

Derivadas

Contenido

1	DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO	2
1.1	TASA DE VARIACIÓN MEDIA (T.V.M.)	2
1.2	DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO	2
1.3	DERIVADAS DE DISTINTAS FUNCIONES.....	4
1.3.1	<i>Derivada de una constante</i>	<i>4</i>
1.3.2	<i>Derivada de una potencia.....</i>	<i>4</i>
1.3.3	<i>Derivada de una raíz.....</i>	<i>4</i>
1.3.4	<i>Derivada de la suma de funciones.....</i>	<i>5</i>
1.3.5	<i>Derivada de un producto</i>	<i>5</i>
1.3.6	<i>Derivada de un cociente.....</i>	<i>5</i>
1.3.7	<i>Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena</i>	<i>6</i>
1.3.8	<i>Derivada de la raíz cuadrada de una función</i>	<i>7</i>
1.3.9	<i>Derivada de la función inversa</i>	<i>9</i>
1.3.10	<i>Derivada de la función potencial.....</i>	<i>13</i>
1.3.11	<i>Derivada de la función logarítmica</i>	<i>15</i>
1.3.12	<i>Derivada de la función exponencial</i>	<i>17</i>
1.3.13	<i>Derivadas de funciones trigonométricas</i>	<i>20</i>
1.3.14	<i>Derivada de funciones trigonométricas inversas.....</i>	<i>22</i>
2	TABLA DE LAS PRINCIPALES DERIVADAS	26

1 Derivada de una función en un punto

1.1 Tasa de variación media (T.V.M.)

La T. V. M. mide el crecimiento medio de una función en un intervalo

Si la función es creciente en el intervalo $[a, b]$ su T. V. M. es positiva en ese intervalo y

si es decreciente es negativa.

Si la T. V. M. es 0 en el intervalo $[a, b]$ significa que $f(a) = f(b)$;

$$\text{T. V. M.} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

1. Ejercicio

Determinar la T. V. M. de la función $f(x) = x^2 + 8$; en los intervalos a) $[-3, 2]$, b) $[1, 2]$;

Solución

$$\text{a) T. V. M.} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; \text{ T. V. M. } [-3, 2] = \frac{f(2) - f(-3)}{2 - (-3)} = \frac{(2^2 + 8) - ((-3)^2 + 8)}{2 - (-3)};$$

$$\frac{(4 + 8) - (9 + 8)}{2 + 3} = \frac{12 - 17}{5} = -\frac{5}{5} = -1;$$

$$\text{b) T. V. M.} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; \text{ T. V. M. } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - (1)} = \frac{(2^2 + 8) - (1^2 + 8)}{2 - 1};$$

$$\frac{(4 + 8) - (9)}{1} = \frac{12 - 9}{1} = \frac{3}{1} = 3;$$

1.2 Derivada de una función en un punto

Si tenemos la función $f(x)$ y los puntos a y $(a+h)$ que nos definen los puntos P y Q .

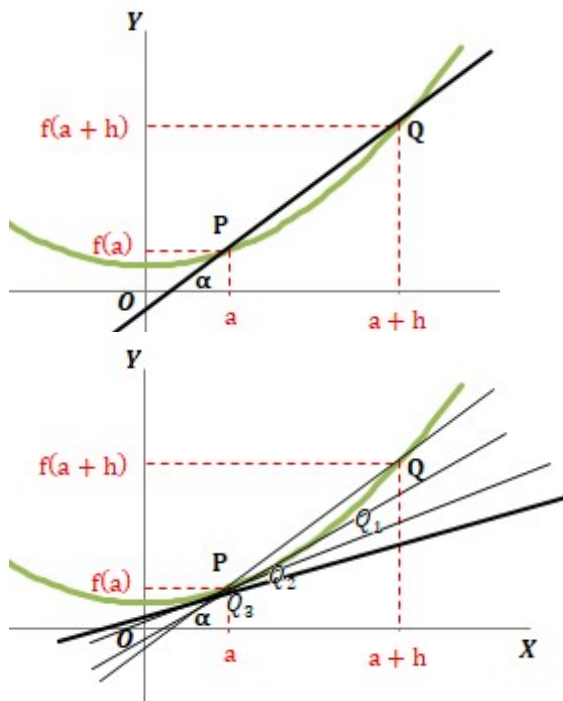
Podemos observar que la recta secante que pasa por PQ tienen una pendiente m donde

$$\text{TVM} = m = \tan \alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

Si vamos dando valores a h cada vez más pequeños, de forma que Q se vaya acercando a P , cuando h vale 0 la recta definida será tangente a la curva de la función en el punto P
 $=Q$

La tangente de esta recta, tangente a la función en el punto P es lo que llamamos f' (derivada) de la función $f(x)$ en el punto P .

$$\text{Derivada} = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



2. Ejercicio

Hallar la derivada de $y = \frac{3}{x-2}$ en los puntos de abscisas , 1, -1 y 5

Solución

$$\text{Derivada} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{(x+h)-2}\right) - \left(\frac{3}{x-2}\right)}{h}$$

$$\text{en el valor de } x = 1; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{(1+h)-2}\right) - \left(\frac{3}{1-2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{h-1}\right) - \left(\frac{3}{-1}\right)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{h-1}\right) + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3+3h-3}{h-1}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+3h-3}{h^2-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{h-1} =$$

$$= \frac{3}{0-1}; \text{ Derivada} = f'(x) = -3;$$

$$x = -1; \text{ Derivada} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{(x+h)-2}\right) - \left(\frac{3}{x-2}\right)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{(-1+h)-2}\right) - \left(\frac{3}{-1-2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{h-3}\right) - \left(\frac{3}{-3}\right)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{h-3}\right) + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3+h-3}{h-3}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+h-3}{h^2-3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(h-3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-3} =$$

$$= \frac{1}{0-3} = \text{Derivada} = f'(x) = -\frac{1}{3};$$

3. Ejercicio

Hallar la derivada de $y = \frac{x^2}{2} + 7x$ en los puntos de abscisas , 1, -1 y 3

Solución

$$\text{Derivada} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{(x+h)^2}{2} + 7(x+h)\right) - \left(\frac{x^2}{2} + 7x\right)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^2 + h^2 + 2xh}{2} + 7(x+h)\right) - \left(\frac{x^2}{2} + 7x\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^2 + h^2 + 2xh + 14x + 14h}{2}\right) - \left(\frac{x^2 + 14x}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + h^2 + 2xh + 14x + 14h - x^2 - 14x}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 + 2xh + 14h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x + 14)}{2h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + 2x + 14}{2} = x + 7$$

$$\text{Para } x = 1; f'(x) = x + 7; f'(1) = 1 + 7 = 8;$$

$$\text{Para } x = -1; f'(x) = x + 7; f'(-1) = -1 + 7 = 6;$$

$$\text{Para } x = 3; f'(x) = x + 7; f'(3) = 3 + 7 = 10;$$

1.3 Derivadas de distintas funciones

1.3.1 Derivada de una constante

$$f(x) = K;$$

$$\text{Derivada} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(k) - (k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f(x) = K; \quad f'(x) = 0$$

1.3.2 Derivada de una potencia

$$f(x) = x^n;$$

$$\text{Derivada} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h};$$

$$\text{binomio de newton } (x+h)^n = x^n + n x^{n-1}h + \dots + nx h^{n-1} + h^n$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + n x^{n-1}h + \dots + nx h^{n-1} + h^n - x^n}{h} =$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(n x^{n-1} + \dots + nx h^{n-2} + h^{n-1})}{h} = n x^{n-1}$$

$$f(x) = x^n; \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

1.3.3 Derivada de una raíz

$$\text{Partimos de la derivada de una potencia } f(x) = x^n; \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x)^{\frac{1}{n}} = f(x)x^{\frac{1}{n}}; \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{x}; \quad f'(x) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$f(x) = \sqrt{x^n}; \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^{n-1}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4. Ejercicio

Hallar las derivada de las siguientes funciones a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Solución

$$\text{a) } f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}; \quad f'(x) = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}; \quad f'(x) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}$$

1.3.4 Derivada de la suma de funciones

$$F(x) = f(x) + g(x); \text{ ejemplo } F(x) = x^2 + x$$

$$\text{Derivada} = F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h};$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + h^2 + 2xh) + x + h - (x^2 + x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + h^2 + 2xh) + x + h - x^2 - x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 2x + 1 = 2x + 1;$$

$$\text{Derivada} = F'(x) = 2x + 1$$

$$F'(x) = f'(x) + g'(x);$$

5. Ejercicio

Hallar las derivadas de las siguientes funciones a) $f(x) = x^4 - 3x$; b) $f(x) = 2x + 4$;

c) $f(x) = 5x^4 + 2x^3 + 7x^2$

Solución

Aplicamos la derivada de la suma de funciones

a) $f(x) = x^4 - 3x$; $f'(x) = 4x^3 - 3$

b) $f(x) = 2x + 4$; $f'(x) = 2$

c) $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 7x^2$; $f'(x) = 20x^3 + 6x^2 - 14x$

