

Funciones y Límites

Contenido

1	FUNCIONES	2
2	DOMINIO Y RECORRIDO DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES	2
2.1	FUNCIONES POLINÓMICAS.....	2
2.2	FUNCIONES RACIONALES.....	3
2.3	FUNCIONES IRRACIONALES	4
2.4	FUNCIONES EXPONENCIALES	5
2.5	FUNCIONES LOGARÍTMICAS	6
2.6	FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	7
2.7	FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS	9
3	OPERACIONES CON FUNCIONES.....	10
3.1	SUMA, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN	10
3.2	COMPOSICIÓN DE FUNCIONES	12
3.3	FUNCIÓN INVERSA.....	13
4	LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO	15
5	LÍMITES DE UNA FUNCIÓN EN EL INFINITO	17
6	PROPIEDADES DE LOS LÍMITES	22
7	CÁLCULO DE LÍMITES “INDETERMINACIONES”	22

1 Funciones

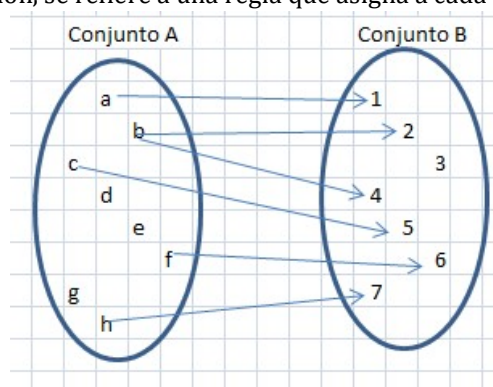
En análisis matemático, el concepto general de función, se refiere a una regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo.

$Y = f(x)$; (x son los elementos del conjunto

X e y son los elementos del conjunto Y)

x es la variable independiente

e y es la variable dependiente



Dominio es el conjunto de todos los elementos de X que tienen una única imagen en Y . (a, c, f, h)

Gráficamente son los valores de la función en el eje X eje de abscisas

Recorrido es el conjunto formado por todas las imágenes, son los valores que toma y (variable dependiente) ($1, 5, 7$). Gráficamente son los valores de la función en el eje Y eje de ordenadas

Forma de definir las funciones

Mediante un enunciado

Con una tabla que contienen los datos

Una fórmula matemática

Representación grafica

2 Dominio y recorrido de algunas funciones elementales

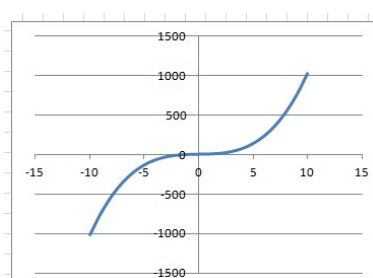
2.1 Funciones polinómicas

La funcion es un polinomio

$$y = x^3 + 2x + 5$$

Dominio $F(x) = \mathbb{R}$

Recorrido $= \mathbb{R}$



1. Ejercicio

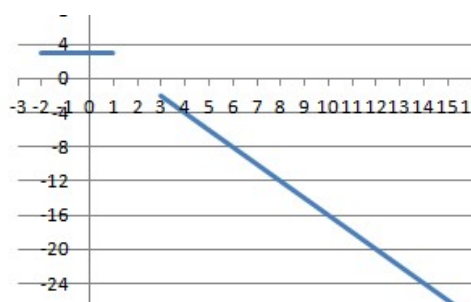
Hallar el dominio y recorrido de la siguiente función a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -2 \leq x \leq 1; \quad [-2, 1] \\ 4 - 2x & \text{si } x > 1; \quad [2, \infty) \end{cases}$$

Solución

Dominio $F(x) = [(-2, 1) \cup (3, +\infty)]$

Recorrido $= [(-\infty, 0) \cup 3]$



2. Ejercicio

Hallar el dominio y recorrido de la siguiente

función a trozos $f(x) = |3x - 9| - |x - 2|$

Solución

Hallamos los puntos que anulan la función en esta caso serán

$$\begin{cases} 3x - 9 = 0, & x = 3 \\ x - 2 = 0; & x = 2; \end{cases}$$

para $x \leq 2$, para que el valor absoluto sea positivo $(-3x + 9) - (-x + 2)$

para $2 < x \leq 3$, para que el valor absoluto sea positivo $(-3x + 9) - (x - 2)$

para $x > 3$, para que el valor absoluto sea positivo $(3x - 9) - (x - 2)$

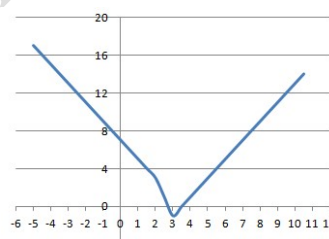
$$f(x) = |3x - 9| - |x - 2| \begin{cases} (-3x + 9) - (-x + 2) & \text{para } x \leq 2 \\ (-3x + 9) - (x - 2) & \text{para } 2 < x \leq 3 \\ (3x - 9) - (x - 2) & \text{para } x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{para } x \leq 2; -3x + 9 + x - 2 = -2x + 7 \\ \text{para } 2 < x \leq 3; -3x + 9 - x + 2 = -4x + 11 \\ \text{para } x > 3; 3x - 9 - x + 2 = 2x - 7 \end{cases}$$

$$f(x) = |3x - 9| - |x - 2|; \begin{cases} -2x + 7 & \text{para } x \leq 2; \\ -4x + 11 & \text{para } 2 < x \leq 3; \\ 2x - 7 & \text{para } x > 3; \end{cases}$$

Dominio $f(x) = |3x - 9| - |x - 2|$ es todo $\mathbb{R}$

Recorrido $f(x) = |3x - 9| - |x - 2|$ $(-1, +\infty)$



2.2 Funciones racionales

Son funciones que tienen como cocientes

$$\text{polinomios } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Para calcular el dominio hallamos los valores de x que hacen 0 el denominador.,

Si hay algunos valores esos no forman parte del dominio

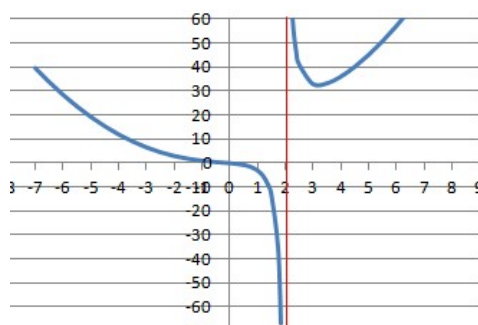
$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x - 2} \text{ es } \mathbb{R} - \{2\}$$

pues $x = 2$ hacen 0 el denominador y es indeterminada la función;

Dominio de la función e recorrido de la función $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x - 2}$, es $\mathbb{R} - \{2\}$

Para hallar el recorrido hay que dar valores a x .

$$\text{Recorrido } f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x - 2}, \text{ es } \mathbb{R};$$



3. Ejercicio

Hallar el dominio y recorrido de la siguiente

$$\text{función } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

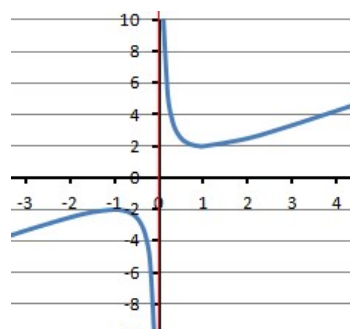
Solución

Para hallar el dominio buscamos valores

que hacen 0 el denominador; $x = 0$;

Dominio de la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$; es $\mathbb{R} - \{0\}$

Recorrido de la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$; es $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$



4. Ejercicio

Hallar el dominio y recorrido de la siguiente

$$\text{función } f(x) = \frac{3x - 7}{x - 6}$$

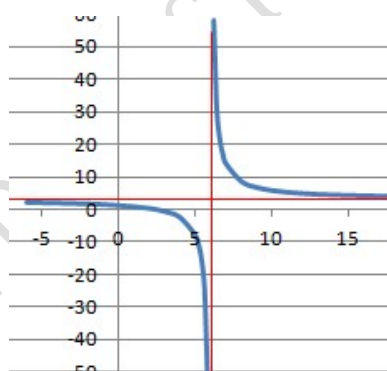
Solución

Para hallar el dominio buscamos valores

que hacen 0 el denominador; $x = 6$;

Dominio de la función $f(x) = \frac{3x - 7}{x - 6}$; es $\mathbb{R} - \{6\}$

Recorrido de la función $f(x) = \frac{3x - 7}{x - 6}$; es $\mathbb{R} - \{3\}$



2.3 Funciones irracionales

La función polinómica o racional, está bajo un radical, $f(x) = \sqrt{g(x)}$;

