

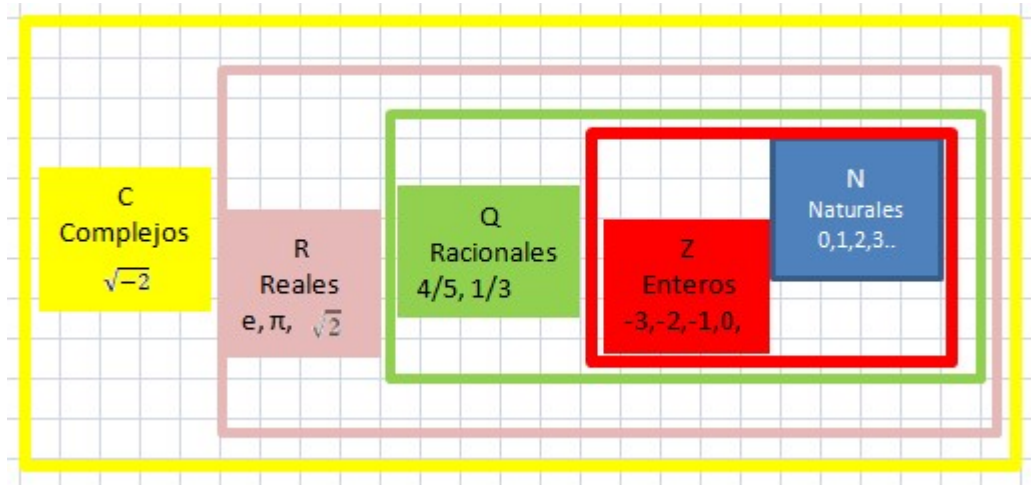
Números Complejos

Contenido

1	NÚMEROS COMPLEJOS.....	2
1.1	NÚMEROS IMAGINARIOS	2
1.2	REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS	2
2	OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS.....	3
3	FORMA POLAR Y TRIGONOMÉTRICA	5
4	RAÍCES DE UNA ECUACIÓN POLINÓMICA.....	8

1 Números complejos

El conjunto de los números complejos contiene a todos los números reales e imaginarios



1.1 Números imaginarios

La raíz cuadrada de -1 se conoce como la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$

Los números imaginarios forman parte de los números complejos y son el producto de un número real por la unidad imaginaria i

Los números complejos se escriben Z

$= a + bi$; a y b son números reales e i la parte imaginaria

$Z = a + bi$; si $a = 0$, tendremos el conjunto de números imaginarios puros;

si $b = 0$ tendremos los números reales

Ejemplo de números complejos $x = 4 + 4i$; $x_1 = -\sqrt{3} + i$

1.2 Representación Gráfica de los números complejos

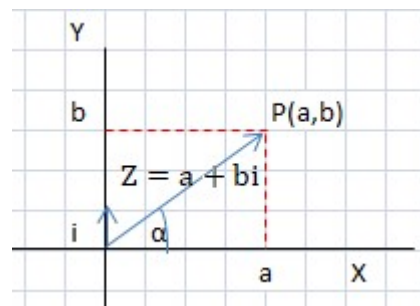
Los números complejos representan como vectores en el plano complejo

$$z = a + bi$$

Afijo de z es el punto P del plano

cuyas coordenadas son (a, b)

$$\text{Modulo de } |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Argumento de z es el ángulo α medido en sentido antihorario

Numero conjugado y opuesto

El número conjugado de $z = a + bi$ será $z' = b + ai$

El número opuesto de $z = a + bi$ será $z'' = -a - bi$

1. Ejercicio

Representa gráficamente los siguientes números y halla su modulo y argumento

$$z_1 = -2 - 2i; \quad z_2 = 4i; \quad z_3 = -6$$

Solución

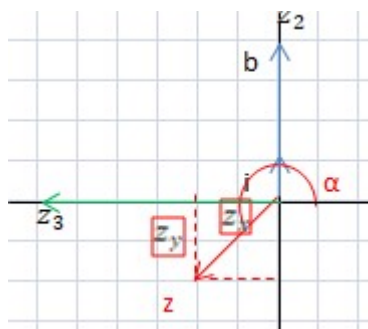
$$z_1 = -2 - 2i; |z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2};$$

$$\text{Arg } z_1 = \alpha = \arctg \frac{-2}{-2} = 225^\circ \text{ en el 3º cuadrante}$$

$$z_2 = 4i; |z_2| = \sqrt{(0)^2 + (4)^2} = 4;$$

$$\text{Arg } z_2 = \alpha = \arctg \frac{0}{4} = 90^\circ$$

$$z_3 = -6; |z_3| = \sqrt{(6)^2 + (0)^2} = 6; \text{Arg } z_3 = \alpha = 180^\circ$$



