Continuidad de funciones

Contenido

1 Continuidad de una función

Una funcion $f(x)$es continua si para representarla en todo el dominio no necesito levantar el lapiz del papel

1.1 Continuidad de una función en un punto

Una funcion $f(x)$es continua en un punto $x = a$, si de cumplen las tres condiciones siguientes:

a) La funcion $f(x)$existe en el punto $x = a$

b) El limite de la funcion en $x = a$ existe; $\lim_{x \to a} f(x)$ exist

c) La funcion $f(x)$en el punto $x = a = \lim_{x \to a} f(x)$

1.2 Continuidad de una función en un intervalo

Una funcion $f(x)$ es continua en un intervalo (a, b) cuando lo es en cada punto de dicho inervalo

Una funcion $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$cuando lo es en cada punto delintervalo (a, b)

1. Ejercicio

Comprobar si las funciones son continuas en el punto $x = 2$;

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 \text{ si } x > 2; \\ \frac{2}{x} + 10 \text{ si } x \leq 2 \end{cases}$$

b) $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 6}$

Solución

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 \text{ si } x > 2; \\ \frac{2}{x} + 10 \text{ si } x \leq 2 \end{cases}$$

Para que exista limite ha de cumplirse que los limites laterales en $x = 2$ son iguales

Limite por la izuierda $\lim_{x \to a^-} f(x) = 3x^2 - 1 => 3 * 2^2 - 1 = 11;$

Limite por la derecha $\lim_{x \to a+^-} f(x) = \frac{2}{x} + 10 => \frac{2}{2} + 10 = 1 + 10 = 11;$

Dado que los Limite por la derecha e izuierda son iguales hay limite, por lo tanto la funcion es continua en $x = 2$

b) $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 6}$; $ara\ x = 2$; $f(x) = \sqrt{-2 * 2^2 + 6} = \sqrt{-8 + 6} = \sqrt{-2}$

La funcion no existe en $x = 2$; La funcion es discontinua en $x = 2$;

2. Ejercicio

Señala el mayor conjunto de numero reales para los que la funcion $f(x)$ sea continua en cada uno de los siguientes casos.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2$; b) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ c) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

Solución

a) $f(x) = x^3 - 2x^2$; $f(x) = x^2(x - 2)$ *Es continua en todo R*

b) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$; $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{0} = \infty$

Limite por la izuierda $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{x - 1} => -\infty$

Limite por la derecha $\lim_{x \to 1+^-} f(x) = \frac{1}{x-1} => +\infty$

La funcion es continua en $R - \{1\}$

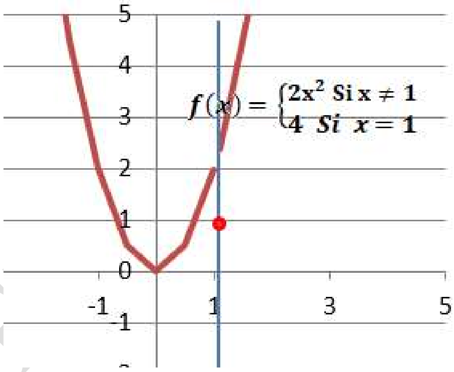
c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ la funcion no existe en $x < 1$;

La funcion es continua en $(-1, \infty)$

2 Tipos de discontinuidad

Una funcion f(x)es discontinua si para representarla, en algun punto del dominio , necesito levantar el lapiz del papel

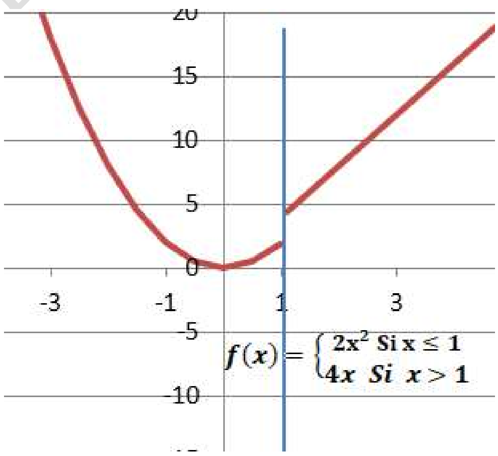
2.1 Discontinuidad evitable



Una funcion f(x) presenta una discontinuidad evitable en $x = a$, si la funcion tiene limite finito pero el valor de la funcion en el punto no coincide con el limite

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 \text{ Si } x \neq 1 \\ 4 \ \ Si \ \ x = 1 \end{cases}$$

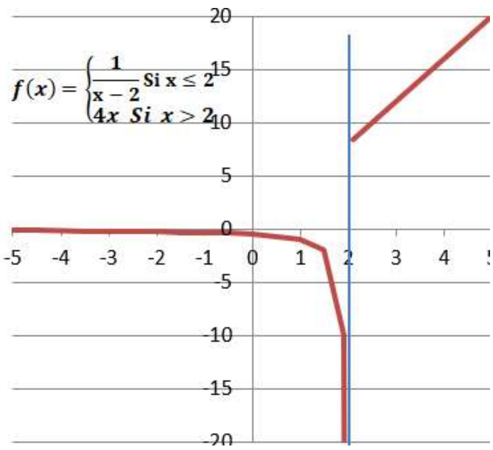
2.2 Discontinuidad de salto finito



Una funcion f(x) presenta una discontinuidad de salto finito en $x = a$, los limites laterales en a existen, son finitos, pero no coinciden

