

Límites de sucesiones y funciones

Contenido

1	SUCESIONES DE NÚMEROS REALES.....	2
1.1	SUCESIONES MONÓTONAS.....	2
1.2	SUCESIONES ACOTADAS	2
1.3	TIPOS DE SUCESIONES SEGÚN SU LÍMITE.....	4
2	LÍMITES DE UNA SUCESIÓN.....	5
3	FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL	8
4	LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.....	10
4.1	LÍMITE DE LA FUNCIÓN EN UN PUNTO	10
4.2	LÍMITE DE LA FUNCIÓN EN EL INFINITO	10

1 Sucesiones de números reales

Se llama sucesión toda aplicación en la que para cada valor de un número natural le corresponde un número real

$a_n = \frac{2n+1}{n+10}$ para cada valor de n a toma un valor distinto:

$$\text{Para } n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 10} = \frac{3}{11};$$

$$\text{Para } n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4 + 10} = \frac{9}{14}$$

1.1 Sucesiones monótonas

Estrictamente crecientes (crecientes):

Se cumple que cada término es mayor que el anterior $a_{n+1} > a_n$

Estrictamente decrecientes (decrecientes):

Se cumple que cada término es menor que el anterior $a_{n+1} < a_n$

1.2 Sucesiones acotadas

Una sucesión está acotada superiormente si existe un número real mayor o igual que todos los términos de la sucesión

Una sucesión está acotada inferiormente si existe un número real menor o igual que todos los términos de la sucesión

Una sucesión se dice que está acotada si lo está superior e inferiormente.

1. Ejercicio

Dada la sucesión de término general $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; Calcular

a) Sus tres primeros términos

b) Hallar el lugar que ocupa el término $a_s = \frac{15}{17}$

c) Demuestra que es creciente

d) Halla si es que existe una cota superior e inferior

Solución

a) Sus tres primeros términos:

$$a_1 = \frac{1-1}{1+1} = 0; a_2 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}; a_3 = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4}$$

b) Hallar el lugar que ocupa el término $a_s = \frac{15}{17}$ ocupará el término 16 pues $a_{16} = \frac{16-1}{16+1} = \frac{15}{17}$

c) Demuestra que es creciente

Para ver si es creciente $\frac{n-1}{n+1}$ comprobamos si se cumple $a_{n+1} > a_n$

$$\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} > \frac{n-1}{n+1}; \Rightarrow \frac{n}{n+2} > \frac{n-1}{n+1}$$

multiplicamos $n(n+1) > (n-1)(n+2)$;

$n^2 + n > n^2 + n - 2$; quedando $0 > -2$; se cumple

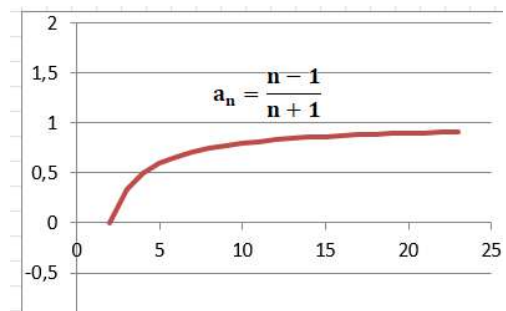
Es creciente pues se cumple $a_{n+1} > a_n$

d) Halla si es que existe una cota superior e inferior

Existe una cota inferior pues todos los terminos son mayores que 0

Se cumple que cada termino es mayor $M \leq a_n$; Para $M = 0$

Se cumple que cada termino es menor $M > a_n$ Para $M = 1$



2. Ejercicio

Se considera la siguiente sucesion definida por recurrencia $a_1 = 3$; $a_{n+1} = 2a_n$; Calcular

a) Calcular sus 4 primeros terminos y di de que tipo es

b) Halla su termino general

c) Demuestra que es monotona creciente

d) Demuestra que no está acotada superiormente

Solución

a) Calcular sus 4 primeros terminos y di de que tipo es

$a_1 = 3$; $a_2 = 2 * 3 = 6$; $a_3 = 2 * 6 = 12$; $a_4 = 2 * 12 = 24$

o lo que es lo mismo $a_1 = 3 * 2^0$; $a_2 = 3 * 2^1 = 6$; $a_3 = 3 * 2^2 = 12$; $a_4 = 3 * 2^3 = 24$

Es una progresión geométrica $a_n = 2 * a_{n-1}$;

cada termino se obtien multiplicando el anterior por una constantee

b) Halla su termino general; $a_n = 3 * 2^{n-1}$;

c) Demuestra que es monotona creciente

Para ver si es creciente $a_n = 3 * 2^{n-1}$

comprobamos si se cumple $a_{n+1} > a_n$

$3 * 2^{(n+1)-1} > 3 * 2^{n-1}$; $3 * 2^{n+1-1} > 3 * 2^{n-1}$;

$2^n > 2^{n-1}$; $n \log 2 > (n-1) \log 2$;

