

Continuidad de funciones, Asíntotas Límites de Sucesiones

Contenido

1	CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO	2
1.1	TIPOS DE DISCONTINUIDAD	2
1.1.1	<i>Discontinuidad evitable</i>	2
1.1.2	<i>Discontinuidad inevitable de salto finito</i>	3
1.1.3	<i>Discontinuidad inevitable de salto infinito</i>	4
2	ASÍNTOTAS	7
2.1	ASÍNTOTAS VERTICALES	7
2.2	ASÍNTOTAS HORIZONTALES	8
2.3	ASÍNTOTAS OBLICUAS	9
3	SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES. LÍMITES	16
3.1	SUCESIONES ARITMÉTICAS:	16
3.2	SUCESIONES GEOMÉTRICAS:	16
3.3	PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES	17
3.4	LÍMITES DE UNA SUCESIÓN	17
4	CÁLCULO DE LÍMITES DE SUCESIONES	21
4.1	INDETERMINACIÓN $\infty - \infty$	21
4.2	EL NÚMERO E; INDETERMINACIÓN 1^∞	21

1 Continuidad de una función en un punto

Una función es continua si podemos dibujarla sin levantar el lápiz

Una función es continua en un punto $x = a$ si existe límite de la función en él y coincide con el valor que toma la función en dicho punto.

$$f \text{ es continua en } x = a \text{ si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

La continuidad de una función f en el punto $x=a$ implica que se cumplan las 3 condiciones:

1. La función está definida en $x=a$; existe $f(a)$
2. Existe el límite de la función $f(x)$ en $x=a$;
3. Los dos valores coinciden $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Ejemplo: Comprobar si la función es continua para $x=5$

$$f(x) = \frac{2x}{x-2} \text{ el dominio de la función será } = \mathbb{R} - \{2\}$$

1. La función está definida en $x=5$; existe $f(5)$

$$f(x) = \frac{2x}{x-2}; f(5) = \frac{2 \cdot 5}{5-2} = \frac{10}{3}$$

2. Existe el límite de la función $f(x)$ en $x=5$;

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{x-2} = \frac{2 \cdot 5}{5-2} = \frac{10}{3}$$

3. Los dos valores coinciden $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{x-2} = f(5); \frac{10}{3} = \frac{10}{3};$$

1.1 Tipos de discontinuidad

Dependiendo de la condición que no se cumpla tendremos distintas discontinuidades

1.1.1 Discontinuidad evitable

$$\text{ejemplo 1º; } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 8 & \text{si } x = 2 \\ 2x & \text{si } x > 2; \end{cases}$$

1. La función está definida en $x=2$;
existe $f(2)$

$$f(2) = 8;$$

2. Existe el límite de la función $f(x)$
en $x=2$;

calculamos límite por la izquierda y derecha de 2

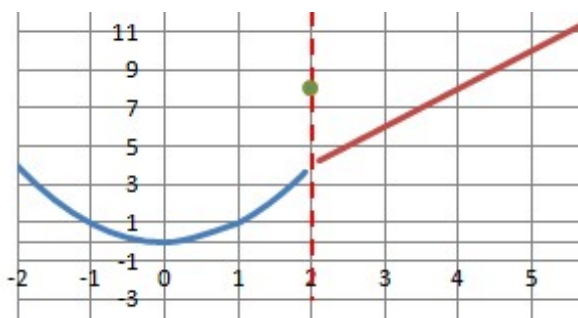
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} ; \lim_{x \rightarrow 1,9999} = 3,996001 \sim 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} ; \lim_{x \rightarrow 2,0001} = 4,00021 \sim 4 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 2} = 4;$$

3. Los dos valores coinciden $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} = 4 \neq f(2) = 8$$

Discontinuidad evitable. Se puede evitar convirtiéndola en

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2; \end{cases}$$



ejemplo 2º; $f(x) \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2; \end{cases}$

- 1 La función está definida en $x=2$ existe $f(2)$

$f(2)$ no existe;

- 2 Existe el límite de la función $f(x)$ en $x=2$;

calculamos límite por la

izquierda y derecha de 2

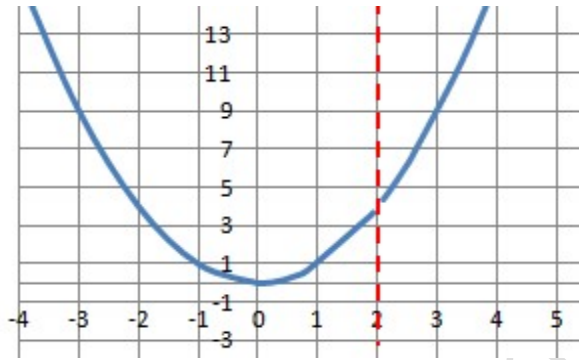
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-}; \lim_{x \rightarrow 1,9999} = 3,996001 \sim 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+}; \lim_{x \rightarrow 2,0001} = 4,00021 \sim 4 \end{cases} \lim_{x \rightarrow 2} = 4;$$

- 3 Los dos valores coinciden $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

No coinciden porque la función no tiene imagen en $x = 2$; $\lim_{x \rightarrow 2} = 4 \neq f(2)$

Discontinuidad evitable. Se puede evitar convirtiéndola en

$$f(x) \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \geq 2; \end{cases}$$



1.1.2 Discontinuidad inevitable de salto finito

Discontinuidad inevitable en un punto son aquellas funciones que no tienen límite en dicho punto

ejemplo ; $f(x) \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0; \end{cases}$

