planos paralelos)

para aplicar la formula hago que los dos planos tengan el mismo vector Normal

$$\begin{cases} \alpha: 3x + 2y - z - 4 = 0; \text{ multiplico por } 2 \Rightarrow \alpha: 6x + 4y - 2z - 8 = 0, \overline{VN}_\alpha(6, 4, -2) \\ \pi: 6x + 4y - 2z - 1 = 0; \overline{VN}_\pi(6, 4, -2) \end{cases}$$

$$d(\pi \vee \alpha) = \frac{|d_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; d(\pi \vee \alpha) = \frac{|-8 - (-1)|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{7}{\sqrt{56}}$$

28. Ejercicio

Determina la posición relativa de los planos $\alpha: \begin{cases} x = 1 + 3t + s \\ y = -2t \\ z = t - s \end{cases}$ y $\pi: x + 2y + z + 3 = 0$; y su distancia

Solución:

$$\alpha: \begin{cases} x = 1 + 3t + s \\ y = -2t \\ z = t - s \end{cases}; \overline{Vd}_1(3, -2, 1); \overline{Vd}_2(1, 0, -1); \text{Pde paso } (1, 0, 0)$$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2x - 2 + y + 2z + 3y = 0;$$

$$\begin{cases} \alpha: 2x + 4y + 2z - 2 = 0; \alpha: x + 2y + z - 1; \overline{VN}_\alpha(1, 2, 1) \\ \pi: x + 2y + z + 3 = 0; \overline{VN}_\pi(1, 2, 1) \end{cases} \quad \overline{VN}_\alpha = \overline{VN}_\pi \text{ los planos son paralelos}$$

$$d(\pi \vee \alpha) = \frac{|d_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; d(\pi \vee \alpha) = \frac{|-1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

9 Distancia de un punto a una recta

Para hallar la distancia $d(P, P_1)$, de un punto P a

una recta r , tomamos un punto Q cualquiera

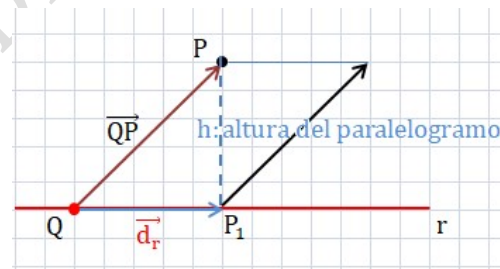
de la recta y con el vector $\overline{d}_r$ de la recta y el

vector $\overline{QP}$ formamos un paralelogramo.

El modulo del producto vectorial $|\overline{QP} \times \overline{d}_r|$ nos da

el area del paralelogramo. Por otro lado sabemos

que area paralelogramo = base por altura. (Area = $|\overline{d}_r| \cdot h$); Igualamos $|\overline{QP} \times \overline{d}_r| = |\overline{d}_r| \cdot h$;



$$h = (d(P, P_1)) = \frac{|\overline{QP} \times \overline{d}_r|}{|\overline{d}_r|}$$

29. Ejercicio

Calcular la distancia del punto $P(5, -1, 6)$ a la recta $\frac{-x+1}{2} = -y = z - 5$

Solución:

$$\frac{-x+1}{2} = -y = z - 5; \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases} \begin{cases} \overline{d}_r(-2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, 5) \end{cases}$$

$$\overline{P_rP} = P(5, -1, 6) - P_r(1, 0, 5) = (4, -1, 1)$$

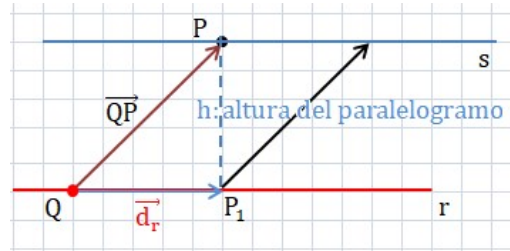
$$|\overline{QP} \times \overline{d}_r| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = |-i - 2j - 4k - 2k + i - 4j| = -6j - 6k; (0, -6, -6)$$

$$h = (d(P, P_1)) = \frac{|\overline{QP} \times \overline{d}_r|}{|\overline{d}_r|}; h = \frac{\sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-6)^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}} = \sqrt{12} u; h = (d(P, P_1)) = \sqrt{12} u$$

10 Distancia entre dos rectas paralelas

Para hallar la distancia $d(P, P_1)$, entre dos rectas paralelas, el estudio es el mismo que si calculamos distancia de un punto a una recta.

Tomamos un punto Q cualquiera de la recta r, su vector $\vec{d}_r$ y un punto P de la otra recta s



$$h = d(P, P_1) = \frac{|\vec{QP} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|}$$

30. Ejercicio

Determina la posición relativa y la distancia entre las siguientes rectas $r \begin{cases} x - y + 3z = 2; \\ 2y - z = -1; \end{cases}$ $s \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$

Solución

$$r \begin{cases} x - y + 3z = 2; \\ 2y - z = -1; \end{cases} \begin{cases} x = t; \\ -y + 3z = 2 - t; \\ 2y - z = -1; \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}t \\ z = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}t \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_r \left(1, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right) \\ P_r \left(0, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) \end{cases}$$

$$s \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_s (-5, 1, 2); \\ P_s (3, -1, 4) \end{cases}$$

