

# Lugares geométricos en el espacio

## Contenido

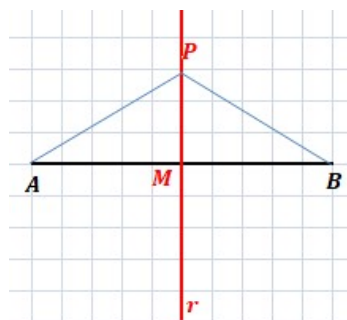
|     |                                                                   |    |
|-----|-------------------------------------------------------------------|----|
| 1   | LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL PLANO.....                              | 2  |
| 1.1 | MEDIATRIZ.....                                                    | 2  |
| 1.2 | CIRCUNFERENCIA.....                                               | 2  |
| 1.3 | ELIPSE 2                                                          |    |
| 1.4 | HIPÉRBOLA.....                                                    | 3  |
| 1.5 | PARÁBOLA.....                                                     | 3  |
| 2   | ECUACION DE UNA CURVA EN EL PLANO .....                           | 9  |
| 3   | CURVAS EN COORDENADAS POLARES.....                                | 11 |
| 3.1 | CONVERSION DE COORDENADAS CARTESIANAS A POLARES.....              | 11 |
| 4   | LUGARES GEOMETRICOS EN EL ESPACIO.....                            | 14 |
| 4.1 | PLANO MEDIADOR DE UN SEGMENTO.....                                | 14 |
| 4.2 | PLANO BISECTOR.....                                               | 14 |
| 5   | ECUACIONES DE SUPERFICIES Y CURVAS EN EL ESPACIO.....             | 16 |
| 6   | SUPERFICIE ESFÉRICA.....                                          | 17 |
| 7   | POSICION RELATIVA DE UNA ESFERA CON UNA RECTA Y CON UN PLANO..... | 20 |

# 1 Lugares geométricos en el plano

Lugar geométrico en el plano es el formado por el conjunto de puntos que cumplen una propiedad.

## 1.1 Mediatriz

Lugar geométrico en el plano es el conjunto de puntos P que equidistan de los extremos A y B de un segmento.



$$d(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

$$d(A, P) = |\overline{AP}| = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}$$

$$d(B, P) = |\overline{BP}| = \sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2}$$

$$\text{Mediatriz } d(A, P) = |\overline{AP}| = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} = d(B, P) = |\overline{BP}| = \sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2}$$

## 1.2 Circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2; \quad x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0;$$

## 1.3 Elipse

Es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de su distancia a dos puntos fijos llamados focos es constante.

$C(x_0, y_0)$  Coordenadas centro de la elipse

**a** Semieje mayor de la elipse

**b** Semieje menor de la elipse

**c** semi distancia focal

**Focos:** son los puntos fijos F y F'. La suma de las distancias desde un punto cualquiera de la elipse hasta cada foco es constante para todos los puntos de la elipse.

**Relaciones de la elipse**

Si tomo el punto A se ha de cumplir  $AF + AF' = 2a$

Si tomo el punto B se ha de cumplir  $BF + BF' = 2a$ ;  $BF = a$ ;

$$a^2 = b^2 + c^2$$

**Excentricidad de la elipse**

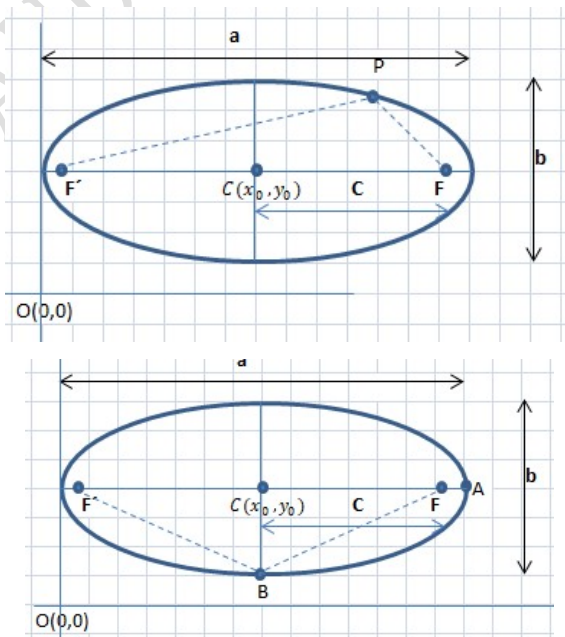
$e = \frac{c}{a}$ ; Cuanto mas pequeño es, mas se parece a una circunferencia

**Ecuacion general de la elipse**

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1;$$

**Ecuacion reducida de la elipse**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$



## 1.4 Hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante en valor absoluto.

$C(x_0, y_0)$  Coordenadas centro de la hipérbola

$a$  Semieje real

$b$  Semieje imaginario

$c$  semi distancia focal

**Focos:** son los puntos fijos  $F$  y  $F'$  La diferencia de las distancias desde un punto cualquiera de la hipérbola hasta cada foco es constante.

### Relaciones de la hipérbola

Si tomo el punto  $A$  se ha de cumplir  $|AF - AF'| = 2a$

Si tomo el punto  $B$ , al ser una diagonal de rectángulo, se ha de cumplir  $AB = c$ ;

$$c^2 = a^2 + b^2$$

### Excentricidad de la hipérbola

$e = \frac{c}{a}$ ; Cuanto mas proximo a 1 sea

el valor mas cerradas seran

las ramas

### Ecuacion general de la hipérbola

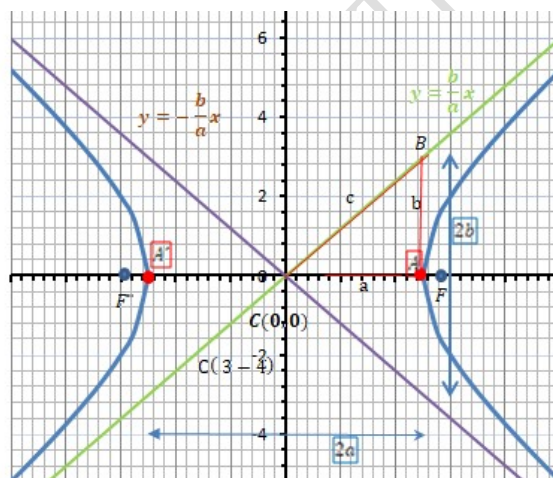
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1;$$

### Ecuacion reducida de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

### Asintotas de la hipérbola

$$r: y = \frac{b}{a}x; s: y = -\frac{b}{a}x;$$



## 1.5 Parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco  $F$  y una recta fija llamada directriz  $d$

$D(F, P) = d(P, d)$  distancia del foco al punto = distancia del punto a la recta

$2p$ : distancia ente el foco y la directriz.

*Eje de simetria* es la recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco

*Vertice:* Punto de interseccion de la parabola con su eje .

*Radio vector:* Es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con el foco.

**Ecuacion reducida:**  $x^2 = 4py$

**Ecuacion general de la Parábola**

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

**Ecuacion reducida:**  $x^2 = 4py$

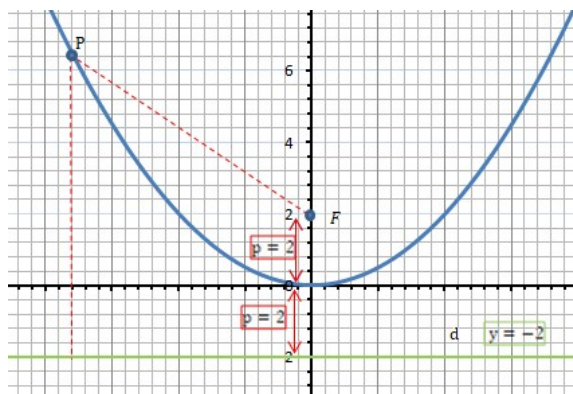
### Posiciones de la parábola

$x^2 = 4py$  ramas hacia arriba

$x^2 = -4py$  ramas hacia abajo

$y^2 = 4px$  ramas hacia la derecha

$y^2 = -4px$  ramas hacia a izquierda



## 1. Ejercicio

Hallar la mediatriz del segmento A(1,4) y B(5,0)

Solución

Mediatriz : será una recta  $\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2}$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2}; (x-1)^2 + (y-4)^2 = (x-5)^2 + (y-0)^2$$

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 16 - 8y = x^2 + 25 - 10x + y^2;$$

$$\text{mediatriz } 8x - 8y - 8 = 0;$$

## 2. Ejercicio

Calcular las ecuaciones de los distintos lugares geometricos e identificarlos.

a) Puntos del plano que equidistan de A(3, -1) y B (-5,3)

b) Puntos del plano que equidistan de las rectas r:  $x - y = 0$  y s:  $2x + y = 0$ ;

c) Puntos del plano tales que la distancia al eje de abscisas es el doble que la distancia al origen

d) Puntos del plano cuya distancia al eje de coordenadas es la mitad de su distancia a A(0,2)

Solución

a) Puntos del plano que equidistan de A(3, -1) y B (-5,3)