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 \text{ Si } x \leq 1 \\ 4x \ \ Si \ \ x > 1 \end{cases}$$

2.3 Discontinuidad de salto infinito



Una funcion f(x) presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = a$, si uno o los dos limites laterales en a existen y son infitos,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} \text{Si } x \leq 2 \\ 4x \ \ Si \ \ x > 2 \end{cases}$$

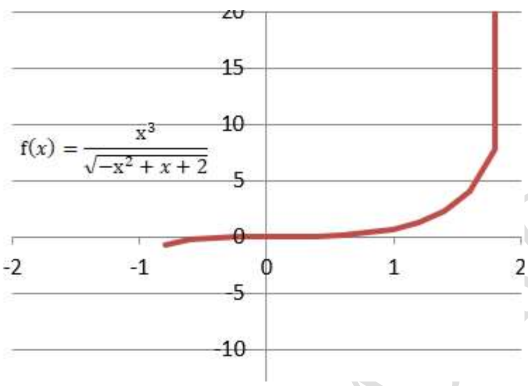
3. **Ejercicio**

Estudiar la continuidad de las funciones a) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ $b)$ $f(x) = \log(x^2 + 1)$

$c) f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$; $d) f(x) = \sqrt{2 + |2x - 3|}$

Solución

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$;



La funcion será continua para

$-x^2 + x + 2 \geq 0$;

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 * 2(-1)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

La funcion es continua en $(-1,2)$

$b)$ $f(x) = \log(x^2 + 1)$;

La funcion será continua para $x^2 + 1 \geq 0$; Cualquier valor de x será positivo

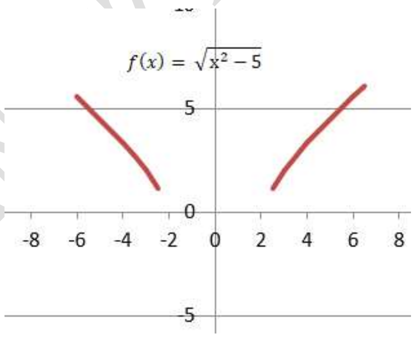
La funcion es continua en R

$c) f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$

La funcion será continua para $x^2 - 5 \geq 0$;

$x \geq \sqrt{5}$;

continua en $(-\infty, -\sqrt{5}) U (\sqrt{5}, \infty)$



d) $f(x) = \sqrt{2 + |2x - 3|}$ La funcion será continua para $2 + |2x - 3| \geq 0$;

dado que $|2x - 3|$siempre es positivo .

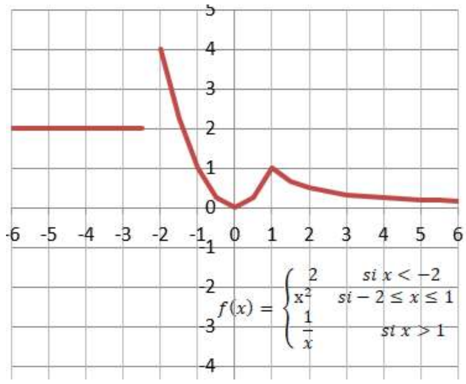
La funcion es continua en R

4. ***Ejercicio***

Representar y estudiar la continuidad de la funcion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si\ x < -2 \\ x^2 & si -2 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$$

Solución



Limite por la izquierda $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 2$

Limite por la derecha $\lim_{-2^+} f(x) = x^2 = (-2)^2 = 4$;

No hay continuidad en $x = -2$

Limite por la izquierda $\lim_{x \to 1^-} f(x) = x^2 = 1^2 = 1$;

Limite por la derecha $\lim_{1^+} f(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1} = 1$;

Hay continuidad en $x = 1$

5. ***Ejercicio***

Indicar el valor de a para que la funcion $f(x) = \begin{cases} \mathrm{ax + a} & \mathrm{Si\ x \leq -2} \\ \dfrac{x}{x+4} & Si\ \ x > -2 \end{cases}$

a) Sea continua en $\mathrm{x = -2}$

b) Presente una discontinuidad evitable en $\mathrm{x = -2}$

c) Presente una discontinuidad de salto finito en $\mathrm{x = -2}$

d) presente una discontinuidad de salto infinito en $\mathrm{x = -2}$

Solución

a) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{ax + a} & \mathrm{Si\ x \leq -2} \\ \dfrac{x}{x+4} & Si\ \ x > -2 \end{cases}$ Sea continua en $\mathrm{x = -2}$

Limite por la izquierda $\lim\limits_{x\to 2^-} \mathrm{f(x) = ax + a = a(-2) + a = \ -2a + a = -a}$

Limite por la derecha $\lim\limits_{x\to 2^+} \mathrm{f(x)} = \dfrac{x}{x+4} = \dfrac{(-2)}{(-2)+4} = \dfrac{-2}{+2} = -1;$

Para que sea continua los limites han de ser iguales => $\mathrm{-a = -1; a = 1;}$

Para que sea continua la funcion ha de existir en ese punto. Sustituyo en valor de a;