2. Ejercicio

Representa gráficamente los siguientes números y halla su modulo y argumento

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i; \quad z_2 = \sqrt{3} + i;$$

Solución

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i; |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\text{Arg } z_1 = \alpha = \arctg \frac{\sqrt{3}}{-1} = 120^\circ \text{ en el 2º cuadrante}$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i; |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\text{Arg } z_2 = \alpha = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ \text{ en el 1º cuadrante}$$

2 Operaciones con números complejos

Suma de números complejos

Para sumar números complejos se suma la parte real y la parte imaginaria

Sean dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

La suma o resta de $z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i$;

Multiplicación de un número complejo por un número real

Sean un número complejo $z_1 = a + bi$ y un número real K

$$z_1 * K = Ka + Kbi;$$

El número opuesto de $z = a + bi$ será $z'' = -a - bi$

Multiplicación de dos números complejos

Sean dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

La multiplicación de $z_1 * z_2 = ac + adi + cbi + bdi^2$;

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1; z_1 * z_2 = ac + adi + cbi - bd; z_1 * z_2 = (ac - bd) + (ad + cb)i$$

Potencia de un números complejo

Sean un numero complejo $z_1 = a + bi$

La potencia de z_1 será $(z_1)^n = (a + bi)^n$;

División de dos números complejos

Sean dos numeros complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

$$\text{La division de } \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$$

Potencias de i

$$i^0 = 1; i^1 = i; i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1; i^3 = -i, i^4 = 1$$

$$ac + adi + cbi + bdi^2;$$

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1; z_1 * z_2 = ac + adi + cbi - bd; z_1 * z_2 = (ac - bd) + (ad + cb)i$$

3. Ejercicio

Halla el modulo y argumento de los números

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i; z_2 = \sqrt{3} + i; a) z_1 z_2; b) \frac{z_1}{z_2}; c) z_1^2 d) z_2^{-1}$$

Solución

$$a) z_1 z_2 = (-1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = -\sqrt{3} - i + (\sqrt{3})^2 i + \sqrt{3}i^2 = -\sqrt{3} - i + 3i - \sqrt{3};$$

$$z_1 z_2 = -2\sqrt{3} + 2i;$$

$$\text{modulo } |z_1 z_2| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Arg } (z_1 z_2) = \alpha = \arctg \frac{2}{-2\sqrt{3}} = \arctg -\frac{1}{\sqrt{3}} = 150^\circ \text{ en el } 2^\circ \text{ cuadrante}$$

$$b) \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{-\sqrt{3} + i + 3i + \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - (i)^2} = \frac{4i}{4} = i;$$

$$\text{Modulo } \frac{z_1}{z_2} = 1; \text{ Arg } (z_1 z_2) = \alpha = 90^\circ$$

$$c) z_1^2 = (-1 + \sqrt{3}i)^2 = 1 + 3(i)^2 - 2\sqrt{3}i = 1 - 3 - 2\sqrt{3}i = -2 - 2\sqrt{3}i$$

$$\text{modulo } |z_1^2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Arg } (z_1^2) = \alpha = \arctg \frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = 210^\circ \text{ en el } 3^\circ \text{ cuadrante}$$

$$d) z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{3} + i} = \frac{1(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{(\sqrt{3} - i)}{3 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i;$$

$$\text{modulo } |z_2^{-1}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Arg } (z_2^{-1}) = \alpha = \arctg \frac{-1/4}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \arctg -\frac{1}{\sqrt{3}} = 330^\circ \text{ en el } 4^\circ \text{ cuadrante}$$

3 Forma Polar y Trigonométrica

Forma Polar

La expresión $z = r_{\alpha}$ se denomina forma polar, donde $r = |z|$ y $\alpha = \text{Arg } z$