El dominio depende del índice de la raíz:

Índice impar Dominio $f(x)$ es $\mathbb{R}$

Índice par $g(x) \geq 0$;

5. Ejercicio

Hallar el dominio y recorrido de la siguiente

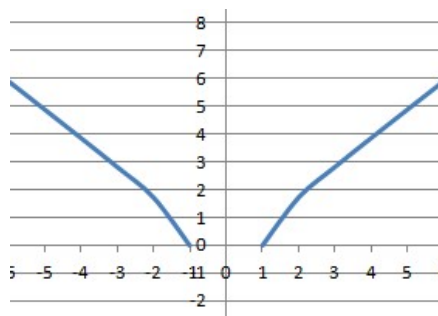
$$\text{función } f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Solución

$$x^2 - 1 \geq 0; \Rightarrow (x + 1)(x - 1) \geq 0;$$

Dominio $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Recorrido $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; es $(0, +\infty)$



6. Ejercicio

Hallar el dominio y recorrido de la siguiente

$$\text{función } f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

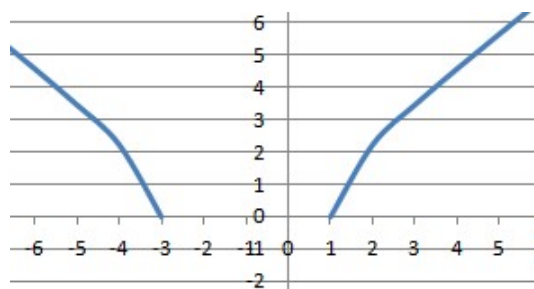
Solución

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0; \Rightarrow (x + 3)(x - 1) \geq 0;$$

Dominio

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} \text{ es } (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{Recorrido } f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} \text{ ; es } (0, +\infty)$$



7. Ejercicio

Hallar el dominio y recorrido de la

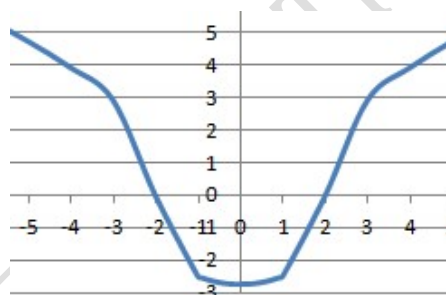
$$\text{siguiente función } f(x) = \sqrt[3]{5x - 20}$$

Solución

Dominio

$$f(x) = \sqrt[3]{5x - 20} \text{ es } \mathbb{R}$$

$$\text{Recorrido } f(x) = \sqrt[3]{5x - 20} \text{ ; es } [-2,71442, +\infty)$$



2.4 Funciones exponenciales

La función exponencial es del tipo $f(x) = Ka^x$, siendo a números reales positivos

Su dominio es $\mathbb{R}$

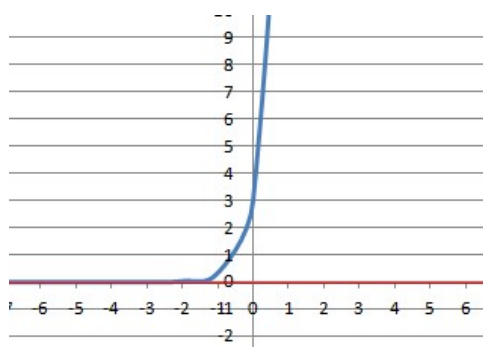
8. Ejercicio

Hallar el dominio y recorrido de la siguiente función $f(x) = 3^{2x+1}$

Solución

$$\text{Dominio } f(x) = 3^{2x+1} \text{ es } \mathbb{R}$$

$$\text{Recorrido } f(x) = 3^{2x+1} \text{ es } (0, +\infty)$$



9. Ejercicio

Hallar el dominio y recorrido de la

siguiente función $f(x) = \frac{1}{3^{x-2}}$

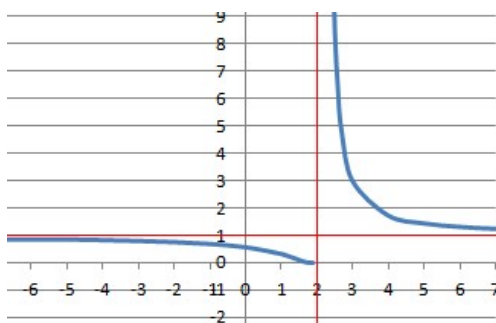
Solución

Para hallar el dominio buscamos valores que hacen 0 el denominador;

$$x = 2;$$

Dominio $f(x) = \frac{1}{3^{x-2}}$ es $\mathbb{R} - \{2\}$

Recorrido $f(x) = \frac{1}{3^{x-2}}$ es $(0,1) \cup (1 + \infty)$



10. Ejercicio

Hallar el dominio y recorrido de la

siguiente función $f(x) = 2^{\sqrt{x-1}}$

Solución

Para hallar el dominio buscamos

Valores que cumplen $x - 1 \geq 0$;

$x \geq 1$; dado que en $\mathbb{R}$ no existen

valores de raíces de números negativos

Dominio $f(x) = 2^{\sqrt{x-1}}$ es $[1, +\infty)$

Recorrido $f(x) = 2^{\sqrt{x-1}}$ es $[1, +\infty)$



2.5 Funciones logarítmicas

La función logarítmica es del tipo $f(x) = \log_a x$

donde $a > 0$ y distinta de 1

x siempre será un número positivo

11. Ejercicio

Hallar el dominio y recorrido de la

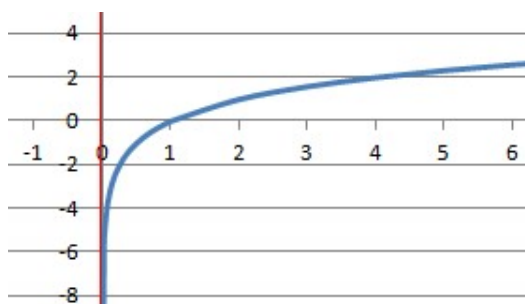
siguiente función $f(x) = \log_2 x$

Solución

Como $x > 0$; por definición de logaritmo

Dominio $f(x) = \log_2 x$ es $(0, +\infty)$

Recorrido $f(x) = \log_2 x$ es $\mathbb{R}$



12. Ejercicio

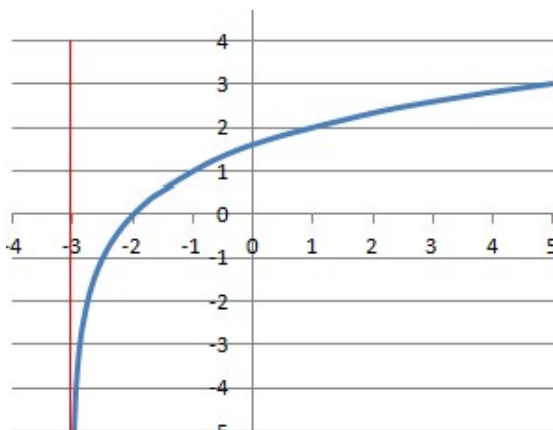
Hallar el dominio y recorrido de la siguiente función $f(x) = \log_2(x+3)$

Solución

Como $(x+3) > 0$; por definición $\Rightarrow x > -3$

Dominio $f(x) = \log_2(x+3)$ es $(-3, +\infty)$

Recorrido $f(x) = \log_2(x+3)$ es $\mathbb{R}$



13. Ejercicio

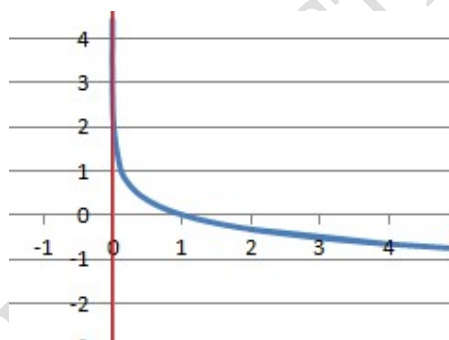
Hallar el dominio y recorrido de la siguiente función $f(x) = \log_{1/8} x$

Solución

Como $x > 0$; por definición

Dominio $f(x) = \log_{1/8} x$ es $(0, +\infty)$

Recorrido $f(x) = \log_{1/8} x$ es $\mathbb{R}$



2.6 Funciones trigonométricas

Son funciones en las que la variable independiente aparece como argumento de una función logarítmica.