$f(x) = \begin{cases} \mathrm{1x + 1\ Si\ x \leq -2} \\ \dfrac{x}{x+4} \ \ Si\ \ x > -2 \end{cases}$ $Para\ x = -2;\ f(x) = -2 + 1 = -1$;

Como el limite de la funcion y la funcion en $\mathrm{x = -2}$ son iguales decimos que la funcion es continua

b) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{ax + a} & \mathrm{Si\ x \leq -2} \\ \dfrac{x}{x+4} & Si\ \ x > -2 \end{cases}$ Presente una discontinuidad evitable en $\mathrm{x = -2}$

Una funcion f(x) presenta una discontinuidad evitable en x = a, si la funcion tiene limite en ese punto, pero no coinciden con el valor de la función;

Limite por la izuierda $\lim\limits_{x\to 2^-} \mathrm{f(x) = ax + a = a(-2) + a = \ -2a + a = -a}$

Limite por la derecha $\lim\limits_{x\to 2^+} \mathrm{f(x)} = \dfrac{x}{x+4} = \dfrac{(-2)}{(-2)+4} = \dfrac{-2}{+2} = -1;$

El limite existe si $\mathrm{- a = -1; a = -1;}$

Como el limite de la funcion y la funcion en $\mathrm{x = -2}$ son iguales, no pueden ser discontinuidad evitable

c) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{ax + a} & \mathrm{Si\ x \leq -2} \\ \dfrac{x}{x+4} & Si\ \ x > -2 \end{cases}$ Presente una discontinuidad de salto finito

Una funcion f(x) presenta una discontinuidad de salto finito en x = a, si los limites laterales no coinciden

Limite por la izuierda $\lim\limits_{x\to 2^-} \mathrm{f(x) = ax + a = a(-2) + a = \ -2a + a = -a}$

Limite por la derecha $\lim\limits_{x\to 2^+} \mathrm{f(x)} = \dfrac{x}{x+4} = \dfrac{(-2)}{(-2)+4} = \dfrac{-2}{+2} = -1;$

Para que sea discontinua de salto finito => $\mathrm{-a \neq -1; a \neq 1;}$

d) presente una discontinuidad de salto infinito en $\mathrm{x = -2}$

Dado que para $\mathrm{a = 1}$ es continua y para $\mathrm{a \neq 1}$ es discontinua de salto finito, no hay ningun valor de a que haga la funcion discontinua de salto infinito

6. ***Ejercicio***

Calcula el valor o valores de k para que la funcion sea continua en R

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1 & \text{Si } x\le -2\\ 2x+k & Si\ \ x>-2\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2-2k & \text{Si } x\le 1\\ x^2-3x-k & Si\ \ x>1\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}x^2-kx & \text{Si } x<3\\ \ln(x-2) & Si\ \ x\ge 3\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}kx^2-1 & \text{Si } x\le 3\\ e^{x^2-9} & Si\ \ x>3\end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}-1 & \text{Si } x\ne 3\\ 2k-3 & Si\ x=3\end{cases}$

Solución

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1 & \text{Si } x\le -2\\ 2x+k & Si\ \ x>-2\end{cases}$

Limite por la derecha $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=2x+k=-4+k;$

Limite por la izquierda $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\frac{1}{2}x^2+1=2+1=3;$

Para que sea continua los limites han de ser iguales $=>\ -4+k=3; k=7;$

Para que sea continua la funcion ha de existir en ese punto. Sustituyo en valor de k;

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+1\ ; f(x)=3;$ La funcion es continua

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-2k & \text{Si } x\le 1\\ x^2-3x-k & Si\ \ x>1\end{cases}$

Limite por la derecha $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=x^2-3x-k=1-3-k=-2-k=-5; Para\ k=3;$

Limite por la izquierda $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=x^2-2k\ =1-2k=-5$ para $k=3$

Para que sea continua los limites han de ser iguales $=>\ -2-k=1-2k; k=3;$

Para que sea continua la funcion ha de existir en ese punto. Sustituyo en valor de k;

$f(x)=x^2-2k; f(x)=1-2*3=-5;$ La funcion es continua

c) $f(x)=\begin{cases}x^2-kx & \text{Si } x<3\\ \ln(x-2) & Si\ \ x\ge 3\end{cases}$

Limite por la derecha $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\ln(x-2)\ =\ln(3-2)=\ln(1)=0;$

Limite por la izquierda $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=x^2-kx\ =x^2-k(-3)=9+3k;$

Para que sea continua los limites han de ser iguales $=>\ 9+3k=0;\ k=-3;$

Para que sea continua la funcion ha de existir en ese punto. Sustituyo en valor de k;

$f(x)=\ln(x-2)=\ \ln(3-2)=\ \ln(1)\,; f(x)=0=>$ La funcion es continua

d) $f(x)=\begin{cases}kx^2-1 & \text{Si } x\le 3\\ e^{x^2-9} & Si\ \ x>3\end{cases}$

Limite por la derecha $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=e^{x^2-9}\ =e^0=1;$

Limite por la izquierda $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=kx^2-1\ =9k-1;$

Para que sea continua los limites han de ser iguales $=>\ 9k-1=1; k=2/9;$

Para que sea continua la funcion ha de existir en ese punto. Sustituyo en valor de k;