Comprobamos si las rectas son paralelas (vectores directores proporcionales)

$$\vec{d}_r \left(1, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right) \text{ y } \vec{d}_s (-5, 1, 2); \vec{d}_r \left(1, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right) * (-5) = (-5, 1, 2) \text{ son rectas paralelas o coincidentes}$$

Comprobamos si hay puntos comunes (tomo un punto de t para $\lambda = 0$) $s \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases} (3, -1, 4)$

$$\text{Sustituyo } (3, -1, 4) \text{ en } r \begin{cases} x = t; \\ y = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}t \\ z = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = t; \\ -1 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}t \\ 4 = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}t \end{cases} \begin{cases} 3 = t; \\ t = 4; \\ t = -\frac{17}{2} \end{cases} \text{ el punto no pertenece a } r$$

como las rectas son paralelas, hallamos la distancia entre dos rectas paralelas

$$\vec{PQ} = P_s(3, -1, 4) - P_r \left(0, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) = \left(3, -\frac{4}{5}, \frac{17}{5}\right)$$

$$|\vec{PQ} \times \vec{d}_r| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -\frac{4}{5} & \frac{17}{5} \\ 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} = \left| -\frac{17}{25}i - \frac{6}{5}j - \frac{4}{5}k + \frac{3}{5}k - \frac{8}{25}i - \frac{17}{5}j \right| = -i + \frac{23}{5}j + \frac{1}{5}k; \left(1, \frac{23}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

$$h = d(P, P_1) = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|}; h = \frac{\sqrt{1^2 + \left(\frac{23}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2}}{\sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\frac{25}{25} + \frac{529}{25} + \frac{1}{25}}}{\sqrt{\frac{30}{25}}} = \frac{\sqrt{\frac{555}{25}}}{\sqrt{\frac{30}{25}}} = \sqrt{\frac{37}{2}} u$$

$$h = d(P, P_1) = \sqrt{\frac{37}{2}} u$$

11 Distancia entre dos rectas que se cruzan

11.1 Posición relativa de dos rectas

Dos rectas en el espacio pueden ser :

- Paralelas: sus vectores directores son proporcionales y no tienen puntos comunes
- Coincidentes : sus vectores directores son proporcionales y tienen puntos comunes
- Secantes, se cortan : son coplanarias, Utilizamos el producto mixto de tres vectores
- Se cruzan , no son coplanarias, Utilizamos el producto mixto de tres vectores

31. Ejercicio

Determina la posición relativa de las siguientes rectas $r \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 5 - 7\lambda \end{cases}$; $s \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$

Solución

$$r \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 5 - 7\lambda \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_r (1, -2, -7) \\ P_r(1, 1, 5) \end{cases}$$

$$s \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = 1 \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_s (3, -2, 0) \\ P_s(-4, 5, 1) \end{cases}$$

$$\vec{d}_r (1, -2, -7) \vec{d}_s (3, -2, 0) \text{ no son paralelas ni coincidentes } \frac{1}{3} \neq \frac{-2}{-2} \neq \frac{-7}{0}$$

comprobamos si son secantes o se cruzan producto mixto $[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{d}_{PQ}]$

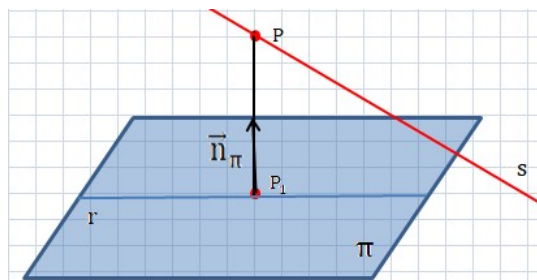
$\vec{d}_{PQ}$ Es el vector que une dos puntos cualquiera de las rectas $= P_r(1, 1, 5) - P_s(-4, 5, 1) = (5, -4, 4)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 84 - 70 + 24 = 30 \text{ dado que } \neq 0; \text{ no son coplanarios por lo tanto se cruzan}$$

11.2 Método plano paralelo

Para calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan en el espacio, definimos un plano π , que contenga a la recta r y sea perpendicular a la recta s .

Una vez construido solo tendremos que hallar la distancia de un punto P cualquiera de la recta s al plano rectaplano π



32. Ejercicio

Hallar la distancia entre las rectas $r \begin{cases} x + 2y - z = 1; \\ x - y = 1; \end{cases}$ $s \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$

Solución

$$r \begin{cases} x + 2y - z = 1; \\ x - y = 1; \end{cases} \begin{cases} x = t; \\ y = -1 + t \\ z = -3 + 3t; \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_r (1, 1, 3) \\ P_1(0, -1, -3) \end{cases}$$

$$s \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_s (1, 2, -3) \\ P(1, 0, -1) \end{cases}$$

Definimos plano π que contiene a r:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{d}_r(1,1,3) \\ p_1(0,-1,-3) \\ \vec{d}_s(1,2,-3) \end{array} \right\} \text{ como el plano } \pi \text{ y la recta } s \text{ son paralelos, el } \vec{d}_s \text{ sera un vector de } \pi$$

$$\pi \left\{ \begin{array}{l} \vec{d}_r(1,1,3) \\ p_1(0,-1,-3) \\ \vec{d}_s(1,2,-3) \end{array} \right\}; \left| \begin{array}{ccc} x-0 & y-(-1) & z-(-3) \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} x & y+1 & z+3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{array} \right|$$

$$-3x + 3y + 3 + 2z + 6 - z - 3 - 6x + 3y + 3 = -9x + 6y + z + 9 = 0;$$

$$d(P, \alpha) = \frac{|a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, (P, \pi) = \frac{|-9 * 1 + 6 * 0 + 1 * (-1) + 9|}{\sqrt{(-9)^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{118}} u$$