Forma trigonométrica

Sea un número complejo $z = a + bi$; y $r = |z|$; $z = r \cdot \cos \alpha + (r \cdot \text{sen} \alpha)i$

expresión forma trigonométrica $z = r \cdot \cos \alpha + (r \cdot \text{sen} \alpha)i$

Multiplicación

Sea $z_1 = r_{\alpha} = r(\cos \alpha + i \text{sen } \alpha)$; y $z_2 = s_{\beta} = s(\cos \beta + i \text{sen } \beta)$

$$z_1 \cdot z_2 = r_{\alpha} \cdot s_{\beta} = rs_{(\alpha+\beta)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r(\cos \alpha + i \text{sen } \alpha) \cdot s(\cos \beta + i \text{sen } \beta) = rs(\cos(\alpha + \beta) + i \text{sen}(\alpha + \beta))$$

$$(z_1)^n = (r_{\alpha})^n = r^n_{n\alpha}$$

$$(z_1)^n = (r(\cos \alpha + i \text{sen } \alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i \text{sen} n\alpha)$$

División

Sea $z_1 = r_{\alpha} = r(\cos \alpha + i \text{sen } \alpha)$; y $z_2 = s_{\beta} = s(\cos \beta + i \text{sen } \beta)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_{\alpha}}{s_{\beta}} = (r/s)_{(\alpha-\beta)}$$

4. Ejercicio

Expresa en todas la formas posibles los números complejos

$$a) (1+i)^n \quad b) \frac{1}{i}; \quad c) i^7 + i^{17} \quad d) \frac{1}{2}(1+i)(1+i^{-4})$$

Solución

$$a) (1+i)^n;$$

$$z = 1+i; |z| = \sqrt{2}; \text{tag} \alpha = \frac{1}{1}; \text{Arg} z = 45^\circ; z = \sqrt{2}_{45}; z = \sqrt{2} \cos 45 + i \sqrt{2} \text{sen} 45$$

$$\text{binómica } (1+i)^n, \text{ Polar } \sqrt{2}^n_{n \cdot 45}; \text{ Trigonometría; } \sqrt{2}^n \cos(n \cdot 45^\circ) + i \sqrt{2}^n \text{sen}(n \cdot 45^\circ);$$

$$b) \frac{1}{i} \text{ multilico por el cojugado } = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = -\frac{i}{1} = -i;$$

$$\text{Binómica } -i, \quad \text{Polar } 1_{270}; \text{ Trigonometría; } 1 \cos(270) + i \text{sen}(270)$$

$$c) i^7 + i^{17}; i^7 = -i; i^{17} = i; i^7 + i^{17} = 0$$

$$d) \frac{1}{2}(1+i)(1+i^{-4}); i^{-4} = \frac{1}{i^{-4}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow (1+i^{-4}) = 2; \frac{1}{2}(1+i)2 = 1+i;$$

$$\frac{1}{2}(1+i)(1+i^{-4}) = 1+i; \text{ Binómica } 1+i; \text{ Polar } \sqrt{2}_{45};$$

$$\text{Trigonometría } \sqrt{2}(\cos 45 + i \text{sen} 45),$$

5. Ejercicio

Resuelve las operaciones indicadas

$$z_1 = 2_{60}; z_2 = -1 + i; z_3 = 2(\cos 210 + i \operatorname{sen} 210)$$

$$a) z_1 * z_2 * z_3 \quad b) \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_3}; \quad c) z_3^4 \quad d) z_2^{-2}$$

Solución

$$z_1 = 2_{60}; z_2 = -1 + i = \sqrt{2}_{315}; z_3 = 2(\cos 210 + i \operatorname{sen} 210) = 2_{210}$$

$$a) z_1 * z_2 * z_3 = (2 * \sqrt{2} * 2)_{60+135+210} = (4\sqrt{2})_{45}$$

$$b) \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_3}; \quad \bar{z}_2 = +1 - i = \sqrt{2}_{315}$$

$$z_1 \bar{z}_2 = 2_{60} * \sqrt{2}_{315} = (2\sqrt{2})_{60+315} = (2\sqrt{2})_{15}$$

$$\frac{z_1 \bar{z}_2}{z_3} = \frac{(2\sqrt{2})_{15}}{2_{210}} = \sqrt{2}_{165}$$

$$c) z_3^4 = (2_{210})^4 = 16_{120}$$

$$d) z_2^{-2} = (\sqrt{2}_{315})^{-2} = (\sqrt{2}^{-2})_{315*(-2)} = (1/2)_{-630} = (1/2)_{90^\circ}$$