$f(x)=kx^2-1=\frac{2}{9}(3)^2-1=1; f(x)=1=>$ La funcion es continua

$e)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3} - 1 & \text{Si } x \neq 3 \\ 2k - 3 & Si\ x = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0; x = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 * 1 * 6}}{2 * 1} = (x-2)(x-3) \\ x^2 - 2x - 3 = 0; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * 1 * (-3)}}{2 * 1} = (x-3)(x+1) \end{cases}$$

Limite para $x \neq 3$ $\lim\limits_{x \to 3^{+-}} f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{(x-2)}{(x+1)} = \dfrac{(3-2)}{(3+1)} = \dfrac{1}{4};$

Limite para $x = 3$ $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2k - 3;$

Para que sea continua los limites han de ser iguales $=> \dfrac{1}{4} = 2k - 3; k = \dfrac{13}{8}$

Para que sea continua la funcion ha de existir en ese punto. Sustituyo en valor de k;

$f(x) = 2k - 3 = 2 * \dfrac{13}{8} - 3 = \dfrac{13}{4} - 3 = \dfrac{1}{4}$ La funcion es continua

7. ***Ejercicio***

Calcula los valores de a y b para que la funcion sea continua en R

a) $f(x) = \begin{cases} x + b & \text{Si } x \leq 1 \\ e^{x-1} + ax & Si\ 1 < x < 3 \\ x^2 - 2x - 2 & si\ x \geq 3 \end{cases}$

Solución

Los posibles puntos de discontinuidad son $x = 1$ y $x = 3$;

Limite por la izquierda $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = x + b = 1 + b;$

Limite por la derecha $\lim\limits_{1^+} f(x) = e^{x-1} + ax = e^{1-1} + a * 1 = 1 + a;$

Para que haya continuidad en $x = 1 => 1 + b = 1 + a;\ a = b$

Limite por la izquierda $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = e^{x-1} + ax = e^{3-1} + a * 3 = e^2 + 3a;$

Limite por la derecha $\lim\limits_{3^+} f(x) = x^2 - 2x - 2 = 3^2 - 2 * 3 - 2 = 9 - 6 - 2 = 1;$

Para que haya continuidad en $x = 3 => e^2 + 3a = 1; a = \dfrac{1 - e^2}{3}$

$a = b = \dfrac{1 - e^2}{3}$

3 Teorema de Bonzano

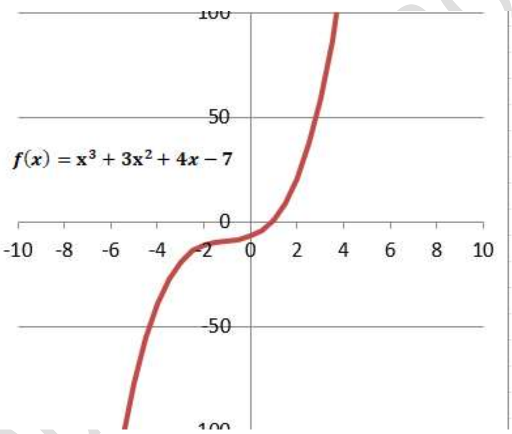
"Si una función f(x)está definida y es continua en un intervalo cerrado [a, b] y toma valores de distinto signo en los extremos a y b, entonces existe al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) en el que se anula la función”

8. ***Ejercicio***

Comprueba si las siguientes funciones cortan al eje X y en cada caso establece el intervalo abierto donde esté incluido e punto de corte.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7$ b) $f(x) = 2x - \cos\ x$;

Solución



$a)\ f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7;$

$f(0) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7 \Rightarrow\ -7$

$f(1) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7 \Rightarrow 1 + 3 + 4 - 7 = +1$

Entre 0 y 1 hay un cambio

$f(0{,}5) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7$

$\Rightarrow\ 0{,}125 + 0{,}75 + 2 - 7 = -4{,}125$

$f(0{,}75) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7 \Rightarrow$

$0{,}422 + 1{,}69 + 3 - 7 = -1{,}89$

$f(0{,}80) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7 \Rightarrow$

$0{,}512 + 1{,}92 + 3{,}2 - 7 = -3{,}68$

$f(0{,}9) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7 \Rightarrow 0{,}729 + 2{,}43 + 3{,}6 - 7 = -0{,}241$

$f(0{,}95) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7 \Rightarrow 0{,}86 + 2{,}71 + 3{,}8 - 7 = 0{,}37$

$c \in (0{,}90; 0{,}95) tal\ que\ f(c) = 0;$

$b)\ f(x) = 2x - \cos\ x$

$f(0) = 2 * 0 - \cos 0 = 0 - 1 < 0$

$f(1) = 2 * 1 - \cos 1 = 2 - 0.99984 > 0$

$f(0{,}5) = 2 * 0{,}5 - \cos 0{,}5 = 1 - 0.99999 > 0$

$$\begin{cases} f(0) = 2 * 0 - \cos 0 = 0 - 1 < 0 \\ f(0{,}5) = 2 * 0{,}5 - \cos 0{,}5 = 1 - 0.99999 > 0 \end{cases} \Rightarrow c \in (0; 0{,}5) tal\ que\ f(c) = 0;$$

9. ***Ejercicio***

Demuestra que la ecuación $f(x) = x^4 + x - 1 = 0$ tiene solucion positiva.