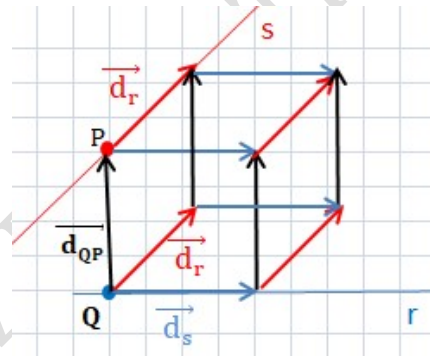
11.3 Método producto mixto

Cuando tenemos dos rectas que se cruzan en el espacio siempre tendremos un plano que contenga la recta r y sea paralelo a la recta s. y un plano que contenga a la recta s y sea paralelo a la recta r.

Sobre estos planos construir un paralelepipedo cuyos

lados son $\vec{d}_r$ $\vec{d}_s$ $\vec{d}_{QP}$ La distancia entre las rectas

r y s es el modulo de $\vec{d}_{QP} = h$



Volumen del paralelepipedo = producto mixto de tres vectores

$$\vec{d}_r * \vec{d}_s * \vec{d}_{QP} = \text{base} * h$$

$$\text{Distancia}(r, s) = h = \frac{|\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{d}_{QP}|}{\text{area de la base}} = \frac{|\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{d}_{QP}|}{|\vec{d}_r * \vec{d}_s|};$$

$$h = d(P, P_1) = \frac{|\vec{QP}, \vec{d}_r, \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

33. Ejercicio

Determinar la posición de las rectas $r \begin{cases} x + 3z - 2 = 0; \\ y - 4z = 0; \end{cases} s \begin{cases} x - 2z - 1 = 0; \\ y + z - 3 = 0; \end{cases}$ y distancia

Solución

$$r \begin{cases} x + 3z - 2 = 0; \\ y - 4z = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 2 - 3t; \\ y = 4t; \\ z = t; \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_r(-3, 4, 1) \\ P_r(2, 0, 0) \end{cases}$$

$$s \begin{cases} x - 2z - 1 = 0; \\ y + z - 3 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 1 + 2\lambda; \\ y = 3 - \lambda; \\ z = \lambda; \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_s(2, -1, 1) \\ P_s(1, 3, 0) \end{cases}$$

r y s no son paralelas pues sus vectores directores no proporcionales.

$$\vec{d}_{QP} = P_s((1, 3, 0) - P_r(2, 0, 0) = (-1, 3, 0)$$

$$\text{Volumen del paralelepipedo, (producto mixto)} \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 6 - 1 + 9 = 10$$

$$\text{area de la base} = |\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4i + 3k + 2j - 8k + 3j + i = 5i + 5j - 5k; (5, 5, -5)$$

$$h = d(P, P_1) = \frac{|\vec{QP}, \vec{d}_r, \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{10}{\sqrt{(5)^2 + (5)^2 + (-5)^2}} = \frac{10}{\sqrt{75}} u$$

34. Ejercicio

Determinar la posición de las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{1}$; $s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ y distancia

Solución

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{1}; \begin{cases} \vec{d}_r(2, -1, 1) \\ P_r(1, -3, 0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \begin{cases} \vec{d}_s(1, -1, 2) \\ P_s(0, 1, 3) \end{cases}$$

Posición relativa $\vec{d}_r(2, -1, 1)$ no es proporcional a $\vec{d}_s(1, -1, 2)$, por lo que las rectas serán secantes o se cruzan

$$\overrightarrow{P_r P_s} = P_s(0, 1, 3) - P_r(1, -3, 0) = (-1, 4, 3)$$

$QP, \vec{d}_r, \vec{d}_s$ comprobamos si los vectores son coplanarios

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 4 - 1 - 16 + 3 = -14$$

las rectas r y s se cruzan.

$$|QP, \vec{d}_r, \vec{d}_s| = 14$$

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ i & j & k \end{vmatrix} = -2k - 2i + j + i + k - 4j = -i - 3j - k = 0; (-1, -3, -1)$$

$$|\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 9 + 1}$$

$$h = d(P, P_1) = \frac{|QP, \vec{d}_r, \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{14}{\sqrt{11}} u$$

11.4 Perpendicularidad común a dos rectas

Consiste en hallar una recta t perpendicular a la recta r y la recta s .

Para hallar la recta t tenemos que determinar los puntos P y Q .

Ejemplo

Obtener la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas.