Mediatriz : será una recta  $\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2}$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-(-1))^2} = \sqrt{(x-(-5))^2 + (y-3)^2}; (x-3)^2 + (y+1)^2 = (x+5)^2 + (y-3)^2$$

$$x^2 + 9 - 6x + y^2 + 1 + 2y = x^2 + 25 + 10x + y^2 + 9 - 6y,$$

$$\text{mediatriz } 16x - 8y + 24 = 0; 2x - y + 3 = 0$$

b) Puntos del plano que equidistan de las rectas

r:  $x - y = 0$  y s:  $2x + y = 0$ ;

$$d(P, r) = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

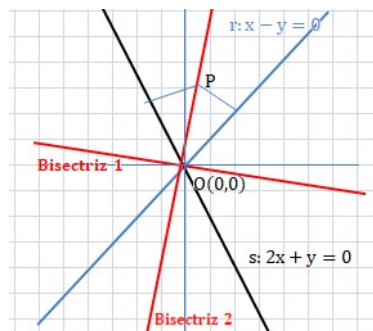
$$d(P, s) = \frac{A'x + B'y + C}{\sqrt{A'^2 + B'^2}};$$

$$\text{Bisectriz } d(P, r) = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = d(P, s) = \frac{A'x + B'y + C}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

$$\frac{x - y}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2x + y}{\sqrt{2^2 + 1^2}}; \frac{x - y}{\sqrt{2}} = \frac{2x + y}{\sqrt{5}}; \sqrt{5}(x - y) = \sqrt{2}(2x + y); \sqrt{5}x - \sqrt{5}y = 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}y$$

$$(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})x - (\sqrt{5} + \sqrt{2})y = 0$$

$$\text{Bisectriz 1 } (\sqrt{5} - 2\sqrt{2})x - (\sqrt{5} + \sqrt{2})y = 0; \text{ Bisectriz 2 } (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})x - (\sqrt{5} - \sqrt{2})y = 0$$



c) Puntos del plano tales que la distancia al eje de abscisas es el doble que la distancia al origen

Eje de abscisas:  $y = 0$ ; Origen de coordenadas O(0,0)

$$d(P, \text{eje X}) = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}; d(P, \text{Eje X}) = \frac{x + B \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{x}{\sqrt{1}} = x;$$

$$d(P, O) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{lugar geometrico } x = 2\sqrt{x^2 + y^2}; x^2 = 4(x^2 + y^2); x^2 = 4x^2 + 4y^2; 3x^2 + 4y^2 = 0;$$

$$3x^2 + 4y^2 = 0; y^2 = -\frac{3x^2}{4}; y = \sqrt{-\frac{3x^2}{4}} \text{ No existe ningun punto}$$

d) Puntos del plano cuya distancia al origen de coordenadas es la mitad de su distancia a A(0,2)

distancia al origen de coordenadas

$$d(P, O) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{distancia a } A(0,2); d(P, A) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$$

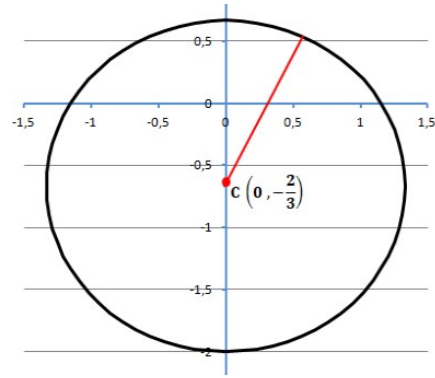
$$= \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}; 4x^2 + 4y^2$$

$$= x^2 + (y-2)^2; 4x^2 + 4y^2 = x^2 + y^2 + 4 - 4y$$

$$x^2 + 3y^2 + 4y - 4 = 0; x^2 + y^2 + \frac{4}{3}y - \frac{4}{3} = 0;$$

$$\text{circunferencia centro } \left(0, -\frac{2}{3}\right); r = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$



### 3. Ejercicio

Calcular las ecuaciones de las siguientes conicas, identificalas, indicando sus elementos mas importantes

- Puntos del plano que distan 3 unidades del punto C(2,2)
- Puntos del plano cuya diferencia de distancia a F(0,4) y F'(0,-4) es 2;
- Puntos del plano que equidistan de la recta y = 2 y del punto (0,-2).
- Puntos del plano cuya suma de distancia a F(3,0) y F'(-3,0) es 10

Solución

- Puntos del plano que distan 3 unidades del punto P(2,2)

$$d(P, C) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = 3; x^2 + y^2 + 4 - 2y = 9; x^2 + y^2 - 2y - 5 = 9$$

Circunferencia; de Centro C(2,2) y radio 3;

- Puntos del plano cuya diferencia distancia a F(0,4) y F'(0,-4) es 2;

$$d(P, F) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 16 - 8y}$$

$$d(P, F') = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-4))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 16 + 8y}$$

$$d(P, F) - d(P, F') = \sqrt{x^2 + y^2 + 16 - 8y} - \sqrt{x^2 + y^2 + 16 + 8y} = 2;$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 16 - 8y} = 2 \pm \sqrt{x^2 + y^2 + 16 + 8y} \text{ elevo los dos terminos al cuadrado}$$

$$x^2 + y^2 + 16 - 8y = 4 + x^2 + y^2 + 16 + 8y \pm 4\sqrt{x^2 + y^2 + 16 + 8y}$$

$$-16y - 4 = \pm 4\sqrt{x^2 + y^2 + 16 + 8y}; 256y^2 + 16 + 128y = 16(x^2 + y^2 + 16 + 8y);$$

$$256y^2 + 16 + 128y = 16x^2 + 16y^2 + 256 + 128y; 240y^2 - 16x^2 - 240 = 0;$$

$$\frac{240y^2}{240} - \frac{16x^2}{240} - \frac{240}{240} = 0; \frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{15} = 1;$$

$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{15} = 1 \text{ Hiperbola: centro } (0,0) \text{ } a = \sqrt{15}, b = 1;$$

- Puntos del plano que equidistan de la recta y = 2 y del punto A (0,-2).

$$d(P, r) = \frac{y-2}{\sqrt{1}} = y-2;$$

$$d(P, A) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-2))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4 + 4y}$$

$$d(P, r) = d(P, A); y-2 = \sqrt{x^2 + y^2 + 4 + 4y}$$

$$y^2 + 4 - 4y = x^2 + y^2 + 4 + 4y; \Rightarrow x^2 + 8y = 0; y = -\frac{x^2}{8}$$

$$y = -\frac{x^2}{8} \text{ Parabola; } F(0, -2) \text{ directriz } y = 2;$$

d) Puntos del plano cuya suma de distancia a  $F(3,0)$  y  $F'(-3,0)$  es 10

$$d(P, F) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + 9 - 6x + y^2}$$

$$d(P, F') = \sqrt{(x-(-3))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + 9 + 6x + y^2}$$

$$d(P, F) + d(P, F') = 10; \sqrt{x^2 + 9 - 6x + y^2} + \sqrt{x^2 + 9 + 6x + y^2} = 10$$

$$\sqrt{x^2 + 9 - 6x + y^2} = 10 - \sqrt{x^2 + 9 + 6x + y^2}; \text{ elevamos al cuadrado los dos terminos}$$

$$x^2 + 9 - 6x + y^2 = 100 + x^2 + 9 + 6x + y^2 - 20\sqrt{x^2 + 9 + 6x + y^2};$$

$$-12x = 100 - 20\sqrt{x^2 + 9 + 6x + y^2}; -12x - 100 = -20\sqrt{x^2 + 9 + 6x + y^2};$$

$$12x + 100 = 20\sqrt{x^2 + 9 + 6x + y^2} \text{ elevamos al cuadrado}$$

$$144x^2 + 10000 + 2400x = 400(x^2 + 9 + 6x + y^2);$$

$$144x^2 + 10000 + 2400x = 400x^2 + 3600 + 2400x + 400y^2; 256x^2 - 6400 + 400y^2 = 0$$

$$\frac{256x^2}{6400} + \frac{400y^2}{6400} = \frac{6400}{6400}; \text{ Elipse centrada en el origen de coordenadas } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1;$$

#### 4. Ejercicio

Halla la ecuación de las bisectrices de las rectas  $r: x - 2y = 0$ ;  $s: x + 3y = 0$

Representalas y comprueba que son perpendiculares.

Solución

Bisectriz es el conjunto de puntos del plano que equidistan de las dos rectas

$$d(P, r) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

$$d(P, r) = \frac{|x - 2y|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|x - 2y|}{\sqrt{5}}; d(P, s) = \frac{|x + 3y|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|x + 3y|}{\sqrt{10}};$$

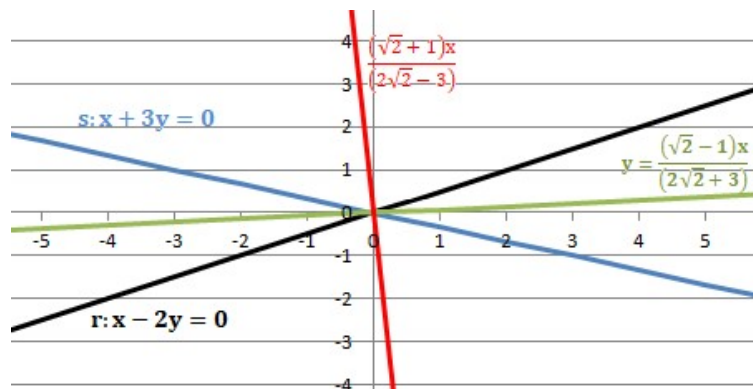
$$d(P, r) = d(P, s); \frac{|x - 2y|}{\sqrt{5}} = \frac{|x + 3y|}{\sqrt{10}}; \frac{\sqrt{10}|x - 2y|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}|x + 3y|}{\sqrt{10}}; \frac{\sqrt{10}|x - 2y|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}|x + 3y|}{\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{2}|x - 2y| = |x + 3y|; |\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y| = |x + 3y|$$

$$|\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y| = |x + 3y| \text{ del valor absoluto, tendremos las ecuaciones lineales; } \begin{cases} \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = x + 3y \\ \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = -(x + 3y) \end{cases}$$

$$\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = x + 3y; \sqrt{2}x - x = 2\sqrt{2}y + 3y; (\sqrt{2} - 1)x = (2\sqrt{2} + 3)y; y = \frac{(\sqrt{2} - 1)x}{(2\sqrt{2} + 3)}$$

$$\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = -(x + 3y); \sqrt{2}x + x = 2\sqrt{2}y - 3y; (\sqrt{2} + 1)x = (2\sqrt{2} - 3)y; y = \frac{(\sqrt{2} + 1)x}{(2\sqrt{2} - 3)}$$



Representalas y comprueba que son perpendiculares.