Halla la anterior ecuacion con una cifra decimal exacta.

Solución

Para ver si tiene solucion positiva descarto la parte negativa, aunque puede tener solucion negativa

$f(0) = x^4 + x - 1 = 0 + 0 - 1 < 0$

$f(1) = x^4 + x - 1 = 1 + 1 - 1 > 0$

$f(0{,}5) = x^4 + x - 1 = 0{,}0625 + 0.5 - 1 = -0{,}43 < 0$

$f(0{,}75) = x^4 + x - 1 = 0{,}3164 + 0{,}75 - 1 = 0{,}0664 > 0$

$$\begin{cases} (0{,}7) = x^4 + x - 1 = 0{,}2401 + 0.7 - 1 = -0{,}0599 < 0 \\ f(0{,}75) = x^4 + x - 1 = 0{,}3164 + 0{,}75 - 1 = 0{,}0664 > 0 \end{cases} \Rightarrow c \in (0{,}7; 0{,}75) tal\ que\ f(c) = 0;$$

Raiz aproximada 0,7

10. ***Ejercicio***

Comprueba si las siguientes funciones cortan al eje X en al menos un punto e indicar el intervalo de extremos de numeros entreros consecutivos al cual pertenece el punto.

a) $f(x) = \cos x \; - \mathrm{x} + 1$ $\quad b)\; f(x) = x\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - x - 16;\quad c)\; f(x) = \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 - \cos\;\; \pi x + 2$

Solución

a) $f(x) = \cos x \; - \mathrm{x} + 1$

$f(0) = \cos x \; - \mathrm{x} + 1 = 1 - 0 + 1 = 2 > 0$

$f(1) = \cos x \; - \mathrm{x} + 1 = 0{,}99984 - 1 + 1 = 0{,}99 > 0$

$f(1{,}75) = \cos x \; - \mathrm{x} + 1 = 0{,}99953 - 1{,}75 + 1 = 0{,}24953 > 0$

$f(2) = \cos x \; - \mathrm{x} + 1 = 0{,}999390 - 2 + 1 = -0{,}00061 < 0$

$$\begin{cases} (1{,}9) = \cos x \; - \mathrm{x} + 1 = 0{,}99945 - 1{,}9 + 1 = 0{,}099 > 0 \\ f(2) = \cos x \; - \mathrm{x} + 1 = 0{,}999390 - 2 + 1 = -0{,}00061 < 0 \end{cases} => c \in (1{,}9; 2)\, tal\ que\ f(c) = 0;$$

Raiz aproximada 1,95

$b)\; f(x) = x\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - x - 16;$

$f(1) = x\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - x - 16 = 0 * 1 - 0 - 16 = -14 < 0$

$f(2) = x\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - x - 16 = 0 * 1 - 0 - 16 = -3{,}22 < 0$

$f(3) = x\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - x - 16 = 41 > 0$

$c \in (1{,}2)\, tal\ que\ f(c) = 0$

$$raiz \begin{cases} f(1{,}9) = \cos x \; - \mathrm{x} + 1 = 0{,}99945 - 1{,}9 + 1 = 0{,}099 > 0 \\ f(2) = \cos x \; - \mathrm{x} + 1 = 0{,}999390 - 2 + 1 = -0{,}00061 < 0 \end{cases} => c \in (1{,}9; 2)\, tal\ que\ f(c) = 0;$$

Raiz aproximada 1,99

$c)\; f(x) = \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 - \cos\;\; \pi x + 2$

$f(0) = \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 - \cos \pi x + 2 = 0 + 0 - 1 + 2 = 1 > 0$

$f(-1) = \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 - \cos \pi x + 2 = -1 + 1 - 0{,}99984 + 2 = 1{,}001 > 0$

$f(-2) = \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 - \cos \pi x + 2 = -8 + 4 - 0{,}99399 + 2 = -2{,}99399 < 0$

$c \in (-2, -1)\, tal\ que\ f(c) = 0$

11. ***Ejercicio***

Comprueba si las siguientes funciones toman el valor m indicado en algun punto del intervalo propuesto

a) $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^5 - \mathrm{x}^3 - \mathrm{x} + 5\;\; \mathrm{m} = -1 \text{ en } (-2, -1)$

b) $\mathrm{f(x)} = \; \mathrm{xe}^{-\mathrm{x}} + 3\;;\;\; \mathrm{m} = \dfrac{3}{2}\; en\ (-1{,}0)$

$c)\; f(x) = sen\ x - \cos x + 2;\;\; m = 3\ en\ (1{,}2)$

Solucion

a) $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^5 - \mathrm{x}^3 - \mathrm{x} + 5\;\; \mathrm{m} = -1 \text{ en } (-2, -1)$

$$\begin{cases} \mathrm{f}(-2) = \mathrm{x}^5 - \mathrm{x}^3 - \mathrm{x} + 5 = \; -32 + 8 + 2 + 5 = \; -17 < 0 \\ \quad \mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^5 - \mathrm{x}^3 - \mathrm{x} + 5 \; = -1 - 1 + 1 + 5 = 6 > 0 \end{cases} Toma\ el\ valor\ de - 1\ en\ el\ intervalo$$

b) $\mathrm{f(x)} = \; \mathrm{xe}^{-\mathrm{x}} + 3\;;\;\; \mathrm{m} = \dfrac{3}{2}\; en\ (-1{,}0)$

$$\begin{cases} \mathrm{f}(-1) = \mathrm{xe}^{-\mathrm{x}} + 3 \;=\; -\mathrm{e} + 3 = 0{,}2817 > 0 \\ \qquad \mathrm{f}(0) = \mathrm{xe}^{-\mathrm{x}} + 3 \;\; = 3 > 0 \end{cases} Toma\ el\ valor\ de\ 3/2$$