6. Ejercicio

Expresa en forma polar todos los complejos z que cumplen

$$a) (2z + 3)(zi + 5) = 0; \quad b) 2 + 3zi = 4zi + 9; \quad c) (1 + 2i)z = 3 - 5i \quad d) \frac{z}{z - 2i} = 1 + i$$

Solución

$$a) (2z + 3)(zi + 5) = 0 \text{ sea } z = a + bi$$

$$(2(a + bi) + 3)((a + bi)i + 5) = 0; 2a + 2bi + 3 = 0; o \quad ai + bi * i + 5 = 0;$$

$$2a + 2bi + 3 = 0 \text{ para que sea el modulo } = 0 \text{ se ha de cumplir } 2a + 3 = 0 \text{ y } 2b = 0;$$

$$a = -\frac{3}{2}; b = 0; \quad a + bi = \left(\frac{3}{2}\right)_{180^\circ}$$

$$ai + bi * i + 5 = 0; (5 - b) + ai = 0 \text{ se ha de cumplir } 5 - b = 0; b = 5; a = 0;$$

$$a + bi = 5_{90^\circ}$$

$$b) 2 + 3zi = 4zi + 9; \text{ sea } z = a + bi; 2 + 3i(a + bi) = 4i(a + bi) + 9;$$

$$2 + 3ai - 3b = 4ai - 4b + 9; (2 - 3b) + 3ai = -4b + 4ai \text{ si dos complejos son iguales}$$

$$\text{Se cumple } \begin{cases} (2 - 3b) = -4b; b = -2 \\ 3a = 4a \Rightarrow a = 0 \end{cases} \quad a + bi = -2i = 2_{180^\circ}$$

$$c) (1 + 2i)z = 3 - 5i \text{ sea } z = a + bi \Rightarrow (1 + 2i)(a + bi) = 3 - 5i;$$

$$a + bi + 2ai - 2b = 3 - 5i; (a - 2b) + (b + 2a)i = 3 - 5i \text{ para que sean iguales}$$

$$\text{Se cumple } \begin{cases} (a - 2b) = 3; a = 3 + 2b \\ b + 2a = -5 \end{cases} \text{ sustituyo } b + 2(3 + 2b) = -5;$$

$$b + 6 + 4b = -5; 5b = -11; b = -\frac{11}{5};$$

$$a = 3 + 2b = 3 - \frac{22}{5} = -\frac{7}{5}; a = -\frac{7}{5}; z = -\frac{7}{5} - \frac{11}{5}i = \left(\frac{\sqrt{170}}{5}\right)_{288}$$

$$d) \frac{z}{z-2i} = 1+i; \frac{a+bi}{a+bi-2i} = 1+i; \frac{a+bi}{a+(b-2)i} = 1+i$$

$$a+bi = (1+i)(a+(b-2)i) = a+ai+(b-2)i-(b-2) = (a-b+2) + (a+b-2)i$$

$$\text{dos complejos son iguales si } \begin{cases} a = a-b+2; b = 2 \\ b = a+b-2; a = 2 \end{cases} a+bi = 2+2i = (2\sqrt{2})_{45^\circ}$$

7. Ejercicio

Calcula la raíz quinta de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Solución

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{60^\circ}; \sqrt[5]{1_{60^\circ}}; r = \sqrt[5]{1}; Arg = \alpha = \frac{60 + 360k}{5}$$

$$\text{Para } k = 0 \quad (\sqrt[5]{1})_{\frac{1}{5} \cdot 60^\circ} = 1_{12^\circ}$$