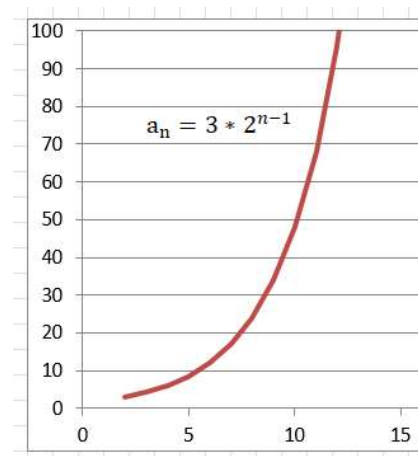
Se cumple que $n > n-1$; Monotona creciente

d) Demuestra que no está acotada superiormente

$a_n = 3 * 2^{n-1}$ $k \geq a_n$; $k \geq 3 * 2^{n-1}$

$\frac{k}{3} \geq 2^{n-1}$; $\log \frac{k}{3} \geq \log 2^{n-1}$; $\log \frac{k}{3} \geq (n-1) \log 2$

$n-1 \geq \frac{\log \frac{k}{3}}{\log 2}$ $3 * 2^{n-1}$



1.3 Tipos de Sucesiones según su limite

Sucesiones convergentes: Son aquellas que tienen a un número real o lo que es lo mismo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \text{ (número real)}$$

Sucesiones divergentes: Son aquellas que tienen al infinito $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$;

Otras sucesiones: Son aquellas que no tienen a un límite ni finito ni infinito

3. Ejercicio

Comprobar que el límite de la sucesión $a_n = \frac{2n+1}{n+10}$ tiende a 2

Solución

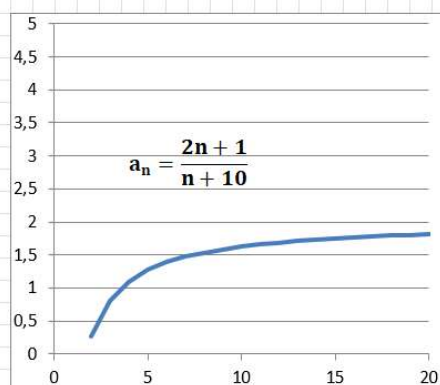
Doy valores suficientemente altos y compruebo que tiende a 2

Si el límite es 2 se ha de cumplir $a_n - 2 < \epsilon$;

$$\left| \frac{2n+1}{n+10} - 2 \right| < \epsilon; \frac{2n+1-2n-20}{n+10} < \epsilon;$$

$$\frac{-19}{\epsilon} - 10 < n; n > \frac{-19}{\epsilon} - 10$$

x	a _n
1	0,273
6	0,813
11	1,095
16	1,269
21	1,387
26	1,472
31	1,537
36	1,587
41	1,627
46	1,661
51	1,689
56	1,712
61	1,732
66	1,75
71	1,765
76	1,779
81	1,791
86	1,802
91	1,812
96	1,821
101	1,829
106	1,836
111	1,843
1E+06	2



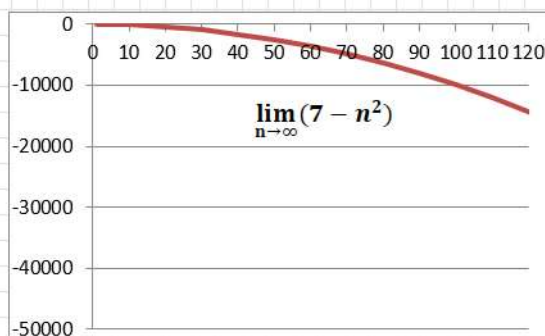
4. Ejercicio

Calcular el límite de las siguientes sucesiones a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (7 - n^2)$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3 + 2n + 1}{2n^2 + n + 10}$

Solución

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (7 - n^2) = -\infty$

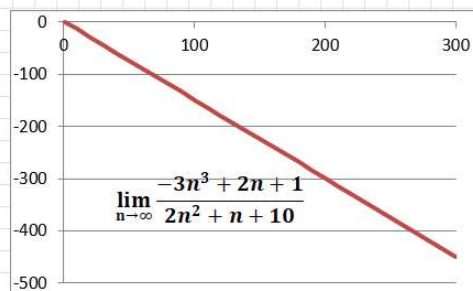
x	y
1	6
10	-93
20	-393
30	-893
40	-1593
50	-2493
60	-3593
70	-4893
80	-6393
90	-8093
100	-9993
110	-12093
120	-14393
130	-16893



$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3 + 2n + 1}{2n^2 + n + 10};$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3 + 2n + 1}{2n^2 + n + 10} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{10}{n^3}} \\ &= \frac{-3 + 0 + 0}{0 + 0 + 0} = -\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3 + 2n + 1}{2n^2 + n + 10} &= -\infty \end{aligned}$$

x	a _n
1	0
10	-13,54
20	-28,87
30	-43,99
40	-59,05
50	-74,09
60	-89,12
70	-104,1
80	-119,1
90	-134,2
100	-149,2
110	-164,2
120	-179,2
130	-194,2
140	-209,2
150	-224,2
160	-239,2
170	-254,2
180	-269,2
190	-284,2
200	-299,2



2 Límites de una sucesión

Expresiones indeterminadas o indeterminaciones: $\infty - \infty$; $0 * \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 0^0 ; ∞^0 ; 1^∞ ;

1^∞ ; El límite de la sucesión $a_n^{b_n}$ es igual a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 1^\infty$ Indeterminado

Definición del número e $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$; también $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$;

Para la resolución de indeterminaciones 1^∞ podemos usar la siguiente propiedad

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] \cdot g(x)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