6. Ejercicio

Hallar las derivadas de las siguientes funciones a) $f(x) = (x^2 + 1)^2$;

b) $f(x) = (3x^3 - 2x^2 - x + 1)^2$

Solución

a) $f(x) = (x^2 + 1)^2$; $f(x) = x^4 + 1 + 2x^2$; $f'(x) = 4x^3 + 4x$

b) $f(x) = (3x^3 - 2x^2 - x + 1)^2 = 9x^6 - 12x^5 - 2x^4 + 10x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

$f'(x) = 54x^5 - 60x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 6x - 2$;

1.3.5 Derivada de un producto

$$F(x) = f(x) * g(x); F'(x) = f'(x) * g(x) + g'(x) * f(x);$$

$$F(x) = f(x) * g(x) * h(x); F'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

1.3.6 Derivada de un cociente

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) * \frac{1}{g(x)} = f(x) * g(x)^{-1} \text{ aplicamos la formula del producto}$$

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f'(x) * g(x)^{-1} + [(g(x)^{-1})]' * f(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} + \left(-\frac{f(x) * g'(x)}{g(x)^2}\right)$$

$$\frac{f'(x) * g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x) * g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x) * g(x) - g'(x) * f(x)}{g(x)^2}$$

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; F'(x) = \frac{f'(x) * g(x) - g'(x) * f(x)}{g(x)^2};$$

1.3.7 Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena

La regla de la cadena se utiliza para hallar la derivada de una composición de funciones

$$F(x) = f(g(x)) \Rightarrow F'(x) = f'(g) * g'(x)$$

7. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = (x^2 + 1)^3$;

Solución

$$f(x) = (x^2 + 1)^3; f'(g) = 3(x^2 + 1)^2 * (2x + 0) = 3(x^4 + 1 + 2x^2)(2x);$$

$$f'(g) = 6x^5 + 12x^3 + 6x$$

8. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = (2x - 7)(5 - 3x)$;

Solución

$$f(x) = (2x - 7)(5 - 3x);$$

$$f'(x) = 2 * (5 - 3x) + (-3)(2x - 7) = 10 - 6x - 6x + 21 = 31 - 12x;$$

9. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = (x^3 - x)^2(3x^2 - 1)$

Solución

$$f(x) = (x^3 - x)^2(3x^2 - 1);$$

Aplicamos regla de la cadena y producto de funciones

$$f'(x) = 2(x^3 - x)(3x^2 - 1)(3x^2 - 1) + 6x(x^3 - x)^2;$$

$$f'(x) = (18x^7 - 30x^5 + 14x^3 - 2x) + (6x^7 - 12x^5 + 6x^3) = 24x^7 - 42x^5 + 20x^3 - 2x;$$

Otro procedimiento $f'(x) = (x^3 - x)^2(3x^2 - 1) = (x^6 + x^2 - 2x^4) * (3x^2 - 1) =$

$$f(x) = 3x^8 - 7x^6 + 5x^4 - x^2; f'(x) = 24x^7 - 42x^5 + 20x^3 - 2x$$

10. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = (x^4 + 3x^2)(2 - 6x - x^2)$

Solución

$$f(x) = (x^4 + 3x^2)(2 - 6x - x^2) = -x^6 - 6x^5 - x^4 - 18x^3 + 6x^2$$

$$f'(x) = -6x^5 - 30x^4 - 4x^3 - 54x^2 + 12x$$

Otra Forma

$$F'(x) = f'(x) * g(x) + g'(x) * f(x) =$$

$$F'(x) = (4x^3 + 6x)(2 - 6x - x^2) + (-2x - 6)(x^4 + 3x^2)$$

$$F'(x) = (-4x^5 - 24x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 12x) + (-2x^5 - 6x^4 - 6x^3 - 18x^2)$$

$$F'(x) = -6x^5 - 30x^4 - 4x^3 - 54x^2 + 12x$$

11. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = x^2(x+3)(5x^2-x)$

Solución

$$f(x) = x^2(x+3)(5x^2-x) = 5x^5 + 14x^4 - 3x^3;$$

$$f'(x) = 25x^4 + 56x^3 - 9x^2;$$

Otra forma es utilizando la derivada de un producto

$$F'(x) = f(x) * g(x) * h(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$F'(x) = 2x(x+3)(5x^2-x) + x^2 * 1(5x^2-x) + x^2(x+3)(10x-1)$$

$$F'(x) = (10x^4 + 28x^3 - 6x^2) + (5x^4 - x^3) + (10x^4 + 29x^3 - 3x^2)$$

$$F'(x) = 25x^4 + 56x^3 - 9x^2$$

1.3.8 Derivada de la raíz cuadrada de una función

$$F(x) = \sqrt{f(x)}; F'(x) = \frac{f'(x)}{2f(x)}$$

12. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = (x^4 + 8)^2 \sqrt{x-1}$

Solución

$$f(x) = (x^4 + 8)^2 \sqrt{x-1} = (x^8 + 64 + 16x^4) \sqrt{x-1}$$

Aplicamos el producto $F'(x) = f(x) * g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ y regla de la cadena

$$F'(x) = 2(x^4 + 8)(4x^3) \sqrt{x-1} + (x^8 + 64 + 16x^4) \left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right)$$

$$F'(x) = 2(x^4 + 8)(4x^3) \sqrt{x-1} + (x^8 + 64 + 16x^4) \left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right)$$

$$F'(x) = \left(\frac{2(x^4 + 8)(4x^3) \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}} \right) + \frac{x^8 + 64 + 16x^4}{2\sqrt{x-1}}$$

$$F'(x) = \left(\frac{4(x^4 + 8)(4x^3)(x-1) + x^8 + 64 + 16x^4}{2\sqrt{x-1}} \right) =$$

$$F'(x) = \frac{16x^8 + 128x^4 - 16x^7 - 128x^3 + x^8 + 64 + 16x^4}{2\sqrt{x-1}} =$$

$$F'(x) = \frac{17x^8 + 144x^4 - 16x^7 - 128x^3 + 64 + 16x^4}{2\sqrt{x-1}}$$

13. Ejercicio

Hallar las derivadas de las siguientes funciones a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 5}$;

$$b) f(x) = \left(\frac{1}{x-3} \right)^2, \quad c) f(x) = \frac{x-2}{x-1} \sqrt{x}$$

Solución

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; F'(x) = \frac{f'(x) * g(x) - g'(x) * f(x)}{g(x)^2};$$

$$a) f(x) = \frac{x}{x^2 + 5}; f'(x) = \frac{1(x^2 + 5) - 2x(x)}{(x^2 + 5)^2} = \frac{x^2 + 5 - 2x^2}{(x^2 + 5)^2} = \frac{+5 - x^2}{x^4 + 25 + 10x^2}$$

$$b) f(x) = \left(\frac{1}{x-3} \right)^2; f'(x) = 2 \left(\frac{1}{x-3} \right) * \frac{-1}{(x-3)^2} = -\frac{2}{(x-3)^3} = -\frac{2}{x^3 - 9x^2 - 9x - 27}$$

$$c) f(x) = \frac{x-2}{x-1} \sqrt{x}; f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x-2)}{(x-1)^2} \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} * \frac{x-2}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{x-1-x+2}{(x-1)^2} \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} * \frac{x-2}{x-1} = \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2} + \frac{x-2}{2\sqrt{x}(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} * 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-1)^2} + \frac{(x-2)((x-1))}{2\sqrt{x}(x-1)^2} = \frac{\sqrt{x} * 2\sqrt{x}(x-2)((x-1))}{2\sqrt{x}(x-1)^2} = \frac{2x + (x-2)((x-1))}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x + 2}{\sqrt{x}(2x^2 + 2 - 4x)}$$

14. Ejercicio

Hallar la derivada $f'(x)$ y $f''(x)$ de la siguiente función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Solución

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{4x}{x^4 + 1 + 2x^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x}{x^4 + 1 + 2x^2}; f''(x) = \frac{4(x^4 + 1 + 2x^2) - (4x) * (4x^3 + 4x)}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$\frac{(4x^4 + 4 + 8x^2) - 16x^4 - 16x^2}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-12x^4 - 8x^2 + 4}{(x^2 + 1)^4}; f''(x) = \frac{-12x^4 - 8x^2 + 4}{(x^2 + 1)^4}$$

15. Ejercicio

Hallar la derivada $f'(x)$ de la siguiente función $f(x) = (\sqrt{3x-2} + 5)^2$

Solución

$$f(x) = (\sqrt{3x-2} + 5)^2; f'(x) = 2(\sqrt{3x-2} + 5) \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} =$$

$$f'(x) = \frac{6(\sqrt{3x-2} + 5)}{2\sqrt{3x-2}} = \frac{3(\sqrt{3x-2} + 5)}{\sqrt{3x-2}}$$