$c)\; f(x) = sen\ x - \cos x + 2\;; m = 3\ en\ (1{,}2)$

$$\begin{cases} \mathrm{f}(1) = sen\ x - \cos x + 2 \;=\; 0{,}01745 - 0{,}9998 + 2 = 1{,}001897 > 0 \\ \mathrm{f}(2) = sen\ x - \cos x + 2 \;\; = 0{,}034899 - 0{,}99939 + 2 = 2{,}96449 > 0 \end{cases} no\ toma\ el\ valor\ m = 3$$

12. ***Ejercicio***

Dada la funcion $f(x) = \ln x$; a) Comprueba que es continua en el intervalo $\left|\frac{1}{n}, 1\right|$ para cualquier numero natural de n

b) Halla un intervalo de la forma $\left|\frac{1}{n}, 1\right|$ en que haya algun punto en que $f(x) = -2$;

Solucion

a) Comprueba que es continua en el intervalo $\left|\frac{1}{n}, 1\right|$ para cualquier valor de n

Dado que el 0 no se considera numero natural podemos afirmar que la funcion es continua para $(0, \infty)$; en el intervalo $\left|\frac{1}{n}, 1\right|$ para n Natural

b) Halla un intervalo de la forma $\left|\frac{1}{n}, 1\right|$ en que haya algun punto en que $f(x) = -2$;

$$f(x) = \ln x; \begin{cases} f\left(\frac{1}{1}\right) = \ln 1 = 0; \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln 2 = -0{,}69; \\ f\left(\frac{1}{6}\right) = \ln 1 - \ln 6 = -1{,}7917 \\ f\left(\frac{1}{8}\right) = \ln 1 - \ln 8 = -2{,}079 \end{cases};$$

En el intervalo $\left|1, \frac{1}{8}\right|$ habra algun valor $n = c$ para el que $f(x) = \ln x = -2$;

4 Cotas de una función

Se dice que una funcion esta acotada superiormente si existe un numero real M tal que $f(x) \leq M$

Se dice que una funcion esta acotada inferiormente si existe un numero real M tal que $f(x) \geq M$

Una funcion se dice que es acotada si lo es superior e inferiormente

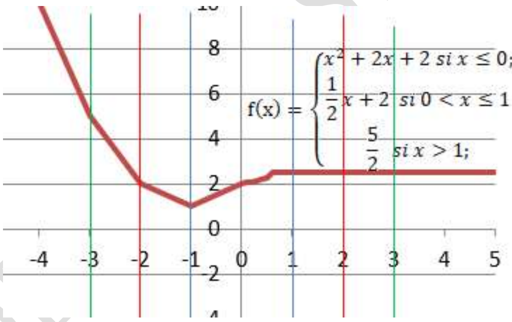
Si una funcion es continua en un intervalo (a, b) está acoyada $|a, b|$;

Teorema de Weierstrass

Si una funcion es continua en un intervalo cerrado $|a, b|$entonces está acotada en $|a, b|$ y tendra un maximo y minimo absoluto en dicho intervalo

13. ***Ejercicio***

Dada la funcion $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 \; si \; x \leq 0; \\ \frac{1}{2}x + 2 \;\; si \; 0 < x \leq 1 \\ \quad \frac{5}{2} \;\; si \; x > 1; \end{cases}$



a) Estudia su acotacion en los intervalos

$|-1{,}1|$ $|-2{,}2|$ y $|-3,|$

b) Estidia si la funcion toma el valor $M = 3$

y en caso afirmativo indica un intervalo de valor

1 done haya un punto que verifique la propiedad

Solucion

a) estudia su acotacion en los intervalos

$$|-1{,}1| \begin{cases} f(-1) = x^2 + 2x + 2 = 1 - 2 + 2 = 1 \\ f(0) = x^2 + 2x + 2 = 0 + 0 + 2 = 2 \\ f(0{,}5) = \frac{1}{2}x + 2 = 0{,}25 + 2 = 2{,}25 \\ f(1) = \frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} = 2{,}5 \end{cases}$$ está acotada valor maximo 2,5 y valor minimo 1

$$|-2{,}2| \begin{cases} f(-2) = x^2 + 2x + 2 = 4 - 4 + 2 = 2 \\ f(-1) = x^2 + 2x + 2 = 1 - 2 + 2 = 1 \\ f(0) = x^2 + 2x + 2 = 0 + 0 + 2 = 2 \\ f(1) = \frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} = 2{,}5 \\ f(3) = \frac{5}{2} = 2{,}5; \end{cases}$$ está acotada valor maximo 2,5 minimo 1

$$|-3,| \, |-2{,}2| \begin{cases} f(-3) = x^2 + 2x + 2 = 9 - 6 + 2 = 5 \\ f(-1) = x^2 + 2x + 2 = 1 - 2 + 2 = 1 \\ f(0) = x^2 + 2x + 2 = 0 + 0 + 2 = 2 \\ f(1) = \frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} = 2{,}5 \\ f(3) = \frac{5}{2} = 2{,}5; \end{cases}$$ está acotada valor maximo 5 minimo 1

b) Estidia si la funcion toma el valor $M = 3$ y en caso afirmativo indica un intervalo de longitud