5. Ejercicio

Calcular los límites a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 - 8n}{\sqrt{3}}\right)$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2 + 3n + 5)(3n^2 + 5n - 6)}{n(5n^3 - n)}$

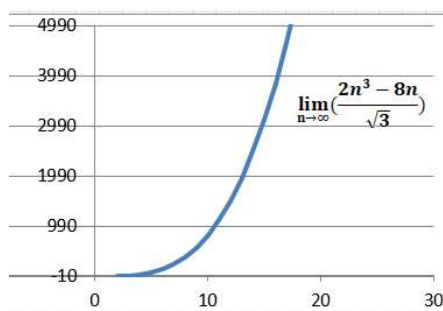
Solución

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 - 8n}{\sqrt{3}}\right);$

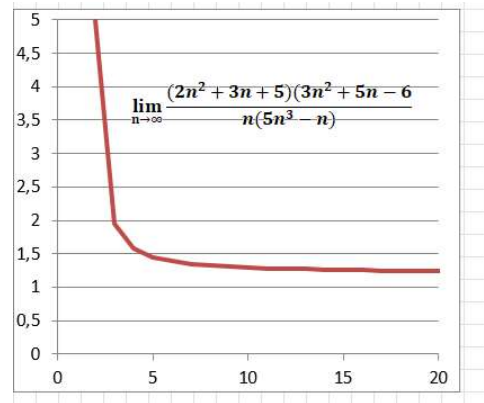
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 - 8n}{\sqrt{3}}\right) = \infty - \infty; \text{ indeterminación}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2n^3}{n^3} - \frac{8n}{n^3}}{\frac{\sqrt{3}}{n^3}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - \frac{8}{n^2}}{\frac{\sqrt{3}}{n^3}}\right) = \left(\frac{2 - \frac{8}{\infty^2}}{\frac{\sqrt{3}}{\infty^3}}\right) = \frac{2 - 0}{0}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2n^3}{n^3} - \frac{8n}{n^3}}{\frac{\sqrt{3}}{n^3}}\right) = +\infty$$



$$\begin{aligned}
 b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2 + 3n + 5)(3n^2 + 5n - 6)}{n(5n^3 - n)} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2 + 3n + 5)(3n^2 + 5n - 6)}{n(5n^3 - n)} \\
 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 + 19n^3 + 18n^2 + 7n - 30}{5n^4 - n^2} \\
 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6n^4}{n^4} + \frac{19n^3}{n^4} + \frac{18n^2}{n^4} + \frac{7n}{n^4} - \frac{30}{n^4}}{\frac{5n^4}{n^4} - \frac{n^2}{n^4}} = \frac{6}{5} = 1,2;
 \end{aligned}$$



6. Ejercicio

Calcular los limites a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^3 + 3n^2 - 2)(2n^2 - 3n + 2)}{6n^6 + 1}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^{2n^2+n}$

Solución

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6n^6}{n^6} - \frac{3n^4}{n^6} - \frac{3n^3}{n^6} + \frac{2n^2}{n^6} + \frac{6n}{n^6} - \frac{4}{n^6}}{\frac{6n^6}{n^6} - \frac{1}{n^6}} = \frac{6}{6} = 1;$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^{2n^2+n} = 1^\infty$$

Aplicamos la formula: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)-1] \cdot g(x)}$

Calculamos ; $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] \cdot g(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2n+3}{2n-3} \right) - 1 \right) (2n^2 + n);$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{6}{2n-3} \right) (2n^2 + n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12n^2 + 6n}{2n-3} \right) = \infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3} \right)^{2n^2+n} = e^\infty$$

7. Ejercicio

Calcular los limites a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n}{n^3 + n^2}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)(-3n+2)+3}{2n^2 - n - 7}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n+3}{4n+3}}$;

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{(8n+3)(-n+3)}{n^2 - 3n + 6}}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{n-7}\right)^{\frac{3n+1}{2n+1}}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{2n+1}\right)^{\frac{3n^2+3}{n^2}}$

Solución

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n}{n^3 + n^2} = \frac{\infty}{\infty}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^3} + \frac{2n}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} + \frac{n^2}{n^3}} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)(-3n+2)+3}{2n^2 - n - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n^2 - 5n + 6 + 3}{2n^2 - n - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n^2 - 5n + 9}{2n^2 - n - 7} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n^2 - 5n + 9}{2n^2 - n - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-6n^2}{n^2} - \frac{5n}{n^2} + \frac{9}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} - \frac{7}{n^2}} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+3}{4n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{4n+3}\right)^{1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{4n+3}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} 1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{4n+3}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{4n+3}\right) = \frac{1}{4};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+3}{4n+3}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{(8n+3)(-n+3)}{n^2-3n+6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(8n+3)(-n+3)}{n^2-3n+6}\right)^{\frac{1}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-8n^2+21n+9}{n^2-3n+6}\right)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2;$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{n-7}\right)^{\frac{3n+1}{2n+1}}; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{n-7}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1}}; \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{n-7} = 2 \end{cases}; 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{n-7}\right)^{\frac{3n+1}{2n+1}} = 2\sqrt{2}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{2n+1}\right)^{\frac{3n^2+3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{2n+1}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+3}{n^2}} \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2+n}{(2n+1)(2n+1)}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+3}{n^2} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2+n}{4n^2+4n+1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+3}{n^2} = 3 \end{cases}; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{2n+1}\right)^{\frac{3n^2+3}{n^2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{2n+1}\right)^{\frac{3n^2+3}{n^2}} = \frac{1}{8}$$