16. Ejercicio

Hallar la derivada $f'(x)$ de la siguiente función a) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 3)^6$;

$$b) f(x) = \sqrt{2x^3 + x^2}$$

Solución

$$a) f(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 3)^6; f'(x) = 6(x^3 - 2x^2 + x - 3)^5(3x^2 - 4x + 1)$$

$$b) \sqrt{2x^3 + x^2}; f'(x) = \frac{6x^2 + 2x}{2\sqrt{2x^3 + x^2}} = \frac{3x^2 + x}{\sqrt{2x^3 + x^2}}$$

17. Ejercicio

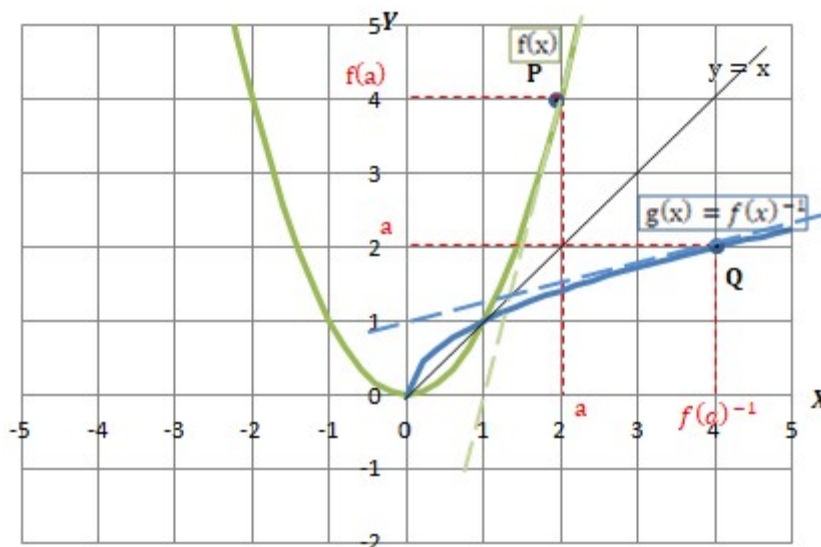
Hallar la derivada $f'(x)$ de la siguiente función a) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{2x-1}\right)^3$

Solución

$$f'(x) = 3\left(\frac{\sqrt{x}}{2x-1}\right)^2 * \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1) - 2\sqrt{x}\right)}{(2x-1)^2} = \frac{3x * \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1) - 2\sqrt{x}\right)}{(2x-1)^4} =$$

$$\frac{3x\left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} * 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)}{(2x-1)^4} = \frac{3x\left(\frac{2x-1-4x}{2\sqrt{x}}\right)}{(2x-1)^4} = \frac{3x(-1-2x)}{2\sqrt{x}(2x-1)^4}; f'(x) = \frac{-3x-6x^2}{2\sqrt{x}(2x-1)^4}$$

1.3.9 Derivada de la función inversa



$f(x)$ es una función y $g(x)$ es la inversa de $f(x)$; $g(x) = f(x)^{-1}$

Las rectas tangentes de una función y su inversa están relacionadas, del mismo modo que también lo están las derivadas de estas funciones.

La derivada de la función $f(x)$ en el punto P es la tangente $f'(x) = \frac{a}{f(a)}$

La derivada de la función $g(x) = f(x)^{-1}$ en el punto Q es la tangente

$$f'(g(x)) = f'(f(x)^{-1}) = \frac{f(a)^{-1}}{a}$$

con lo que se cumple que $x = f(f(x)^{-1}) \Rightarrow [f(x)^{-1}]' * f'(f(x)^{-1}) = 1$;

$$[f(x)^{-1}]' = \frac{1}{f'(f(x)^{-1})}; \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))};$$

La derivada de la función inversa es la inversa de la derivada de la función

Ejemplo:

Sean las funciones del gráfico anterior $y = x^2$; $f(x) = x^2$

Hacemos un cambio de variable $y = x^2 \Rightarrow \sqrt{y} = x$; $g(x) = f(x)^{-1} = \sqrt{y}$

$$f'(x) = 2x; \quad g'(x) = [f(x)^{-1}]' = \frac{1}{2\sqrt{y}};$$

$$\text{sustituyo y por su valor; } y = x^2; \quad g'(x) = [f(x)^{-1}]' = \frac{1}{2\sqrt{x^2}} = \frac{1}{2x}$$

$$\text{Se cumple } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}; \text{ ya que } f'(x) = 2x \text{ y } g'(x) = \frac{1}{2x}$$

18. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x) = \frac{2}{x-1}$

Solución

$$f(x) = \frac{2}{x-1}; \quad f'(x) = \frac{-1(2)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2};$$

$$g(x) = f(x)^{-1} \text{ hacemos cambio de variables } g(x) = \frac{2+y}{y}$$

$$g(x)' = \frac{y-1(2+y)}{y^2} = \frac{y-2-y}{y^2} = \frac{-2}{y^2}$$

$$\text{sustituyo y por su valor; } y = \frac{2}{x-1}; \quad g(x)' = [f(x)^{-1}]' = \frac{-2}{y^2} = \frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2} =$$

$$g(x)' = -\frac{(x-1)^2}{2};$$

$$\text{Se cumple } g(x)' = \frac{1}{f'(g(x))}; \text{ ya que } f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} \text{ y } g(x)' = -\frac{(x-1)^2}{2}$$

19. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Solución

$$f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g(x) = f(x)^{-1} \text{ hacemos cambio de variables } g(x) = y^3$$

$$g(x)' = 3y^2$$

$$\text{Sustituyo y por su valor; } y = \sqrt[3]{x}; \quad g(x)' = [f(x)^{-1}]' = 3(\sqrt[3]{x})^2$$

$$\text{Se cumple } g(x)' = \frac{1}{f'(g(x))}; \text{ ya que } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \text{ y } g(x)' = 3(\sqrt[3]{x})^2$$

20. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$

Solución

$$f(x) = \frac{x-3}{x+3}; \quad f'(x) = \frac{1(x+3) - 1(x-3)}{(x+3)^2} = \frac{x+3-x+3}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2}$$

$$g(x) = f(x)^{-1} \text{ hacemos cambio de variables } y = \frac{x-3}{x+3}; \quad y(x+3) = x-3; \quad g(x) = x^3$$

$$yx + 3y = x - 3; \quad yx - x = -3 - 3y; \quad x(y-1) = -3 - 3y;$$

$$x = \frac{-3 - 3y}{y-1}; \quad g(x) = \frac{-3 - 3y}{y-1}; \quad g(x)' = \frac{-3 * (y-1) - 1(-3 - 3y)}{(y-1)^2} =$$

$$g(x)' = \frac{-3y + 3 + 3 + 3y}{(y-1)^2} = \frac{6}{(y-1)^2}$$

$$\text{Sustituyo y por su valor; } y = \frac{x-3}{x+3}; \quad g(x)' = [f(x)^{-1}]' = \frac{6}{(y-1)^2} = \frac{6}{\left(\frac{x-3}{x+3} - 1\right)^2}$$

$$g(x)' = \frac{6}{\left(\frac{x-3-x+3}{x+3}\right)^2} = \frac{6}{\left(\frac{-6}{x+3}\right)^2} = \frac{(x+3)^2}{6}$$

$$\text{Se cumple } g(x)' = \frac{1}{f'(g(x))}; \text{ ya que } f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \text{ y } g(x)' = \frac{(x+3)^2}{6}$$

21. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x) = x^3 + x + 1$ en el punto $x = 11$;

Solución

Como no es posible hallar la expresión $g(x) = f(x)^{-1}$ aplicamos la propiedad

$$f(x) * f(x)^{-1} = x; \quad g(x)f(x) = x; \quad (g \circ f)(x) = x;$$

$$g(x^3 + x + 1) = x; \quad g'(x^3 + x + 1)(3x^2 + 1) = 1;$$

$$g'(x^3 + x + 1)(3x^2 + 1) = 1; \quad g'(x^3 + x + 1) = \frac{1}{3x^2 + 1}$$

para x de la función $g(x) = f(x)^{-1}$ inversa $= 11 \Rightarrow x^3 + x + 1 = 11$; $x^3 + x - 10 = 0$

hallamos las raíces $x^3 + x - 10 = 0$; $x^3 + x - 10 = (x - 2)(x^2 + 2x + 5)$

$$\text{tomamos la solución real } x = 2 \Rightarrow g(x)' = \frac{1}{3x^2 + 1} = \frac{1}{3 * 2^2 + 1} = \frac{1}{13}$$

22. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $y = x + \sqrt{x + 5}$ en el punto $x = -3$

Solución

La función no es continua en $x = -5$.