1. La función está definida en $x=0$ existe $f(0)$

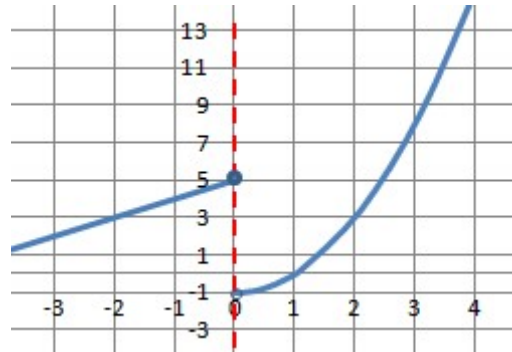
$$f(0) = 5;$$

2. Existe el límite de la función $f(x)$ en $x=0$;
- calculamos límites laterales

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-}; \lim_{x \rightarrow -0,0009} = 5,0009 \sim 5 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+}; \lim_{x \rightarrow 0,00001} = -0,9999 \sim -1 \end{cases} \text{no existe límite}$$

3. Los dos valores coinciden $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

No coinciden porque la función no tiene límite $\lim_{x \rightarrow 0} = \neq f(0)$



1.1.3 Discontinuidad inevitable de salto infinito

Discontinuidad inevitable en un punto son aquellas que no tienen limite en dicho punto

ejemplo ; $f(x) = \frac{8x}{x-3}$

1. La función no está definida en $x=3$ no existe $f(3)$ luego la función es discontinua

2. Existe el límite de la función $f(x)$ en $x=3$;

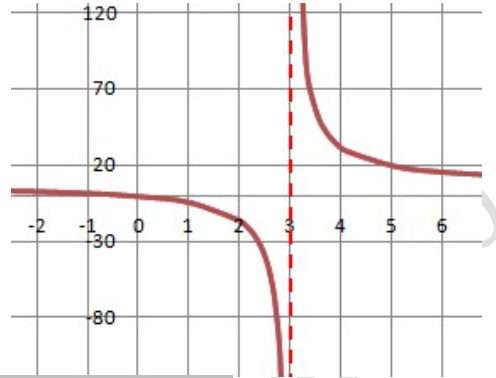
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{8x}{x-3} = \frac{24}{0} = \pm\infty \text{ indeterminado}$$

calculamos limites laterales

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3} ; \lim_{x \rightarrow 2,99999} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +3} ; \lim_{x \rightarrow 3,0001} = +\infty \end{cases} \text{ no existe limite}$$

3. Los dos valores coinciden $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

No coinciden porque la funcion no esta definida y no tiene limite



1. Ejercicio

Determinar donde son continuas las siguientes funciones

a) $f(x) = \frac{3}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ c) $f(x) = \frac{|x|}{x}$;

Solución

a) $f(x) = \frac{3}{x-1}$;

La funcion no esta definida en $x=1$;

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{0} = \pm\infty \text{ indeterminado}$$

Funcion continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$

Funcion no está definida en $x = \mp 1$;

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{(\textcolor{red}{x}-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} = \pm\infty \text{ indeterminado}$$

Funcion continua en $\mathbb{R} - \{-1,1\}$

c) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \begin{cases} \frac{x}{x} = 1; & \text{para } x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1; & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad \text{La funcion no tienen limite en } x = 0$$

Funcion continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

2. Ejercicio

Determinar que valor debe tomar la función en el punto indicado para que sea continua en él

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ en } x = 1 \quad ; \text{ b) } f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} \text{ en } x = 2$$

Solución

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ en } x = 1$$

$$\text{Hallamos el límite de la función } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

$$f(1) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2;$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} \text{ en } x = 2$$

La función no está definida en $x = \pm 2$

$$\text{Hallamos el límite de la función } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)}{x+2} = \frac{3}{4}$$

$$f(2) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \frac{3}{4};$$

3. Ejercicio

Hallar el valor de K que hace la función continua en $x = 1$;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x \neq 1 \text{ y } x \neq 2; \\ 2K + 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Solución

Para que la función sea continua en $x = 1$, dado que cambia de valor en ese punto, los límites laterales en $x = 1$ han de ser iguales

$$\text{Límite por izquierda } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)}{(x-2)} = \frac{(1+1)}{(1-2)} = -2$$

$$\text{Límite por derecha } \lim_{x \rightarrow 1^+} 2K + 1 = 2K + 1;$$

Para que exista límite ha de ser igual por la derecha e izquierda $\Rightarrow -2 = 2K + 1$;

$$2K = -2 - 1; \quad K = -\frac{3}{2};$$

4. Ejercicio

Determinar la continuidad de la función ; $f(x) = \frac{3}{x^2 - 27}$

Solución

La función no está definida en $x = \pm 3$ pues hace 0 el denominador. **Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$**

Comprobamos límites de la función para $x = 3$ y $x = -3$

$$\begin{cases} \text{límite por la izquierda} & \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{3}{x^2 - 27} = -\infty \\ \text{límite por la derecha} & \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3}{x^2 - 27} = +\infty \end{cases} \quad \text{no existe el límite}$$

$$\begin{cases} \text{límite por la izquierda} & \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{x^2 - 27} = -\infty \\ \text{límite por la derecha} & \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x^2 - 27} = +\infty \end{cases} \quad \text{no existe el límite}$$

La función es continua en el dominio

5. Ejercicio

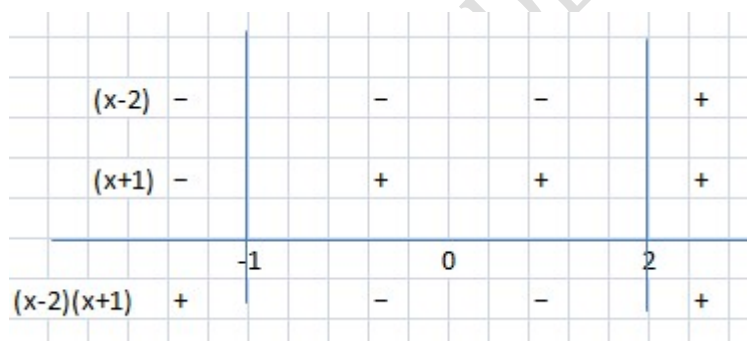
Determinar la continuidad de la función ; $f(x) = \sqrt{3x^2 - 3x - 6}$

Solución

Comprobamos si $3x^2 - 3x - 6$ es negativo para algún valor de x .