Determinar la posición de las rectas

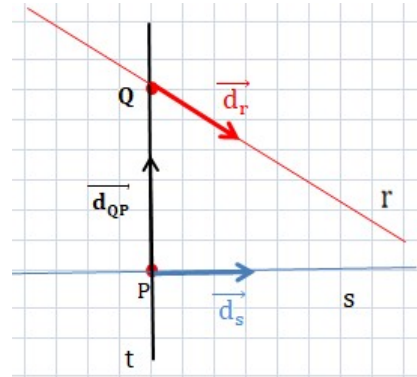
$$r: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

Solución

Se escoge un punto Q genérico de $r: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}; r: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda; \vec{d}_r(0, 1, 0) \end{cases}, Q(0, m, 0)$

se elige un punto P genérico de la recta $s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}; s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3; \vec{d}_s(0, 0, 1) \end{cases}, P(0, 3, n);$

* Hallamos el vector $\overrightarrow{PQ} = (0, m, 0) - (0, 3, n) = (0, m - 3, -n);$



Si $\overrightarrow{PQ}$ ha de ser perpendicular a r y s se ha de cumplir ue su producto escalar = 0; $\begin{cases} \overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{d_r} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{d_s} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (0, m-3, -n) * (0, 1, 0) = 0; \\ (0, m-3, -n) * (0, 0, 1) = 0; \end{cases} \begin{cases} 0 + m - 3 + 0 = m - 3 = 0; m = 3; \\ 0 + 0 - n = 0; n = 0; \end{cases}$$

Tendremos que el punto $Q(0, m, 0) = (0, 3, 0)$ y el punto $P(0, 3, n) = (0, 3, 0)$

El vector director de la recta perpendicular a r y s sera $\overrightarrow{PQ} = (0, 3, 0) - (0, 3, 0) = (0, 0, 0)$;

La recta perpendicular comun a r y s sera $\overrightarrow{PQ}(0, 0, 0)$ y un punto de la misma sera P y Q

$$\text{Recta t perpendicular comun } \overrightarrow{PQ}(0, 0, 0); Q(0, 3, 0) \text{ t } \begin{cases} x = 0 \\ y = 3; \\ z = 0 \end{cases}$$

**** Otra forma de hallar el vector $\overrightarrow{PQ}$. Si $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$,**

$$\text{será igual a su producto vectorial } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s}; = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i; \overrightarrow{PQ} = (1, 0, 0)$$

Por definicion la recta t ha de ser perpendicular a las rectas r y s

Si $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a r se cumple $\overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{d_r}$ producto escalar = 0;

$$\overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{d_r} = (0, \lambda - 3, -t) * (0, 1, 0) = (0 + \lambda - 3 - 0 = 0; \lambda - 3 = 0 \text{ se cumple } \lambda = 3;$$

Si $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a s se cumple $\overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{d_s}$ producto escalar = 0;

$$\overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{d_s} = (0, \lambda - 3, -t) * (0, 0, 1) = (-t) = 0; t = 0;$$

$$Q = \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda; \text{ para } \lambda = 3; Q(0, 3, 0); \\ z = 0 \end{cases}; P = \begin{cases} x = 0 \\ y = 3; \text{ para } t = 0; P(0, 3, 0) \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{Ecuacion de la recta t perpendicular comun a r y s } \begin{cases} \overrightarrow{d_r} = (1, 0, 0) \\ P_r(0, 3, 0) \end{cases}; t = \begin{cases} x = \mu \\ y = 3; \\ z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio

Demuestra que las rectas r: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ s $\begin{cases} x - ay = 0 \\ z = 5; \end{cases}$ se cruzan independientemente del valor de a .

Calcular la recta perpendicular comun a r y s.

Solución

$$r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} \overrightarrow{d_r} = (1, 0, 0) \\ \text{Punto generico } P_r(m, 0, 0) \end{cases}; s \begin{cases} x - ay = 0 \\ z = 5; \end{cases} \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{a} \\ z = 5 \end{cases} \begin{cases} \overrightarrow{d_s} = (1, \frac{1}{a}, 0) \\ \text{Punto generico } Q_s(n, \frac{n}{a}, 5) \end{cases}$$

$$\text{Hallamos el vector } \overrightarrow{PQ} = Q_s(n, \frac{n}{a}, 5) - P_r(m, 0, 0) = (n - m, \frac{n}{a}, 5)$$

$$\text{Comprobamos si } \overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s} \text{ y } \overrightarrow{PQ} \text{ son coplanarios } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{a} & 0 \\ n - m & \frac{n}{a} & 5 \end{vmatrix} = \frac{5}{a} = 0; \text{ cualquier valor de } a \neq 0 \text{ las rectas se cruzan}$$

Recta perpendicular comun:

$$\text{Tenemos el vector } \overrightarrow{PQ} (n - m, \frac{n}{a}, 5);$$

Si $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a r se cumple $\overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{d_r}$ producto escalar = 0;

$$\overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{PQ} = (n - m, \frac{n}{a}, 5) (1, 0, 0) = n - m + 0 + 0 = 0; n = m;$$

$$\overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{PQ} (n - m, \frac{n}{a}, 5) * \overrightarrow{d_s} (1, \frac{1}{a}, 0) = 0; n - m + \frac{n}{a^2} + 0 = 0; a^2 n - a^2 m + n = 0; \text{ sustituyo } n = m;$$

$$a^2m - a^2m + m = 0; m = 0;$$

$$\text{Punto generico } P_r(0,0,0) = (0,0,0)$$

$$\text{Punto generico } Q_s(0,0,5)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (0,0,5); \text{ y Punto generico } P_r(0,0,0) \text{ Recta } t = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 5\mu \end{cases}$$

35. Ejercicio

$$\text{Hallar la recta perpendicular comun a las rectas } r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ y } s: \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 5 + t; \\ z = 7; \end{cases}$$