$f(x) = \sin x$; $f(x) = \cos x$; $f(x) = \tan x$; $f(x) = \cot x$; $f(x) = \sec x$; $f(x) = \csc x$

14. Ejercicio

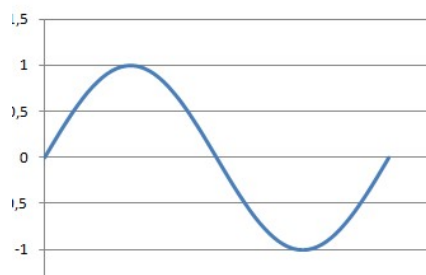
Hallar el dominio y recorrido de la siguiente función $f(x) = \sin x$;

Solución

Dominio $f(x) = \sin x$; es $\mathbb{R}$

Recorrido $f(x) = \sin x$ es $[-1, 1]$

Seno



tag

15. Ejercicio

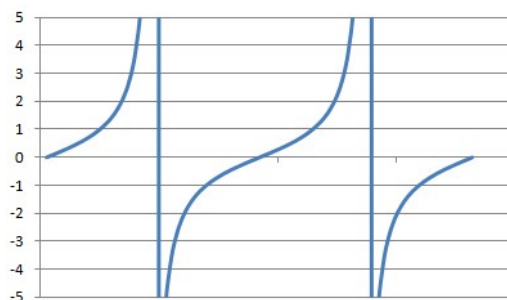
Hallar el dominio y recorrido de la siguiente función $f(x) = \tan x$;

Solución

Dominio $f(x) = \tan x$;

$\mathbb{R} - \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}; K \in \mathbb{Z}\}$

Recorrido $f(x) = \tan x$ es $\mathbb{R}$



16. Ejercicio

Hallar el dominio y recorrido de la

$$\text{siguiente función } f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + 2 \operatorname{sen} x}$$

Solución

$$\text{Dominio } f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + 2 \operatorname{sen} x} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1 + 2 \operatorname{sen} x}$$

la función no existe para valores que hagan 0 los denominadores

$$\cos x = 0; \text{ el } \cos x = 0, \text{ para } 90^\circ \text{ y } 270^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{Si } (1 + 2 \operatorname{sen} x = 0); \text{ el } \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}, \text{ para } x = 210^\circ \text{ y } 330^\circ \Rightarrow x = 7\frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ y } x = 11\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\text{Dominio } f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + 2 \operatorname{sen} x}; \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, 7\frac{\pi}{6} + 2\pi k, 11\frac{\pi}{6} + 2\pi k; K \in \mathbb{Z}; \right\}$$

Recorrido $f(x) = \operatorname{tag} x$ es $\mathbb{R}$



17. Ejercicio

Hallar el dominio y recorrido de la siguiente función $f(x) = \operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{2})$

Solución

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}; f(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

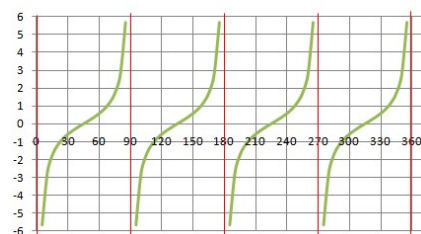
La función $f(x)$ no existe cuando

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0; \text{ el } \cos \text{ es } 0 \text{ en } \frac{\pi}{2} \text{ y } \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi; 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{2}k;$$

$$\text{Dominio de } f(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ es }; \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2}k; k \in \mathbb{Z}; \right\}$$

Recorrido $f(x) = \operatorname{tag} x$ es $\mathbb{R}$



2.7 Funciones trigonométricas inversas

Dan el valor del ángulo en radianes cuyo sen, cos y tg es igual al valor de la variable independiente

$$f(x) = \arcsen x; f(x) = \arccos x; f(x) = \arctg x$$

18. Ejercicio

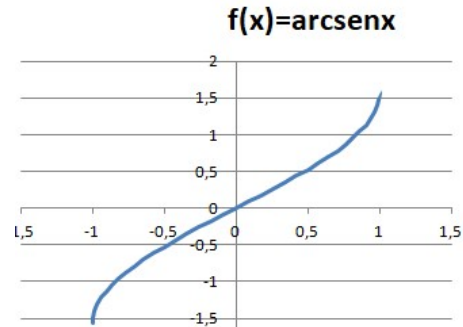
Hallar el dominio y recorrido de la siguiente función $f(x) = \arcsen x$;

Solución

Dominio $f(x) = \arcsen x; x \in [-1, 1]$

Para que sean funciones se restringe su

Recorrido $f(x) = \arcsen x; \text{ es } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



19. Ejercicio

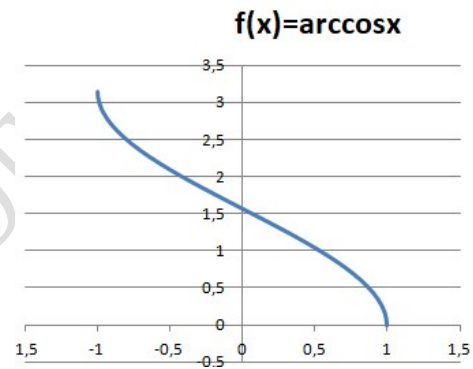
Hallar el dominio y recorrido de la siguiente función $f(x) = \arccos x$;

Solución

Dominio $f(x) = \arccos x; \text{ es } [-1, 1]$

Para que sean funciones se restringe su

Recorrido $f(x) = \arccos x; \text{ es } [0, \pi]$



20. Ejercicio

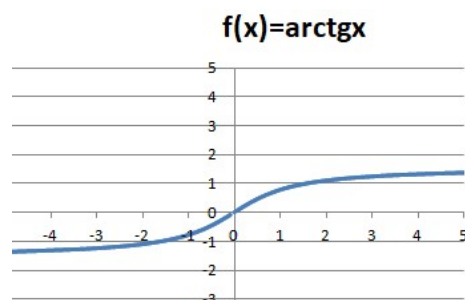
Hallar el dominio y recorrido de la siguiente función $f(x) = \arctg x$;

Solución

Dominio $f(x) = \arctg x; \text{ es } \mathbb{R}$

Para que sean funciones se restringe su

Recorrido $f(x) = \arctg x; \text{ es } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



3 Operaciones con funciones

3.1 Suma, multiplicación y división

Suma, resta multiplicación y división de funciones

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Los dominio de la suma, resta, multiplicación de funciones = Dominio (f) $\cap$ Dominio (g)

Los dominio de la division de funciones = Dominio (f) $\cap$ Dominio (g),

excluyendo los valores que hacen 0 el denominador

21. Ejercicio

Siendo las funciones $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ y $g(x) = x + 1$.

Hallar la funcion:

a) $(f + g)(x)$ y su dominio

b) $(f - g)(x)$ y su dominio

c) $(f * g)(x)$ y su dominio

d) $(f/g)(x)$ y su dominio

Solución

a) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ su dominio es $\mathbb{R}$ y $g(x) = x + 1$ su dominio es $\mathbb{R}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x^2 + 4x + 1 + x + 1 = 3x^2 + 5x + 2$$

$$\text{Dominio } (f + g)(x) = \text{Dominio } (f) \cap \text{Dominio } (g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}; \text{ Dominio } (f + g)(x) = \mathbb{R}$$

b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ su dominio es $\mathbb{R}$ y $g(x) = x + 1$ su dominio es $\mathbb{R}$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 3x^2 + 4x + 1 - x - 1 = 3x^2 + 3x$$

$$\text{Dominio } (f - g)(x) = \text{Dominio } (f) \cap \text{Dominio } (g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}; \text{ Dominio } (f - g)(x) = \mathbb{R}$$

c) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ su dominio es $\mathbb{R}$ y $g(x) = x + 1$ su dominio es $\mathbb{R}$

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) = (3x^2 + 4x + 1)(x + 1) = 3x^3 + 7x^2 + 5x + 1$$

$$\text{Dominio } (f * g)(x) = \text{Dominio } (f) \cap \text{Dominio } (g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}; \text{ Dominio } (f * g)(x) = \mathbb{R}$$

d) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ su dominio es $\mathbb{R}$ y $g(x) = x + 1$ su dominio es $\mathbb{R}$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{(3x^2 + 4x + 1)}{x + 1} = 3x + 1$$

$$\text{Dominio } (f/g)(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

22. Ejercicio

Siendo las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x - 2$.

Hallar la función $(f/g)(x)$ y su dominio

Solución

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x-2};$$

Dominio $f(x) = \sqrt{x} = [0, \infty)$; Dominio $g(x) = R \setminus \{-2\}$;

Dominio $(f/g)(x) = \text{Dominio } (f) \cap \text{Dominio } (g) = [0, \infty) - \{2\}$

Dominio $(f/g)(x) = [0, \infty) - \{2\}$ que hace nulo el divisor

23. Ejercicio

Siendo las funciones

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

y $g(x) = x - 1$.