8. Ejercicio

$$\text{Calcular los límites a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{2n+1}; \text{ b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+n-3}{2n^2-n-3}\right)^{3n+\frac{1}{3}} \text{ c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n^2+2n+1};$$

Solución

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} 2n+1} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{2n+3} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 2n+1 = \infty \end{cases} \Rightarrow 1^\infty$$

$$\text{Aplicamos formula } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)-1] \cdot g(x)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{2n+1} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n-3}{2n+3}-1\right] \cdot (2n+1)}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{2n-3}{2n+3}-1\right] \cdot (2n+1)\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{2n-3-2n-3}{2n+3}\right] \cdot (2n+1)\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{-6}{2n+3}\right] \cdot (2n+1)\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{-12n-6}{2n+3}\right]\right) = -6;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{2n+1} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2n-3}{2n+3}-1\right] \cdot (2n+1)} = e^{-6}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n - 3}{2n^2 - n - 3} \right)^{3n + \frac{1}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n - 3}{2n^2 - n - 3} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} 3n + \frac{1}{3}} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{2n^2 - n - 3} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 3n + \frac{1}{3} = \infty \end{cases} \Rightarrow 1^\infty$$

Aplicamos formula $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)-1] \cdot g(x)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n - 3}{2n^2 - n - 3} \right)^{3n + \frac{1}{3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n^2 + n - 3}{2n^2 - n - 3} - 1 \right] \cdot \left(3n + \frac{1}{3} \right)};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{2n^2 + n - 3 - 2n^2 + n + 3}{2n^2 - n - 3} \right] \cdot \left(3n + \frac{1}{3} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{2n}{2n^2 - n - 3} \right] \cdot \left(\frac{9n + 1}{3} \right) \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{2n}{2n^2 - n - 3} \right] \cdot \left(\frac{9n + 1}{3} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{18n^2 + 2n}{6n^2 - 3n - 9} \right] \right) = \frac{18}{6} = 3;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n - 3}{2n^2 - n - 3} \right)^{3n + \frac{1}{3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n^2 + n - 3}{2n^2 - n - 3} - 1 \right] \cdot \left(3n + \frac{1}{3} \right)} = e^3$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 1} \right)^{n^2 + 2n + 1}; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 1} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 2n + 1}$$

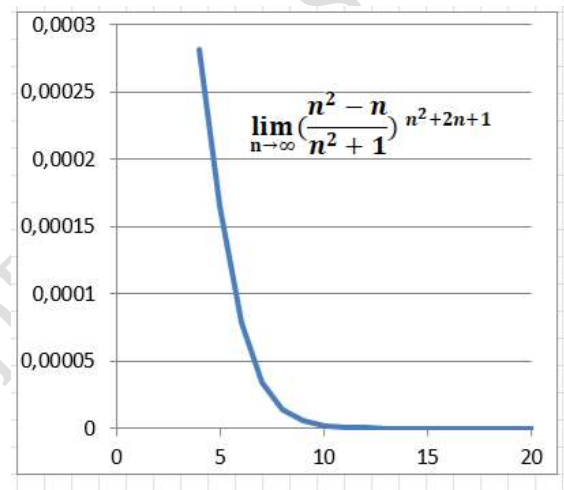
$$= \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n^2 + 1} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 2n + 1 = \infty \end{cases} \Rightarrow 1^\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 1} \right)^{n^2 + 2n + 1} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2 - n}{n^2 + 1} - 1 \right] \cdot (n^2 + 2n + 1)};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{n^2 - n - n^2 - 1}{n^2 + 1} \right] \cdot (n^2 + 2n + 1) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^3 - 3n^2 - 3n - 1}{n^2 + 1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 1} \right)^{n^2 + 2n + 1} = e^{-\infty} = 0;$$



3 Funciones reales de variable real

Una funcion real f de variable real es una relacion que asocia a cada numero real x un único numero real $y = f(x)$; x variable independiente ; y variable dependiente

Dominio es el conjunto de valores de x que puede tomar la funcion $f(x)$

Recorrido son los valores reales de y que tona la funcion

9. Ejercicio

Estudiar el dominio de las siguientes funciones a) $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^2 + 6}{8}$; b) $f(x) = 2x + \sqrt{3x - \frac{6}{5}}$

$$c) f(x) = \sqrt{\frac{1}{\ln x}}; d) f(x) = \log(x^2 + 3x - 4); e) f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$$

Solución

a) $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^2 + 6}{8}; D = \mathbb{R};$

b) $f(x) = 2x + \sqrt{3x - \frac{6}{5}};$ la función en $\mathbb{R}$ solo es válida para $3x - \frac{6}{5} \geq 0; 3x \geq \frac{6}{5}; x \geq \frac{2}{5};$

$$D = \mathbb{R} - (x \geq \frac{2}{5})$$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\ln x}};$ la función en $\mathbb{R}$ solo es válida