Solución

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \overrightarrow{d_r} = (0,1,1) \quad \text{Punto generico } P_r(1, 5 + m, m)$$

$$s: \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 5 + t; \\ z = 7; \end{cases} \quad \overrightarrow{d_s} = (3,1,0) \quad \text{Punto generico } Q_s(7 + 3n, 5 + n, 7)$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q_s(7 + 3n, 5 + n, 7) - P_r(1, 5 + m, m) = ((7 + 3n) - 1, (5 + n) - (5 + m), 7 - m)$$

$$\overrightarrow{PQ} = ((6 + 3n), (n - m), (7 - m))$$

Si $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a r se cumple $\overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{d_r}$ producto escalar = 0;

$$\overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{d_r} = ((6 + 3n), (n - m), (7 - m))(0,1,1) = 0 + n - m + 7 - m = 0; n - 2m + 7 = 0;$$

$$\overrightarrow{PQ} * \overrightarrow{d_s} = ((6 + 3n), (n - m), (7 - m))(3,1,0) = 18 + 9n + n - m + 0 = 0; 10n - m + 18 = 0;$$

$$\begin{cases} n - 2m + 7 = 0; \\ 10n - m + 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n - 2m + 7 = 0; \\ 20n - 2m + 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19n + 29 = 0; \\ n = -\frac{29}{19}; \end{cases} \begin{cases} 2m = -\frac{29}{19} + 7 = \frac{104}{19}; \\ m = \frac{104}{38} \end{cases}$$

Sustituimos m y n; $\overrightarrow{PQ} = ((6 + 3n), (n - m), (7 - m))$;

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\left(6 + 3\left(-\frac{29}{19}\right) \right), \left(\left(-\frac{29}{19}\right) - \frac{104}{38} \right), \left(7 - \frac{104}{38} \right) \right) = \left(\frac{27}{19}, -\frac{162}{38}, \frac{162}{38} \right) = \left(\frac{54}{38}, -\frac{162}{38}, \frac{162}{38} \right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (1, -3, 3)$$

$$\text{Otra forma } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3j - 3k - i = -3i + 3j - 3k; \overrightarrow{PQ} = (1, -3, 3)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (1, -3, 3) \\ P_r(1, 5 + \frac{104}{38}, \frac{104}{38}) \end{cases} \text{ perpendicular comun t } \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \frac{294}{38} - 3\mu; \\ z = \frac{104}{38} + 3\mu; \end{cases}$$

12 Áreas de paralelogramos y triángulos

El area del paralelogramos es igual

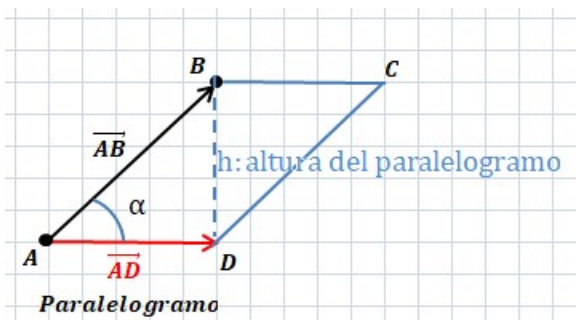
a base x altura. Area = B * h

El producto vectorial

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| * |\overrightarrow{AD}| \sin \alpha$$

Dado que $|\overrightarrow{AB}| \sin \alpha = h$

$$\text{El Area del paralelogramo} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$$



$$\text{El Area del triangulo ABD} = \frac{1}{2} \text{ area del paralelogramos ABCD} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$$

36. Ejercicio

Hallar el area del paralelogramo de vertices A(1,0,2), B(2, -1,0), C(1,2,1) y D(0,3,3)

Solución

$$\overrightarrow{AB} = B(2, -1,0) - A(1,0,2) = (1, -1, -2)$$

$$\overrightarrow{AD} = D(0,3,3) - A(1,0,2) = (-1,3,1)$$

$$\text{El Area del paralelogramo} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| =$$

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -i + 3k + 2j - k - j + 6i = 5i + j + 2k;$$

$$|\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{30} u^2$$

37. Ejercicio

Hallar el area del triangulo de vertices A(0,0,0), B(-2,1,1) y C(-2, -2, -2)

Solución

$$\overrightarrow{AB} = B(-2,1,1) - A(0,0,0) = (-2,1,1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C(-2, -2, -2) - A(0,0,0) = (-2, -2, -2)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2i + 4k - 2j + 2k - 4j + 2i = -6j + 6k;$$

$$\text{area del triangulo} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 36} = \frac{1}{2} \sqrt{2 * 36} = 3\sqrt{2} u^2$$

38. Ejercicio

Hallar el area del paralelogramo de vertices A(6,1,2), B(4,2,2), C(4,6,2) y D(6,8,2)

Solución

$$\overrightarrow{AB} = B(4,2,2) - A(6,1,2) = (-2,1,0)$$

$$\overrightarrow{AD} = D(6,8,2) - A(6,1,2) = (0,7,0)$$

$$\text{El Area del paralelogramo} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| =$$

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0i - 14k + 0j - 0k + 0j - 0i = -14k;$$

$$\text{area del paralelogramo} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-14)^2} = 14u^2$$

39. Ejercicio

Determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(0,2,0) y B(0,0,2) y corta al eje X en el punto C, tal que el área del triángulo ABC es igual a 4