Hallamos las raíces $3x^2 - 3x - 6 = 0$; $x = 2$ y $x = -1$

$3x^2 - 3x - 6 = (x - 2)(x + 1)$; comprobamos donde la función es positiva



Dom $f(x) = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

La función es continua en $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

6. Ejercicio

Determinar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Solución

Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Comprobamos límites de la función para $x = -1$

$$\begin{cases} \text{límite por la izquierda} & \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + 3 = 4 \\ \text{límite por la derecha} & \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0 \end{cases}$$

Los límites por derecha e izquierda no coinciden ; función discontinua en $x = -1$;

Comprobamos límites de la función para $x = -1$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

7. Ejercicio

Determinar la continuidad de la función $f(x) = x^2 - x + b$;

Solución

Comprobamos si $x^2 - x + b$ es negativo para algún valor de x .

Hallamos las raíces $x^2 - x + b = 0$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4b}}{2}$.

La función no existe para valores de $1 - 4b \leq 0$; $b \geq \frac{1}{4}$;

Dom $f(x) = (-\infty, \frac{1}{4}]$

La función es continua en $(-\infty, \frac{1}{4}]$

2 Asíntotas

Es una recta a la que se aproxima una rama infinita de una función

2.1 Asíntotas verticales

Una función $f(x)$ tiene la asíntota vertical $x=k$ si su límite cuando x tiende a k es infinito.

Para que haya asíntotas verticales la función ha de tener denominador

Asíntota vertical por la izquierda $x=a$;

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty;$$

Asíntota vertical por la derecha $x=a$;

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty;$$

Asíntota vertical $x=a$;

Límite por la derecha e izquierda coinciden

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty;$$

8. Ejercicio

Hallar las asíntotas de la

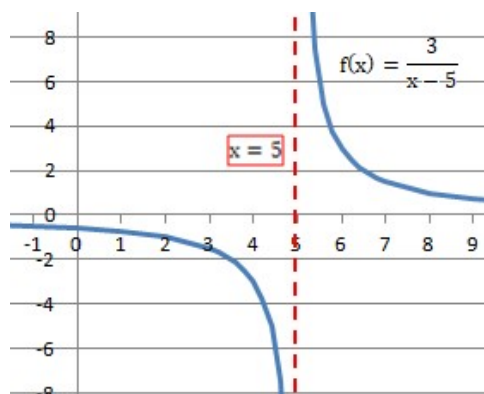
función $f(x) = \frac{3}{x-5}$

Solución

$f(x) = \frac{3}{x-5}$ esta función tendrá un a

asíntota en $x = 5$ dado que

límite por la izquierda $x \rightarrow -\infty$ y por la derecha $x \rightarrow +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{x-5} = \pm \infty$



9. Ejercicio

Hallar las asíntotas de la

$$\text{funcion } f(x) = \frac{3x+2}{x+3}$$

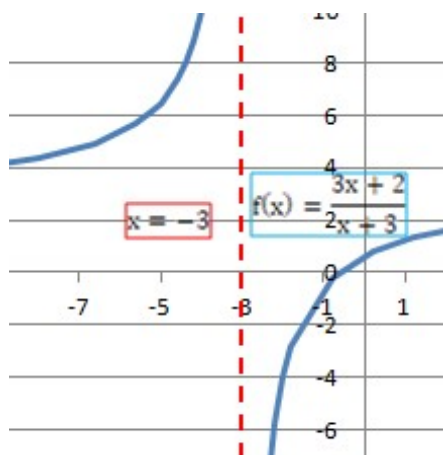
Solución

$$\text{En la funcion } f(x) = \frac{3x+2}{x+3}$$

el denominador se hara 0 en $x = -3$;

Tendra una asíntota vertical en $x = -3$

$$\text{dado que } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x+2}{x+3} = \pm \infty$$



10. Ejercicio

Hallar las asíntotas de la

$$\text{funcion } f(x) = \frac{3x}{x^2-4}$$

Solución

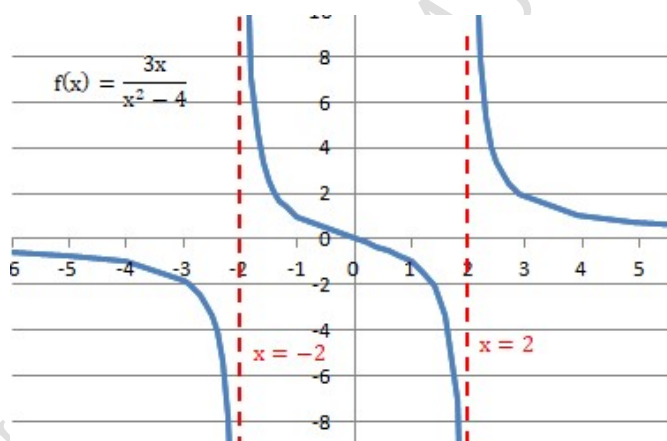
$$\text{En la funcion } f(x) = \frac{3x}{x^2-4}$$

el denominador se hara

0 en $x = \pm 2$;

Tendra una asíntota vertical

en $x = -2$ y $x = 2$;



$$\text{dado que para } x = -2; \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{x^2-4} = \pm \infty \text{ y para } x = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{x^2-4} = \pm \infty$$

2.2 Asíntotas Horizontales

Una función $f(x)$ tiene la asíntota horizontal $y=k$ si su límite es k cuando x tiende a infinito.