Hallar la función $(f + g)(x)$

y su dominio

Solución

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) =$$

$$\frac{x^2 + 3}{x - 1} + (x - 1) =$$

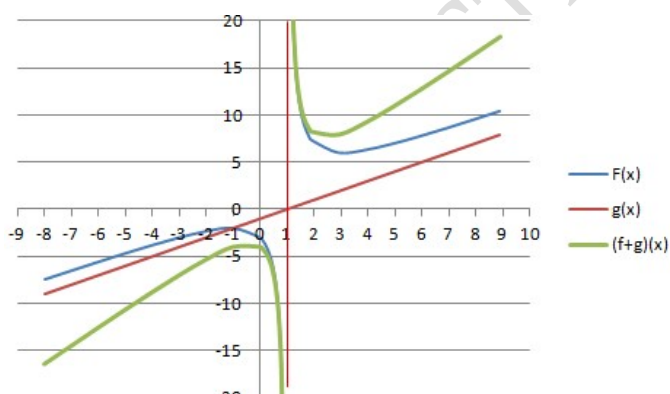
$$\frac{x^2 + 3 + (x^2 - 2x + 1)}{x - 1} = \frac{2x^2 - 2x + 4}{x - 1}$$

Dominio $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1} = R \setminus \{1\}$; Dominio $g(x) = R$;

Dominio $(f + g)(x) = \text{Dominio } (f) \cap \text{Dominio } (g) = R - \{1\}$

Dominio $(f + g)(x) = R - \{1\}$ que hace nulo el divisor

Recorrido Dominio $(f + g)(x) = R$



24. Ejercicio

Siendo las funciones $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ y $g(x) = x - 1$. Hallar la función $(f/g)(x)$

y su dominio

Solución

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^2 + 3}{x - 1}}{x - 1} = \frac{x^2 + 3}{(x - 1)^2};$$

Dominio $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1} = R \setminus \{1\}$; Dominio $g(x) = R$;

Dominio $(f + g)(x) = \text{Dominio } (f) \cap \text{Dominio } (g) = R - \{1\}$

Dominio $(f + g)(x) = R - \{1\}$ que hace nulo el divisor

3.2 Composición de funciones

La composición de funciones se representa por $\circ$ y se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ejemplo

Sea $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = 2x - 1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \text{exscribo la función } f \text{ y sustituyo la } x \text{ por } g(x)$

a) $(f \circ g) = f(g(x)) = (5(2x - 1) + 3) = (10x - 5 + 3) = 10x - 2; (f \circ g) = 10x - 2;$

b) $(g \circ f) = g(f(x)) = (2(5x + 3) - 1) = (10x + 6 - 1) = 10x + 5; (g \circ f) = 10x + 5;$

c) $(f \circ f) = f(f(x)) = (5(5x + 3) + 3) = (25x + 15 + 3) = 25x + 18; (f \circ g) = 25x + 18;$

25. Ejercicio

Siendo las funciones $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ y $g(x) = x - 1$. Hallar la función $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)$

y su dominio

Solución

$$(f \circ g)(x); \text{ sustituyo en } f(x) \text{ } x \text{ por } g(x); (f \circ g)(x) = \frac{(x-1)^2 + 3}{(x-1) - 1} = \frac{x^2 + 1 - 2x + 3}{x^2 - 2}$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 2};$$

$$\text{Dominio } (f \circ g)(x) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$(g \circ f)(x); \text{ sustituyo en } g(x) \text{ } x \text{ por } f(x); (g \circ f)(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1} - 1 = \frac{x^2 + 3}{x - 1} - \frac{x - 1}{x - 1} = \frac{x^2 + 3 - x + 1}{x - 1} = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1};$$

$$\text{Dominio } (g \circ f)(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

26. Ejercicio

Siendo las funciones $f(x) = \frac{x + 2}{2x + 1}$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Hallar la función $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)$

y su dominio

Solución

$$(f \circ g)(x); \text{ sustituyo en } f(x) \text{ } x \text{ por } g(x); (f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x} + 1} = \frac{(\sqrt{x} + 2) * (2\sqrt{x} - 1)}{(2\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)} =$$

$$\frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{4x - 1}$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{4x - 1};$$

$$\text{Dominio } (f \circ g)(x) = \mathbb{R} - \{1/4\}$$

$$(g \circ f)(x); \text{ sustituyo en } g(x) \text{ x por } f(x); (g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{2x+1}};$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{2x+1}};$$

$$\text{Dominio } (g \circ f)(x) = (-2, -\frac{1}{2})$$

3.3 Función inversa

Se define como función inversa de $f(x)$ a otra función $f^{-1}(x)$ que cumple $f(x) \cdot f^{-1}(x) = x$

$$\text{Si } f(a) = b; \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$

Una función $y = f(x)$ tiene inversa si y solo si a cada valor de y le corresponde un único valor de x

Ejemplo de cálculo de la función inversa

- Sea $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$; para hallar la inversa $f^{-1}(x) = y = \frac{2x+3}{x-1}$;
- Despejamos x ; $y(x-1) = 2x+3$; $yx - y = 2x+3$; $yx - 2x = y+3$;

$$x(y-2) = y+3; x = \frac{y+3}{y-2};$$

- Hacemos un cambio de variable $f^{-1}(x) = y = \frac{x+3}{x-2}$

- **Se ha de cumplir $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$**

$$\text{Para } x = 3 \quad f(3) = \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2 \cdot 3 + 3}{3-1} = \frac{9}{2} = 4,5;$$

$$\text{para } x = 4,5; \quad f^{-1}(4,5) = \frac{x+3}{x-2} \Rightarrow \frac{4,5+3}{4,5-2} = \frac{7,5}{2,5} = 3$$

- **Se ha de cumplir $(f \circ f^{-1})(x) = x$**

$$(f \circ f^{-1})(x) = \frac{2\left(\frac{x+3}{x-2}\right) + 3}{\left(\frac{x+3}{x-2}\right) - 1} = \frac{\frac{2x+6}{x-2} + \frac{3(x-2)}{x-2}}{\frac{x+3}{x-2} - \frac{x-2}{x-2}} = \frac{2x+6+3x-6}{x+3-x+2} = \frac{5x}{5} = x$$

27. Ejercicio

Calcula la función inversa de $f(x) = \frac{2x+1}{3}$;

$$(f \circ f^{-1}) \text{ y } (f^{-1} \circ f)$$

Solución

$$f(x) = y = \frac{2x+1}{3}; 3y = 2x+1; x = \frac{3y-1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = \frac{2\left(\frac{3x-1}{2}\right) + 1}{3} = \frac{3x}{3} = x;$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \frac{3\left(\frac{2x+1}{3}\right) - 1}{2} = \frac{2x}{2} = x;$$

28. Ejercicio

Calcula la función inversa de

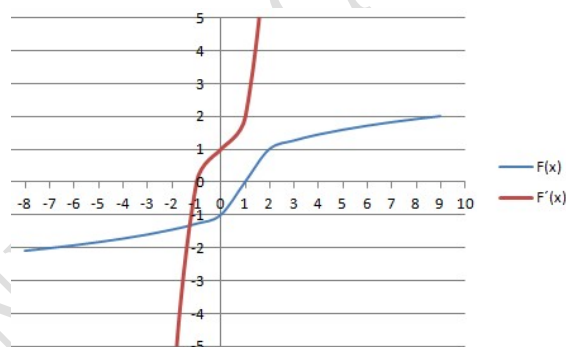
$$f(x) = \sqrt[3]{x-1};$$

Solución

$$f(x) = y = \sqrt[3]{x-1}; y^3 = (\sqrt[3]{x-1})^3;$$

$$y^3 = x-1; x = y^3 + 1;$$

$$f^{-1}(x) = x^3 + 1;$$



29. Ejercicio

Calcula la función inversa de $f(x) = x^2 + 1$;