Solución

El punto C al estar sobre el eje X, será C(a, 0,0)

$$\text{Área del triángulo ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\vec{AB} = B(0,0,2) - A(0,2,0) = (0, -2, 2)$$

$$\vec{AC} = C(a, 0, 0) - A(0, 2, 0) = (a, -2, 0)$$

$$\vec{AB} * \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 2 \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2aj + 2ak + 4i;$$

$$\text{área del triángulo} = \frac{1}{2} |\vec{AB} * \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 a^2 + 2^2 a^2 + 4^2} = 4; \frac{1}{4} (4a^2 + 4a^2 + 16) = 16; 8a^2 + 16 = 64;$$

$$8a^2 + 16 = 64; a^2 = 6; a = \pm\sqrt{6}$$

El punto C al estar sobre el eje X, será C(a, 0,0); sustituyo $\Rightarrow C(\pm\sqrt{6}, 0, 0)$

$$\vec{AB} = B(0,0,2) - A(0,2,0) = (0, -2, 2)$$

$$\vec{AC} = C(\pm\sqrt{6}, 0, 0) - A(0, 2, 0) = (\pm\sqrt{6}, -2, 0)$$

$$\text{Ecuación del plano} \begin{cases} \vec{AB} = B(0,0,2) - A(0,2,0) = (0, -2, 2) \\ \vec{AC} = C(\pm\sqrt{6}, 0, 0) - A(0, 2, 0) = (\pm\sqrt{6}, -2, 0) \end{cases} \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-2 \\ 0 & -2 & 2 \\ \pm\sqrt{6} & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 0 & -2 & 2 \\ \pm\sqrt{6} & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2(\pm\sqrt{6})y + 2(\pm\sqrt{6})z - 4(\pm\sqrt{6}) + 4x = \pm 2\sqrt{6}y \pm 2\sqrt{6}z - 4(\pm\sqrt{6}) + 4x = 0$$

$$\text{Ecuación del plano} = 4x \pm 2\sqrt{6}(y + z - 2) = 0; \begin{cases} 4x + 2\sqrt{6}(y + z - 2) = 0 \\ 4x - 2\sqrt{6}(y + z - 2) = 0 \end{cases}$$

40. Ejercicio

Sean los puntos A(1,2,1) B(2,3,1) C(-1,4,3) D(0,5,3)

a) Demuestra que los puntos están en el mismo plano.

Da la ecuación del plano

b) Verifica que el polígono que tiene como vértices estos

cuatro es un rectángulo

c) Calcula el área de ese rectángulo.

Solución

a) Demuestra que los puntos están en el mismo plano. Da la ecuación del plano

$$\vec{AB} = B(2,3,1) - A(1,2,1) = (1,1,0)$$

$$\vec{AD} = D(0,5,3) - A(1,2,1) = (-1,3,2)$$

$$\vec{BC} = C(-1,4,3) - B(2,3,1) = (-3,1,2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 + 2 - 2 = 0; \text{los puntos son coplanarios}$$

$$\text{vector director } \vec{AB} \text{ y } \vec{AD} \text{ y punto } C(-1,4,3) \begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z-3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2x + 2 + 3z - 9 + z - 3 - 2y + 8 = 2x - 2y + 4z - 2 = 0;$$

$$27(31)$$



Plano $2x - 2y + 4z - 2 = 0$

b) Verifica que el polígono que tiene como vértices estos cuatro es un rectángulo

$$\overrightarrow{AB} = B(2,3,1) - A(1,2,1) = (1,1,0); d = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AD} = D(0,5,3) - A(1,2,1) = (-1,3,2); d = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{BC} = C(-1,4,3) - B(2,3,1) = (-3,1,2); d = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{CD} = D(0,5,3) - C(-1,4,3) = (1,-1,0); d = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Es un paralelogramo

c) Calcula el área de ese rectángulo

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2i + 3k + k - 2j = 2i + 4k - 2j = 0;$$

$$\text{área} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24}u^2$$

$$\text{área} = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{2} \times \sqrt{14} = \sqrt{28} \text{ no es un rectángulo. será un rombo}$$

41. Ejercicio

a) Determinar el plano η que pasa por los puntos $A(0,0,3)$, $B(2,0,-3)$, $C(2,-2,0)$

b) Calcula el área del triángulo que forman los puntos en que el plano η corta a los ejes de coordenadas.

Solución

a) Determinar el plano η que pasa por los puntos $A(0,0,3)$, $B(2,0,-3)$, $C(2,-2,0)$

$$\overrightarrow{AB} = B(2,0,-3) - A(0,0,3) = (2,0,-6)$$

$$\overrightarrow{AC} = C(2,-2,0) - A(0,0,3) = (2,-2,-3)$$

$$\text{Ecuación del plano} \begin{cases} \overrightarrow{AB} = B(2,0,-3) - A(0,0,3) = (2,0,-6) \\ \overrightarrow{AC} = C(2,-2,0) - A(0,0,3) = (2,-2,-3) \end{cases} \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-3 \\ 2 & 0 & -6 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-3 \\ 2 & 0 & -6 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -12y - 4z + 12 + 6y - 12x = 0; -12x - 6y - 4z + 12 = 0; 12x - 6y + 4z - 12 = 0$$

$$\text{Ecuación del plano } \eta: 6x - 3y + 2z - 6 = 0$$

b) Calcula el área del triángulo que forman los puntos en que el plano η corta a los ejes de coordenadas.