para $\frac{1}{\ln x} \geq 0; \Rightarrow \ln x > 0; x > 1; D = (0, \infty)$

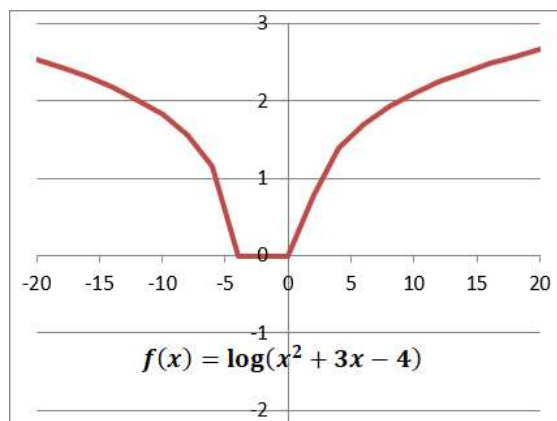
d) $f(x) = \log(x^2 + 3x - 4);$

$\log(x^2 + 3x - 4) > 0; x^2 + 3x - 4 = 0;$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} x = -4; \\ x = 1; \end{cases}$$

$$D = (-\infty, -4) \cup (1, \infty)$$



e) $f(x) = \frac{1}{1 - e^x};$ la función en $\mathbb{R}$ no es válida para $1 - e^x = 0; \Rightarrow e^x = 1$ para $x = 0;$

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty);$$

10. Ejercicio

Estudiar el dominio de las siguientes funciones a) $f(x) = x|x + 1| - 3x^2;$ b) $f(x) = \frac{|x + 1| + x}{|x + 1| - x}$

c) $f(x) = x + 2 \cos x;$ d) $f(x) = \frac{2x}{1 + \sin x}$

Solución

a) $f(x) = x|x + 1| - 3x^2;$ La función es real para todo valor de $x; D = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{|x + 1| + x}{|x + 1| - x};$ la función no existe en $\mathbb{R}$ para $|x + 1| - x = 0; |x + 1| = x;$

$$\begin{cases} x + 1 = x \\ -(x + 1) = x \end{cases} \begin{cases} 1 = 0; \text{ si } x \geq 0 \\ 2x = 1; x = \frac{1}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases} D = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

c) $f(x) = x + 2 \cos x;$ la función existe para todo $\mathbb{R}$

d) $f(x) = \frac{2x}{1 + \sin x}$ La función no existe para $1 + \sin x = 0; \sin x = -1; x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi;$

$$D = \left(-\infty, \frac{3}{4}\pi + 2\pi\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi + 2\pi, \infty\right)$$

11. Ejercicio

Estudiar el dominio y recorrido de las siguientes funciones a) $f(x) = x^2 + 3$; b) $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$;

Solución

a) $f(x) = x^2 + 3$ Dominio $\mathbb{R}$; Recorrido $(3, \infty)$;

b) $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$;

Dominio: La función no existe para $x+1 < 0$; $\Rightarrow x < -1$; $D(-1, \infty)$

Recorrido: $f(x) = (2, \infty)$

12. Ejercicio

Hallar el dominio de las siguientes funciones a) $f(x) = \frac{1}{-1 + \sqrt{x+1}}$; b) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$;

c) $f(x) = \sqrt{|x^2 + 2|}$ d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{x-1}}}$;

Solución

a) $f(x) = \frac{1}{-1 + \sqrt{x+1}}$ Si multiplicamos por el conjugado $\frac{1 + \sqrt{x+1}}{(-1 + \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})}$;

$\frac{1 + \sqrt{x+1}}{-1 + (x+1)} = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{x}$ La función no es válida para $\begin{cases} x = 0 \\ x < -1 \end{cases}$; $D = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$

b) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$ $\begin{cases} \text{La función no es válida para } x < -1 \\ \text{a función no es válida para } x < -2 \end{cases}$ $D = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$

4 Límite de una función

Dado que los límites han sido estudiados de forma exhaustiva en la lección

8. – Funciones y límites del curso de 1º de bachillerato, es necesario repasar dicha lección antes de estudiar los límites

4.1 Límite de la función en un punto

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$; Decimos que el límite de la función $f(x)$ en a es b , siempre que para valores

de x próximos a a la función toma el valor b ;

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$; Ha de cumplirse que para valores de x próximos a a por la derecha y por la izquierda, el valor de $f(x)$ se aproximan a b .

4.2 Límite de la función en el infinito

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$; Decimos que el límite de la función $f(x)$ en ∞ es b , siempre que para valores

de x próximos a ∞ la función toma el valor b ;

4.3 Límite Trigonométricos

Para resolver estos límites nos apoyamos en este teorema $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$

13. Ejercicio

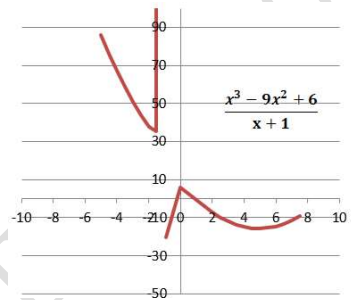
Calcular el valor de los siguientes límites a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 9x^2 + 6}{x + 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3x^2 - 8}}{x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -0} \left(x - \frac{5}{x}\right)$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1})$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1 - x} - e^x + e^{-x})$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 9x^2 + 6}{x + 1} = \frac{1^3 - 9 \cdot 1^2 + 6}{1 + 1} = \frac{1 - 9 + 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 9x^2 + 6}{x + 1} = -1;$$



$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3x^2 - 8}}{x + 2} = \frac{\sqrt{3 \cdot (-2)^2 - 8}}{-2 + 2} = \frac{\sqrt{4}}{0} = \frac{2}{0} = \infty;$$