$$\text{Para } k = 1, \alpha = \frac{60 + 360 \cdot 1}{5} = 84; 1_{84^\circ}$$

$$\text{Para } k = 2, \alpha = \frac{60 + 360 \cdot 2}{5} = 156; 1_{156^\circ}$$

$$\text{Para } k = 3, \alpha = \frac{60 + 360 \cdot 3}{5} = 228; 1_{228^\circ}$$

$$\text{Para } k = 4, \alpha = \frac{60 + 360 \cdot 4}{5} = 300; 1_{300^\circ}$$

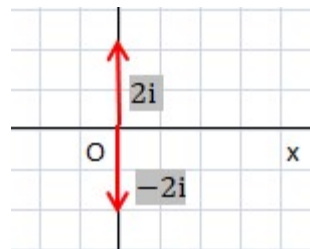
8. Ejercicio

Calcula y representa las raíces cuadradas de $-4i$

Solución

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i; \text{ la solución será } 2i \text{ y } -2i$$

$$\Rightarrow 2_{90^\circ} \text{ y } -2_{90^\circ}$$



9. Ejercicio

Un vértice de un octógono regular inscrito en una circunferencia de centro (0,0) es A(12,5)

Calcula los dos vértices adyacentes

Solución

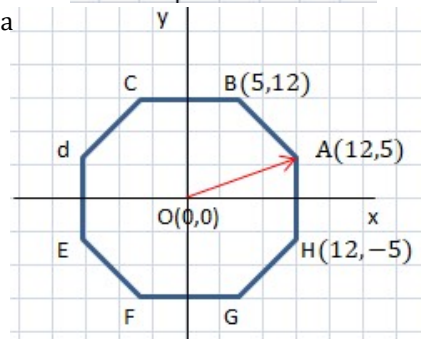
$$\text{modulo } |z| = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$Arg(z) = \alpha = \arctg \frac{5}{12} = 68,2^\circ \text{ en el } 1^\circ \text{ cuadrante}$$

$$A; z = 13_{22,62^\circ}; H = 13_{337,38^\circ}; B = 13_{67,62^\circ}$$

$$H = 13_{337,38^\circ}; (13 \cdot \cos 337,38, 13 \cdot \sin 337,38) = (12, -5)$$

$$B = 13_{67,62^\circ}; (13 \cdot \cos 67,62, 13 \cdot \sin 67,62) = (5, 12)$$



4 Raíces de una ecuación polinómica

En un polinomio de grado n habrá n soluciones o raíces de ese polinomio

Si la raíz de un polinomio es un número complejo también lo será su conjugado

10. Ejercicio

Factorizar el siguiente polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 9x - 18$;

Solución

Aplicamos teorema del resto y comprobamos que una solución es $x=2$;

Aplicamos ruffini $P(x) = x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = (x - 2)(x^2 + 9)$; las otras raíces serán

$$x^2 + 9 = 0; x = \pm\sqrt{-9}; x = 3i, x = -3i$$

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = (x - 2)(x + 3i)(x - 3i)$$

11. Ejercicio

Determina los números reales b y c , sabiendo que una raíz del polinomio

$$P(z) = 2z^3 - bz^2 - 4z + c \text{ es } 1 - i;$$

Solución

Si $(1 - i)$ es una raíz, también lo será $(1 + i)$

$$a. - P(z) = 2z^3 - bz^2 - 4z + c \text{ se cumplirá } 2(1 - i)^3 - b(1 - i)^2 - 4(1 - i) + c = 0;$$

$$2(1 - i)^3 = 2(1 + i^2 - 3i + 2i^2 - i^3) = 2(1 - 3i + 3i^2 - i^3) =$$

$$2(1 - 3i - 3 + i) = 2(-2 - 2i)$$

$$(-4 - 4i)$$

$$b(1 - i)^2 = b(1 + i^2 - 2i) = -2bi$$

$$2(1 - i)^3 - b(1 - i)^2 - 4(1 - i) + c = 0; (-4 - 4i) - 2bi - 4 + 4i + c = 0;$$

$$-8 - 2bi + c = 0;$$

$$b. - P(z) = 2z^3 - bz^2 - 4z + c \text{ se cumplirá } 2(1 + i)^3 - b(1 + i)^2 - 4(1 + i) + c = 0;$$

$$2(1 + i)^3 = 2(1 + i^2 + 3i + 2i^2 + i^3) = 2(1 + 3i + 3i^2 + i^3) =$$

$$2(1 + 3i - 3 + i) = 2(-2 + 4i)$$

$$(-4 + 8i)$$

$$b(1 + i)^2 = b(1 + i^2 + 2i) = +2bi$$

$$2(1 + i)^3 - b(1 + i)^2 - 4(1 + i) + c = 0; (-4 + 8i) + 2bi - 4 - 4i + c = 0;$$