Las rectas son perpendiculares si se cumple  $m_s$  (pendiente de  $s$ ) =  $-\frac{1}{m_r}$  (pendiente de  $r$ )

$$m_s * m_r = -1; \frac{(\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2}+3)} * \frac{(\sqrt{2}+1)}{(2\sqrt{2}-3)} = \frac{(2-1)}{(8*2-9)} = \frac{1}{-1} = -1;$$

## 5. Ejercicio

Halla el lugar geometrico de los puntos del plano que equidistan de la bisectriz del primero y tercer cuadrante y del punto C (0,4)

Solución

Bisectriz del primer cuadrante:  $y - x = 0$ ; Pendiente = 1

El lugar geométrico corresponde a una parábola de foco C(0,4) y recta directriz

Hallo una recta  $s$ : perpendicular a la bisectriz por el punto C(0,4) dicha recta será el eje de la parábola.

Como  $s$  es perpendicular a la bisectriz su pendiente  $m = -1$ ;  $s: (y - 4) = m(x - 0)$ ;  $y - 4 = (-1)x$ ;

$$y = -x + 4;$$

Hallamos el punto A de cruce entre la bisectriz

$$y \text{ s, } \begin{cases} y = x \\ y = -x + 4 \end{cases}; x = -x + 4;$$

$$2x = 4; x = 2; y = 2; A(2,2)$$

Hallo el punto medio del segmento AF;

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{2+4}{2}\right); V(1,3)$$

Trazo la recta  $r$  paralela a  $s$  por el punto M(1,3)

$$(y - 3) = m(x - 1) \text{ siendo } m = 1;$$

$$y - 3 = 1(x - 1)$$

$$y - 3 = x - 1; y = x + 2$$

Hallo el lugar geometrico que equidistan de la bisectriz y el punto C(0,4)

$$d(P, r) = \frac{|y - x|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|y - x|}{\sqrt{2}};$$

$$d(P, C) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 16 - 8y};$$

$$\frac{|y - x|}{\sqrt{2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + 16 - 8y}; (y - x)^2 = \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2 + 16 - 8y};$$

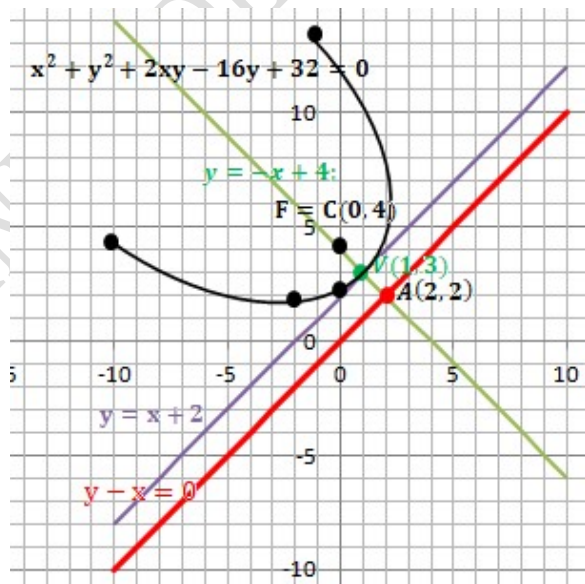
$$x^2 + y^2 - 2xy = 2(x^2 + y^2 + 16 - 8y); x^2 + y^2 + 2xy - 16y - 2xy + 32 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - 16y + 32 = 0; \text{ parabola inclinada pues tiene termino } xy$$

$$\text{Para } x = 0; x^2 + y^2 + 2xy - 16y + 32 = 0; \Rightarrow y^2 - 16y + 32 = 0; y = \frac{16 \pm 11,314}{2} \begin{cases} y = 13,657 \\ y = 2,343 \end{cases}$$

$$\text{Para } x = -2; x^2 + y^2 + 2xy - 16y + 32 = 0; \Rightarrow y^2 - 20y + 36 = 0; y = \frac{20 \pm 16}{2} \begin{cases} y = 18 \\ y = 2, \end{cases}$$

$$\text{Para } x = -10; x^2 + y^2 + 2xy - 16y + 32 = 0; \Rightarrow y^2 - 36y + 132 = 0; y = \frac{36 \pm 27,7}{2} \begin{cases} y = 31,86 \\ y = 4,15, \end{cases}$$



## 6. Ejercicio

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancia los ejes de coordenadas coincida con el cuadrado de su distancia al origen

Solución

ejes de coordenadas  $r: x = 0; s: y = 0$ ;

Distancia de  $P(x, y)$  a la (recta  $x = 0$ ) es igual a  $y$ ;

Distancia de  $P(x, y)$  a la recta  $y = 0$  es igual a  $x$ ;

Distancia de  $P(x, y)$  al origen  $(0, 0)$

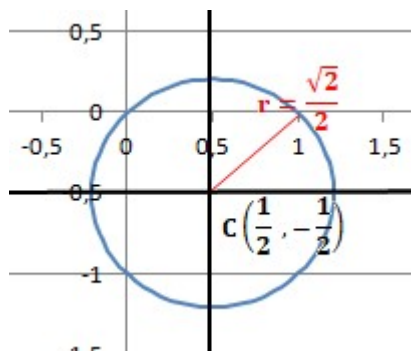
$$= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x + y = (\sqrt{x^2 + y^2})^2;$$

$$x + y = x^2 + y^2; x^2 + y^2 - x - y = 0$$

$$x^2 + y^2 - x - y = 0; C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right);$$

$$r = \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$



## 7. Ejercicio

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano tales que su mínima distancia a la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio 2 sea igual a una unidad

Solución

El lugar geométrico serán circunferencias

concentricas de radio  $r = 2 \pm 1$

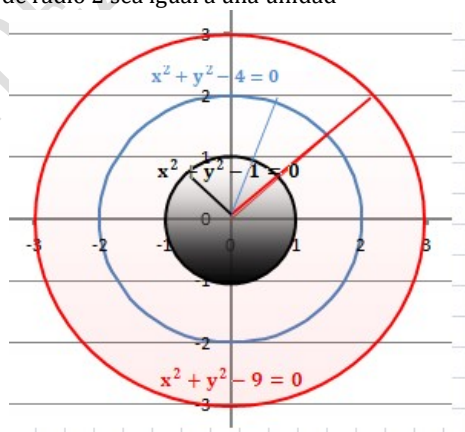
Distancia de  $P(x, y)$  al origen  $(0, 0)$ ;

$$d(P, C) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 2; \sqrt{x^2 + y^2} = 2;$$

$$x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 - 4 = 0;$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3; x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 - 9 = 0;$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1; x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 - 1 = 0;$$



## 8. Ejercicio

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano

cuya suma de distancia al punto  $A(1, 0)$

es el triple de su distancia a la recta  $x = 2$ .