Calculamos límites por la izquierda y derecha

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{3x^2 - 8}}{x + 2} = \frac{\sqrt{3 \cdot (-2,00001)^2 - 8}}{-2,00001 + 2} = \frac{\sqrt{4,0001200003}}{-2,00001 + 2} = \frac{2,000029999}{-0,00001} = -200.002,99998 = -\infty$$

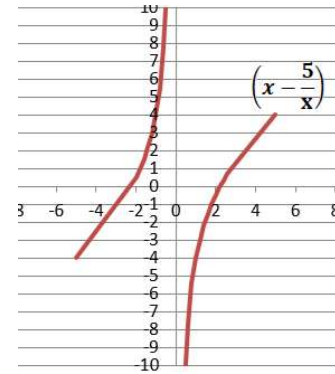
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{3x^2 - 8}}{x + 2} = \frac{\sqrt{3 \cdot (-1,99999)^2 - 8}}{-1,99999 + 2} = \frac{\sqrt{3,9998800003}}{0,00001} = \frac{1,9999699998}{0,00001} = 199.996,99998 = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{5}{x}\right) = 0 - \frac{5}{0} = \infty$$

Calculamos límites por la izquierda y derecha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{5}{x}\right) = \left((-0,00001) - \frac{5}{-0,00001}\right) = 499.999,99999 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{5}{x}\right) = \left((0,00001) - \frac{5}{0,00001}\right) = -3,999940000 = -\infty$$



$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2\sqrt{x^2 + 1}) = 2\sqrt{(-\infty)^2 + 1} = \infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1 - x} - e^x + e^{-x}) = (\sqrt{1 - (-\infty)} - e^{-\infty} + e^{-(-\infty)}) = (\sqrt{1 + \infty} - \frac{1}{e^\infty} + e^\infty)$$

$$\infty - 0 + \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1 - x} - e^x + e^{-x}) = \infty$$

14. Ejercicio

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -2$; $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$ y $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 2$

Calcular los siguientes limites a) $\lim_{x \rightarrow -a} (2f(x) - 2g(x) + h(x))$; b) $\lim_{x \rightarrow -a} (\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2})$

$$c) \lim_{x \rightarrow -a} \left(\frac{12}{f(x) - g(x)} \right)$$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow -a} (2f(x) - 2g(x) + h(x)) = 2(-2) - 2(2) + 2 = -6$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -a} (\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}) = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -a} \left(\frac{12}{f(x) - g(x)} \right) = \frac{12}{(-2) - 2} = \frac{12}{-4} = -3;$$

15. Ejercicio

Hallar el valor de los siguientes limites a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2 + 5x - 2)$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 + x - 2}{2x^4 + x^3 - 1} \right)$;

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2} \right); d) \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 - \sqrt{4x^4 - 1}; e) \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{x^2-9} \right); f) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{2x-3} \right)^{\frac{1}{x-2}}$$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2 + 5x - 2) = -\infty;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 + x - 2}{2x^4 + x^3 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{3x^2}{x^4} + \frac{x}{x^4} - \frac{2}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4} + \frac{x^3}{x^4} - \frac{1}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}} \right) = \frac{0}{2} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} \right) = \frac{1}{1} = 1;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 - \sqrt{4x^4 - 1} = \infty - \infty; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - \sqrt{4x^4 - 1})(2x^2 + \sqrt{4x^4 - 1})}{2x^2 + \sqrt{4x^4 - 1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - 4x^4 - 1}{2x^2 + \sqrt{4x^4 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{2x^2 + \sqrt{4x^4 - 1}} = \frac{-1}{\infty} = 0;$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{x^2-9} \right) = \frac{-3+3}{(-3)^2-9} = \frac{0}{0}; \text{ indeterminado}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{x^2-9} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{(x+3)(x-3)} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{(x-3)} \right) = \frac{1}{-3-3} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}} = \left(\frac{2-1}{2} \right)^{\frac{1}{2-2}} = \frac{1}{2}^{\frac{1}{0}} = \frac{1}{2}^{\infty} = \infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{2x-3} \right)^{\frac{1}{x-2}} = \left(\frac{2-1}{2*2-3} \right)^{\frac{1}{2-2}} = \left(\frac{1}{1} \right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \text{ Indeterminado}$$

Aplicamos formula $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)-1] * g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{2x-3} \right)^{\frac{1}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x-1}{2x-3} - 1 \right] * \frac{1}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x-1-2x+3}{2x-3} \right] * \frac{1}{x-2}}; e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{-(x-2)}{(2x-3)(x-2)} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{-1}{(2x-3)} \right]} =$$

$$e^{-\frac{1}{1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{2x-3} \right)^{\frac{1}{x-2}} = \frac{1}{e}$$

16. Ejercicio

Hallar el valor de los siguientes límites a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x-2} \right)$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} - \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} \right)$;

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 2}{x - 3} - \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 2} \right)$;

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x-2} \right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^2}{x^2 + x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) = \frac{-1}{1 + 0 - 0} = -1;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} - \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 - x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2}{x^4 - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-4x^4 + 2x^3}{x^4 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{-4x^4}{x^4} + \frac{2x^3}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4} - \frac{1}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-4 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^4}} \right) = \frac{-4 + 0}{1 - 0} = \frac{-4}{1} = -4;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{2}{\infty} - \frac{2}{\infty} = 0 - 0 = 0;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 2}{x - 3} - \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 4 - x^3 + 5x^2 - 8x + 6}{x^2 - x - 6} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x^2 - 5x + 10}{x^2 - x - 6} \right) = \frac{8}{1} = 8;$$