Solución

$$f(x) = y = x^2 + 1; x^2 = y - 1; x = \pm\sqrt{y-1}; y = \pm\sqrt{x-1}$$

$$f^{-1}(x) = \text{no tienen función inversa}$$

dado que los valores de x que tienen dos valores distintos en y

30. Ejercicio

Calcula la función inversa de $f(x) = 3^{2x+1}$

Solución

$$f(x) = 3^{2x+1}; y = 3^{2x+1}$$

para hallar la función inversa aplico

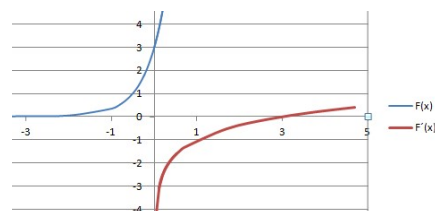
logaritmos

$$\log_3 y = \log_3 3^{2x+1}; \log_3 y = (2x+1) \log_3 3;$$

$$\log_3 y = (x+1)1; x = (\log_3 y) - 1;$$

hago el cambio de variables $y = (\log_3 x) - 1$

$$f^{-1}(x) = (\log_3 x) - 1;$$



31. Ejercicio

Calcula la función inversa de $f(x) = \log_3(x + 5)$

Solución

de $f(x) = \log_3(x + 5)$; $y = \log_3(x + 5)$;

por definición de logaritmo $3^y = x + 5$; $x = 3^y - 5$

hago el cambio de variables $y = 3^x - 5$

$$f^{-1}(x) = 3^x - 5;$$

Comprobación

$$(f \circ f^{-1})(x) = \log_3(3^x - 5 + 5) = \log_3 3^x = x \log_3 3 = x;$$

4 Limite de una función en un punto

El límite de una función real en un punto a , es el valor L al que se aproxima la función (la variable dependiente y) a medida que la variable independiente x se aproxima a un punto real a .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = (2^2 + 1) = 5; \text{ se lee, el límite de la función } x^2 + 1 \text{ cuando } x \text{ tiende a } 2 \text{ es } 5$$

En este caso es evidente pero en otros muchos casos no se puede obtener de forma tan sencilla. Aunque en este caso el límite de la función en el punto a coincide con el valor de la función en ese punto no siempre es así.

32. Ejercicio

Calcula los siguientes límites de las funciones

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x-2} \right); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1); \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 - 3x + 5}); \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0,1} (\log x)$$

Solución

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x-2} \right) \text{ para } x = 0; \quad \frac{3}{0-2} = -\frac{3}{2};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1); \text{ para } x = 0; \quad (\cos 0 - 1) = 1 - 1 = 0;$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 - 3x + 5}); \text{ para } x = 0; \quad \sqrt{0^2 - 3 \cdot 0 + 5} = \sqrt{5}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0,1} (\log x) \text{ para } x = 0,1; \quad \log 0,1 = \log \frac{1}{10} = \log 1 - \log 10 = 0 - 1 = -1$$

Límites laterales

En funciones que dan una indeterminación se calcula el límite de la función por la derecha y la izquierda.

La función tiene límite si y solo si los límites por la derecha e izquierda coinciden

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6} \right)$$
 Podemos ver el valor que toma la función en $x = 3$ como en

el ejercicio anterior

$$\frac{3^2 - 4 \cdot 3 + 3}{2 \cdot 3 - 6} = \frac{9 - 12 + 3}{6 - 6} = \frac{0}{0};$$

es una indeterminación, no existe

x	f(x)
2,8	0,9
2,993	0,9965
2,995	0,9975
2,997	0,9985
2,999	0,9995
3	#DIV/0!
3,001	1,0005
3,003	1,0015
3,005	1,0025
3,5	1,25
4	1,5

Para calcular el límite de la función damos valores próximos al punto por la derecha y por la izquierda.

Como podemos ver a medida que nos acercamos a 3 por la izquierda en valor se acerca a 1 y a medida que nos acercamos a 3 por la derecha el valor de la función tiende a 1

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6} \right) = 1;$$

33. Ejercicio

Calcula los siguientes límites de las funciones

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x^2}; \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2};$$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x} \text{ para } x = 0; f(x) = -\frac{3}{0}$$

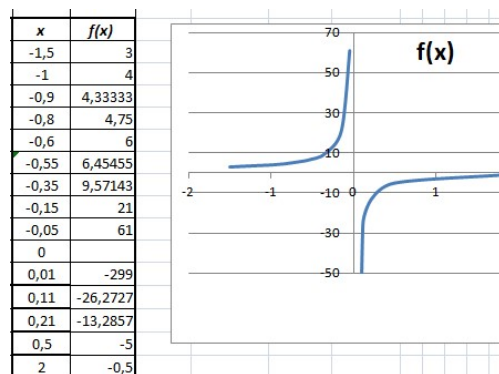
el límite será ∞ con signo + o -

Calculamos límite por la izquierda de $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{x} = +\infty$$

Calculamos límite por la derecha de $x=0$ y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-3}{x} = +\infty;$$



Al no coincidir el límite por la derecha y por la izquierda diremos que la función no tiene límite en $x = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x^2}$ para $x = 0$ $f(x) = -\frac{3}{0}$;

el limite sera ∞ con signo + o -

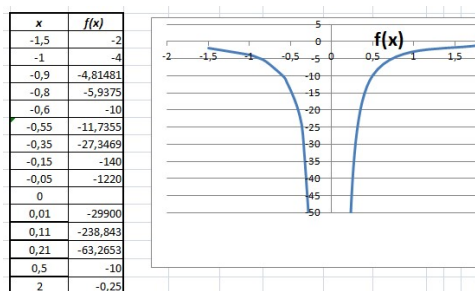
Calculamos el limite por la izquierda de $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{x^2} = -\infty$$

Calculamos el limite por la derecha de $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-3}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x^2} = -\infty$$



c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2}$; para $x = 0$; $f(x) = 1/0$

el limite sera ∞ con signo + o -

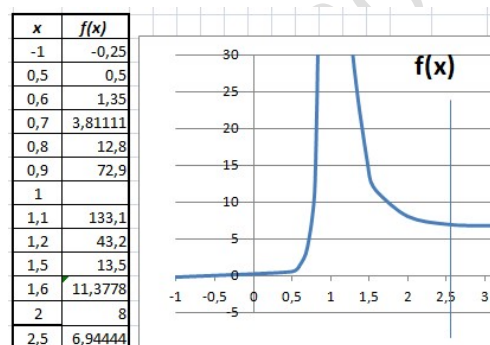
Calculamos el limite por la izquierda de $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

Calculamos el limite por la derecha de $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$



5 Limites de una función en el infinito

Consiste en hallar el valor de la función cuando x se hace muy grande o muy pequeño

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Rightarrow \text{para valores muy grandes de } x \text{ la función se aproxima a } L$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Rightarrow \text{para valores muy pequeños de } x \text{ la función se aproxima a } L$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \text{para valores muy grandes de } x \text{ la función tiende a } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \text{para valores muy pequeños de } x \text{ la función tiende a } -\infty$$

Funciones polinómicas

Siempre hay que analizar el monomio de mayor grado.

34. Ejercicio

Calcula los siguientes limites de las funciones

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 3x + 5$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^3 + 7x$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3x^4$

Solución

Para calcular estos límites hacemos lo mismo que para calcular el límite en un punto

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 3x + 5$; sustituyo $x = +\infty$; $-(+\infty)^2 + 3(+\infty) + 5 = -(+\infty) + \infty + 5$

Tienen mayor peso el $(+\infty)$ al cuadrado $\Rightarrow$ *que como tienen un $-$ delante*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 3x + 5 = -\infty;$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^3 + 7x$ sustituyo $5^3 + 7(+\infty) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^3 + 7x = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3x^4$, sustituyo $+\infty - 3(+\infty)^4$ tiene mayor peso el de mayor exponente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3x^4 = -\infty$$

35. Ejercicio

Calcula los siguientes límites de las funciones

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 3x + 5$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^3 + 7x$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3x^4$

Solución

Para calcular estos límites hacemos lo mismo que para calcular el límite en un punto

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 3x + 5$; sustituyo $x = -\infty$; $-(-\infty)^2 + 3(-\infty) + 5 = -(+\infty) + \infty + 5$

$(-\infty)^2$ sería $(-\infty)(-\infty) = +\infty$

Tienen mayor peso el $(-\infty)$ al cuadrado $\Rightarrow$ *que como tienen un $-$ delante*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 3x + 5 = -\infty;$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^3 + 7x$ sustituyo $5^3 + 7(-\infty) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} 5^3 + 7x = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3x^4$, sustituyo $-\infty - 3(-\infty)^4$ tiene mayor peso el de mayor exponente

$x^4 \Rightarrow (-\infty)^4 = +\infty$ como tienen un $-$ delante

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3x^4 = -\infty$$

36. Ejercicio

Calcula los siguientes límites de las funciones

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x^2 + 5$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x^2 + 5$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 + 5x$

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x^2 + 5$

Al ser polinómica la función solo miramos el monomio de mayor grado

$(+\infty)^3 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x^2 + 5 = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x^2 + 5$; $(-\infty)^3 = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x^2 + 5 = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x$; $(-\infty)^2 = +\infty$ como tienen un signo $-$ delante $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x = -\infty$$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 + 5x$; $(+\infty)^2 = +\infty$ como tienen un signo $-$ delante $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 + 5x = -\infty$$