Solución

$$d(A, r) = \frac{|x-2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|x-2|}{1};$$

$$d(P, A) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x + y^2};$$

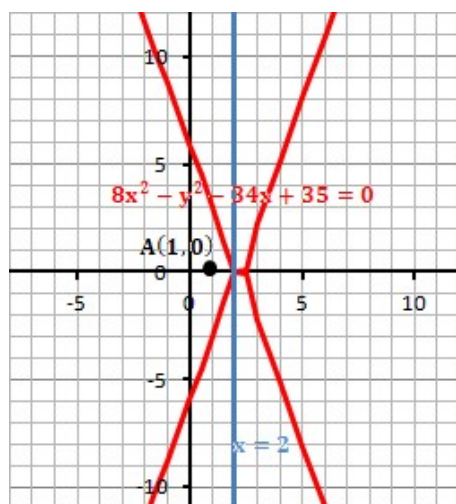
Lugar geométrico  $3d(A, r) = d(P, A)$ ;

$$3 \frac{|x-2|}{1} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x + y^2};$$

$$3 * |x-2| = \sqrt{x^2 + 1 - 2x + y^2}$$

$$9(x^2 + 4 - 4x) = x^2 + 1 - 2x + y^2;$$

$$9x^2 + 36 - 36x = x^2 + 1 - 2x + y^2; 8x^2 - y^2 - 34x + 35 = 0$$



## 2 Ecuacion de una curva en el plano

### Ecuaciones parametricas

Parametrizar una curva es hallar los valores de  $x$  e  $y$  en funci3n de una tercera variable  $t$  (*parámetro*)

ecuacion explicita será  $y = f(x)$

Ecuacion parametrica  $\begin{cases} y = f(t) \\ x = g(t) \end{cases}$

### 9. Ejercicio

Escribe la ecuacion parametrica de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio  $r$ ;

Soluci3n

$$\begin{cases} x = a + r \cos(t) \\ y = b + r \sin(t) \end{cases}$$

### 10. Ejercicio

Comprueba que unas posibles ecuaciones parametricas para la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;

puede ser  $\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases}$ ;

Soluci3n

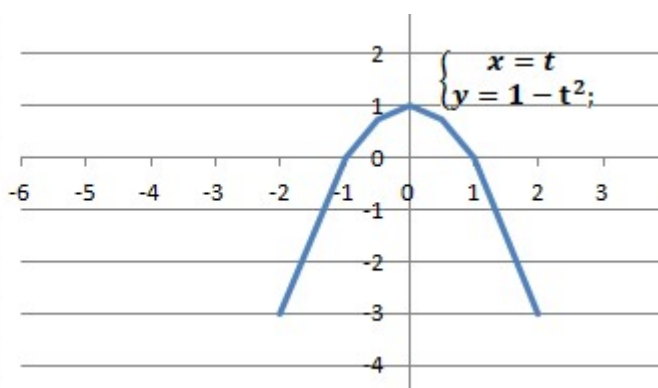
Sustituimos  $(x, y)$  por su valor  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 = \frac{(a \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \sin t)^2}{b^2} = \frac{a^2 (\cos t)^2}{a^2} + \frac{b^2 (\sin t)^2}{b^2} = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$  ; se cumple;

### 11. Ejercicio

Para la curva de ecuaciones parametricas  $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$ ; Completa la tabla y dibuja de forma aproximada su grafica

Soluci3n

| t    | x    | y    |
|------|------|------|
| -2   | -2   | -3   |
| -1   | -1   | 0    |
| -0,5 | -0,5 | 0,75 |
| 0    | 0    | 1    |
| 0,5  | 0,5  | 0,75 |
| 1    | 1    | 0    |
| 2    | 2    | -3   |



## 12. Ejercicio

Escribe la ecuación implícita y explícita de las curvas cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$a) \begin{cases} x = \frac{2}{t} \\ y = \frac{1}{2} + 2t; \end{cases} \quad b) \begin{cases} x = t + t^3 \\ y = 1 + t^2 \end{cases}$$

Solución

$$a) \begin{cases} x = \frac{2}{t} \\ y = \frac{1}{2} + 2t; \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{2}{x} \\ t = \frac{y}{2} - \frac{1}{4}; \end{cases}; \quad \frac{2}{x} = \frac{y}{2} - \frac{1}{4}; \quad \frac{y}{2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{4};$$

explícita  $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{2}$ ; implícita  $y - \frac{4}{x} - \frac{1}{2} = 0$ ;

$$b) \begin{cases} x = t + t^3 \\ y = 1 + t^2; \end{cases} \begin{cases} \text{despejo } t \\ \sqrt{y-1} = t \end{cases}; \begin{cases} \text{despejo } t \\ \sqrt{y-1} = t \end{cases} \text{ sustituyo en } x = t + t^3; x = \sqrt{y-1} + (\sqrt{y-1})^3$$

$$x = \sqrt{y-1} + (y-1)\sqrt{y-1} = \sqrt{y-1}(1-y-1) = \sqrt{y-1}(-y) = -y\sqrt{y-1}$$

$$x = -y\sqrt{y-1}; \text{ otra forma elevando al cuadrado } \Rightarrow x^2 = y^2(y-1); x^2 = y^3 - y^2;$$

Implícita  $y^3 - y^2 - x^2 = 0$ ;

## 13. Ejercicio

Escribe las ecuaciones paramétricas de las siguientes curvas

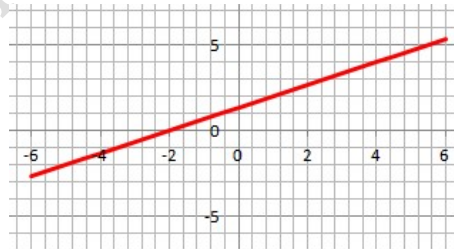
a)  $2x - 3y + 4 = 0$ ; b)  $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$ ; c)  $x + y - xy = 0$ ;

Solución

a)  $2x - 3y + 4 = 0$ ;

$$\begin{cases} x = t; \\ 2t + 4 = 3y; \end{cases} \begin{cases} x = t; \\ y = \frac{2t+4}{3}; \end{cases}$$

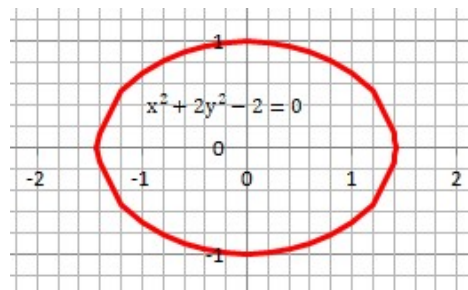
DANDO VALORES A X Es una recta



b)  $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$ ;  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

$$\begin{cases} x = t; \\ t^2 + 2y^2 - 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = t; \\ y = \sqrt{\frac{-t^2 + 2}{2}} \end{cases}$$

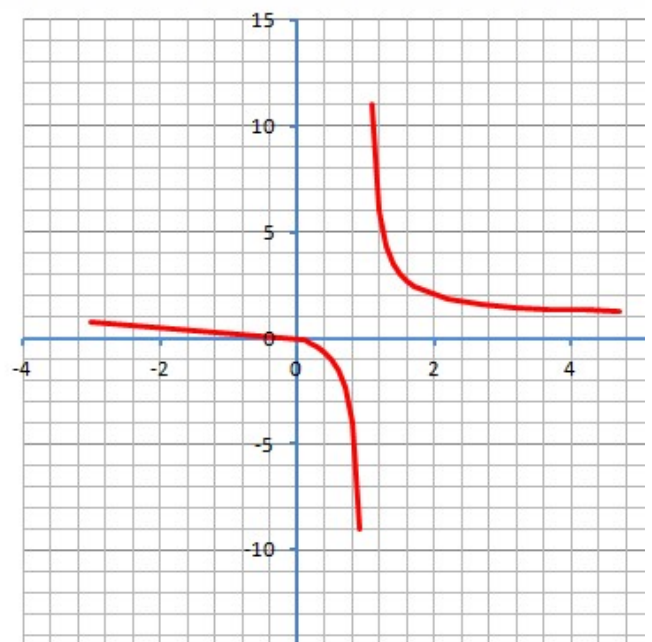
Dando valores a x Es una Elipse



c)  $x + y - xy = 0$ ;  $x + y(1 - x) = 0$ ;

$y = -\frac{x}{(1-x)}$ ; DANDO VALORES A X FUNCION HIPERBOLA

| x   | y         | y         |
|-----|-----------|-----------|
| -3  | 0,75      | -0,75     |
| 0,1 | -0,111111 | 0,111111  |
| 0,2 | -0,25     | 0,25      |
| 0,3 | -0,428571 | 0,428571  |
| 0,4 | -0,666667 | 0,666667  |
| 0,5 | -1        | 1         |
| 0,6 | -1,5      | 1,5       |
| 0,7 | -2,333333 | 2,333333  |
| 0,8 | -4        | 4         |
| 0,9 | -9        | 9         |
| 1   |           |           |
| 1,1 | 11        |           |
| 1,2 | 6         | -6        |
| 1,3 | 4,333333  | -4,333333 |
| 1,4 | 3,5       | -3,5      |
| 1,5 | 3         | -3        |
| 1,6 | 2,666667  | -2,666667 |
| 1,7 | 2,428571  | -2,428571 |



### 3 Curvas en coordenadas polares

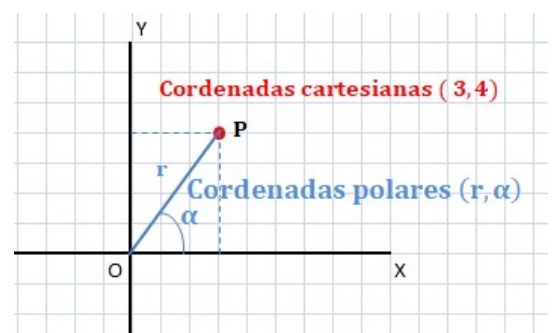
Las coordenadas cartesianas de P (3,4)

Las coordenadas polares de P (r, α)

r = a la distancia de P al origen de coordenadas

α = angulo en radianes que forma

el segmento OP con la parte positiva del eje X



#### 3.1 Conversion de coordenadas cartesianas a polares

$x = r \cos \alpha$ ;  $y = r \sin \alpha$ ;