17. Ejercicio

Hallar el valor de los siguientes límites a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \sqrt{x^2 + x - 3} \right)$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2x^2 + x + 1} \right)$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 + x + 5} \right)$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + 3} - \frac{x}{3} \right)$$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \sqrt{x^2 + x - 3} \right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - \sqrt{x^2 + x - 3})(2x + \sqrt{x^2 + x - 3})}{2x + \sqrt{x^2 + x - 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - (x^2 + x - 3)}{2x + \sqrt{x^2 + x - 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 3}{2x + \sqrt{x^2 + x - 3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{2x}{x^2} + \frac{\sqrt{x^2 + x - 3}}{x^2}} = \frac{3}{0} = \infty;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2x^2 + x + 1} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2x^2 + x + 1})(\sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2x^2 + x + 1})}{(\sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2x^2 + x + 1})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 3x + 5) - (2x^2 + x + 1)}{(\sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2x^2 + x + 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 4}{(\sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2x^2 + x + 1})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-4x}{x} + \frac{4}{x}}{\frac{(\sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2x^2 + x + 1})}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{4}{x}}{\left(\sqrt{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}\right)} = -\frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$$

$$= -\frac{4}{2\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 3x + 5) - (2x^2 + x + 1)}{(\sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2x^2 + x + 1})} = -\sqrt{2};$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 + x + 5}) =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 + x + 5})(\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + x + 5})}{(\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + x + 5})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 2x + 5) - (x^2 + x + 5)}{(\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + x + 5})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 5 - x^2 - x - 5}{(\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + x + 5})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{(\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + x + 5})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x/x}{(\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + x + 5})} = -\frac{3}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -\frac{3}{2}$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + 3} - \frac{x}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + 3} - \frac{x}{3} \right) \left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + 3} + \frac{x}{3} \right)}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + 3} + \frac{x}{3}} =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(x^2 - \frac{1}{2}x + 3 - \frac{x^2}{9} \right)}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + 3} + \frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{18x^2}{18} - \frac{9}{18}x + \frac{54}{18} - \frac{2x^2}{18} \right)}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + 3} + \frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{16x^2}{18} - \frac{9}{18}x + \frac{54}{18} \right)}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + 3} + \frac{x}{3}} = \frac{16}{0} = \infty$$

18. Ejercicio

Hallar el valor de los siguientes límites a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 21}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}$; d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x + 1}$; e) $\lim_{x \rightarrow -1} ((x+1) \frac{3x+2}{x^3+x^2})$

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 21} = \frac{9 - 3 - 6}{9 + 12 - 21} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 21} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+7)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+2)}{(x+7)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \frac{4 + 6 - 10}{8 - 4 - 16 + 12} = \frac{0}{0}$

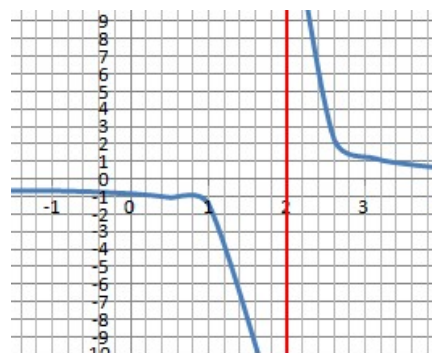
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-2)(x+3)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+5)}{(x-2)(x+3)} = \frac{7}{0}$$

por la izquierda $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = -\infty$

Por la derecha $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = +\infty$

No existe límite



$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-1)(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{0}$$

por la izquierda $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2} = -\infty$

Por la derecha $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2} = +\infty$

No existe límite

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-8}{3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} ((x+1) \frac{3x+2}{x^3+x^2}) = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} ((x+1) \frac{3x+2}{x^3+x^2}) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x+2)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x+2)}{x^2} = \frac{-1}{1} = -1;$$

19. Ejercicio

Hallar el valor de los siguientes límites a) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3-2x}{x^2+1} \right)^{\frac{x}{x+3}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{3x^2+5} \right)^{2\sqrt{x}}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\sin x}{1+x} \right)^{\frac{x}{\sin x}}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos x + (\cos x)^2} \right)^{\cos^2 x}$; e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1+\ln x}{x-1} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x}}{3} \right)^x$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3-2x}{x^2+1} \right)^{\frac{x}{x+3}} = \left(\frac{3-2(-1)}{(-1)^2+1} \right)^{\frac{-1}{-1+3}} = \left(\frac{3+2}{1+1} \right)^{\frac{-1}{2}} = \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{3x^2+5} \right)^{2\sqrt{x}} = \left(\frac{\infty+3}{3\infty^2+5} \right)^{2\sqrt{\infty}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{3x^2+5} \right)^{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + 5/x^2} \right)^{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + 5/x^2} \right)^{2\sqrt{x}} = \left(\frac{0}{3} \right)^{2\sqrt{\infty}} = 0^{\infty} = 0;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\sin x}{1+x} \right)^{\frac{x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\sin x}{1+x} \right)^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}} = \left(\frac{1+0}{1+0} \right)^1 = 1^1$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x}}{3} \right)^x = \left(\frac{e^0 + e^0}{3} \right)^0 = \left(\frac{1+1}{3} \right)^0 = \left(\frac{2}{3} \right)^0 = 1;$$