$$-8 + 4i + 2bi + c = 0$$

$$\begin{cases} -8 - 2bi + c = 0 \\ -8 + 4i + 2bi + c = 0 \end{cases} \text{ sumamos } -16 + 4i + 2c = 0; c = -8 + 2i$$

$$\text{Sustituyo } -8 - 2bi + c = 0 \Rightarrow -8 - 2bi - 8 + 2i = 0; -16 + 2i = 2bi; b = -\frac{8}{i} + 1$$

12. Ejercicio

Determina los números reales b y c , sabiendo que una raíz del polinomio

$$P(z) = 2z^3 + bz^2 - 4z + c \text{ es } 1 - i;$$

Solución

$$P(z) = 2(1 - i)^3 + b(1 - i)^2 - 4(1 - i) + c = 0;$$

$$2(1 - 3i + 3i^2 - i^3) + b(1 + i^2 - 2i) - 4 + 4i + c = 2(-2 - 2i) + b(-2i) - 4 + 4i + c;$$

$$-4 - 4i - 2bi - 4 + 4i + c = 0; -8 - 2bi + c = 0, c = 8 + 2bi$$

$$\text{otra raíz será } 1 + i; 2(1 + 3i + 3i^2 + i^3) + b(1 + i^2 + 2i) - 4(1 + i) + c =$$

$$= 2(-2 + 2i) + b(-2i) - 4 - 4i + c = -4 + 4i + 2bi - 4 - 4i + c = 0;$$

$$-8 + 2bi + c = 0, c = 8 - 2bi$$

$$\begin{cases} c = 8 + 2bi \\ c = 8 - 2bi \end{cases} \text{ igualdad } 8 + 2bi = 8 - 2bi; b = 0;$$

$$c = 8 - 2bi, c = 8; \text{ Solución } b = 0, c = 8;$$

13. Ejercicio

Resuelve los siguientes sistemas

$$\begin{cases} xi - (1 + i)y = 3; \\ (2 + i)x + iy = 4 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} xi - (1 + i)y = 3; \text{ multiplico } i : -x - (1 + i)iy = 3i \\ (2 + i)x + iy = 4 \text{ multiplico } (1 + i); (2 + i)(1 + i)x + (1 + i)iy = 4(1 + i); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - (1 + i)iy = 3i \\ (1 + 3i)x + (1 + i)iy = 4(1 + i); \end{cases} \text{ sumo } > -x + (1 + 3i)x = 3i + 4 + 4i; (3i)x = 4 + 7i;$$

$$x = \frac{4 + 7i}{3i} = \frac{(4 + 7i)i}{3i * i} = \frac{4i - 7}{-3}; x = \frac{7}{3} - \frac{4i}{3}$$

$$\text{Sustituyo } (2 + i)x + iy = 4 \Rightarrow (2 + i)\left(\frac{7}{3} - \frac{4i}{3}\right) + iy = 4; \left(\frac{14}{3} - \frac{8}{3}i + \frac{7}{3}i + \frac{4}{3}\right) + iy = 4;$$

$$\frac{18}{3} - \frac{1}{3}i + iy = 4; iy = 4 - \frac{18}{3} + \frac{1}{3}i; iy = \frac{12}{3} - \frac{18}{3} + \frac{1}{3}i; y = \frac{-\frac{6}{3} + \frac{1}{3}i}{i} = \frac{-6 + i}{3i};$$

$$\text{multiplico numerador y denominador por } i; y = \frac{-6i - 1}{-3}; y = \frac{1}{3} + 2i;$$

$$\text{Solucion } x = \frac{7}{3} - \frac{4i}{3}, \quad y = \frac{1}{3} + 2i$$

14. Ejercicio

Determina un polinomio de coeficientes reales cuyas soluciones en $\mathbb{C}$

son $-3, 2 + i$ y $2 - i$

Solución

Si son soluciones del polinomio, ha de cumplirse $(x + 3) * (x - (2 + i)) * (x - (2 - i)) = 0$

$$(x + 3) * (x - 2 - i) * (x - 2 + i) = (x + 3)(x^2 - 4x + 5) = x^3 - x^2 - 7x + 15$$