$r^2 = x^2 + y^2$ ;  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

$\alpha = \arctan \frac{y}{x}$

#### 14. Ejercicio

Pasar a coordenadas polares los puntos dados en coordenadas cartesianas. a) (3,3); b)  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ; c)  $(-1,0)$ ; d)  $(3, -\sqrt{3})$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } (3,3); & \begin{cases} r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \\ \alpha = \arctan \frac{3}{3}; \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \end{cases} = P(\sqrt{18}, \frac{\pi}{4}); \\ \text{b) } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}); & \begin{cases} r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \beta = \arctan \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 45^\circ; \alpha = 180^\circ - 45^\circ = \frac{3\pi}{4} \end{cases} = P(2, \frac{3\pi}{4}); \\ \text{c) } (-1,0); & \begin{cases} r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \beta = \arctan \frac{0}{-1}; \alpha = 180^\circ = \pi \end{cases} = P(1, \pi); \\ \text{d) } (3, -\sqrt{3}); & \begin{cases} r = \sqrt{(3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ \beta = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{3} = 30^\circ; \alpha = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ = \frac{11}{6}\pi \end{cases} = P(2\sqrt{3}, \frac{11}{6}\pi); \end{aligned}$$

#### 15. Ejercicio

Hallar las coordenadas cartesianas de los puntos expresados en coordenadas polares

a)  $(2, \pi)$ ; b)  $(1, \frac{2}{3}\pi)$ ; c)  $(0,0)$ ; d)  $(3, \frac{3}{2}\pi)$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } (2, \pi) & \begin{cases} x = 2 * \cos \pi \\ y = 2 * \sin \pi \end{cases}; \begin{cases} x = 2 * (-1) = -2 \\ y = 2 * 0 = 0 \end{cases} \quad P(-2,0) \\ \text{b) } (1, \frac{2}{3}\pi) & \begin{cases} x = 1 * \cos \frac{2}{3}\pi \\ y = 1 * \sin \frac{2}{3}\pi \end{cases}; \begin{cases} x = 1 * (-0,5) = -0,5 \\ y = 1 * 0,866 = 0,866 \end{cases} \quad P(-0,5, 0,866) \\ \text{c) } (0,0) & \begin{cases} x = 0 * \cos 0 \\ y = 0 * \sin 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad P(0,0) \\ \text{d) } (3, \frac{3}{2}\pi) & \begin{cases} x = 3 * \cos \frac{3}{2}\pi \\ y = 3 * \sin \frac{3}{2}\pi \end{cases}; \begin{cases} x = 3 * 0 = 0 \\ y = 3 * (-1) = -3 \end{cases} \quad P(0, -3) \end{aligned}$$

#### 16. Ejercicio

La ecuación implícita en coordenadas polares de: a) recta que pasa por el origen y por el punto  $(-1, -1)$   
b) circunferencia que pasa por los puntos A(2,0)B(-2,0) y C(0, -2)

Solución

$$\text{a) recta que pasa por el origen y por el punto } (-1, -1); y = mx + n; m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{-1 - 0}{-1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

$y = mx + n$  como  $m = 1$  y pasa por  $(0,0)$  la ecuación de la recta será  $y = x$ ;

$$y - x = 0; \text{ sustituyo } \Rightarrow r \operatorname{sen} \alpha - r \operatorname{cos} \alpha = 0$$

b) Circunferencia que pasa por los puntos A(2,0)B(-2,0) y C(0, -2)

$$\text{Ecuación de la circunferencia } x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0;$$

$$\text{Pasa por } \begin{cases} \text{punto A}(2,0) \Rightarrow 2^2 + 0^2 + A \cdot 2 + B \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow 4 + 2A + C = 0 \\ \text{Punto B}(-2,0) \Rightarrow (-2)^2 + 0^2 + A(-2) + B \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow 4 - 2A + C = 0 \\ \text{Punto C}(0,-2) \Rightarrow 0^2 + (-2)^2 + A \cdot 0 + B \cdot (-2) + C = 0 \Rightarrow 4 - 2B + C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + 2A + C = 0 \\ 4 - 2A + C = 0 \end{cases} \text{ sumo } 8 + 2C = 0; C = -4;$$

Sustituyo  $4 + 2A + C = 0$ ;  $4 + 2A - 4 = 0$ ;  $A = 0$ ;

Sustituyo  $4 - 2B + C = 0$ ;  $4 - 2B - 4 = 0$ ;  $B = 0$ ;

Sustituyo en la Ecuacion de la curva  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ;  $x^2 + y^2 - 4 = 0$

Paso la curva a polar  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ;  $(r \cos \alpha)^2 + (r \sen \alpha)^2 - 4 = 0$ ;

$$r^2 (\cos \alpha)^2 + r^2 (\sen \alpha)^2 - 4 = 0; r^2 ((\cos \alpha)^2 + (\sen \alpha)^2) - 4 = 0;$$

dado que  $(\cos \alpha)^2 + (\sen \alpha)^2 = 1$ ;  $r^2 \cdot 1 - 4 = 0$ ;  $r = \sqrt{4}$ ;  $r = 2$ ;

### 17. Ejercicio

Determinar la ecuacion implicita de la curva cuya ecuacion en coordenadas polares es

$$r(\cos \alpha + \sen \alpha) - 3 = 0$$

Solución

$$r(\cos \alpha + \sen \alpha) - 3 = 0; r \cos \alpha + r \sen \alpha - 3 = 0; x + y - 3 = 0;$$

### 18. Ejercicio

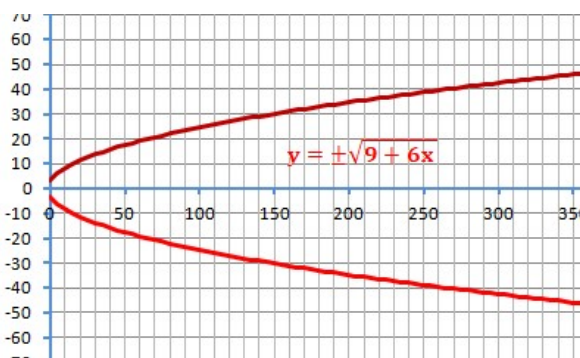
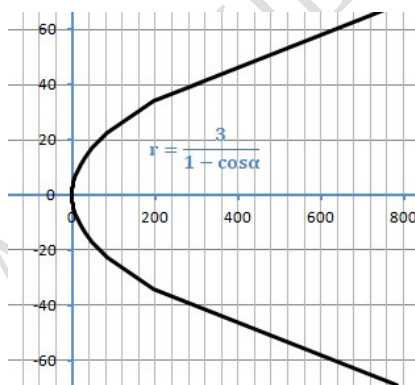
Determinar la ecuacion implicita de la curva cuya ecuacion en coordenadas polares es

$$r = \frac{3}{1 - \cos \alpha}$$

Solución

$$r = \frac{3}{1 - \cos \alpha}; r - r \cos \alpha = 3; r - x = 3; \sqrt{y^2 + x^2} = 3 + x; y^2 + x^2 = 9 + x^2 + 6x;$$

$$y^2 = 9 + 6x; y = \pm \sqrt{9 + 6x}$$



### 19. Ejercicio

Determinar la ecuacion implicita de la curva

cuya ecuacion en coordenadas polares es

$$r = 3 \sen 2\alpha$$

Solución

$$r = 3 \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$r = 3 \operatorname{sen} 2\alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

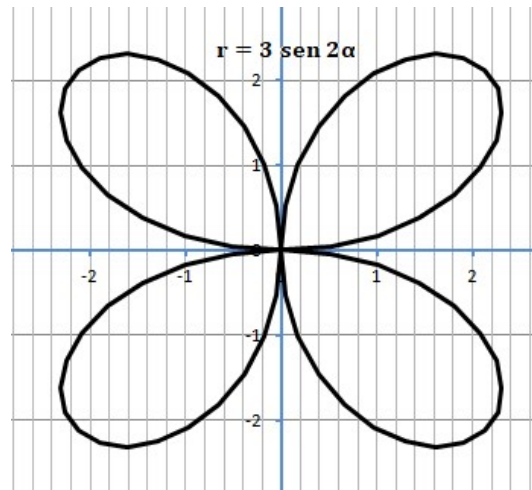
multiplico por  $r^2$ ;  $r = 3 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

$$r^3 = r^2 3 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 3 r \operatorname{sen} \alpha * r \cos \alpha;$$

$$r^3 = 3yx; \sqrt{(y^2 + x^2)}^3 = 3yx;$$

$$(y^2 + x^2) \sqrt{(y^2 + x^2)} = 3yx$$

Si operamos nos da la ecuacion implicita de la curva



## 4 Lugares geometricos en el espacio

Es el conjunto de puntos del espacio que cumplen una condición

### 4.1 Plano mediador de un segmento

Plano mediador de un segmento AB es el lugar geometrico de los puntos del plano que equidistan de A y B

### 4.2 Plano bisector

Plano bisector es el lugar geometrico de los puntos del plano que equidistan de dos planos

#### 20. Ejercicio

Hallar el plano mediador del segmento de extremos A(1, -2, 3) y B(5, 0, 3)

Solución

Plano mediador es el lugar geometrico de los puntos del plano que equidistan de A y B

$$\text{Distancia entre dos puntos } \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2 + (z-3)^2}$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = (x-5)^2 + (y-0)^2 + (z-3)^2;$$

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 4 + 4y + z^2 + 9 - 6z = x^2 + 25 - 10x + y^2 + z^2 + 9 - 6z$$

$$8x + 4y - 20 = 0; \quad 2x + y - 5 = 0 \quad \text{Un plano}$$

#### 21. Ejercicio

Hallar las ecuaciones de los planos bisectores de los planos  $\pi$  que pasa por los puntos A(1, 1, 2)