1 done haya un punto que verifique la propiedad;

$$|-3,| \, |-2{,}2| \begin{cases} f(-3) = x^2 + 2x + 2 = 9 - 6 + 2 = 5 \\ (-2) = x^2 + 2x + 2 = 4 - 4 + 2 = 2 \end{cases} \quad |-3, -2| \textit{la funcion vale } 3$$

Ejercicio

Para cada una de las siguientes funciones y considerando el intervao señalado, estudia si es acotada e indica, si es que existe, el valor del supremo , infimo, maximo y mínimo

a) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ en $|1,3|$

b) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$ en $|-1,0|$

c) $f(x) = \dfrac{x}{2x-4}$ en $|-2,1|$

d) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ en $|-2,0|$

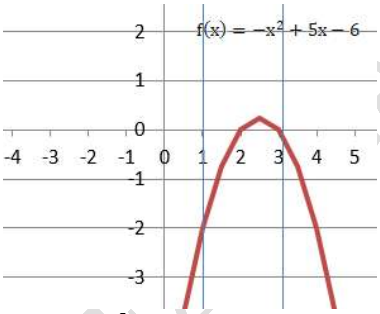
e) $f(x) = x^2 + 5x - 6$ en $(-3,0)$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ en $(0,1|$

Solución

a) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ en $|1,3|$ la funcion es continua en el intervlo.

Segun el teorema de Weierstrass tendra un maximo y minimo absoluto en dicho intervalo



Es una parabola comprobamos donde corta los ejes $-x^2 + 5x - 6 = 0; x = 2$ y $x = 3;$

El maximo estara en 2,5 el tendra un supremo maximo en $x = 2{,}5$ y

$f(2{,}5) = -x^2 + 5x - 6 = 0{,}25 = -6{,}25 + 12{,}5 - 6 = 0{,}25$

El infimo y minomo estará $f(1) = -x^2 + 5x - 6 = -1 + 5 - 6 = -2$

b) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$ en $|-1,0|$

La funcion es continua en el intervalo

Es una parabola comprobamos donde corta los ejes

$-x^2 - 2x - 1 = 0;\ x = -1;$ Solo corta en un punto

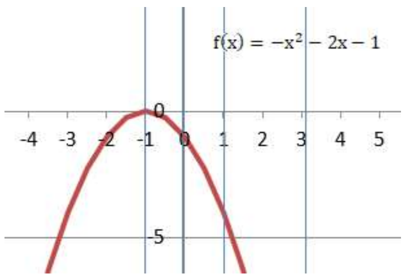
Por lo que ese punto será un maximo o minimo

$f(-1) = -x^2 - 2x - 1 = -1 + 2 - 1 = 0;$

$f(0) = -x^2 - 2x - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$

tendra un supremo maximo en $x = -1$ y $f(x) = 0;$

El infimo y minomo estará $x = 0; f(0) = -1$



c) $f(x) = \dfrac{x}{2x-4}$ en $|-2,1|$

La funcion presenta una discontinuidad en $x = 2;$

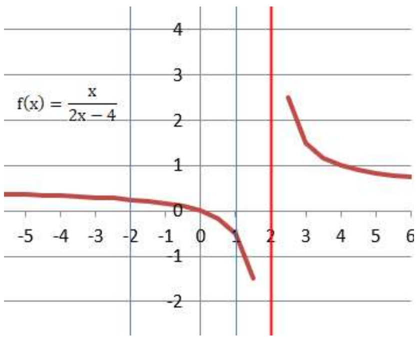
es continua en el intervalo

tendra un supremo maximo en $x = -2;$

El infimo y minomo estará $x = 1$

$$f(-2) = \frac{x}{2x-4} = \frac{-2}{2(-2)-4} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = \frac{x}{2x-4} = \frac{1}{2(1)-4} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$



d) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ en $|-2{,}0|$

La funcion presenta una discontinuidad en $x = -1$;

No es continua en el intervalo

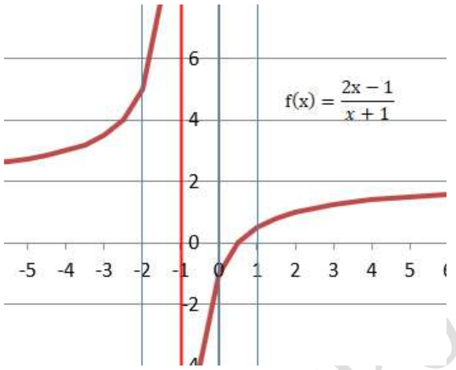
$f(-2) = \dfrac{2x - 1}{x + 1} = \dfrac{-4 - 1}{-2 + 1} = \dfrac{-5}{-1} = 5$