Como no es posible hallar la expresión $g(x) = f(x)^{-1}$ aplicamos la propiedad

$$f(x) * f(x)^{-1} = x; \quad g(x)f(x) = x; \quad (g \circ f)(x) = x;$$

$$g(x + \sqrt{x + 5}) = x; \text{ derivamos los dos términos}$$

$$g'(x + \sqrt{x + 5}) \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + 5}} * 1 \right) = 1; \quad g'(x + \sqrt{x + 5}) \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + 5}} \right) = 1$$

$$g'(x + \sqrt{x + 5}) * \frac{2\sqrt{x + 5} + 1}{2\sqrt{x + 5}} = 1; \quad g'(x) = \frac{1}{\frac{2\sqrt{x + 5} + 1}{2\sqrt{x + 5}}} = \frac{2\sqrt{x + 5}}{2\sqrt{x + 5} + 1}$$

para x de la función $g(x) = f(x)^{-1}$ inversa $= -3$ $y = x + \sqrt{x + 5}$; $x + \sqrt{x + 5} = -3$

quitamos la raíz $(-x - 3)^2 = (\sqrt{x + 5})^2$; $x^2 + 6x + 9 = x + 5$; $x^2 + 5x + 4 = 0$;

hallamos las raíces $x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4) = 0$

$$\text{La solución real } x = -1 \Rightarrow g(x)' = \frac{2\sqrt{x + 5}}{2\sqrt{x + 5} + 1} = \frac{2\sqrt{(-1) + 5}}{2\sqrt{(-1) + 5} + 1} = \frac{2\sqrt{4}}{2\sqrt{4} + 1} = \frac{4}{5};$$

$$\text{La solución real } x = -4 \Rightarrow g(x)' = \frac{2\sqrt{x + 5}}{2\sqrt{x + 5} + 1} = \frac{2\sqrt{(-4) + 5}}{2\sqrt{(-4) + 5} + 1} = \frac{2\sqrt{1}}{2\sqrt{1} + 1} = \frac{2}{3};$$

23. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 10$; en el punto $x = 16$

Solución

Como no es posible hallar la expresión $g(x) = f(x)^{-1}$ aplicamos la propiedad

$$f(x) * f(x)^{-1} = x; \quad g(x)f(x) = x; \quad (g \circ f)(x) = x;$$

$$g(x^3 + 2x^2 + 3x + 10) = x; \text{ derivamos los dos términos}$$

$$g'(x^3 + 2x^2 + 3x + 10) = 1; \quad g'(x^3 + 2x^2 + 3x + 10) * (3x^2 + 4x + 3) = 1;$$

$$g'(x^3 + 2x^2 + 3x + 10) = \frac{1}{3x^2 + 4x + 3}$$

para x de la función $g(x) = f(x)^{-1}$ inversa $= 16$ $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 10$;

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 10 = 16; x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0; x + \sqrt{x+5} = -3$$

Hallamos las raíces $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = (x-1)(x^2 + 3x + 6) = 0$; Da una raíz

real y dos imaginarias, tomamos la raíz real $x = 1$;

$$g'(x^3 + 2x^2 + 3x + 10) = \frac{1}{3x^2 + 4x + 3}; \text{ para } x = 1 \quad g'(x) = \frac{1}{3 * 1^2 + 4 * 1 + 3} = \frac{1}{10}$$

24. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2 + 5}$ en el punto $x = 1$

Solución

Para x de la función $g(x) = f(x)^{-1}$ inversa $= 1$ $y = \frac{2x^2 - 4}{x^2 + 5}$

$$\frac{2x^2 - 4}{x^2 + 5} = 1; 2x^2 - 4 = x^2 + 5; x^2 = 9; x = \pm 3;$$

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 + 5) - 2x(2x^2 - 4)}{(x^2 + 5)^2} = \frac{4x^3 + 20x - 4x^3 + 8x}{(x^2 + 5)^2} = \frac{28x}{(x^2 + 5)^2}$$

$$g(x)' = \frac{(x^2 + 5)^2}{28x}; \text{ para } x = 3; g(x)' = \frac{(3^2 + 5)^2}{28 * 3} = \frac{196}{84} = \frac{7}{3}$$

$$g(x)' = \frac{(x^2 + 5)^2}{28x}; \text{ para } x = -3; g(x)' = \frac{((-3)^2 + 5)^2}{28 * (-3)} = -\frac{196}{84} = -\frac{7}{3}$$

25. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x - 4$ en el punto $x = -14$

Solución

Para x de la función $g(x) = f(x)^{-1}$ inversa $= -14$; $-14 = \frac{1}{2}x^3 + 3x - 4$

$$\text{comun denominador} \Rightarrow -\frac{28}{2} = \frac{1}{2}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - \frac{8}{2}; -28 = x^3 + 6x - 8;$$

$$x^3 + 6x + 20 = 0; \text{ hallamos las raíces } \Rightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 10)$$

Una raíz real $x = -2$ y dos imaginarias $x^2 - 2x + 10$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3 = \frac{3x^2 + 6}{2} \Rightarrow g(x)' = \frac{2}{3x^2 + 6}$$

$$g(x)' = \frac{2}{3x^2 + 6}; \text{ para } x = -2; g(x)' = \frac{2}{3(-2)^2 + 6} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

26. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x) = x - \sqrt{x+5}$ en el punto $x = 1$

Solución

Para x de la función $g(x) = f(x)^{-1}$ inversa $= 1$; $1 = x - \sqrt{x+5}$; $x - 1 = \sqrt{x+5}$;

elevo los dos terminos al cuadrado $(x-1)^2 = (\sqrt{x+5})^2$; $x^2 + 1 - 2x = x + 5$;

$$x^2 - 3x - 4 = 0; \text{ hallo raíces } x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 * 1 * (-4)}}{2}; x = \frac{3 \pm 5}{2}; x = 4 \text{ y } x = -1;$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+5}} * 1 = \frac{2\sqrt{x+5} - 1}{2\sqrt{x+5}} \Rightarrow g(x)' = \frac{2\sqrt{x+5}}{2\sqrt{x+5} - 1};$$

$$\text{Para } x = 4 \quad g(x)' = \frac{2\sqrt{4+5}}{2\sqrt{4+5} - 1} = \frac{6}{5}$$

27. Ejercicio

Calcula la ecuación de la tangente a la función $f(x) = 5 + \sqrt{3x - 2}$ en el punto $x = 34$

Solución

La recta tangente será del tipo $y = mx + n$;

1º Calculamos el valor de y para $x = 34$; $f(x) = y = 5 + \sqrt{3 \cdot 34 - 2} = 5 + \sqrt{100}$; $y = 15$

2º Calculamos el valor de m pendiente en el punto $x = 34$

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{2\sqrt{3x-2}} \cdot 3; f'(x) = m = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \text{ en } x = 34; m = \frac{3}{2\sqrt{100}} = \frac{3}{20}$$

3º Hallamos el valor de n sustituyendo los valores conocidos $y = mx + n$;

$$15 = \frac{3}{20} \cdot 34 + n; n = \frac{99}{10}$$

$$\text{La recta tangente en } x = 34; y = \frac{3}{20}x + \frac{99}{10};$$

1.3.10 Derivada de la función potencial

Siendo la función $f(x) = x^a$ y a un número real; $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

$$F(x) = f(x)^a = a \cdot f(x)^{a-1} \cdot f'(x);$$

28. Ejercicio

Calcula la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x} - 4\sqrt{x^3}$

Solución

$$f(x) = \sqrt{x} - 4\sqrt{x^3} \text{ en forma de potencia; } f(x) = x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - 4 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - 6 \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 6\sqrt{x}$$

29. Ejercicio

Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2}$

Solución

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^2}; \text{ Si operamos } f(x) = x^{-\frac{7}{4}}$$

$$f'(x) = -\frac{7}{4}x^{-\frac{7}{4}-1} = -\frac{7}{4} \cdot x^{-\frac{11}{4}} = -\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{x^{\frac{11}{4}}} = -\frac{7}{4\sqrt[4]{x^{11}}} = -\frac{7}{4x^2\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\text{sin operar } f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^2}; f'(x) = -\frac{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \cdot x^2 - 2x \cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^4} = \frac{\frac{1}{4}x^{\frac{5}{4}} - 2x^{\frac{5}{4}}}{x^4} =$$

$$\frac{-\frac{7}{4}x^{\frac{5}{4}}}{x^4} = -\frac{7}{4} \cdot x^{-\frac{11}{4}} = \frac{7}{4\sqrt[4]{x^{11}}} = \frac{7}{4x^2\sqrt[4]{x^3}}$$

30. Ejercicio

Calcula la derivada de la función $f(x) = \sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + x + 1$

Solución

$$f(x) = \sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + x + 1 = x^{\frac{1}{4}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} - 3 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 1 = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 1$$

31. Ejercicio

¿Existe algún punto en la gráfica de la función $y = \sqrt[5]{x}$ en la que la tangente sea paralela a la recta $3x - y = 0$?