B(2, 2, 0) y C(-1, 3, 2) y el plano  $\mu$  de ecuación  $2x + 2y - z + 5 = 0$

Solución

$$\text{Distancia de un punto a un plano} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$\pi Ax + By + Cz + D = 0$  que pasa por los puntos A(1, 1, 2) B(2, 2, 0) y C(-1, 3, 2);

Un plano viene definido por dos vectores directores y un punto

$$\overrightarrow{AB} = ((2-1), (2-1), (0-2)) = (1, 1, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = ((-1)-1), (3-1), (2-2)) = (-2, 2, 0)$$

P(2,2,0) un punto del plano

La ecuación del plano será según vimos en el tema anterior  $\pi \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \pi = 2z + 4y - 8 + 2z + 4x - 8 = 0; 4y + 4x + 4z - 16 = 0;$$

$$\pi = x + y + z - 4 = 0$$

$$\begin{cases} \pi: x + y + z - 4 = 0 \\ \mu: 2x + 2y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

Los puntos del Plano que equidistan de los planos

$$\text{Distancia al plano } \pi: x + y + z - 4 = 0; \frac{|1x + 1y + 1z - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|x + y + z - 4|}{\sqrt{3}};$$

$$\text{Distancia al plano } \mu: 2x + 2y - z + 5 = 0; \frac{|2x + 2y - z + 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2x + 2y - z + 5|}{\sqrt{9}} = \frac{|2x + 2y - z + 5|}{3};$$

$$\text{lugar geometrico } \frac{|x + y + z - 4|}{\sqrt{3}} = \frac{|2x + 2y - z + 5|}{3}; \frac{x + y + z - 4}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2x + 2y - z + 5}{3}$$

$$3x + 3y + 3z - 12 = 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}y - \sqrt{3}z + 5\sqrt{3}$$

$$3x - 2\sqrt{3}x + 3y - 2\sqrt{3}y + 3z + \sqrt{3}z - 12 - 5\sqrt{3} = 0;$$

$$(3 - 2\sqrt{3})x + (3 - 2\sqrt{3})y + (3 + \sqrt{3})z - (12 + 5\sqrt{3}) = 0;$$

$$(3 + 2\sqrt{3})x + (3 + 2\sqrt{3})y + (3 - \sqrt{3})z - (12 + 5\sqrt{3}) = 0;$$

Los planos son perpendiculares.

## 22. Ejercicio

Calcula los siguientes lugares geométricos

a) puntos del espacio que distan 3 unidades de la recta

$$r \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

b) puntos del espacio que distan 3 unidades del plano

$$\mu: x + y = 0$$

Solución

a) puntos del espacio que distan 3 unidades

$$\text{de la recta } r \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

La figura será un cilindro de eje X y radio de la base 3;

La ecuación del plano OZY será  $x = 0$ ;

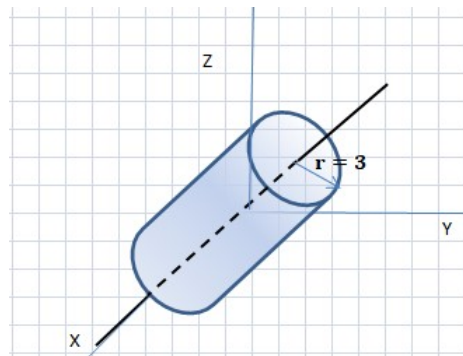
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pi \\ z = \mu \end{cases} \text{ dado que este plano será perpendicular}$$

a la recta  $x = 0$

la distancia de cualquier punto del plano al O(0,0,0) que pertenece a la recta será  $x = 0$ ;

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = r;$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = r^2; \text{ para } x = 0; \Rightarrow y^2 + z^2 = r^2$$



b) puntos del espacio que distan 3 unidades del plano

$$\mu: x + y = 0$$

Serán dos planos paralelos al plano  $\mu: x + y = 0$ ;  
que separados 3 unidades

Un plano paralelo a  $\mu: x + y = 0$ ; tendrá el mismo  
vector director, será  $\pi: x + y + D = 0$

Hallo un punto del plano  $\mu: x + y = 0$ ,  
que sería para  $x = 0$ ;  $(0,0,0)$

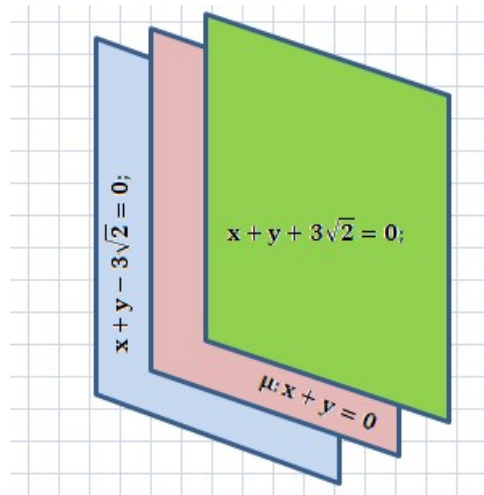
Distancia del punto  $(0,0,0)$  al plano  $\pi: x + y + D = 0$

$$\text{será } D_{p,\pi} = \frac{|0x + 0y + 0z + D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{2}}$$

Si ha de cumplirse que la distancia entre los planos

$$\text{ha de ser } = 3; \frac{|D|}{\sqrt{2}} = 3; D = \pm 3\sqrt{2};$$

$$\pi: x + y + D = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y + 3\sqrt{2} = 0 \\ x + y - 3\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$



## 5 Ecuaciones de superficies y curvas en el espacio

Superficies en el espacio son elementos geometricos de de dimension dos

$$\text{Ecuacion parametrica } \begin{cases} x = f(t, s) \\ y = g(t, s) \\ z = h(t, s) \end{cases} \quad \text{Ecuacion Implicita } c = F(x, y, z)$$

Curvas en el espacio son elementos geometricos de de dimension uno

$$\text{Ecuacion parametrica } \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad \text{Ecuacion Implicita } \begin{cases} C_1 = F(x, y, z) \\ C_2 = G(x, y, z) \end{cases}$$

### 23. Ejercicio

Determina cuales de las sigientes expresiones determinan una superficie y en caso afirmativo  
cuales representan un plano

$$\text{a) } \begin{cases} x = 2t + ts \\ y = t - s \\ z = t + 2 \end{cases} \quad \text{b) } x + 2y + \frac{z}{2} = 3; \quad \text{c) } \begin{cases} x = 2(t-1) + \frac{s+2}{2} \\ y = t+1 \\ z = s+1 \end{cases} \quad \text{d) } y + z + \sin x = 0$$

Solución

$$\text{a) } \begin{cases} x = 2t + ts \\ y = t - s \\ z = t + 2 \end{cases} \quad t = z - 2; y = (z - 2) - s; s = z - 2 - y; \text{ sustituyo en } x = 2t + ts$$

$$x = 2(z - 2) + (z - 2)(z - 2 - y); x - 2z + 4 + z^2 - 4z - zy + 2y + 4 = 0$$

$$x + z^2 - 6z - zy + 2y + 8 = 0; \text{ No es un plano}$$

$$\text{b) } x + 2y + \frac{z}{2} = 3; \quad 2x + 4y + z - 6 = 0; \text{ Es un Plano}$$

$$c) \begin{cases} x = 2(t-1) + \frac{s+2}{2} \\ y = t+1 \\ z = s+1 \end{cases} \begin{cases} t = y-1 \\ s = z-1 \end{cases} \text{ Sustituyo en } x = 2(t-1) + \frac{s+2}{2} \Rightarrow x = 2(y-1-1) + \frac{z-1+2}{2}$$

$$x = 2y - 4 + \frac{z+1}{2}; 2x = 4y - 8 + z + 1 = 0; 2x - 4y - z + 7 = 0; \text{ es un plano}$$

$$d) y + z + \sin x = 0; \text{ no es un plano}$$

## 24. Ejercicio

Hallar dos puntos y la ecuacion implicita de la superficie  $\begin{cases} x = 2 + s \\ y = t^2 + s^2 \\ z = 1 + t \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} x = 2 + s \\ y = t^2 + s^2 \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ para } s = 0, y \ t = 0; \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} P_1(2,0,1)$$

$$\begin{cases} x = 2 + s \\ y = t^2 + s^2 \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ para } s = 1, y \ t = 1; \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} P_2(3,2,2)$$

$$\begin{cases} x = 2 + s \\ y = t^2 + s^2 \\ z = 1 + t \end{cases} \begin{cases} s = x - 2 \\ t = z - 1 \end{cases}; \text{ sustituyo } y = (z-1)^2 + (x-2)^2; y = z^2 + 1 - 2z + x^2 + 4 - 4x;$$

$$x^2 - y + z^2 - 2z - 4x + 5 = 0; \text{ ecuacion Implicita}$$

## 25. Ejercicio

Di que tipo de curva representan las siguientes ecuaciones  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \end{cases}$

Hallar ecuaciones parametricas

Solución

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \end{cases} \text{ Es una circunferencia } x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ con centro en } (0,0,0) \text{ y radio } 2$$

cortada por una superficie  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \end{cases} \text{ restamos } 4z = 4; z = 1; \text{ sustituyo } x^2 + y^2 = 3;$$