Limite de Funciones racionales

Para calcular le limite del cociente de dos polinomios $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right)$ miramos el grado de los polinomios

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) \begin{cases} \text{grado de } P(x) > \text{grado } Q(x) \Rightarrow \text{limite} = \pm \infty \\ \text{grado de } P(x) = \text{grado } Q(x) \Rightarrow \text{limite} = a/b \\ \text{grado de } P(x) < \text{grado } Q(x) \Rightarrow \text{limite} = 0 \end{cases}$$

37. Ejercicio

Calcula los siguientes limites de las funciones

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3x} \right)$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3x^2} \right)$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{-4} \right)$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5 - x}{x + 5} \right)$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 2}{8x^2 + 3} \right)$

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3x} \right)$; mayor grado el denominador $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{+\infty} \right) = 0$;
 b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3x^2} \right)$; mayor grado el denominador $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3(+\infty)^2} \right) = 0$;
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{-4} \right)$; mayor grado el numerador $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(+\infty)^2 - 2}{-4} \right) = \frac{+\infty}{-4} = -\infty$;
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5 - x}{x + 5} \right)$; igual grado numerador y denominador $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5 - x}{x + 5} \right) = \frac{-1}{1} = -1$;
 e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 2}{8x^2 + 3} \right)$; igual grado numerador y denominador $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 2}{8x^2 + 3} \right) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$;

38. Ejercicio

Calcula los siguientes limites de las funciones

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 2}{x + 3} \right)$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{\sqrt{4x^2 + 3}} \right)$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^3 + 4x^2 + 1}}{5x + 1} \right)$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^5 + 4x^2 + 1}}{4x + 1} \right)$

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 2}{x + 3} \right)$; mayor grado el numerador $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 2}{x + 3} \right) = \frac{(-\infty)^2}{-\infty} = \frac{+\infty}{-\infty} = -\infty$;
 b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{\sqrt{4x^2 + 3}} \right)$; $\frac{x}{\sqrt{4x^2}} = \frac{x}{\sqrt{4x^2}} = \frac{x}{2x}$ igual grado $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{\sqrt{4x^2 + 3}} \right) = \frac{1}{2}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^3 + 4x^2 + 1}}{5x + 1} \right)$, $\frac{\sqrt[3]{8x^3}}{5x} = \frac{2x}{5x}$; igual grado $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^3 + 4x^2 + 1}}{5x + 1} \right) = \frac{2}{5}$;
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^5 + 4x^2 + 1}}{4x + 1} \right)$; $\frac{\sqrt[3]{8x^5}}{4x} = \frac{2x^{\frac{5}{3}}}{4x}$; mayor grado el numerador;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^5 + 4x^2 + 1}}{4x + 1} \right) = +\infty$

Limite de Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales en los números reales la base ha de ser >0 ;

Los limites de las funciones exponenciales cuando $x \rightarrow \infty$, dependen del valor de las base.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \begin{cases} \text{si } a > 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty; \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty \\ \text{si } 0 < a < 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0; \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow \infty} (1/4)^x = 0; \\ \text{si } a = 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty; \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1 \end{cases}$$

Los limites de las funciones exponenciales cuando $x \rightarrow -\infty$, dependen del valor de las base

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x \begin{cases} \text{si } a > 0 & \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^{(-\infty)} = \frac{1}{a^\infty} = 0; \\ a < 1 & \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x; \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/4)^x = (1/4)^{(-\infty)} = 4^\infty = \infty; \\ \text{si } a = 1 & \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty; \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1^x = 1 \end{cases}$$

39. Ejercicio

Calcula los siguientes limites de las funciones

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,5^x$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,5^x$

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,5^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{10}\right)^x = \left(\frac{5}{10}\right)^{+\infty} = 0$;
el denominador se hace mayor que el numerador

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,5^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{10}\right)^x = \left(\frac{5}{10}\right)^{-\infty} = \left(\frac{10}{5}\right)^\infty = +\infty$
el numerador se hace mayor que el denominador

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$;

40. Ejercicio

Calcula los siguientes limites de las funciones

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-x}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,5)^{-x}$

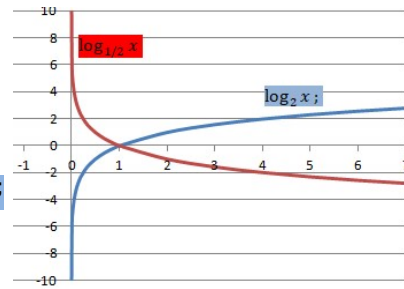
Solución

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^\infty = +\infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,5)^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{10}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{10}{5}\right)^x = \left(\frac{10}{5}\right)^\infty = \left(\frac{5}{10}\right)^\infty = 0$;

Limite de Funciones logarítmicas

Las funciones logarítmicas por definición la base ha de ser >0 y distinto de 1;



$$(si\ a > 1 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty; \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x = \infty; \\ \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = 0; \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow 0} \log_2 x = -\infty; \end{array} \right.$$

$$(si\ 0 < a < 1 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty; \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{0,5} x = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = 0; \text{ejemplo } \lim_{x \rightarrow 0} \log_{0,5} x = +\infty; \end{array} \right.$$

41. Ejercicio

Calcula el siguiente limite $\lim_{x \rightarrow +5} \log_2 2^x$;

Solución

$$\lim_{x \rightarrow +5} \log_2 2^x = \log_2 2^5 = y; \text{ por definicion de logaritmo } 2^5 = 2^y; y = 5;$$

$$\lim_{x \rightarrow +5} \log_2 2^x = 5;$$

42. Ejercicio

Calcula el siguiente limite $\lim_{x \rightarrow +2} \log_2 \left(\frac{3x+4}{x^2+1} \right)^5$;

Solución

$$\lim_{x \rightarrow +2} \log_2 \left(\frac{3x+4}{x^2+1} \right)^5 = \log_2 \left(\frac{3 \cdot 2 + 4}{2^2 + 1} \right)^5 = \log_2 \left(\frac{10}{5} \right)^5 = \log_2 2^5 = 5$$

43. Ejercicio

Calcula el siguiente limite $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2^{\sin x}}{1 + \cos x}$;

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}}{1 + \cos x} = \frac{e^{\sin \frac{\pi}{2}}}{1 + \cos \frac{\pi}{2}} = \left(\sin \frac{\pi}{2} = 1; \cos \frac{\pi}{2} = 0 \right) = \frac{e^1}{1 + 0} = e$$

6 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Límite de una suma de funciones

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Límite de un producto de funciones

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) * \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Límite de un cociente de funciones

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) / \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Límite de una potencia de funciones

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{si } f(x) > 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)^{g(x)}] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-1]*g(x)}$$

Límite del logaritmo de una función

$$\lim_{x \rightarrow a} [\log_b f(x)] = \log_b [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] \quad \text{Si } a > 0 \text{ y } F(x) > 0$$

7 Cálculo de Límites “Indeterminaciones”

Si f y g son dos funciones tales que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$. Se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c; \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) * \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b * c; \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c};$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = b^c$$

Las indeterminaciones se resuelven operando las expresiones que aparecen en el límite hasta llegar a otras que tienden a un valor real o a $+\infty$

1º tipo de indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Para resolver esta indeterminación dividimos numerador y denominador por el exponente mayor grado

44. Ejercicio

Calcula los siguientes límites de las funciones

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 2}{x + 3} \right); \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{\sqrt{4x^2 + 3}} \right); \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^3 + 4x^2 + 1}}{5x + 1} \right) \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^5 + 4x^2 + 1}}{4x + 1} \right)$$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 2}{x + 3} \right); \quad \text{mayor grado el numerador} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 2}{x + 3} \right) = \frac{(+\infty)^2}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty;$$

$$\text{Demostración} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 2}{x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} \right) = \left(\frac{2 - 0}{0 + 0} \right) = \frac{2}{0} = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+3}} \right); \frac{x}{\sqrt{4x^2}} = \frac{x}{2x} \text{ igual grado } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+3}} \right) = \frac{1}{2};$$

Demostración

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+3}} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x^2}}} \right) = \left(\frac{1 + \frac{3}{\infty}}{\sqrt{4 + \frac{3}{\infty^2}}} \right) \\ &= \left(\frac{1+0}{\sqrt{4+0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^3+4x^2+1}}{5x+1} \right), \frac{\sqrt[3]{8x^3}}{5x} = \frac{2x}{5x}; \text{ igual grado } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^3+4x^2+1}}{5x+1} \right) = \frac{2}{5};$$