15. Ejercicio

Determinar un polinomio de coeficientes reales de 4º grado cuyas soluciones en $\mathbb{C}$

son $-4i, -5 + 2i$;

Solución

Si el polinomio es de cuarto grado las soluciones serán $-4i, 4i, -5 + 2i, -5 - 2i$;

Si son soluciones se cumplirá $(x - (-4i)) * (x - (+4i)) * (x - (-5 + 2i))$
 $* (x - (-5 - 2i))$

$$(x + 4i) * (x - 4i) * (x + 5 - 2i) * (x + 5 + 2i)$$

$$= (x^2 - (4i)^2) * (x + 5 - 2i) * (x + 5 + 2i)$$

$$(x^2 + 16) * (x + 5 - 2i) * (x + 5 + 2i) = (x^2 + 16) * (x^2 + 10x + 25 - 4i^2) =$$

$$(x^2 + 16) * (x^2 + 10x + 29) = x^4 + 10x^3 + 45x^2 + 160x + 464$$

16. Ejercicio

Calcular las raíces del siguiente polinomio $x^4 + 3x^2 - 10$

Solución

$$x^4 + 3x^2 - 10 = 0; \text{ ecuación bicuadrada } x^2 = t; t^2 + 3t - 10 = 0;$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-10)}}{2}; t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}; t_1 = \frac{-3 + 7}{2} = 2; t_2 = \frac{-3 - 7}{2} = -5$$

$$t_1 = x^2; x = \sqrt{2}; x_1 = \sqrt{2}; x_2 = -\sqrt{2}$$

$$t_2 = x^2; x = \sqrt{-5}; x_3 = \sqrt{-5}; x_4 = i\sqrt{5}; x_4 = -i\sqrt{5}$$

$$\text{Las raíces son } x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = i\sqrt{5}, x_4 = -i\sqrt{5}$$

17. Ejercicio

Calcular las raíces del siguiente polinomio $x^3 + 5x^2 + 8x$;

Solución

$$x^3 + 5x^2 + 8x =, \text{ saco factor común } x (x^2 + 5x + 8) \text{ Una solución } x = 0;$$

$$x^2 + 5x + 8 = 0; x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 * 8}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{2}; x_1 = \frac{-5 + \sqrt{-7}}{2} = \frac{-5 + i\sqrt{7}}{2};$$

$$x_1 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i; x_2 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

$$\text{Las raíces son } x_1 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i; x_2 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i; x_3 = 0;$$

18. Ejercicio

Siendo a, b, c, d números reales y $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Calcula el módulo de $z_1 z_2$

y demuestra que $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

Solución

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + cbi - bd = (ac - bd) + (ad + cb)i$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + cb)^2};$$

$$(ac - bd)^2 + (ad + cb)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd + (ad)^2 + (cb)^2 + 2abcd =$$

$$(ac - bd)^2 + (ad + cb)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (cb)^2;$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2 = (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (cb)^2$$

Se cumple la igualdad

19. Ejercicio

Demuestra que el polinomio $P(z) = 2z^4 + 3z^2 + 3\sqrt{3}z + 9$ admite una raíz del tipo $\alpha(1 + i)$ siendo α un número real. Determina el valor de α

Solución

si $\alpha(1 + i)$ es una raíz del polinomio $P(z) = 2z^4 + 3z^2 + 3\sqrt{3}z + 9$ se cumplirá

$$2(\alpha(1 + i))^4 + 3\alpha(1 + i)^2 + 3\sqrt{3}\alpha(1 + i) + 9 = 0;$$

$$2(\alpha(1 + i))^4 = -8\alpha^4; 3\alpha(1 + i)^2 = 6\alpha^2i; 3\sqrt{3}\alpha + 3\sqrt{3}\alpha i;$$

$$2(\alpha(1 + i))^4 + 3\alpha(1 + i)^2 + 3\sqrt{3}\alpha(1 + i) + 9 = -8\alpha^4 + 6\alpha^2i + 3\sqrt{3}\alpha + 3\sqrt{3}\alpha i + 9 =$$