Asíntota horizontal por la izquierda si:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k;$$

Asíntota horizontal por la derecha si;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k;$$

Asíntota horizontal $y=k$;

Límite por la derecha e izquierda coinciden

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Para hallar las asíntotas horizontales solo hay que hallar el límite de la función cuando x tiende a infinito

11. Ejercicio

Hallar las asíntotas de la

$$\text{función } f(x) = \frac{3}{x-3}$$

Solución

Para hallar las asíntotas horizontales

$$\text{de } f(x) = \frac{3}{x-3}, \text{ hallamos } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x-3};$$

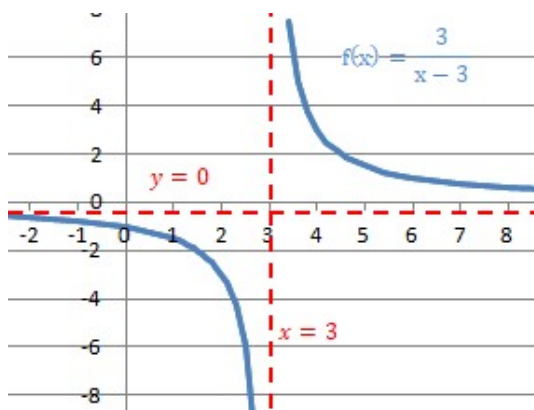
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x-3} = 0;$$

Asíntota horizontal en $y = 0$

Comprobamos que también tiene asíntota

$$\text{vertical en } x = 3; \text{ pues } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{x-3} = \pm \infty;$$

Asíntota vertical en $x = 3$



12. Ejercicio

Hallar las asíntotas de la

$$\text{función } f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$$

Solución

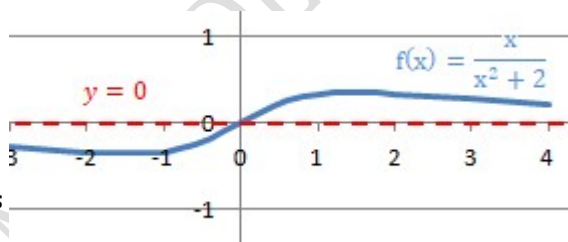
Para hallar las asíntotas horizontales

$$\text{de } f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}, \text{ hallamos}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x/x^2}{x^2/x^2 + 2/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1 + 2/x^2} = \frac{1/\infty}{1 + 2/\infty} = \frac{0}{1} = 0$$

Asíntota horizontal en $y = 0$

No hay asíntota vertical pues el denominador no puede hacerse 0



2.3 Asíntotas oblicuas

Son recta del tipo $y = mx + n$ ($m \neq 0$) donde m es la pendiente y n el punto de corte con el eje de abscisas.

$y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ si se cumple

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (mx + n) = 0;$$

Si $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ se ha de cumplir

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - mx;$$

13. Ejercicio

Hallar la asintota oblicua de la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}$;

Solución :

Tienen una asintota vertical el $x = -2$ pues $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1+2x}{x+2} = \frac{1+4}{-2+2} = \frac{4}{0} = \pm\infty$;

Comprobamos que la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}$ no tiene asintotas horizontales ;

$$\text{dividimos por } x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} - 1}{\frac{1}{\infty} + \frac{2}{\infty}} = \frac{-1}{0} = \infty$$

por lo que la función no tiene asintotas horizontales

Comprobamos que la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}$ tiene asintotas oblicuas ;

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}} =$$

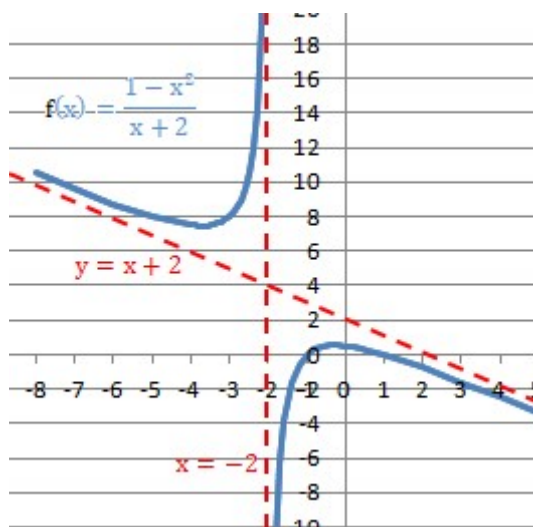
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{\frac{1}{\infty} - 1}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{-1}{1} = -1; \quad m = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx; \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{x+2} - (-1)x; \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{x+2} + x =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{x+2} + \frac{(x+2)x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2+x^2+2x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + 2}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{0 + 2}{1 + 0} = 2; \quad n = 2$$

Asintota oblicua $y = x + 2$;



14. Ejercicio

Hallar las asintotas de la siguiente función $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-9}$;

Solución:

Asíntota vertical: Tienen dos asíntotas verticales en $x = +3$ y $x = -3$ dado que

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{2(-3)-1}{(-3)^2-9} = \frac{-7}{0} = \pm\infty; \text{ y } \lim_{x \rightarrow +3} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{2 \cdot (+3)-1}{(3)^2-9} = \frac{5}{0} = \pm\infty$$

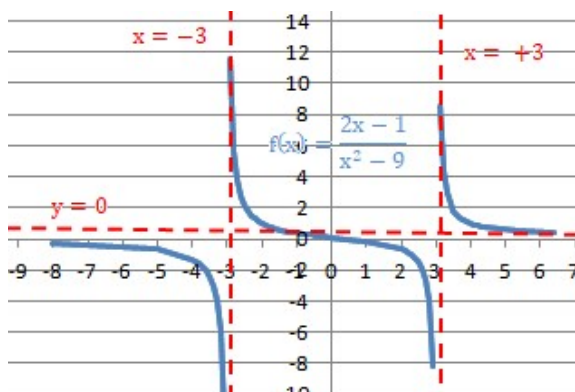
Asíntotas Horizontales:

Comprobamos si la función

$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-9}$ tiene A. Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} = \frac{\frac{2}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{9}{\infty}} = \frac{0-0}{1} = 0$$



La función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$;

15. Ejercicio

Hallar las asintotas de la siguiente función $f(x) = \frac{2x+5}{3x}$;

Solución:

Asíntota vertical: Tienen una asíntota vertical en $x = 0$ dado que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+5}{3x} = \frac{2(0)+5}{3(0)} = \frac{5}{0} = \pm\infty;$$