Demostración

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^3+4x^2+1}}{5x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{8x^3+4x^2+1}{x^3}}}{\frac{5x+1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{8x^3}{x^3} + \frac{4x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}}{\frac{5x}{x} + \frac{1}{x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3}}}{5 + \frac{1}{x}} \right) = \frac{\sqrt[3]{8+0+0}}{5+0} = \frac{\sqrt[3]{8}}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^5+4x^2+1}}{4x+1} \right); \frac{\sqrt[3]{8x^5}}{4x} = \frac{2x^{\frac{5}{3}}}{4x}; \text{ mayor grado el numerador;}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^5+4x^2+1}}{4x+1} \right) = +\infty$$

Demostración

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8x^5+4x^2+1}}{4x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{8x^5+4x^2+1}{x^5}}}{\frac{4x+1}{x^{\frac{5}{3}}}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{8x^5}{x^5} + \frac{4x^2}{x^5} + \frac{1}{x^5}}}{\frac{4x}{x^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{8x^5}{x^5} + \frac{4x^2}{x^5} + \frac{1}{x^5}}}{\frac{4x^{\frac{-2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{8 + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^5}}}{\frac{4}{x^{\frac{5}{3}}} + 0} \right) = \frac{\sqrt[3]{8+0+0}}{\frac{4}{\infty} + 0} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\infty + 0} = \frac{2}{0} = \infty \end{aligned}$$

45. Ejercicio

Calcula el limite de la funcion $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - e^x}{1 + 2e^x} \right)$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - e^x}{1 + 2e^x} \right) = \frac{\text{limite del numerador} = \infty}{\text{limite del denominador} = \infty} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indeterminacion}$$

Para quitar la indeterminación dividimos numerador y denominador por e^x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{e^x} - \frac{e^x}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + \frac{2e^x}{e^x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{e^x} - \frac{e^x}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + \frac{2e^x}{e^x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 2} \right);$$

dado que $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 2} \right) = \frac{0 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}$$

2º tipo de indeterminacion $\frac{0}{0}$

Para resolver esta indeterminacion factorizamos y si hay raices racionalizamos

Para resolver indeterminaciones de funciones trigonometricas ha de tenerse en cuenta

Limites especiales $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k$;

46. Ejercicio

Calcula los siguientes limites de las funciones $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$;

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos 0}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}; \text{ indeterminado}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - (\cos x)^2}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x(1 + \cos x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{\sin 0}{1 + 1} = 1 \cdot \frac{0}{1} = 0;$$

47. Ejercicio

Calcula los siguientes limites de las funciones

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}$ si sustituyo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x} = \frac{\operatorname{tg} 0}{0} = \frac{0}{0}$ indeterminado;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x \cdot \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \right) = 3 \cdot \frac{1}{1} = 3;$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$; para resolverlo descomponemos en factores

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x + 1)} = \frac{1}{2};$$

48. Ejercicio

Calcula los siguientes límites de las funciones

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}; b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} \quad c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} = \frac{2^2 - 7 \cdot 2 + 10}{2^2 - 4} = \frac{0}{0}; \text{ descomponemos en factores}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-5)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-5)}{(x+2)} = -\frac{3}{4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 4}{2^2 - 2 - 2} = \frac{0}{0};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x+1)} = \frac{0}{3} = 0;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(-1)^2 - 1}{(-1)^2 + 2(-1) + 1} = \frac{1 - 1}{1 - 2 + 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)}{(x+1)} = \frac{-2}{0};$$

tenemos que ver si va a ∞ a $-\infty$ o no existe. Hallamos límite por la + y -

$$\text{límite por la izquierda } x = -1,1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)}{(x+1)} = \frac{-1,1-1}{-1,1+1} = \frac{-2,1}{-0,1} \text{ positivo}$$

$$\text{límite por la derecha } x = -0,9 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)}{(x+1)} = \frac{-0,9-1}{-0,9+1} = \frac{-1,9}{+0,1} \text{ negativo}$$

Límite por la derecha es distinto del límite por la izquierda no existe límite

49. Ejercicio

Calcula los siguientes límites de las funciones

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1-x}}$$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \frac{0}{1 - \sqrt{1-0}} = \frac{0}{0} \text{ multiplicamos por el conjugado}$$

usaremos la identidad notable $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - (\sqrt{1-x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - 1 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{+x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{1-x}) = 2;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1-x}} = \frac{0}{1 - \sqrt{1-0}} = \frac{0}{0} \text{ multiplicamos por el conjugado}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1-x}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \sqrt{1-x})}{1 - (\sqrt{1-x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \sqrt{1-x})}{1 - 1 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \sqrt{1-x})}{+x} = \lim_{x \rightarrow 0} x(1 + \sqrt{1-x}) = 0(1 + 1) = 0;$$

50. Ejercicio

Calcula los siguientes límites de las funciones

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{1-\sqrt{2x-1}}$$

Solución

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2} = \frac{0}{0}; \text{ multiplicamos por el conjugado}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - 4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x+2}+2)} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{2+2}+2)} = \frac{1}{4};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{1-\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{1+8}-3}{1-\sqrt{2 \cdot 1-1}} = \frac{0}{0} \text{ multiplicamos por los conjugados}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{1-\sqrt{2x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3} \cdot \frac{1+\sqrt{2x-1}}{1+\sqrt{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8})^2 - 9}{1 - (\sqrt{2x-1})^2} \cdot \frac{1+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+8}+3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+8-9}{1-(2x-1)} \cdot \frac{1+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+8}+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{-2x+1} \cdot \frac{1+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+8}+3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{-2(x-1)} \cdot \frac{1+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+8}+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\sqrt{2x-1}}{-2(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{1+\sqrt{2 \cdot 1-1}}{-2(\sqrt{1+8}+3)} =$$

$$\frac{1+1}{-2(\sqrt{1+8}+3)} = \frac{2}{-2 \cdot 6} = -\frac{1}{6}$$

Podríamos comprobar el valor de la función a la derecha e izquierda de 1 y vemos que el valor es correcto

51. Ejercicio

$$\text{Calcula el límite de la función } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{8-8}{\sqrt[3]{8}-2} = \frac{0}{2-2} = \frac{0}{0}; \text{ indeterminado}$$

Tendríamos que racionalizar pero como es una raíz cubica usamos la expresion suma y diferencia de cubos

$$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2^2}{(\sqrt[3]{x})^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2}{(\sqrt[3]{x})^3 + 2(\sqrt[3]{x})^2 + 2(\sqrt[3]{x}) + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4}{x-8}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} ((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4) = ((\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4) = 4 + 4 + 4 = 12;$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = 4;$$

Comprobación

por la izquierda $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 7,9} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = \frac{7,9 - 8}{\sqrt[3]{7,9} - 2} = \frac{-0,1}{-0,0084} = 11,95;$

por la izquierda $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 8,1} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = \frac{8,1 - 8}{\sqrt[3]{8,1} - 2} = \frac{+0,1}{+0,0083} = 12,05;$

52. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} * \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + 1 * \sqrt[3]{x} + 1^2}{(\sqrt[3]{x})^2 + 1 * \sqrt[3]{x} + 1^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 1}{(x - 1)(\sqrt[3]{x})^2 + 1 * \sqrt[3]{x} + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt[3]{x})^2 + 1 * \sqrt[3]{x} + 1^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + 1 * \sqrt[3]{x} + 1^2}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt[3]{1})^2 + 1 * \sqrt[3]{1} + 1^2} = \frac{1}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{3};$$

Comprobación

por la derecha $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0,9} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt[3]{0,9} - 1}{0,9 - 1} = \frac{-0,0345}{-0,1} = 0,3451;$

por la izquierda $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1,1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt[3]{1,1} - 1}{1,1 - 1} = \frac{0,03228}{0,1} = 0,3228;$

3º tipo de indeterminación $\infty - \infty$

Para resolver esta indeterminación usamos distintos metodos:

- Por **comparación de infinitos**, cuando podemos apreciar a simple vista el grado de los infinitos
- **Operando** la diferencia que origina la indeterminación y calculando después el límite que quede
- Cuando hay **raíces** se debe multiplicar y dividir por el **conjugado** para hacer desaparecer la raíz que dificulta el cálculo del límite

53. Ejercicio

Calcula los siguientes límites de las funciones

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 - 5x^3 + 7x \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 5x^3; \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5x^3$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 - 5x^3 + 7x = \infty^4 - 5\infty^3 + 7\infty = +\infty \text{ pues corresponde al de mayor grado}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 5x^3 = \infty^2 - 5\infty^3 = -\infty^3 = -(+\infty) =$$