Solución

Hallamos la derivada de la función para

que nos de las tangentes a la misma $y = \sqrt[5]{x}$

$$y = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}};$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}};$$

$$f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

Para que la derivada sea paralela ha de

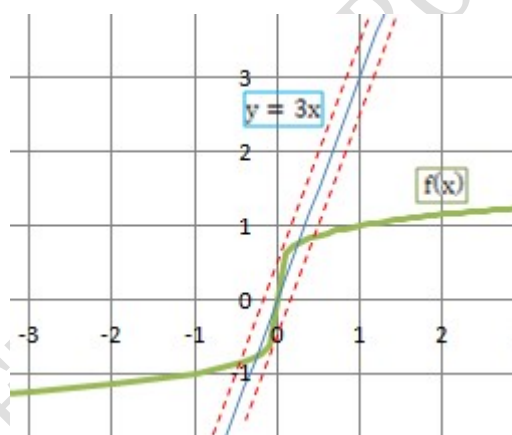
tener la misma pendiente $y = mx + n$;

$$y = 3x; m = 3; \Rightarrow$$

$$3x = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}; 3x = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}; 15x = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} \text{ quitamos raíces } (15x)^5 = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\right)^5;$$

$$(15x)^5 = \frac{1}{x^4}; 15^5 \cdot x^5 \cdot x^4 = 1; 15^5 \cdot x^9 = 1; x^9 = \frac{1}{15^5}; x = \frac{1}{\sqrt[9]{15^5}};$$

$$x = \pm 0,22213$$



32. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{6x-3}$. Hallar :

a) $f'(1)$; $g(x) = f(x)^{-1}$ y $g(x)'$.

b) $g(x)' f(1)$ y compararlo con $f(1)$

c) $= f(2)$

Solución

$$a) f(x) = \sqrt[3]{6x-3}; f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(6x-3)^2}} \cdot 6; f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{(6x-3)^2}};$$

$$f'(1) = \frac{2}{\sqrt[3]{(6 \cdot 1 - 3)^2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9}}; f'(1) = \frac{2}{\sqrt[3]{9}}$$

$$g(x) = f(x)^{-1}; f(x) = \sqrt[3]{6x-3}; \text{ hacemos cambio de variable } x = \sqrt[3]{6y-3};$$

$$x^3 = 6y - 3; y = \frac{x^3 + 3}{6} = \frac{x^3}{6} + \frac{3}{6} = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}; f(x)^{-1} = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2};$$

$$g(x)' = (f(x)^{-1})' = \frac{3x^2}{6} = \frac{x^2}{2}$$

b) $g(x)' f(1)$; dado que $(f(x)^{-1})' = \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$; sustituimos y por su valor

$$(f(x)^{-1})' f(1) = \frac{y^2}{2} = \frac{(\sqrt[3]{6x-3})^2}{2}; \text{ para } f(1), (f(x)^{-1})' f(1) = \frac{\sqrt[3]{9}}{2}.$$

Si, el resultado es el correcto.

$$c) f(x)^{-1} = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}; f(2)^{-1} = \frac{2^3}{6} + \frac{1}{2} = \frac{8}{6} + \frac{3}{6} = \frac{11}{6}; f(2)^{-1} = \frac{11}{6};$$

1.3.11 Derivada de la función logarítmica

$f(x) = \log_a u$; aplicamos la siguiente formula $f(x)' = \frac{u'}{u} \log_a e$

$F(x) = \log_a f(x)$; aplicamos la siguiente formula $F(x)' = \frac{f(x)'}{f(x)} \log_a e$

33. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = \ln(x^3 - 2x + 1)$

Solución

$$f(x) = \ln(x^3 - 2x + 1); f(x)' = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 1} \ln e = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 1} * 1 = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 1}$$

$$f(x)' = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 1}$$

34. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = \sqrt{x} \ln(7x^2)$

Solución

$f(x) = \sqrt{x} \ln(7x^2)$ aplico la formula de la derivada del producto de funciones

$$f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(7x^2) + \frac{14x}{7x^2} \ln e * \sqrt{x} = \frac{\ln(7x^2)}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln(7x^2)}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$f(x)' = \frac{\ln(7x^2)}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

35. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = 5x \log_5 x^4$

Solución

$f(x) = 5x \log_5 x^4$ aplico la formula de la derivada del producto de funciones

$$f(x)' = 5 \log_5 x^4 + \frac{4x^3}{x^4} \log_5 e * 5x = 5 \log_5 x^4 + \frac{20x^4}{x^4} \log_5 e = 5 \log_5 x^4 + 20 \log_5 e$$

$$\text{hacemos un cambio de base } \log_5 e = \frac{\ln e}{\ln 5}; f(x)' = 5 \log_5 x^4 + 20 \frac{\ln e}{\ln 5} = 5 \log_5 x^4 + \frac{20}{\ln 5}$$

$$f(x)' = 5 \log_5 x^4 + \frac{20}{\ln 5}$$

36. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = \log_3(x^5 + 1)$

Solución

$$f(x) = \log_3(x^5 + 1); f(x)' = \frac{5x^4}{x^5 + 1} \log_3 e = \frac{5x^4}{x^5 + 1} * \frac{1}{\ln 3}$$

37. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = \sqrt{\ln x}$

Solución

$f(x) = \sqrt{\ln x} = (\ln x)^{1/2}$ aplico la formula de la derivada de una potencia

$$f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} * \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

38. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = x^x$

Solución

aplicamos logaritmo neperiano a los dos terminos

$\ln f(x) = \ln x^x$; aplicamos la propiedad de los logaritmos $\ln x^a = a * \log x$;

$$\ln f(x) = \ln x^x = x * \ln x; \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = 1 \ln x + \frac{1}{x} \ln e * x; \frac{f(x)'}{f(x)} = \ln x + \frac{1}{x};$$

$$f(x)' = (\ln x + 1) f(x); \text{ sustituyo } f(x)' = (\ln x + 1) x^x$$

39. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = x^{x^x}$

Solución

Aplicamos logaritmo neperiano a los dos terminos

$$\ln f(x) = \ln x^{x^x}; \ln f(x) = x^x \ln x; \text{ derivamos } \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = (x^x)' * \ln x + \frac{1}{x} \ln e * x^x$$

En el ejercicio anterior calculamos $(x^x)' = (\ln x + 1) x^x$ sustituyo

$$\frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = (x^x)' * \ln x + \frac{1}{x} \ln e * x^x = (\ln x + 1) x^x \ln x + x^{x-1}$$

$$\frac{f(x)'}{f(x)} = x^x (\ln x)^2 + x^x \ln x + x^{x-1}; f(x)' = (x^x (\ln x)^2 + x^x \ln x + x^{x-1}) x^{x^x}$$

40. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Solución

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \text{ Aplicamos logaritmo neperiano } \ln f(x) = \ln x^{\frac{1}{x}}; \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x$$

$$\text{derivamos } \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = -\frac{1}{x^2} * \ln x + \frac{1}{x} \ln e * \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} * \ln x + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} (\ln x - 1)$$

$$f(x)' = \frac{1}{x^2} (\ln x - 1) * f(x) \text{ sustituimos }; f(x)' = \frac{1}{x^2} (\ln x - 1) * x^{\frac{1}{x}}$$

41. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Solución

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \text{ Aplicamos logaritmo neperiano } \ln f(x) = \ln e^{\frac{1}{x}}; \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln e$$

$$\text{derivamos } \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = -\frac{1}{x^2} * \ln e + \frac{0}{e} \ln e * \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} * 1 = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x)' = -\frac{1}{x^2} * f(x) \text{ sustituimos }; f(x)' = -\frac{1}{x^2} * e^{\frac{1}{x}}$$

42. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = x^{\ln x}$

Solución

Aplicamos logaritmo neperiano a los dos terminos

$$\ln f(x) = \ln x^{\ln x}; \ln f(x) = \ln x * \ln x; \text{ derivamos } \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = \frac{1}{x} * \ln e * \ln x + \frac{1}{x} \ln e * \ln x$$

$$\frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = \frac{2}{x} \ln x; f(x)' = \frac{2}{x} \ln x * f(x) \text{ sustituyo } f(x)' = \frac{2}{x} \ln x * x^{\ln x}$$

43. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$

Solución

Aplicamos logaritmo neperiano a los dos terminos

$$\ln f(x) = \ln (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}; \ln f(x) = \sqrt{x} * \ln \sqrt{x};$$

$$\text{derivamos } \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = \frac{1}{2\sqrt{x}} * \ln \sqrt{x} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} * \ln e * \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} * \ln \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln \sqrt{x} + 1);$$

$$\frac{f(x)'}{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln \sqrt{x} + 1); f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln \sqrt{x} + 1) * f(x) \text{ sustituyo}$$

$$f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln \sqrt{x} + 1) * (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$$

1.3.12 Derivada de la función exponencial

- Siendo la funcion $f(x) = e^x$; aplico logaritmos $\ln f(x) = \ln e^x \Rightarrow \ln f(x) = x \ln e$

$$\text{derivamos } \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = 1 * \ln e + \frac{0}{e} \ln e = 1; f(x)' = f(x) * 1 = e^x$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x;$$

- Siendo la funcion $F(x) = e^{f(x)}$; aplico logaritmos $\ln F(x) = \ln e^{f(x)} \Rightarrow$

$$\ln F(x) = f(x) \ln e$$

$$\text{derivamos } \frac{F(x)'}{F(x)} \ln e = f(x)' * \ln e + \frac{0}{e} \ln e * f(x) = f(x)' + \frac{0}{e} f(x);$$

$$F(x)' = f(x)' * F(x); F(x)' = f(x)' * e^{f(x)}$$

$$F(x) = e^{f(x)} \Rightarrow F(x)' = f(x)' * e^{f(x)};$$

- Siendo la funcion $f(x) = a^x$; aplico logaritmos $\ln f(x) = \ln a^x \Rightarrow \ln f(x) = x \ln a$

$$\text{derivamos } \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = 1 * \ln a + \frac{0}{a} \ln e = \ln a; f(x)' = f(x) * \ln a = a^x \ln a$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln a * a^x;$$

- Siendo la funcion $F(x) = a^{f(x)}$; aplico logaritmos $\ln F(x) = \ln a^{f(x)} \Rightarrow$

$$\ln F(x) = f(x) \ln a$$

$$\text{derivamos } \frac{F(x)'}{F(x)} \ln e = f(x)' * \ln a + \frac{0}{a} \ln e * f(x) = f(x)' \ln a + \frac{0}{e} f(x);$$

$$F(x)' = f(x)' \ln a * F(x); F(x)' = f(x)' * \ln a * a^{f(x)}$$

$$F(x) = a^{f(x)} \Rightarrow F(x)' = f(x)' * \ln a * a^{f(x)};$$

44. **Ejercicio**

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = e^{3x^3-5x+1}$

Solución

Aplicamos logaritmo neperiano a los dos terminos

$$\ln f(x) = \ln e^{3x^3-5x+1}; \ln f(x) = (3x^3 - 5x + 1) * \ln e; \ln f(x) = (3x^3 - 5x + 1)$$

$$\text{derivamos } \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = (9x^2 - 5); f(x)' = (9x^2 - 5) * f(x)$$

$$f(x)' = (9x^2 - 5) * e^{3x^3-5x+1}$$

45. **Ejercicio**

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = \frac{e^{x^3} + x^3}{x}$; *Solución*

$$f(x) = \frac{e^{x^3} + x^3}{x} = \frac{e^{x^3}}{x} + \frac{x^3}{x} = \frac{e^{x^3}}{x} + x^2; \text{ derivamos}$$

$$f(x)' = \frac{(e^{x^3})' * x - 1e^{x^3}}{x^2} + 2x; \text{ la derivada de la funcion } g(x) = e^{x^3} \text{ será}$$

$$g(x)' = (e^{x^3})' = 3x^2 * e^{x^3}$$

$$f(x)' = \frac{(e^{x^3})' * x - 1e^{x^3}}{x^2} + 2x = \frac{3x^2 * e^{x^3} * x - 1e^{x^3}}{x^2} + 2x = \frac{3x^3 * e^{x^3} - 1e^{x^3}}{x^2} + 2x$$

$$f(x)' = \frac{e^{x^3} (3x^3 - 1)}{x^2} + 2x$$

46. **Ejercicio**

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = \sqrt{x} * e^x$

Solución

$$f(x) = \sqrt{x} * e^x; f(x)' = (\sqrt{x})' e^x + (e^x)' * \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} * e^x + e^x \sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{e^x + 2e^x * x}{2\sqrt{x}}; f(x)' = \frac{e^x(1 + 2x)}{2\sqrt{x}}$$

47. **Ejercicio**

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = 2^{x^2-1}$

Solución

$$f(x) = 2^{x^2-1} \text{ aplicamos logaritmo neperiano } \ln f(x) = \ln 2^{x^2-1}$$

$$\ln f(x) = (x^2 - 1) \ln 2; \text{ derivamos los dos terminos;}$$

$$\frac{f(x)'}{f(x)} * \ln 2 = 2x * \ln 2 + \frac{0}{2} \ln 2 (x^2 - 1) = 2x * \ln 2;$$

$$f(x)' = 2x * \ln 2 * f(x) \text{ sustituyo por su valor } f(x)' = 2x * \ln 2 * 2^{x^2-1}$$

48. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = 3^{\sqrt{x^2-1}}$

Solución

$$f(x) = 3^{\sqrt{x^2-1}}; \text{ aplicamos } \ln \Rightarrow \ln f(x) = \ln 3^{\sqrt{x^2-1}};$$

$$\ln f(x) = \sqrt{x^2-1} * \ln 3; \text{ derivamos los dos terminos}$$

$$\frac{f(x)'}{f(x)} * \ln e = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} 2x * \ln 3 + \frac{0}{3} \ln e \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} 2x * \ln 3$$

$$f(x)' = \frac{2x \ln 3}{2\sqrt{x^2-1}} * f(x) \text{ sustituyo; } f(x)' = \frac{x \ln 3}{\sqrt{x^2-1}} 3^{\sqrt{x^2-1}}$$

49. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$

Solución

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}; f(x)' = \frac{(e^{2x})' \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{2x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{(e^{2x})' \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{2x}}{x};$$

dado que $(e^{2x})' = 2 * e^{2x}$ sustituimos

$$f(x)' = \frac{(e^{2x})' \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{2x}}{x} = \frac{2 * e^{2x} \sqrt{x} - \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2\sqrt{x}(2 * e^{2x} \sqrt{x}) - e^{2x}}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$f(x)' = \frac{\frac{4x * e^{2x} - e^{2x}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{4x * e^{2x} - e^{2x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{e^{2x}(4x-1)}{2x\sqrt{x}}; f(x)' = \frac{e^{2x}(4x-1)}{2x\sqrt{x}}$$

50. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = \frac{2^x - x}{3^x}$

Solución

$$f(x) = \frac{2^x - x}{3^x} = \frac{2^x}{3^x} - \frac{x}{3^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{x}{3^x}; f(x)' = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)' - \left(\frac{x}{3^x}\right)'$$

$$g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x; \ln g(x) = \ln \left(\frac{2}{3}\right)^x; \ln g(x) = x * \ln \frac{2}{3}, \text{ derivamos}$$

$$\frac{g(x)'}{g(x)} = \ln \frac{2}{3}; g(x)' = \ln \frac{2}{3} g(x); \text{ sustituimos, } g(x)' = \ln \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\left(\frac{x}{3^x}\right)' = -\frac{1 * 3^x - (3^x \ln 3)x}{(3^x)^2} = \frac{3^x - 3^x x \ln 3}{3^{2x}}$$

$$f(x)' = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)' - \left(\frac{x}{3^x}\right)' = \ln \frac{2}{3} * \left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{3^x - 3^x x \ln 3}{3^{2x}};$$

$$f(x)' = \frac{(\ln 2 - \ln 3) \frac{2^x}{3^x} * 3^{2x} - (3^x - 3^x x \ln 3)}{3^{2x}} =$$

$$= \frac{(\ln 2 - \ln 3) 2^x * 3^x - (3^x - 3^x x \ln 3)}{3^{2x}} = \frac{\ln 2 * 2^x 3^x - \ln 3 * 2^x 3^x - 3^x + 3^x x \ln 3}{3^{2x}}$$

$$f(x)' = \frac{\ln 2 * 2^x 3^x - \ln 3 * 2^x 3^x - 3^x + 3^x x \ln 3}{3^{2x}}$$

Otra forma de resolverlo ; $f(x) = \frac{2^x - x}{3^x}; f(x)' = \frac{(2^x \ln 2 - 1) * 3^x - 3^x \ln 3 (2^x - x)}{3^{2x}}$

$$f(x)' = \frac{2^x 3^x \ln 2 - 3^x - 3^x 2^x \ln 3 + x * 3^x \ln 3}{3^{2x}}$$

51. Ejercicio

De terminar para que valores de x se anula la derivada de $f(x) = e^{-x^2+5x-6}$

Solución

$f(x) = e^{-x^2+5x-6}$; $f(x)' = (-2x + 5) * e^{-x^2+5x-6}$; la derivada se anula = 0 para

$$(-2x + 5) = 0; 2x = 5; x = \frac{5}{2};$$

52. Ejercicio

Hallar la derivada de la función $f(x) = \sqrt{3x^3} * e^x$

Solución

$$f(x) = \sqrt{3x^3} * e^x; f(x)' = \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{3x^3}} * 9x^2 * e^x + e^x \sqrt{3x^3} = \frac{9x^2 * e^x}{2\sqrt{3x^3}} + e^x \sqrt{3x^3}$$

$$f(x)' = \frac{9x^2 * e^x}{2\sqrt{3x^3}} + \frac{(e^x \sqrt{3x^3})(2\sqrt{3x^3})}{2\sqrt{3x^3}} = \frac{(9x^2 * e^x) + (e^x 2 * 3x^3)}{2\sqrt{3x^3}} = \frac{(9x^2 * e^x) + (e^x 6x^3)}{2\sqrt{3x^3}}$$

$$f(x)' = \frac{3x^2 e^x (3 + 2x)}{2\sqrt{3x^3}}$$

1.3.13 Derivadas de funciones trigonométricas

- Derivada del seno ; $f(x) = \sin x$; $f(x)' = \cos x$
- Derivada del coseno ; $f(x) = \cos x$; $f(x)' = -\sin x$