20. Ejercicio

Hallar el valor de los siguientes límites a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x}{\tan x}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 - \cot^2 x$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\sin x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} * \frac{\sin x}{(1 + \cos x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) * \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{(1 + \cos x)} \right) = 1 * \frac{0}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{0} = \infty;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos x * \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{por la izquierda } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sec x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\text{Por la derecha } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sec x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

No tiene limite

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 - \cot^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 0 - \frac{0}{1} = 0 - 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 \sin^2 x}{\sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 0 - \frac{1}{0} = -\infty;$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x}{2} \right)^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\infty} = \infty$$

21. Ejercicio

Calcula el valor de a para que el limite de la sucesion de termino general $a_n = \left(\frac{n^2 + an + 2}{n^2 + n + 2} \right)^n$ sea 2

Solución

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + an + 2}{n^2 + n + 2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{an}{n^2} + \frac{2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \frac{2}{n^2}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{a}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} \right)^n = \left(\frac{1 + \frac{a}{n} + 0}{1 + 0 + 0} \right)^{\infty}$$

$$= \left(1 + \frac{a}{\infty} \right)^{\infty} = 1^{\infty} \text{ indeterminado; Aplicamos formula } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] * g(x)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + an + 2}{n^2 + n + 2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + an + 2}{n^2 + n + 2} - 1 \right) * n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n^2 + an + 2}{n^2 + n + 2} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + an^2 + 2n - n^3 - n^2 - 2n}{n^2 + n + 2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{+an^2 - n^2}{n^2 + n + 2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(a - 1)n^2}{n^2 + n + 2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{(a - 1)n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \frac{2}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a - 1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} \right) = \frac{a - 1}{1} = a - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + an + 2}{n^2 + n + 2} \right)^n = e^{(a-1)} = 2; \text{ aplico logaritmos; } \ln e^{(a-1)} = \ln 2; a - 1 = \ln 2; ; a = 1 + \ln 2;$$

22. Ejercicio

Calcula los valores de a y b para que se cumplan las siguientes igualdades

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n + 1} + an + b \right) = 0; \text{ y } b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 3}{2n + 1} + an + b \right) = 0$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n + 1} + an + b \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1 + an(n + 1) + b(n + 1)}{n + 1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1 + an^2 + an + bn + b}{n + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2(1 + a) + (a + b)n + (b + 1)}{n + 1} \right); \end{aligned}$$

Dado que el grado del numerador es mayor que el denominador para que el limite sea 0 ha de cumplirse

$$(1 + a) = 0 \text{ y } (a + b) = 0; \begin{cases} 1 + a = 0; a = -1 \\ a + b = 0; \text{Para } a = -1 \Rightarrow b = 1; \end{cases} \quad a = -1, b = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 3}{2n + 1} + an + b \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 3 + an(2n + 1) + b(2n + 1)}{2n + 1} \right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 3 + 2an^2 + an + 2bn + b}{2n + 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2(2a + 1) + n(2 + a + 2b) + b}{2n + 1} \right) \end{aligned}$$

Dado que el grado del numerador es mayor que el denominador para que el limite sea 0 ha de cumplirse

$$(2a + 1) = 0; \text{ y } (2 + a + 2b) = 0; \begin{cases} 2a + 1 = 0; a = -\frac{1}{2} \\ 2 + a + 2b = 0 \text{ ara } a = -\frac{1}{2}; 2 - \frac{1}{2} + 2b = 0; b = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$a = -\frac{1}{2}; b = -\frac{3}{4};$$

23. Ejercicio

Calcula los valores de k para que se cumplan las siguientes igualdades

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + kx - 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 5}) = \frac{5}{2}; \text{ y b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + kx + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = 2$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + kx - 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 5}) &= \frac{5}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + kx - 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 5})(\sqrt{x^2 + kx - 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 5})}{(\sqrt{x^2 + kx - 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 5})} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + kx - 3 - x^2 + 3x - 5}{(\sqrt{x^2 + kx - 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 5})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx - 3 + 3x - 5}{(\sqrt{x^2 + kx - 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 5})} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(k + 3) - 8}{(\sqrt{x^2 + kx - 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 5})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x(k + 3) - 8}{x}}{\left(\frac{\sqrt{x^2 + kx - 3}}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}{x} \right)} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k + 3) - \frac{8}{x}}{\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{kx}{x^2} - \frac{3}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{5}{x^2}} \right)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k + 3) - \frac{8}{x}}{\left(\sqrt{1 + \frac{k}{x} - \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} \right)} = \\ \frac{(k + 3)}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} &= \frac{(k + 3)}{2}; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + kx - 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 5}) = \frac{(k + 3)}{2} = \frac{5}{2}; k = 2;$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + kx + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{1 + 1 + k + 3}{1 - 1 - 1 + 1} = \frac{k + 5}{0} = \infty \neq 2$$

para que sea indeterminado $\frac{0}{0} \Rightarrow k + 5$ ha de ser igual a 0; $k = -5$;

$$\text{para } k = -5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 3)}{(x + 1)} = \frac{4}{2} = 2;$$