$-\infty$ pues corresponde al de mayor grado

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5x^3 = (-\infty)^2 - 5(-\infty)^3 = +\infty \text{ pues corresponde al de mayor grado}$$

54. Ejercicio

Calcula el límite de la función

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4}$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{1}{0} - \frac{4}{0} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4}; \text{ operamos factor comun } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{(x-2)(x+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{2x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-2x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x+2)} = -\frac{1}{4}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = -\frac{1}{4};$$

Comprobación

$$\text{límite por la izquierda } \lim_{x \rightarrow 1,99} \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{1}{1,99-2} - \frac{2(1,99)}{1,99^2-4} = -0,2506$$

$$\text{límite por la derecha } \lim_{x \rightarrow 2,01} \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{1}{2,01-2} - \frac{2(2,01)}{2,01^2-4} = -0,249377$$

55. Ejercicio

$$\text{Calcula el límite de la función } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} + \frac{1-2x}{2}$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} + \frac{1-2x}{2} = \infty + \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} + \frac{1-2x}{2}; \text{ operamos comun denominador } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x^2+1)}{2x} + \frac{x(1-2x)}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x^2+1)}{2x} + \frac{x(1-2x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x^2+1) + x(1-2x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2 + x - 2x^2}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{2x} = \text{numerador y denominador tienen el mismo grado}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{2x} = \frac{1}{2};$$

$$\text{Otra forma divido los dos terminos por } x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x/x + 2/x}{2x/x} = \frac{1+0}{2} = 1/2$$

56. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1+x}{x^2}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1+x}{x^2} = \frac{1}{0} - \frac{1+0}{0} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1+x}{x^2}; \text{ operamos factor comun } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot x}{x^2} - \frac{1+x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot x - 1 - x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

57. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} = \frac{2}{1^2 - 1} - \frac{1}{1 - 1} = \frac{2}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$$

$$\text{operamos } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{1(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - (x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x - 1}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x + 1)} = \frac{-1}{(1 + 1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} = -\frac{1}{2};$$

58. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - x$;

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - x = \infty - \infty;$$

multilicmos y dividimos por el conjugado $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - x$;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - x} + x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x) \cdot (\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x}$$

Para resolverlo dividimos numerador y denominador por la variable con mayor grado x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} + \frac{x}{x}}; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} = \frac{-1}{\sqrt{1 - 0} + 1} = \frac{-1}{2}; \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - x = -\frac{1}{2};$$

59. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}$;

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}) * \frac{(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})}{(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}) * (\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})}{(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2})^2 - (\sqrt{x^2 + x})^2}{(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2})^2 - (\sqrt{x^2 + x})^2}{(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2 - x^2 - x}{(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 - x}{(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})}$$

Para resolverlo dividimos numerador y denominador por la variable con mayor grado x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{x} - 1}{(\sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{x} - 1}{(\sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}})} = \frac{0 - 1}{(\sqrt{1 - 0} + \sqrt{1 + 0})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x} = \frac{1}{2}$$

4º tipo de indeterminacion $0 * \infty$

Para resolver esta indeterminacion la convertiremos en otros dos tipos que ya sabemos

$$\text{resolver } \frac{\infty}{\infty} \text{ o } \frac{0}{0}$$

60. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x - 1} * \sqrt{3x^2 + 1}$;

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x - 1} * \sqrt{3x^2 + 1} = \frac{2}{2(\infty) - 1} * \sqrt{3\infty^2 + 1} = 0 * \infty$$

$$\text{operamos } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x - 1} * \sqrt{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{3x^2 + 1}}{2x - 1} \text{ hemos transformado en } \infty/\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{3x^2 + 1}}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{3 + \frac{1}{x^2}}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{2\sqrt{3 + 0}}{2 - 0} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x - 1} * \sqrt{3x^2 + 1} = \sqrt{3}$$

61. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{1}{(x^2-1)}$;

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{1}{(x^2-1)} = (1-1) * \frac{1}{(1-1)} = 0 * \infty;$$

$$\text{operamos } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{1}{(x^2-1)} = \frac{1}{2};$$

62. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{x \rightarrow \infty} x * 3^x$;

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x * 3^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x * \frac{1}{3^x} = \infty * 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x * 3^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x * \frac{1}{3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3^x} = \frac{\infty}{\infty} = 0, \text{ dado que } 3^x \text{ crece mas que } x$$

5º tipo de indeterminacion n^∞ ($0^\infty, 1^\infty, \infty^0$)

Para resolver esta indeterminacion la convertiremos en otros dos tipos que ya sabemos

$$\text{resolver } \frac{\infty}{\infty} \text{ o } \frac{0}{0};$$

$$\text{Definicion del número } e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e; \text{ tambien } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e;$$

Para la resolucion de indeterminaciones 1^∞ podemos usar la siguiente propiedad

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)-1]*g(x)}$$

63. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{ax}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{ax} = 1^\infty; \text{ aplicamos la definicion de } (e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{\frac{-ax}{-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-a} = e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{ax} = \frac{1}{e^a}$$

Otra forma de resolverlo

Aplicando formula $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)^{g(x)}] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-1] \cdot g(x)}$

$$e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-1] \cdot g(x)}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{ax} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x} - 1\right) \cdot ax\right]} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x} - 1\right) \cdot ax\right]} =$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [(-1) \cdot a]} = e^{-a} = \frac{1}{e^{-a}}$$

64. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n-1}$

Solución

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n-1} = 1^\infty \text{ aplicamos la definicion de } (e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n-1} = \text{para poder usar la definicion multiplico y divido en exponente}$$

$$\text{por } (n+2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{(n-1) \cdot \frac{n+2}{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{(n+2) \cdot \left(\frac{n-1}{n+2}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+2}}$$

$$\text{dado que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+2} = 1 \Rightarrow e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+2}} = e^1 = e;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n-1} = e$$

Otra forma de resolverlo

Aplicando formula $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)^{g(x)}] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-1] \cdot g(x)}$

$$e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-1] \cdot g(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n-1} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+2} - 1\right) \cdot (n-1)\right]} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+2}} = e^1 = e$$

65. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + x}{4x^3 + 2}\right)^{\frac{2x+1}{x^2}}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + x}{4x^3 + 2}\right)^{\frac{2x+1}{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\frac{\infty}{\infty}} \text{ resolviendo limite de la base y del exponente}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + x}{4x^3 + 2}\right)^{\frac{2x+1}{x^2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{0}{1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1;$$

66. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4} \right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4} \right)^{\frac{x^2}{x+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^{\frac{\infty}{\infty}} \text{ resolviendo limite de la base y del exponente}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4} \right)^{\frac{x^2}{x+1}} = 1^{\infty}$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)-1] \cdot g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x+1}{2x+4} - 1 \right] \cdot \frac{x^2}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x+1-(2x+4)}{2x+4} \right] \cdot \frac{x^2}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-3}{2x+4} \right] \cdot \frac{x^2}{x+1}}$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-3x^2}{(2x+4)(x+1)} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-3x^2}{2x^2+6x+4} \right]} = e^{-\frac{3}{2}} = e^{\frac{2}{3}};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4} \right)^{\frac{x^2}{x+1}} = e^{\frac{2}{3}}$$

67. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x^2-1}}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x^2-1}} = 1^{\infty}$$

$$\text{Aplicamos } e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)-1] \cdot g(x)}; \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x} - 1 \right] \cdot \frac{1}{x^2-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1-x}{x} \right] \cdot \frac{1}{x^2-1}}$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1-x}{x^3-x} \right]} = e^{\frac{0}{0}} \text{ resolvemos la indeterminacion } \frac{0}{0}, \left[\frac{1-x}{x^3-x} \right] = \frac{1-x}{x(x-1)(x+1)} =$$

$$\frac{-(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x^2+1}; \Rightarrow e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{-1}{x^2+1} \right]} = e^{-\frac{1}{2}} = e^2$$

68. Ejercicio

Calcula el limite de la función $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+1}{3} \right)^{\frac{x+1}{x-1}}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+1}{3} \right)^{\frac{x+1}{x-1}} = 1^{\infty}$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)-1] \cdot g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2x+1}{3} - 1 \right] \cdot \frac{x+1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2x-2}{3} \right] \cdot \frac{x+1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(2x-2)(x+1)}{3(x-1)} \right]}$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2(x-1)(x+1)}{3(x-1)} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2(x+1)}{3} \right]} = e^{\frac{4}{3}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+1}{3} \right)^{\frac{x+1}{x-1}} = e^{\frac{4}{3}}$$