$x^2 + y^2 = 3$  será una circunferencia de centro  $(0,0,1)$  y radio  $\sqrt{3}$

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t \\ y = \sqrt{3} \sin t \\ z = 1 \end{cases}$$

## 6 Superficie esférica

Una esfera o superficie esférica es el lugar geométrico de los puntos de espacio  $P(x, y, z)$  que equidistan, radio de la esfera, de un punto fijo  $C(a, b, c)$  que es el centro de la esfera.

$$d(P, C) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r; (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Si desarrollamos la ecuación  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0;$$

$$\text{Ecuacion Parametrica} \begin{cases} x = a + r \cos \alpha \cos \beta \\ y = b + r \cos \alpha \sin \beta \\ z = c + r \sin \alpha \end{cases}$$

## 26. Ejercicio

Escribir la ecuación de las superficies esféricas cuyas características son:

a) De centro  $(-2, 1, 2)$  y radio 4;

b) Uno de sus diámetros es el segmento de extremos  $A(2, -1, 3)$  y  $B(4, -1, 1)$

Solución

a) Esfera de centro  $(-2, 1, 2)$  y radio 4;

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2; (x - (-2))^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 16;$$

$$x^2 + 4 + 4x + y^2 + 1 - 2y + z^2 + 4 - 4z = 16; x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0;$$

b) Esfera donde uno de sus diámetros es el segmento de extremos  $A(2, -1, 3)$  y  $B(4, -1, 1)$

$$\text{punto central del diámetro} = \left( \frac{2+4}{2}, \frac{-1+(-1)}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = \text{Centro } (3, -1, 2)$$

$$\text{Radio } r = \frac{\text{diámetro}}{2}; \text{diámetro} = \sqrt{(4-2)^2 + (-1-(-1))^2 + (1-3)^2} = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$\text{radio de la esfera } \frac{\sqrt{8}}{2}; \text{centro de la esfera } (3, -1, 2)$$

$$\text{Ecuación de la esfera } (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2; (x - 3)^2 + (y - (-1))^2 + (z - 2)^2 = \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2;$$

$$x^2 + 9 - 6x + y^2 + 1 + 2y + z^2 + 4 - 4z = 2; x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 12 = 0$$

## 27. Ejercicio

Escribir las ecuaciones paramétricas para la superficie esférica que tiene por ecuación

ica ecuación de las superficies esféricas cuyas características son:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 11 = 0$$

Solución

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 11 = 0 \text{ será } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = \sqrt{3}^2$$

Radio;  $r = \sqrt{3}$ , centro de la circunferencia  $(1, -2, 3)$

$$\text{Ecuación Paramétrica} \begin{cases} x = a + r \cos \alpha \cos \beta \\ y = b + r \cos \alpha \sin \beta \\ z = c + r \sin \alpha \end{cases} ; \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \cos \alpha \cos \beta \\ y = -2 + \sqrt{3} \cos \alpha \sin \beta \\ z = 3 + \sqrt{3} \sin \alpha \end{cases}$$

## 28. Ejercicio

Halla la ecuación de la superficie esférica cuyo centro es  $P(2, -2, 0)$  y el plano que pasa por los puntos  $A(0, 1, -1)$ ,  $B(-1, 0, -1)$ ,  $C(1, 1, 1)$  es tangente a ella.

Calcular el punto de tangencia

Solución

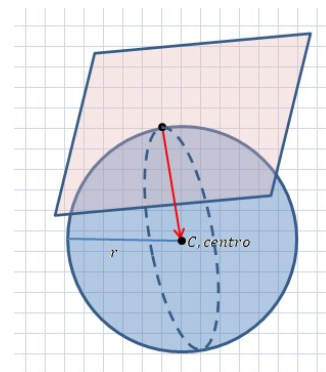
La ecuación del plano se define por dos vectores directores

$$\overrightarrow{AB} = B(-1, 0, -1) - A(0, 1, -1) = (-1, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C(1, 1, 1) - A(0, 1, -1) = (1, 0, 2) \text{ y un punto } P(0, 1, -1)$$

$$\text{Ecuación del plano } \pi \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-(-1) \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$-2x + z + 1 + 2y - 2 = 0; 2x - 2y - z + 1 = 0$$



Vector normal del plano =  $(2, -2, -1)$  con este punto defino la recta que pasa por el centro y por el punto de tangencia

$$\overrightarrow{Vd_r} = (2, -2, -1); \text{ Punto de paso } P(2, -2, 0) \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 0 - \lambda \end{cases} \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$$\text{Punto de interseccion del plano y la recta} \begin{cases} 2x - 2y - z + 1 = 0 \\ \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \end{cases} \quad 2(2 + 2\lambda) - 2(-2 - 2\lambda) - (-\lambda) + 1 = 0;$$

$$4 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + \lambda + 1 = 0; 9\lambda = -9; \lambda = -1; \text{ Punto de interseccion} \begin{cases} x = 2 + 2(-1) \\ y = -2 - 2(-1) = (0, 0, 1) \\ z = -(-1) \end{cases}$$

Punto de interseccion I  $(0, 0, 1)$

$$\text{Radio de la esfera} = \text{Distancia } p_I = \sqrt{(0 - 2)^2 + (0 - (-2))^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\text{Ecuacion de la esfera } (x - 2)^2 + (y - (-2))^2 + (z - 0)^2 = 3^2; x^2 + 4 - 4x + y^2 + 4 + 4y + z^2 = 9$$

$$\underline{x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 1 = 0}$$

## 29. Ejercicio

Halla la ecuacion de la superficie esferica de radio

$r = 4$ , tangente a los planos XY e YZ y

que pasa por el punto  $A(1, 2, 4 + \sqrt{7})$ .

Calcular los puntos de tangencia

Solucion

Siendo r el radio = 4;

El punto de tangencia con el plano XY será  $(4, a, 0)$

El punto de tangencia con el plano YZ será  $(0, a, 4)$

La ecuacion de la esfera será :  $\begin{cases} r = 4 \\ \text{Centro } C(4, a, 4) \end{cases}$

$$(x - 4)^2 + (y - a)^2 + (z - 4)^2 = 4^2$$

$$x^2 + 16 - 8x + y^2 + a^2 - 2ay + z^2 + 16 - 8z - 16 = 0;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 8x - 2ay - 8z + 16 = 0;$$

Como a de pasar por  $A(1, 2, 4 + \sqrt{7})$  se cumplira:

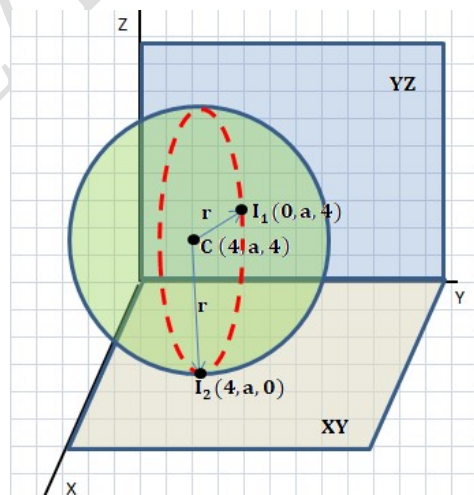
$$1 + 4 + (4 + \sqrt{7})^2 + a^2 - 8 - 4a - 8(4 + \sqrt{7}) + 16 = 0; a^2 - 4a + 16 + 7 + 8\sqrt{7} - 32 - 8\sqrt{7} + 13 = 0$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0; a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2; a = 2;$$

El punto de tangencia con el plano XY será  $(4, 2, 0)$

El punto de tangencia con el plano YZ será  $(0, 2, 4)$

Centro  $C(4, 2, 4)$



## 7 Posicion relativa de una esfera con una recta y con un plano

La recta puede ser respecto a la esfera :  $\begin{cases} \text{exterior ningun punto comun} \\ \text{tangente un punto comun} \\ \text{secante se cortan en dos puntos} \end{cases}$

Posicion de un plano y una esfera :  $\begin{cases} \text{exterior ningun punto comun} \\ \text{tangente un punto comun} \\ \text{secante se cortan en mas de dos puntos} \end{cases}$

### 30. Ejercicio

Estudiar la posicion relativa de la esfera y el plano:

a)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8 = 0$ ; y el plano  $\pi: x + 2y + 2z - 8 = 0$ ;

b)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 4 = 0$ ; y el plano  $y - 3 = 0$ ;

c) Esfera de centro el origen de coordenadas y radio  $r = 3$  y el plano  $x + 2y + 2z + 10 = 0$ ;

Solución

a)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8 = 0$ ; y el plano  $\pi: x + 2y + 2z - 8 = 0$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 3^2; C(-1, 0, 0); r = 3$$

Distancia de plano  $\pi: x + 2y + 2z - 8 = 0$  al centro  $C(1, 0, 0)$

$$D_{C,\pi} = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow D_{C,\pi} = \frac{|1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + (-8)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-1 - 8|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3;$$

$$D_{C,\pi} = \frac{7}{\sqrt{3}} = r = 3 \text{ Plano tangente a la esfera}$$

b)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 4 = 0$ ; y el plano  $y - 3 = 0$ ;

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 4 = 0; \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 3^2; C(0, 1, 2) r = 3;$$