Las demas funciones se hallan desarrollando estas dos

Derivada de la tangente; $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$;

$$f(x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{(\cos x)^2}$$

$$f(x)' = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \text{dado que } (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \Rightarrow f(x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

53. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguientes funciones a) $f(x) = \sin(2x^2 + 3x)$; b) $f(x) = \sqrt{x} \cos x$;

c) $f(x) = \tan^2 2x$; d) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

Solución

$$a) f(x) = \sin(2x^2 + 3x); f(x)' = (4x + 3) \cos(2x^2 + 3x)$$

$$b) f(x) = \sqrt{x} \cos x; f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + (-\sin x * \sqrt{x}); f(x)' = \frac{\cos x - 2x \sin x}{2\sqrt{x}}$$

$$c) f(x) = \tan^2 2x; f(x)' = 2 * 2 \tan 2x * \frac{1}{(\cos 2x)^2} = \frac{4 \tan 2x}{(\cos 2x)^2} = \frac{4 \sin 2x}{(\cos 2x)^3}; f(x)' = \frac{4 \sin 2x}{(\cos 2x)^3}$$

$$d) f(x) = \sqrt{\cos x}; f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} * (-\sin x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}; f(x)' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

54. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función a) $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$; b) $f(x) = \frac{x + \sin x}{\cos 4x}$

Solución

$$a) f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}; f(x)' = 2 \sin \frac{x}{2} * \cos \frac{x}{2} * \frac{1}{2} = \sin \frac{x}{2} * \cos \frac{x}{2}; f(x)' = \sin \frac{x}{2} * \cos \frac{x}{2}$$

$$b) f(x) = \frac{x + \sin x}{\cos 4x}; f(x)' = \frac{(1 + \cos x) \cos 4x - (4(-\sin 4x))(x + \sin x)}{(\cos 4x)^2}$$

$$f(x)' = \frac{(1 + \cos x) \cos 4x + (4 * \sin 4x)(x + \sin x)}{(\cos 4x)^2}$$

55. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = \sec 4x * \sin 4x$

Solución

$$f(x) = \sec 4x * \sin 4x = \frac{1}{\cos 4x} * \sin 4x = \frac{\sin 4x}{\cos 4x};$$

$$f(x)' = \frac{(\sin 4x)' * \cos 4x - (\cos 4x)'(\sin 4x)}{(\cos 4x)^2} = \frac{4 \cos 4x * \cos 4x - (-4 \sin 4x)(\sin 4x)}{(\cos 4x)^2}$$

$$f(x)' = \frac{4 (\cos 4x)^2 + 4 (\sin 4x)^2}{(\cos 4x)^2} = 4(1 + (\tan x)^2)$$

56. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = \frac{\tan \frac{x}{2} + \cotg \frac{x}{2}}{2}$

Solución

$$f(x) = \frac{\tan \frac{x}{2} + \cotg \frac{x}{2}}{2} = \frac{1}{2}(\tan \frac{x}{2} + \cotg \frac{x}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}})$$

$$f(x)' = \frac{1}{2} * (\frac{1}{2} \frac{\cos \frac{x}{2} * \cos \frac{x}{2} - (-\sin \frac{x}{2} * \sin \frac{x}{2})}{(\cos \frac{x}{2})^2} + \frac{1}{2} \frac{(-\sin \frac{x}{2}) * \sin \frac{x}{2} - (\cos \frac{x}{2} * \cos \frac{x}{2})}{(\sin \frac{x}{2})^2})$$

$$f(x)' = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \frac{(\cos \frac{x}{2})^2 + (\sin \frac{x}{2})^2}{(\cos \frac{x}{2})^2} + \frac{1}{2} \frac{(-\sin \frac{x}{2})^2 * (-\cos \frac{x}{2})^2}{(\sin \frac{x}{2})^2}) =$$

$$Dado que (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \Rightarrow f(x)' = \frac{1}{4} (\frac{1}{(\cos \frac{x}{2})^2} - \frac{1}{(\sin \frac{x}{2})^2})$$

$$f(x)' = 1/4((\sec \frac{x}{2})^2 + (\csc \frac{x}{2})^2)$$

57. Ejercicio

Hallar la recta tangente a la función $f(x) = \sin x$ en el origen

Solución

$f(x) = \sin x$; la tangente es la derivada de la función $f(x)' = \cos x$; $y = \cos x$

la recta tangente será de la forma $y = mx + n$; si ha de pasar por el origen será de la forma

$y = \cos x$; en el punto $x = 0$; $y =$ pendiente $= 1$;

$y = mx$; $y = 1 * x$; $y = x$;

58. Ejercicio

En que punto de la recta tangente a la función $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$ está menos inclinada que la bisectriz del primer cuadrante

Solución

La bisectriz del primer cuadrante $y = mx$; donde $m = 1$; $y = x$

$$f(x) = \operatorname{tg}(2x); f'(x) = 2 \frac{\cos 2x * \cos 2x - (-\operatorname{sen} 2x * \operatorname{sen} 2x)}{(\cos 2x)^2} = \frac{2}{(\cos 2x)^2}$$

Dado que los valores del $\cos x$ van de 0 a 1, la tg a esta curva siempre será mayor que 1

59. Ejercicio

Encuentra los puntos con abscisa en $[0, 2\pi]$

para que la tg a la curva

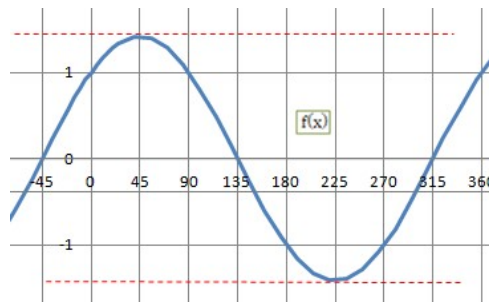
$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ sea horizontal

Solución

$$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x; f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$$

Para que la tangente $f'(x) = 0$; $\cos x = \operatorname{sen} x$ eso se cumple en los siguientes puntos

Los puntos son $x = 45^\circ$ y $x = 225^\circ$



60. Ejercicio

Hallar la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

Solución

$$f(x) = \operatorname{sen}(\ln x); f'(x) = \cos(\ln x) * \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \cos(\ln x); f'(x) = \frac{1}{x} \cos(\ln x)$$

1.3.14 Derivada de funciones trigonométricas inversas

Derivada del arcoseno ;

$$y = f(x) = \operatorname{arcsen} x; \Rightarrow \operatorname{sen} y = x;$$

$$\text{Derivamos los dos terminos } y' \cos y = 1; y' = \frac{1}{\cos y}$$

Consideramos la propiedad $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$; sustituyo $\operatorname{sen}^2 y$ por su valor

$$x^2 + \cos^2 y = 1; \cos^2 y = 1 - x^2; \cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{sustituyo en la derivada } y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; f'(x) = y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Derivada del arco cos ;

$$y = f(x) = \operatorname{arccos} x; \Rightarrow \cos y = x;$$

$$\text{Derivamos los dos terminos } y'(-\operatorname{sen} y) = 1; y' = -\frac{1}{\operatorname{sen} y}$$

Consideramos la propiedad $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$; sustituyo $\cos^2 y$ por su valor

$$\operatorname{sen}^2 y + x^2 = 1; \operatorname{sen}^2 y = 1 - x^2; \operatorname{sen} y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{sustituyo en la derivada } y' = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; f'(x) = y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Derivada del arctg ;

$$y = f(x) = \operatorname{arctg} x; \Rightarrow \operatorname{tg} y = x; \text{ derivamos los dos terminos}$$

$$y'(1 + \operatorname{tg}^2 y) = 1; \text{ sustituyo por su valor } \Rightarrow f'(x) = y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