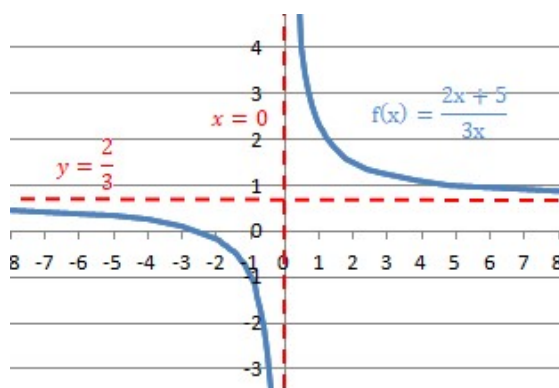
Asíntotas Horizontales:

Comprobamos si la función

$f(x) = \frac{2x+5}{3x}$ tiene A. Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{5}{x}}{\frac{3x}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{x}}{3} = \frac{2+0}{3} = \frac{2}{3}$$



La función tiene una asíntota horizontal en $y = 2/3$;

16. Ejercicio

Hallar las asíntotas de la siguiente función $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x}$;

Solución:

Asíntota vertical: Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ dado que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 1}{x} = \frac{4(0)^2 + 1}{0} = \frac{1}{0} = \pm \infty;$$

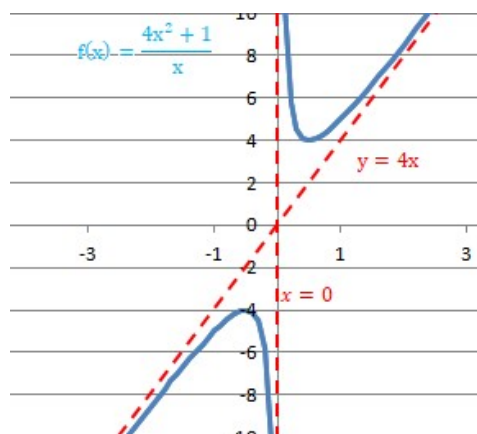
Asíntotas Horizontales:

Comprobamos si la función

$$f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x} \text{ tiene A. Horizontales}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{4 + 0}{0} = \frac{4}{0} = \infty$$



La función no tiene asíntotas horizontales;

Comprobamos si la función $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x}$ tiene A. oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 1/x^2}{1/x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 1/x^2}{1/x} = \frac{4}{1/x} = 4; m = 4;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx; n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{x} - 4x; = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{x} - \frac{4x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La función no tiene la asíntota Oblicua $y = 4x$;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 1/x^2}{1/x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 1/x^2}{1/x} = \frac{4}{1/x} = 4; m = 4;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx; n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{x} - 4x; = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{x} - \frac{4x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La función no tiene la asíntota Oblicua $y = 4x$;

17. Ejercicio

Hallar las asintotas de la siguiente función $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 2}$;

Solución:

Asintota vertical: No tienen asintotas verticales pues el denominador nunca puede ser 0;

La función tiene la asintota horizontal en $y = 3$;

Comprobamos si la función $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 2}$ tiene A. Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3;$$

18. Ejercicio

Hallar las asintotas de la siguiente función $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$;

Solución:

Asintota vertical: Tiene una asintota vertical en $x = 1$ dado que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^3 - 1} = \frac{1}{1^3 - 1} = \frac{1}{0} = \infty;$$

Asintotas Horizontales:

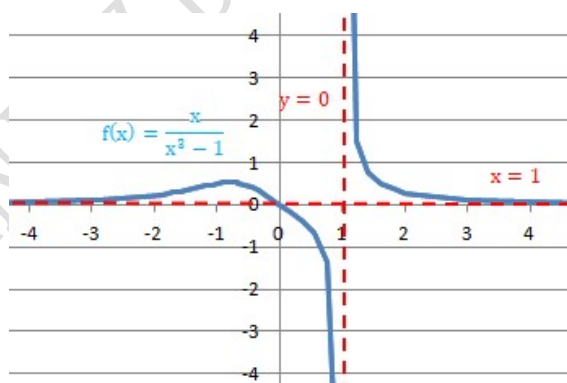
Comprobamos si la función

$f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$ tiene A. Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

La función tiene una asintota horizontal en $y = 0$;



19. Ejercicio

Hallar las asintotas de la siguiente

función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$;

Solución:

No hay Asintotas verticales

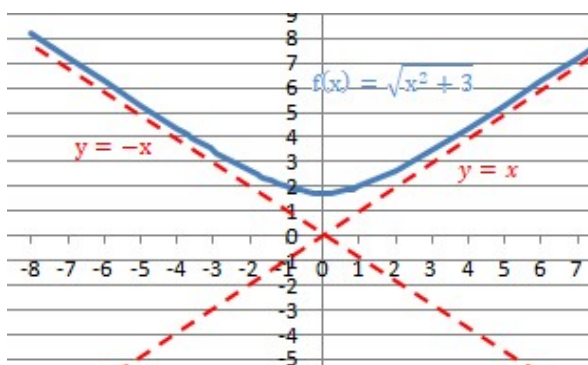
Asintotas Horizontales:

Comprobamos si la función

$f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ tiene asintotas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3} = \infty$$

No hay Asintotas Horizontales



Comprobamos si la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ tiene A. oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} = \pm \sqrt{1 + 0} = \pm 1;$$

$$m = \pm 1;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx; n = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3} - (1 * x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3} - x * \frac{\sqrt{x^2 + 3} + x}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \frac{3}{\infty} = 0; n = 0;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx; n = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3} - (-1) * x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3} + x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3} + x * \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x}{\sqrt{x^2 + 3} - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3} - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3} - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} - x} = \frac{3}{\infty} = 0; n = 0;$$