$$\text{Puntos de corte de los ejes } \eta: 6x - 3y + 2z - 6 = 0; \begin{cases} D \text{ corte } x; y = z = 0; 6x - 6 = 0; x = 1; \\ E \text{ corte } y; x = z = 0; 2y - 6 = 0; y = 2; \\ F \text{ corte } z; x = y = 0; 2z - 6 = 0; z = 3; \end{cases}$$

$$\overrightarrow{DE} = E(0,2,0) - D(1,0,0) = (-1,2,0)$$

$$\overrightarrow{DF} = F(0,0,3) - D(1,0,0) = (-1,0,3)$$

$$\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DF} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6i + 2k + 3j;$$

$$\text{área del triángulo} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DF}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{1}{2} \sqrt{49} = \frac{7}{2} u^2$$

42. Ejercicio

Sean $A(-3,4,0)$, $B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$ los tres vertices del triangulo

- Calcula la ecuacion del plano que contiene al triangulo
- Calcula el coseno de cada uno de los vertices del triangulo.
- Calcula el area del triangulo.

Solución

- Calcula la ecuacion del plano que contiene al triangulo

$$\overrightarrow{AB} = B(3,6,3) - A(-3,4,0) = (6,2,3)$$

$$\overrightarrow{AC} = C(-1,2,1) - A(-3,4,0) = (2,-2,1)$$

$$\text{Ecuacion del plano} \begin{cases} \overrightarrow{AB} = B(3,6,3) - A(-3,4,0) = (6,2,3) \\ \overrightarrow{AC} = C(-1,2,1) - A(-3,4,0) = (2,-2,1) \end{cases} \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2x + 2 - 12z + 12 + 6y - 12 - 4z + 4 - 6y + 12 + 6x + 6 = 0; 8x - 16z + 24 = 0; x - 2z + 3 = 0$$

- Calcula el coseno de cada uno de los vertices del triangulo.

$$\overrightarrow{AB} = B(3,6,3) - A(-3,4,0) = (6,2,3)$$

$$\overrightarrow{AC} = C(-1,2,1) - A(-3,4,0) = (2,-2,1)$$

$$\overrightarrow{BC} = C(-1,2,1) - B(3,6,3) = (-4,-4,-2)$$

$$\overrightarrow{CA} = A(-3,4,0) - C(-1,2,1) = (-2,2,-1)$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{|12 - 4 + 3|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|11|}{\sqrt{49} \sqrt{9}} = \frac{11}{21}$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{|-24 - 8 - 6|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-38|}{\sqrt{49} \sqrt{36}} = \frac{38}{42}$$

$$\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{CA}|} = \frac{|8 - 8 + 2|}{\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{36} \sqrt{9}} = \frac{2}{18}$$

- Calcula el area del triangulo.

$$\overrightarrow{AB} = B(3,6,3) - A(-3,4,0) = (6,2,3)$$

$$\overrightarrow{AC} = C(-1,2,1) - A(-3,4,0) = (2,-2,1)$$

$$\text{area del triangulo} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2i + 6j - 12k - 4k - 6j + 6i = 8i - 16k;$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{8^2 + (-16)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{320} = \frac{8}{2} \sqrt{5} u^2 = 4 \sqrt{5} u^2;$$

43. Ejercicio

Dados los puntos $A(1,5,-2)$, $B(4,0,1)$ y $C(-3,2,0)$

los tres vertices del triangulo

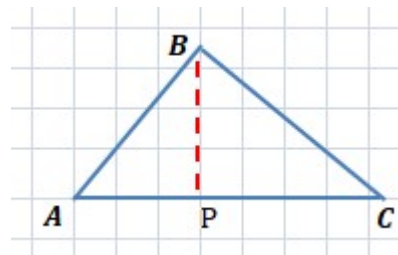
- Prueba que los vertices son de un triangulo
- Halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyeccion sobre el lado AC

Solución

$$\overrightarrow{AB} = B(4,0,1) - A(1,5,-2) = (3,-5,3)$$

$$\overrightarrow{AC} = C(-3,2,0) - A(1,5,-2) = (-4,-3,2)$$

$$\overrightarrow{BC} = C(-3,2,0) - B(4,0,1) = (-7,2,-1). \text{ Los vectores no son proporcionales } \Rightarrow \text{ no paralelos}$$



ver si son coplanarios $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \\ -7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 + 70 - 24 - 63 + 20 - 12 = 0$; son coplanarios.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -5 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -10i - 12j - 9k - 20k + 9i - 6j = i - 18j - 29k =$$

$$\text{area} = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-18)^2 + (-29)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 324 + 841} = \frac{1}{2} \sqrt{1166} u^2$$

$$\text{base } \overrightarrow{AC} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{29} u$$

$$\text{area del triangulo} = \frac{\text{base} \cdot h}{2}; \frac{1}{2} \sqrt{1166} = \frac{\sqrt{29} \cdot h}{2}; h(\text{BP}) = \frac{1}{2} \sqrt{1166} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{1166}}{\sqrt{29}} u$$

13 Volúmenes de paralelepípedos y tetraedros

Volumen del paralelepipedo = Area de la base x altura

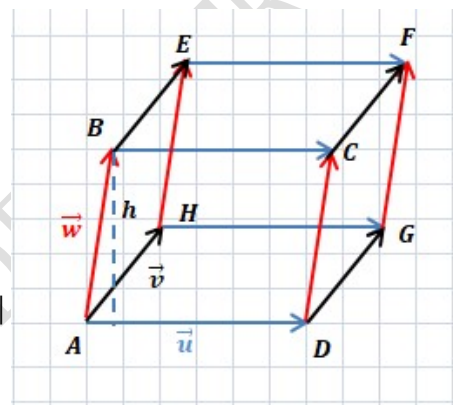
Area de la base = area paralelogramo AHGD = $\vec{u} \times \vec{v}$

producto vectorial = $|\overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AD}|$