$f(-1{,}5) = \dfrac{2x - 1}{x + 1} = 8$

$f(-0{,}5) = \dfrac{2x - 1}{x + 1} = 4$

$f(0) = \dfrac{2x - 1}{x + 1} = \dfrac{-1}{+1} = -1$

No tiene un infimo, ni minimo ni supremo ni máximo



e) $f(x) = x^2 + 5x - 6$ en $(-3{,}0)$

La funcion es continua en el intervalo

Es una parabola comprobamos donde corta los ejes

$x^2 + 5x - 6 = 0;\ x = 2 \text{ y } x = -6$

El punto maximo o minimo estará en $-\ 3{,}5$

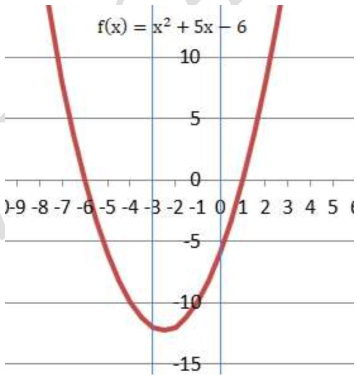
Al ser un intervalo abierto en -3

No está acotada superiormente, no tiene maximo y

presenta un supremo en $x = -6$

El infimo y minimo estará $x = 3{,}5$;

$f(-3{,}5) = x^2 + 5x - 6 = -11{,}25$



f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ en $(0{,}1|$

La funcion presenta una discontinuidad en $x = 0$;

Dado que la función es abierta en $x = 0$

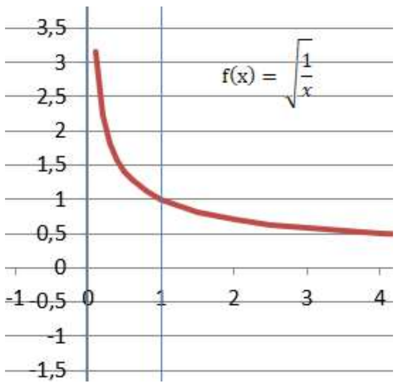
podemos decir que la funcion es continua en el intervalo

No está acotada inferiormente

presenta un infimo en $x = 0$ y no tiene minimo

Prenta un supremo y maximo en $x = 1$

$f(1) = \sqrt{\dfrac{1}{x}} = 1;$



Ejercicio

Un equipo de investigacion que el numero de bacterias, en miles, de un cultivo, en funcion del tiempo t que ha pasado, desde el instate inicial t = 0, viene dado por la funcion

$$\begin{cases} f(t) = \frac{2}{9}t^2 + 1 \; si \; 0 \le t \le 3 \\ f(t) = \frac{4t}{t+1} \; si \; t > 3 \end{cases}$$

a) Comprueba que la funcion es continua en todo el dominio

b) Haz una representacion de la función

c)Demuestra que hay algun instante en que el numero de bacterias 3500.

menor de 30 minutos en que este incluido ese instante

Solución

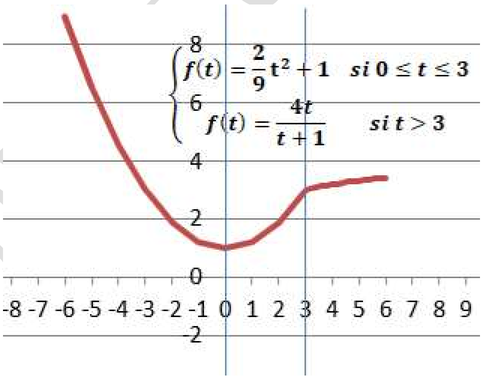
a) Comprueba que la funcion es continua en todo el dominio

El posible punto de discontinuidad es en x = 3;

Limite por la izquierda $\lim_{x\to 3^-} f(t) = \frac{2}{9}t^2 + 1 = \frac{2}{9}3^2 + 1 = 3;$

Limite por la derecha $\lim_{x\to 3^+} f(t) = \frac{4t}{t+1} = \frac{4*3}{3+1} = 3$

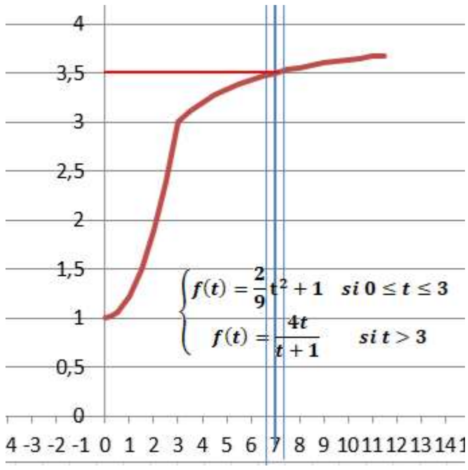
La funcion es continua en todo el dominio



b) Haz una representacion de la función

c)Demuestra que hay algun instante en que el numero de bacterias 3500.

menor de 30 minutos en que este incluido ese instante



Probamos con t = 4h; $f(4) = \frac{2}{9}4^2 + 1 = 3200;$

Probamos con t = 6h; $f(6) = \frac{2}{9}4^2 + 1 = 3429;$

Probamos con t = 7h; $f(7) = \frac{2}{9}4^2 + 1 = 3500;$

Dado que el intervalo ha de ser menor de 30 minutos

(6,45; 7,15)