Asintota oblicua $m = \pm 1, n = 0; \Rightarrow y = x; y = -x$

20. Ejercicio

Hallar las asintotas de las siguiente

$$\text{función } f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}};$$

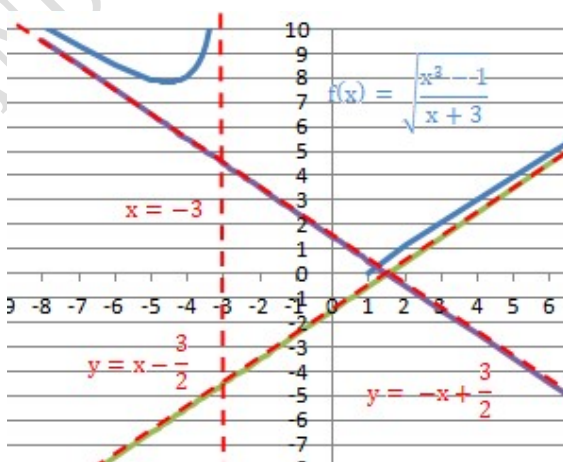
Solución:

Asintotas verticales

Para $x = -3$ hay una asintota

$$\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} = \sqrt{\frac{(-3)^3 - 1}{-3 + 3}} =$$

$$\sqrt{\frac{-10}{0}} = \infty$$



Comprobamos si la función $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}}$ tienen asintotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{x}{x^3} + \frac{3}{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}} = \sqrt{\frac{1}{0}} = \infty$$

No hay Asintotas Horizontales

Comprobamos si la funcion $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}}$ tiene A. oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x * x^2 + 3 * x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^3 + 3x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x}}} = \sqrt{\frac{1 - 0}{1 + 0}} = \pm 1; \quad m = \pm 1;$$

$$m = -1; \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx; \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - (-1) * x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} + x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} + x \right) * \frac{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - x}{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}})^2 - x^2}{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 1}{x + 3} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x^3 - 1) - x^2(x + 3)}{x + 3}}{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 - 1) - x^3 - 3x^2}{\left(\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - x \right) (x + 3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 1}{x \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - x^2 + 3 \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{3x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}}}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} + \frac{3 \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}}}{x^2} - \frac{3x}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - 1 + 3 \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^3 + 3x^2}} - 1 + 3 \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^5 + 3x^4}} - \frac{3}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3}}} - 1 + 3 \sqrt{\frac{\frac{x^3}{x^5} - \frac{1}{x^5}}{\frac{x^3}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5}}} - \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x}}} - 1 + 3 \sqrt{\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}} - \frac{3}{x}} =$$

$$\frac{-3 - 0}{\sqrt{\frac{1 - 0}{1 + 0}} - 1 + 3 \sqrt{\frac{0 - 0}{0 + 0}} - 0} = \frac{-3}{\pm \sqrt{1} - 1}; \quad n = \frac{-3}{+1 - 1} = \infty; \quad n = n = \frac{-3}{-1 - 1} = \frac{3}{2}; \quad n = \frac{3}{2}$$

$$m = 1; \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx; \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - (+1) * x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} - x \right) * \frac{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} + x}{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}})^2 - x^2}{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 1}{x + 3} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x^3 - 1) - x^2(x + 3)}{x + 3}}{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 - 1) - x^3 - 3x^2}{\left(\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} + x \right) (x + 3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 1}{x \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} + x^2 + 3 \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{3x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}}}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{3 \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}}}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} + 1 + 3 \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}} + \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^3 + 3x^2}} + 1 + 3 \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^5 + 3x^4}} + \frac{3}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3}}} + 1 + 3 \sqrt{\frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{1}{x^5}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^5}}} + \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{3}{x}}} + 1 + 3 \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x^5}}{1 + \frac{3}{x}}} + \frac{3}{x}} =$$

$$\frac{-3 - 0}{\sqrt{\frac{1 - 0}{1 + 0}} + 1 + 3 \sqrt{\frac{0 - 0}{0 + 0}} + 0} = \frac{-3}{\pm \sqrt{1} + 1}; n = \frac{-3}{+1 + 1} = \frac{-3}{2}; n = \frac{-3}{-1 + 1} = \infty; n = -\frac{3}{2}$$

asintotas oblicuas $y = x - \frac{3}{2}$; $y = -x + \frac{3}{2}$

3 Sucesión de números reales. Límites

Sucesión de números reales es un conjunto de números reales dados ordenadamente de modo que se puedan enumerar (primero, segundo, ...) 2, 4, 6, 8, 10,

A los elementos se les llama términos a_i ; en el ejemplo $a_1 = 2$ y en el ejemplo $a_4 = 8$;

El término general se define como a_n ; en el ejemplo $a_n = 2n$;

$a_n = 2n$ para definir la sucesión solo hay que sustituir n por el número natural

$a_1 = 2 * 1 = 2$; $a_2 = 2 * 2 = 4$; ... $a_5 = 2 * 5 = 10$;

3.1 Sucesiones aritméticas:

Son aquellas que cada término se obtiene sumándole al anterior un número fijo (d),

El término general de una progresión aritmética $a_n = a_1 + (n - 1)d$

En el ejemplo anterior 2, 4, 6, 8, 10 d (diferencia) = 2

El término general será $a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_n = 2 + (n - 1)2$; a_n

Por ejemplo el término 5 será $a_5 = 2 + (5 - 1)2 = 2 + 8 = 10$;

3.2 Sucesiones geométricas:

Son aquellas que cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo (r),

El término general de una progresión aritmética $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Una progresión geométrica será 2, 4, 8, 16, 32 r (razón) = 2

El término general será $a_n = a_1 r^{n-1}$

El término 4 del ejemplo anterior será $a_4 = 2 * 2^{4-1} = 2 * 2^3 = 32$;

3.3 Propiedades de las sucesiones

Una sucesión a_n es creciente si cada término es < 0 que su siguiente $a_n \leq a_{n+1}$

Una sucesión a_n es decreciente si cada término es $\geq$ que su siguiente $a_n \geq a_{n+1}$

Una sucesión a_n es acotada superiormente si existe un número que es $\geq$ que cualquier término de la sucesión

Una sucesión a_n es acotada inferiormente si existe un número que es $\leq$ que cualquier término de la sucesión