$h = \vec{w} \cdot \cos \widehat{AB, h}$; Coseno del angulo formado por $\vec{w}$ y h

Volumen del paralelepipedo = $|\overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AD}| \cdot |\vec{w} \cos \widehat{AB, h}|$

Volumen del paralelepipedo = producto mixto $|\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}|$



Tetraedro

Volumen del tetraedro = $\frac{1}{3}$ Area de la base x altura

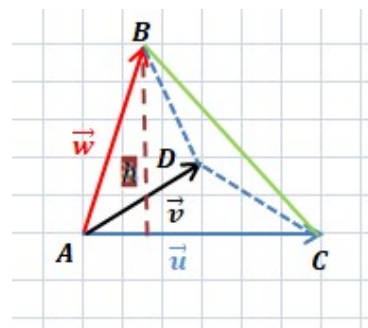
Area de la base = $\frac{1}{2} \text{ADC} = \vec{u} \times \vec{v}$

producto vectorial = $\frac{1}{2} |\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}|$

$h = \vec{w} \cdot \cos \widehat{AB, h}$; Coseno del angulo formado por $\vec{w}$ y h

Volumen del tetraedro = $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} |\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}| \right) \cdot |\vec{w} \cos \widehat{AB, h}|$

Volumen del tetraedro = $\frac{1}{6}$ producto mixto = $\frac{1}{6} |\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}|$



44. Ejercicio

Suponiendo los vertices de un tetraedro son A(1,1,-2), B(0,2,1), C(3,2,-2) y D(3,0,-6). Calcular el volumen.

Solución

$$\overrightarrow{AB} = B(0,2,1) - A(1,1,-2) = (-1,1,3)$$

$$\overrightarrow{AC} = C(3,2,-2) - A(1,1,-2) = (2,1,0)$$

$$\overrightarrow{AD} = D(3,0,-6) - A(1,1,-2) = (2,-1,-4)$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 6 + 8 = 0 u^3;$$

Volumen del tetraedro = $0 u^3 \Rightarrow$ los puntos son coplanarios

45. Ejercicio

los planos $\mu: x + y + z = 4$, $\pi: x - z = 0$; y $\beta: x + y = 3$ tienen un unico punto en comun

a) Determinar dicho punto

b) Hallar las rectas en que cada uno de estos planos corta al plano $x = 0$;

c) Volumen de tetraedro limitado por estos planos y el plano $x = 0$.

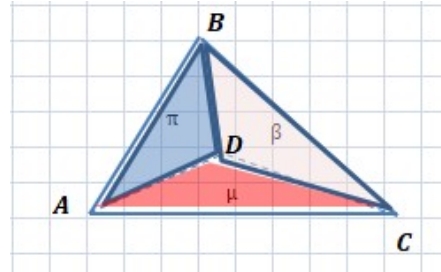
Solución

a) Determinar dicho punto

$$\begin{cases} \mu: x + y + z = 4 \\ \pi: x - z = 0 \\ \beta: x + y = 3 \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - z = 0; \\ x + y = 3; \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 4 \\ z = x; \\ y = 3 - x; \end{cases}$$

sustituyo $x + (3 - x) + x = 4$;

$$x + 3 - x + x = 4; x = 1; \begin{cases} x = 1 \\ z = 1; \\ y = 2; \end{cases} (1,2,1)$$



b) Hallar las rectas en que cada uno de estos planos corta al plano $x = 0$; plano $y + z = 0$

$$\begin{cases} \mu: x + y + z = 4 \\ \pi: x - z = 0 \\ \beta: x + y = 3 \end{cases} \text{ interseccion } \begin{cases} \mu: y + z = 4 \\ x = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

$$\text{interseccion } \begin{cases} \pi: x - z = 0 \\ x = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = \beta; \\ z = 0 \end{cases} \text{ interseccion } \begin{cases} \beta: x + y = 3 \\ x = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$$

c) Volumen de tetraedro limitado por estos planos y el plano $x = 0$.

$$A \text{ interseccion } \begin{cases} \mu: x + y + z = 4 \\ \pi: x - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ sustituyo } \begin{cases} y = 4 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{cases} A(0,4,0)$$

$$B \text{ interseccion } \begin{cases} \pi: x - z = 0 \\ \beta: x + y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \text{ sustituyo } \begin{cases} y = 3 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{cases} B(0,3,0)$$

$$C \text{ interseccion } \begin{cases} \mu: x + y + z = 4 \\ \beta: x + y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \text{ sustituyo } \begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \\ x = 0 \end{cases} C(0,3,1)$$

$$D \text{ interseccion } \begin{cases} \mu: x + y + z = 4 \\ \pi: x - z = 0 \\ \beta: x + y = 3 \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - z = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \text{ sustituyo } \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \\ x = 1 \end{cases} D(1,2,1)$$

$$\overrightarrow{AB} = B(0,3,0) - A(0,4,0) = (0, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C(0,3,1) - A(0,4,0) = (0, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = D(1,2,1) - A(0,4,0) = (1, -2, 1)$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-1| = \frac{1}{6} u^3;$$