$$(-8\alpha^4 + 3\sqrt{3}\alpha + 9) + (-8\alpha^4 + 3\sqrt{3}\alpha)i;$$

$$|P(z)| = \sqrt{(-8\alpha^4 + 3\sqrt{3}\alpha + 9)^2 + (6\alpha^2 + 3\sqrt{3}\alpha)^2} = 0$$

$$(-8\alpha^4 + 3\sqrt{3}\alpha + 9)^2 = 0$$

$$(6\alpha^2 + 3\sqrt{3}\alpha)^2 = 0; \alpha(6\alpha + 3\sqrt{3}) = 0; \alpha = -\frac{3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{si sustituyo } (-8\alpha^4 + 3\sqrt{3}\alpha + 9)^2 = 0; -8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + 3\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 9 = -8 * \frac{9}{16} - \frac{9}{2} + 9 = 0;$$

$$\text{Se cumple } \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

20. Ejercicio

Escribe en forma binómica el complejo $z = \frac{4 - i}{1 + 2i}$

Solución

$$z = \frac{4 - i}{1 + 2i} * \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{4 - 8i - i + 2i^2}{1 - 4i^2} = \frac{4 - 9i - 2}{1 + 4} = \frac{2 - 9i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{9}{5}i;$$

$$r = |z| = \sqrt{(2/5)^2 + (9/5)^2} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{81}{25}} = \sqrt{\frac{85}{25}} = \frac{\sqrt{85}}{5}$$

$$\alpha = \arct\left(\frac{-9}{2}\right) = \arctg\left(-\frac{9}{2}\right); \text{ cuarto cuadrante; } \alpha = 77,47^\circ$$

$$z = \frac{\sqrt{85}}{5} \angle 77,47^\circ$$

21. Ejercicio

Calcula el modulo y argumento de $z = \frac{-1+i}{-3\sqrt{3}+3i}$

Solución

$$z = \frac{-1+i}{-3\sqrt{3}+3i} = \frac{(-1+i)(+3\sqrt{3}+3i)}{(-3\sqrt{3}+3i)(+3\sqrt{3}+3i)} = \frac{-3\sqrt{3}-3i+3\sqrt{3}i-3}{-9-9*3} =$$

$$\frac{-3-3\sqrt{3}-3i+3\sqrt{3}i}{-36}$$

$$z = -\frac{3(1+\sqrt{3})+3(i-\sqrt{3})}{-36} = \frac{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{12} + \frac{1-\sqrt{3}}{12}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+3+2\sqrt{3}}{144} + \frac{1+3-2\sqrt{3}}{144}} = \sqrt{\frac{8}{144}} = \frac{2\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{6};$$

$$|z| = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\alpha = \arct\left(\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{12}}{\frac{1+\sqrt{3}}{12}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right); \alpha = 7,63^\circ$$

22. Ejercicio

Si $z = x + iy$. Calcula en terminos de x e y el conjunto de $w = \frac{1-z}{1+i}$

Solución

$$w = \frac{1-z}{1+i}; w = \frac{1-(x+iy)}{1+i} = \frac{1-x-iy}{1+i} = \frac{(1-x-iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-x-yi-i+xi+y}{1+1}$$

$$w = \frac{(1-x+y)+(-y-1+x)i}{2} = \frac{(1-x+y)}{2} + \frac{(-y-1+x)}{2}i$$

$$\bar{z} = \frac{(1-x+y)}{2} - \frac{(-y-1+x)}{2}i$$

23. Ejercicio

Determina el conjunto M de los afijos de los $z = x + iy$. tales que

$w = iz^2 - (1+i)z + 1$ es un numero real.

Solución

$$w = iz^2 - (1+i)z + 1; w = i(x+iy)^2 - (1+i)(x+iy) + 1;$$

$$w = i(x^2 - y^2 + 2xyi) - (x+yi+xi-y) + 1 = x^2i - y^2i - 2xy - x - yi - xi + y + 1$$

$$w = (-2xy - x + y + 1) + (x^2 - y^2 - y - x)i; \text{ para que sea un numero real}$$

$$(x^2 - y^2 - y - x) = 0; x(x-1) - y(y+1) = 0;$$

$$x = 0, y = 0; x = 0, y = -1; y = 0, x = 1; x = 1, y = -1;$$