Una sucesión a_n es acotada si lo es superior e inferiormente

3.4 Límites de una sucesión

Una sucesión es una función y su límite es el valor al que tiende cuando hallamos un término muy alto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Sucesiones convergentes: El límite de la sucesión es igual a un número l ; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$

Sucesiones divergentes: El límite de la sucesión es igual a ∞ ; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$

21. Ejercicio

Determinar que tipo de sucesión es $a_n = \frac{1}{n}$

Solución:

Es decreciente $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$

Acotada superiormente $a_n \leq 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; tiene límite luego es convergente

22. Ejercicio

Determinar que tipo de sucesión es $a_n = \frac{3n^2 + 5}{2n^2 - 5}$

Solución:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5}{2n^2 - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{5}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{5}{n^2}} = \frac{3 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2} \text{ sucesión convergente}$$

23. Ejercicio

Determinar que tipo de sucesion es $a_n = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}+2}$

Solución :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{\sqrt{1} + \frac{2}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1}+0} = \frac{1}{1} = 1 \text{ sucesion convergente}$$

24. Ejercicio

Determinar que tipo de sucesion es $a_n = \frac{\sqrt[3]{8n^2+3}}{\sqrt[6]{8n^4-2}}$

Solución :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^2+3}}{\sqrt[6]{8n^4-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{(8n^2+3)^2}}{\sqrt[6]{8n^4-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{64n^4+9+48n^2}}{\sqrt[6]{8n^4-2}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[6]{\frac{64n^4+9+48n^2}{8n^4-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[6]{\frac{\frac{64n^4}{n^4} + \frac{9}{n^4} + \frac{48n^2}{n^4}}{\frac{8n^4}{n^4} - \frac{2}{n^4}}} = \sqrt[6]{\frac{64+0+0}{8-0}} = \sqrt[6]{\frac{64}{8}} = \sqrt[6]{8}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^2+3}}{\sqrt[6]{8n^4-2}} = \sqrt[6]{2} \text{ acotada superiormente}$$

25. Ejercicio

Determinar que tipo de sucesion es $a_n = \frac{\sqrt{n+5}}{n-5}$

Solución :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+5}}{n-5} = \text{dividimos por } n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{n}{n} + \frac{5}{n^2}}}{\frac{n}{n} - \frac{5}{n}} = \frac{\sqrt{0+0}}{1-0} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+5}}{n-5} = 0 \text{ acotada superiormente}$$

26. Ejercicio

Determinar que tipo de sucesion es $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Solución

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = \text{siempre será mayor el denominador } 3^n > 2^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ convergente}$$

27. Ejercicio

Determinar que tipo de sucesion es $a_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt[3]{n} + 1}$

Solución

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt[3]{n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} + 1}{n^{\frac{1}{3}} + 1} = \text{para todo } n, n^{\frac{1}{2}} > n^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt[3]{n} + 1} = \infty \text{ no converge}$$

28. Ejercicio

Determinar si la sucesion $a_n = \frac{2n + 1}{n + 2}$

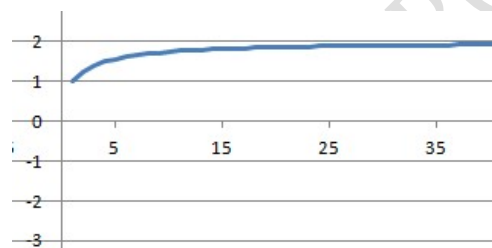
es creciente , acotada y convergente

Solución

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2;$$

$$\frac{2n + 1}{n + 2} < \frac{2(n + 1) + 1}{(n + 1) + 2}; \frac{2n + 1}{n + 2} < \frac{2n + 3}{n + 3} \text{ es creciente}$$

es convergente acotada superiormente



29. Ejercicio

Conociendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, hallar

a) $a_n + b_n$; b) $a_n * c_n$; c) $a_n^{-b_n}$;

Solución

Aplicando las propiedades de los limites

$$\text{a) } a_n + b_n = (-2) + 3 = 1;$$

$$\text{b) } a_n * c_n = (-2) * 0 = 0;$$

$$\text{c) } a_n^{-b_n} = (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

30. Ejercicio

Hallar el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ siendo $a_n = 1 + \frac{2}{n}$ y $b_n = 7 - \frac{5}{2n}$

Solución

Aplicando propiedades de los limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{2}{n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 1 + 0 = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 7 - \frac{5}{2n} = 7 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2n} = 7 + 0 = 7;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{7};$$

31. Ejercicio

Hallar el $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n}{n} - \frac{2+n}{1+n} \right)$

Solución

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n}{n} - \frac{2+n}{1+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n}{n} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{n}{n} \right) = 0 + 1 = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1+n} + \frac{n}{1+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{n}{n}} + \frac{\frac{n}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{n}{n}} \right) = \frac{0}{0+1} + \frac{1}{0+1} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n}{n} - \frac{2+n}{1+n} \right) = 1 - 1 = 0$$

32. Ejercicio

Hallar el $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n - 5\sqrt{n})$

Solución

Hallar el $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n - 5\sqrt{n})$

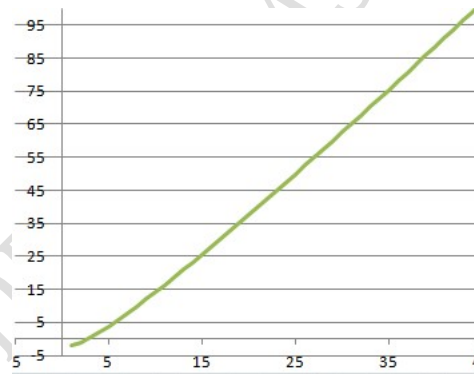
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3n - \lim_{n \rightarrow \infty} 5\sqrt{n}$$

$$= \infty - \infty \text{ indeterminado}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 3n = \infty$; $\lim_{n \rightarrow \infty} 5\sqrt{n} = \infty$ resolvemos la indeterminación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n - 5\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - 5\sqrt{n}) \left(\frac{3n + 5\sqrt{n}}{3n + 5\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 + 25n}{3n + 5\sqrt{n}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{9n^2}{n^2} + \frac{25n}{n^2}}{\frac{3n}{n^2} + 5\sqrt{n/n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + \frac{25}{n}}{\frac{3}{n} + 5\sqrt{1/n^3}} = \frac{9+0}{0+0} = \frac{9}{0} = \infty$$