Distancia de plano  $\pi: y - 3 = 0$  al centro  $C(0, 1, 2)$

$$D_{C,\pi} = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow D_{C,\pi} = \frac{|0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-3)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1}} = 2$$

$D_{C,\pi} = 2 < \text{radio } r = 3$  el plano corta a la esfera

c) Esfera de centro el origen de coordenadas y radio  $r = 3$  y el plano  $x + 2y + 2z + 10 = 0$ ;

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 3^2; x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0;$$

Distancia de plano  $\pi: x + 2y + 2z + 10 = 0$  al centro  $C(0, 0, 0)$

$$D_{C,\pi} = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow D_{C,\pi} = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3}$$

$$D_{C,\pi} = \frac{10}{3} > \text{radio } r = 3 \text{ el plano es exterior a la esfera}$$

### 31. Ejercicio

Estudiar la posicion relativa de la esfera y la recta:

a) Esfera de centro  $C(0, 0, 0)$  y radio  $r = 6$ ; y la recta  $s: \begin{cases} x + 2y = -18 \\ z = 0 \end{cases}$ ;

b)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 35 = 0$ ; y la recta  $s: \begin{cases} x + z = 7 \\ z = 4 \end{cases}$ ;

Solución

a) Esfera de centro  $C(0, 0, 0)$  y radio  $r = 6$ ; y la recta  $s: \begin{cases} x + 2y = -18 \\ z = 0 \end{cases}$ ;

Esfera de centro  $C(0,0,0)$  y radio  $r = 6 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 6^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0$

$$s: \begin{cases} x + 2y = -18 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \lambda \\ -18 - \lambda \\ 2 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -9 - \frac{\lambda}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Comprobamos donde corta la recta  $s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -9 - \frac{\lambda}{2} \\ z = 0 \end{cases}$  a la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0$

$$\text{sustituimos en } x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \left(9 - \frac{\lambda}{2}\right)^2 + 0^2 = 36; \lambda^2 + 81 + \frac{\lambda^2}{4} - 9\lambda = 36$$

$$4\lambda^2 + 324 + \lambda^2 - 36\lambda = 144; 5\lambda^2 - 36\lambda + 180 = 0;$$

$$\lambda = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 5 \cdot 180}}{2} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 3600}}{2}$$

No tiene solución la recta no corta a la esfera

$$b) x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 35 = 0; y \text{ la recta } s: \begin{cases} x + z = 7 \\ z = 4 \end{cases};$$

$$s: \begin{cases} x + z = 7 \\ z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 - 4 \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\text{Sustituimos en la ecuación } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 35 = 0; 3^2 + \lambda^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 - 35 = 0$$

$$\lambda^2 = 35 - 9 - 16 - 6; \lambda = \sqrt{4} = \pm 2;$$

$$\text{Puntos de corte } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases} (3,2,4) \text{ y } \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases} (3,-2,4) \text{ La recta es secante a la esfera}$$

### 32. Ejercicio

Dada la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 3 = 0$ ;

a) calcular su centro y radio

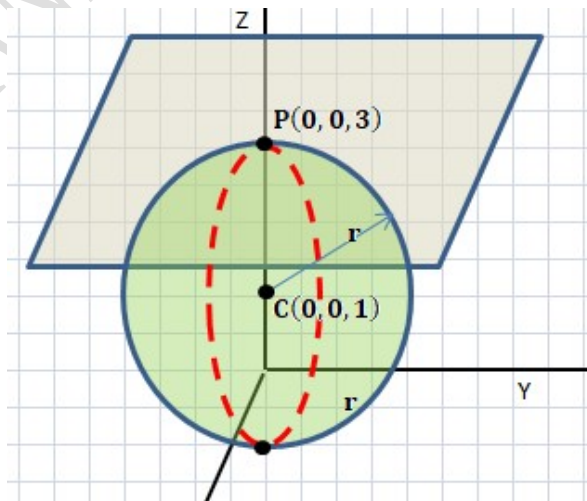
b) Calcula la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto  $P(0,0,3)$ ;

Solución

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 3 = 0;$$

$$\Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{4}^2;$$

$$C(0,0,1) \text{ Radio } r = \sqrt{4} = 2;$$



b) Calcula la ecuación del plano  $Ax + By + Cz + D = 0$ ,

tangente a la esfera en el punto  $P(0,0,3)$ ;

El vector normal al plano que pasa por  $P(0,0,3)$  será

$$\overrightarrow{PC} = C(0,0,1) - P(0,0,3) = (0,0,-2)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0; \Rightarrow 0x + 0y - 2z + D = 0,$$

$$-2z + D = 0 \text{ si ha de pasar por } (0,0,3); D = 6;$$

$$-2z + 6 = 0; -z + 3 = 0; \underline{z = 3}$$

### 33. Ejercicio

Determina la posición relativa de los planos

$\pi: 3y + 5z = 22$ ;  $\mu: y + 2z = 3$ ;  $\eta: z = 4$ , respecto a la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 5 = 0;$$

Solución

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 5 = 0; (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 4 = 0;$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 2^2 \text{ Centro } C(2, -1, 2); \text{ Radio } = r = 2;$$

$$D_{C,\pi} = \frac{|3y + 5z - 22|}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 5^2}}; \text{ distancia al centro; } \frac{|3(-1) + 5 \cdot 2 - 22|}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 5^2}} = \frac{|-3 + 10 - 22|}{\sqrt{34}} = \frac{15}{\sqrt{34}}$$

$$D_{C,\pi} = \frac{15}{\sqrt{34}} > \text{radio } r = 2 \text{ el plano es exterior a la esfera}$$

$$\mu: y + 2z = 3$$

$$D_{C,\mu} = \frac{|0(2) + 1(-1) + 2(2) - 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-1 + 4 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0;$$

$$D_{C,\mu} = 0 < \text{radio } r = 2 \text{ el plano es secante a la esfera y contiene al centro } (2, -1, 2)$$

$$\eta: z = 4$$

$$D_{C,\eta} = \frac{|0(2) + 0(-1) + 1(2) - 4|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 4|}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$D_{C,\eta} = 1 < \text{radio } r = 2 \text{ el plano es secante a la esfera}$$

### 34. Ejercicio

Calcular la ecuación de la superficie esférica que tiene por diámetro los extremos A(-2,0,3) y B(0,2,1).

Calcula el valor de  $\lambda$  para que la recta  $\begin{cases} x = k + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$  sea tangente.

Solución

$$\text{El centro de la esfera será } C = \frac{B(0,2,1) + A(-2,0,3)}{2} = \frac{(-2,2,4)}{2}; C(-1,1,2)$$

$$\text{Radio de la esfera} = \frac{\text{Diámetro (distancia entre AB)}}{2}; r = \frac{\sqrt{(0 - (-2))^2 + (2 - 0)^2 + (1 - 3)^2}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x = k + t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \text{ Punto de paso } P(k, 0, 0); \text{ vector director } (1, 1, 1)$$

Si la recta es tangente a la circunferencia. La distancia entre el punto de la recta donde es tangente a la circunferencia será igual al radio.

$$\text{distancia } I(k, 0, 0) \text{ y } C(-1, 1, 2) = r = \sqrt{((-1) - k)^2 + (1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{(-1 - k)^2} = \sqrt{3};$$

$$k^2 + 2k + 1 = 3; k^2 + 2k - 2 = 0; k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} =$$

$$k = \begin{cases} \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3} \\ \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

### 35. Ejercicio

Se considera la esfera de centro  $C(1,1,1)$  y tangente al plano de ecuación  $9x - 2y + 6z = 2$ ;

a) Calcula el radio de la esfera

b) Halla la ecuación de la esfera

c) Escribe la ecuación del plano tangente a la esfera y que pasa por  $P(1,2,1)$

Solución

a) Calcula el radio de la esfera

Distancia entre el plano  $9x - 2y + 6z = 2$  y el centro  $C(1,1,1)$ ;

$$D_{C,\pi} = \frac{|9 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{9^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{|9 - 2 + 6 - 2|}{\sqrt{121}} = \frac{|9 - 2 + 6 - 2|}{\sqrt{121}} = \frac{11}{11} = 1;$$

b) Halla la ecuación de la esfera

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1^2 \quad \text{Centro } C(1,1,1) ; \text{Radio} = r = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0$$

c) Escribe la ecuación del plano tangente a la esfera y que pasa por  $P(1,2,1)$

Comprobamos si el punto  $P(1,2,1)$  pertenece a la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0$

$$1^2 + 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 2 = 0; 1 + 4 + 1 - 2 - 4 - 2 + 2 = 0 \text{ pertenece.}$$

Si el punto  $P(1,2,1)$  pertenece al plano y a la esfera, será el punto de intersección

vector director de la recta que pasa por  $C$  y  $P$  será el vector normal del plano  $P(1,2,1) - C(1,1,1) =$  o

$$\text{vector normal del plano} = ((1 - 1), (2 - 1), (1 - 1)) = (0, 1, 0)$$

$$\text{Ecuación del plano } Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow 0x + 1y + 0z + D = 0; \quad -y + D = 0$$

$$D_{C,\pi} = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + D|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|1 + D|}{1} = \text{radio} = 1; \quad \frac{-1 + D}{1} = -1 + D = 1; D = 2;$$

$$-y + 2 = 0;$$