61. Ejercicio

Hallar la derivada de la función a) $f(x) = \arcsen(x^2)$; b) $f(x) = \arctg(1 + x^2)$;

c) $f(x) = \ln(\sen x + \arcsen x)$ d) $f(x) = \arcsen(e^x)$

Solución

$$a) f(x) = \arcsen(x^2); f(x)' = 2x * \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}}$$

$$b) f(x) = \arctg(1 + x^2); f(x)' = 2x * \frac{1}{1 + (1 + x^2)^2}; f(x)' = \frac{2x}{1 + (1 + x^2)^2}$$

$$c) f(x) = \ln(\sen x + \arcsen x); f(x)' = \frac{(\sen x + \arcsen x)'}{\sen x + \arcsen x} \ln e = \frac{\cos x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{\sen x + \arcsen x}$$

$$f(x)' = \frac{\cos x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{\sen x + \arcsen x}$$

$$d) f(x) = \arcsen(e^x); f(x)' = (e^x)' * \frac{1}{\sqrt{1 - (e^x)^2}} = e^x * \frac{1}{\sqrt{1 - (e^x)^2}}; f(x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1 - (e^x)^2}}$$

62. Ejercicio

Encuentra los puntos con abscisa en los

que la tg a la curva

$f(x) = \arctg x$ sea horizontal

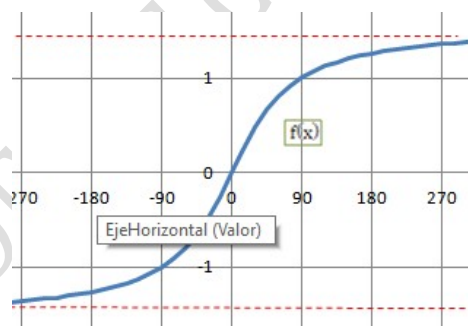
Solución

$$f(x) = \arctg x; f(x)' = y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Para que la tangente $f(x)' = 0$; $x = \pm\infty$

eso se cumple en los siguientes puntos

Los puntos son $x = \pm\infty$



63. Ejercicio

Hallar la derivada de la función $f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x}$

Solución

$$f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x}; f(x)' = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2} * \frac{-1}{(x)^2} = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{x^2}} * \frac{-1}{x^2}$$

$$f(x)' = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0;$$

64. Ejercicio

Hallar la recta tangente y normal a la función $f(x) = \frac{2 - x}{x^3}$ en el punto $x = -1$

Solución

$$f(x) = \frac{2 - x}{x^3}; y = \frac{2 - x}{x^3} \text{ en el punto } x = -1; y = \frac{2 - (-1)}{(-1)^3} = -3; \text{ punto } (-1, -3)$$

$$f(x) = \frac{2 - x}{x^3}; f(x)' = \frac{-1 * x^3 - 3x^2(2 - x)}{(x^3)^2} = \frac{-x^3 - 6x^2 + 3x^3}{(x^3)^2} = \frac{-6x^2 + 2x^3}{x^6} =$$

$$\frac{x^2(-6 + 2x)}{x^6} = \frac{(-6 + 2x)}{x^4};$$

para $x = -1 \Rightarrow$

$$f(x)' = \frac{(-6 + 2(-1))}{(-1)^4} = \frac{-6 - 2}{1} = -8;$$

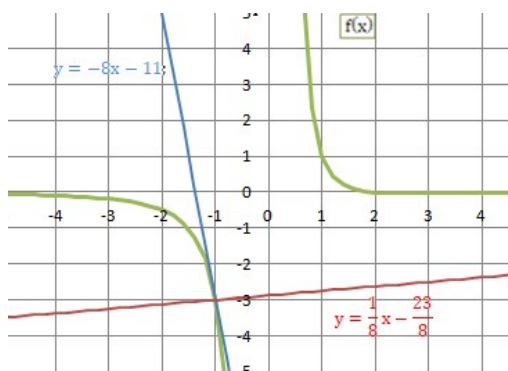
$$m = -8;$$

La recta tangente será $y = -8x + n$;

si ha de pasar por $(-1, -3)$;

$$-3 = -8(-1) + n; n = -11;$$

la recta tangente será $y = -8x - 11$;



La recta normal será $y = \frac{1}{8}x + n$; si ha de pasar por $(-1, -3)$; $-3 = \frac{1}{8}(-1) + n$;

$$n = -3 + \frac{1}{8} = -\frac{23}{8}; \text{ la recta normal será } y = \frac{1}{8}x - \frac{23}{8};$$

65. Ejercicio

Hallar la recta tangente a la función $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x$ cuya pendiente sea 3

Solución

La recta tangente será $y = 3x + n$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x; f(x)' = \frac{4x^3}{4} - 4x + 3 = x^3 - 4x + 3;$$

$$f(x)' = m \text{ en un punto } (x, y) \text{ tienen que ser igual a } 3; x^3 - 4x + 3 = 3;$$

$$x^3 - 4x = 0; x(x^2 - 4) = 0 \text{ esto se cumple en } x = 0; x = +2 \text{ y } x = -2$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow y = f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x = 0; \text{ Un punto será } (0, 0) \Rightarrow n = 0;$$

Recta tangente en $(0, 0)$ $y = 3x$

$$\text{Para } x = 2 \Rightarrow y = f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x; y = \frac{2^4}{4} - 2 * 2^2 + 3 * 2 = 2$$

$$\text{otro punto será } (2, 2), \text{ la tangente } y = 3x + n \Rightarrow 2 = 3 * 2 + n; n = -4;$$

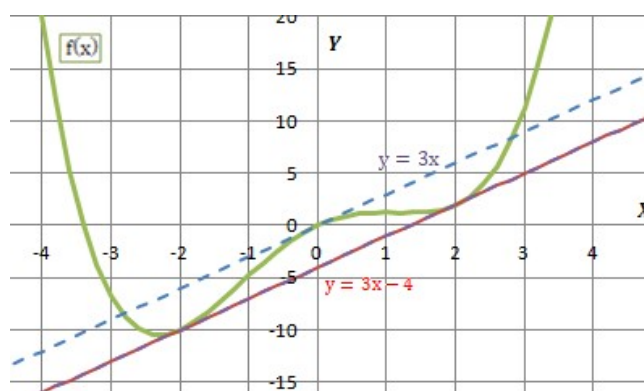
la recta tangente en $(2, 2)$ será $y = 3x - 4$;

Para $x = -2 \Rightarrow$

$$y = f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x; y = \frac{(-2)^4}{4} - 2 * (-2)^2 + 3 * (-2) = -10$$

$$\text{otro punto será } (-2, -10), \text{ la tangente } y = 3x + n \Rightarrow -10 = 3 * (-2) + n; n = -4;$$

la recta tangente en $(-2, -10)$ será $y = 3x - 4$;



66. **Ejercicio**

Hallar la recta tangente a la función $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ en el punto de corte con el eje de abscisas

Solución

El punto de corte de la función con el eje de abscisas será $y=0$;

$$\frac{x-2}{x+1} = 0; \quad x = 2; \quad \text{Punto de corte } (2,0)$$

$$f(x)' = m \text{ en un punto } (2,0) \quad f(x)' = \frac{1(x+1) - 1(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+2}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2};$$

$$\text{en } x = 2 \Rightarrow m = \frac{3}{(2+1)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}; \quad m = \frac{1}{3}$$

$$\text{La tangente a la función } f(x) = \frac{x-2}{x+1} \text{ será; } y = mx + n; \quad y = \frac{1}{3}x + n$$

$$\text{si pasa por el punto } (2,0); \quad 0 = \frac{1}{3} \cdot 2 + n; \quad n = -\frac{2}{3};$$

$$\text{La tangente pedida será } y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3};$$

2 Tabla de las principales derivadas

TABLA DE DERIVADAS	
Función	Derivada
$f(x) = K$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$F(x) = f(x) + g(x)$	$F'(x) = f'(x) + g'(x)$
$F(x) = f(x) \cdot g(x)$	$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x);$
$F(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$	$F'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$
$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$F'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}$
$F(x) = f(g(x))$	$F'(x) = f'(g) \cdot g'(x)$
Derivada de la inversa de $f(x)$	$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$
$F(x) = f(x)^a$	$F'(x) = f(x)^a = a \cdot f(x)^{a-1} \cdot f'(x);$
$F(x) = \log_a f(x)$	$F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$F(x) = e^{f(x)}$	$F'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)};$
$f(x) = a^x$	$\ln a \cdot a^x;$
$F(x) = a^{f(x)}$	$F'(x) = f'(x) \cdot \ln a \cdot a^{f(x)}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \arcsen x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$