4 Cálculo de límites de sucesiones

4.1 Indeterminación $\infty - \infty$

Como vimos en los límites de funciones este tipo de indeterminación se resuelve

transformando la función en otra del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ó $\frac{0}{0}$

33. Ejercicio

Hallar el $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n-3} - \sqrt{n+3}$

Solución

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n-3} - \sqrt{n+3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-3} - \sqrt{n+3}) * \frac{\sqrt{n-3} + \sqrt{n+3}}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n+3}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3 - n-3}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n+3}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{6}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n}-\frac{3}{n}} + \sqrt{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}} = \\ \frac{0}{\sqrt{1-0} + \sqrt{1+0}} &= \frac{0}{1} = 0;\end{aligned}$$

34. Ejercicio

Hallar el $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2-3} - \sqrt{n^2-n}$

Solución

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2-3} - \sqrt{n^2-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-3} - \sqrt{n^2-n}) * \frac{\sqrt{n^2-3} + \sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2-3} + \sqrt{n^2-n}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3 - (n^2-n)}{\sqrt{n^2-3} + \sqrt{n^2-n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3+n}{\sqrt{n^2-3} + \sqrt{n^2-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{3}{n} + \frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{3}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}}} = \\ \frac{1}{\sqrt{1-0} + \sqrt{1-0}} &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2-3} - \sqrt{n^2-n} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

4.2 El número e; indeterminación 1^∞

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281 \dots$$

Para resolver estas indeterminaciones, aplicamos una propiedad de los límites

$$\lim_{n \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{n \rightarrow a} e^{g(x) \cdot (f(x)-1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow a} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow a} e^{b_n \cdot (a_n-1)}$$

35. Ejercicio

Hallar el límite de la sucesión a) $(1 + \frac{1}{n})^n$ b) $(1 - \frac{1}{n})^n$

Solución

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n$$

$$\lim_{n \rightarrow a} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow a} e^{b_n \cdot (a_n - 1)} ; \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot ((1 - \frac{1}{n}) - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot (-\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1} = \frac{1}{e}; \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$$

36. Ejercicio

Hallar el límite de la sucesión $a_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+5}$

Solución

$$\lim_{n \rightarrow a} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow a} e^{b_n \cdot (a_n - 1)} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n+5) \cdot ((\frac{n+3}{n+1}) - 1)} ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n+5) \cdot (\frac{n+3-n-1}{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n+5) \cdot (\frac{2}{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(\frac{2n+10}{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\frac{2n+10}{n+1}}{\frac{n}{n+1}}} = e^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+5} = e^2;$$

37. Ejercicio

Hallar el límite de la sucesión $a_n = \left(\frac{n+8}{n+7}\right)^{-2+n}$

Solución

$$\lim_{n \rightarrow a} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow a} e^{b_n \cdot (a_n - 1)} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+8}{n+7}\right)^{-2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(-2+n) \cdot ((\frac{n+8}{n+7}) - 1)} ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(-2+n) \cdot (\frac{n+8-n-7}{n+7})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(-2+n) \cdot (\frac{1}{n+7})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-2+n}{\frac{n}{n+7}}} = e^1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+8}{n+7}\right)^{-2+n} = e;$$

38. Ejercicio

Hallar el límite de la sucesión $a_n = \left(\frac{n+1}{n+7}\right)^n$

Solución

$$\lim_{n \rightarrow a} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow a} e^{b_n \cdot (a_n - 1)} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+7}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n) \cdot ((\frac{n+1}{n+7}) - 1)} ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n) \cdot (\frac{n+1-n-7}{n+7})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n) \cdot (\frac{-6}{n+7})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-6n}{\frac{n}{n+7}}} = e^{-6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+7}\right)^n = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

39. Ejercicio

Hallar el límite de la sucesión $a_n = \left(\frac{2n^2 + n + 5}{2n^2 + 3} \right)^{\frac{n^2+3}{n+1}}$

Solución

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{b_n \cdot (a_n - 1)} ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n + 5}{2n^2 + 3} \right)^{\frac{n^2+3}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{n^2+3}{n+1} \right) \cdot \left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+3} - 1 \right)} ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{n^2+3}{n+1} \right) \cdot \left(\frac{2n^2+n+5-2n^2-3}{2n^2+3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{n^2+3}{n+1} \right) \cdot \left(\frac{n+2}{2n^2+3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{n^3+2n^2+3n+6}{2n^3+2n^2+3n+3} \right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\frac{n^3+2n^2+3n+6}{2n^3+2n^2+3n+3}}{\frac{n^3+n^3+n^3+n^3}{2n^3+2n^2+3n+3}}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n + 5}{2n^2 + 3} \right)^{\frac{n^2+3}{n+1}} = \sqrt{e}$$

40. Ejercicio

Hallar el valor de a para que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+5}{4n+3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2+1}{4n^2+3} \right)^{an^2}$

Solución

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+5}{4n+3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n) \cdot \left(\frac{4n+5}{4n+3} - 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n) \cdot \frac{4n+5-4n-3}{4n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n) \cdot \frac{2}{4n+3}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2n}{4n+3}} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2+1}{4n^2+3} \right)^{an^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(an^2) \cdot \left(\frac{4n^2+1}{4n^2+3} - 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(an^2) \cdot \frac{4n^2+1-4n^2-3}{4n^2+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(an^2) \cdot \frac{-2}{4n^2+3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-2an^2}{4n^2+3}} = e^{-\frac{2a}{4}} = e^{-\frac{a}{2}}$$

$$\text{para que } e^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{a}{2}} \Rightarrow a = -1;$$