

Derivadas

Contenido

1	DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO	2
1.1	DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO	2
2	DERIVADAS LATERALES.....	3
3	INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.....	7
4	DERIVADAS DE DISTINTAS FUNCIONES.....	11
4.1.1	<i>Derivada de una constante.....</i>	<i>11</i>
4.1.2	<i>Derivada de una potencia</i>	<i>11</i>
4.1.3	<i>Derivada de una raíz.....</i>	<i>11</i>
4.1.4	<i>Derivada de la suma de funciones.....</i>	<i>12</i>
4.1.5	<i>Derivada de un producto.....</i>	<i>12</i>
4.1.6	<i>Derivada de un cociente</i>	<i>12</i>
5	DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA. REGLA DE LA CADENA	15
6	DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA	18
7	DERIVADA DE FUNCIONES ELEMENTALES.....	22
7.1.1	<i>Derivada de la función potencial.....</i>	<i>22</i>
7.1.2	<i>Derivada de la función logarítmica.....</i>	<i>24</i>
7.1.3	<i>Derivada de la función exponencial.....</i>	<i>27</i>
7.1.4	<i>Derivadas de funciones trigonométricas.....</i>	<i>30</i>
7.1.5	<i>Derivada de funciones trigonométricas inversas.....</i>	<i>32</i>
8	TABLA DE LAS PRINCIPALES DERIVADAS	41

1 Derivada de una función en un punto

1.1 Derivada de una función en un punto

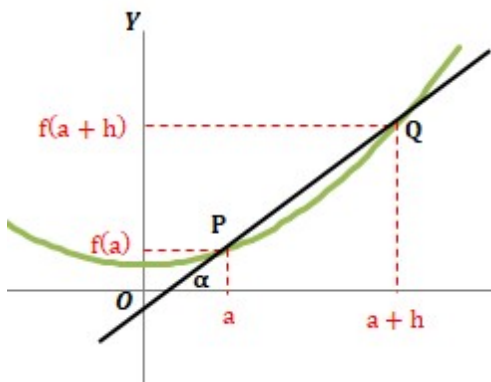
Se dice que una función f es derivable en un punto a , si existe es decir, es igual a un número real

Si tenemos la función $f(x)$ y los puntos a y

$(a+h)$ que nos definen los puntos P y Q .

Podemos observar que la recta secante que pasa por PQ tienen una pendiente m donde

$$m = \tan \alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$



Este número se llama derivada de f en a y se escribe $f'(a)$

Decimos que una función f es derivable si lo es todo el dominio

$$m = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1. Ejercicio

Aplicando la definición de derivada, decidir si las siguientes funciones son derivables en los puntos indicados y calcula si existen las derivadas

- a) $f(x) = x^3$ en $x = 1$; b) $f(x) = \sin x$ en $x = 0$; c) $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $x = 2$;
d) $f(x) = x|x|$ en $x = 0$;

Solución

a) $f(x) = x^3$ en $x = 1$; aplicamos la definición $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+1)^3 - 1^3}{h} = \frac{h^3 + 3h^2 + 3h + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 3h + 3) = 3$$

b) $f(x) = \sin x$ en $x = 0$;

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h+0) - \sin 0}{h};$$

aplicando la definición de $\sin(h+1) = \sin h \cdot \cos 1 + \cos h \cdot \sin 1$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h+0) - \sin 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h \cdot \cos 0 + \cos h \cdot \sin 0 - \sin 0}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h \cdot 1 + \cos h \cdot \sin 0 - \sin 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h + \cos h \cdot 0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1;$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \text{ segun se demostro al tratar los limites}$$

c) $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $x = 2$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(h+2)+2} - \sqrt{2+2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+h} - 2) \cdot (\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$d) f(x) = x|x| \text{ en } x = 0; f(x) = \begin{cases} x(-x) = -x^2 & \text{para } x < 0 \\ x(+x) = x^2 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = -x^2; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0 + (-h^2)) - (0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h) = -0;$$

$$f(x) = x^2; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0 + (h^2)) - (0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h) = 0;$$

Limite por derecha e izquierda es igual, existe derivada

2 Derivadas Laterales

En las funciones definidas a trozos es necesario estudiar las derivadas laterales en los puntos de separación de los distintos trozos.

Decimos que una función es definida en un punto, si existen las derivadas laterales en ese punto y coinciden

2. Ejercicio

Estudia si las siguientes funciones son derivables en los puntos indicados

$$a) \begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \leq 0; \\ f(x) = 3x & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ en } a = 0; \quad b) \begin{cases} f(x) = x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1; \\ f(x) = x^3 - x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ en } a = 1$$

$$c) \begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \leq 1; \\ f(x) = 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ en } a = 1$$

Solución

$$a) \begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \leq 0; \\ f(x) = 3x & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ en } a = 0;$$

$$f(x) = x^2; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0 + h)^2 - (0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0;$$

$$f(x) = 3x; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(h + 0) - (0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3;$$

No es derivable en $a = 0$;

$$b) \begin{cases} f(x) = x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1; \\ f(x) = x^3 - x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ en } a = 1$$

$$f(x) = x^2 + 2; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((1 + h)^2 + 2) - (1^2 + 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h^2 + 2h + 2) - (3)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h^2 + 2h + 2 - 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h(h + 2)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2) = 2;$$

$$f(x) = x^3 - x + 3; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((1 + h)^3 - (1 + h) + 3) - (1^3 - 1 + 3)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h + 1 - 1 - h + 3 - (3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 + 3h + 2)}{h} = 2$$

La función es derivable en $a = 1$;

$$c) \begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \leq 1; \\ f(x) = 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ en } a = 1$$

$$f(x) = x^2; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^2 - (1^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h^2 + 2h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2)}{h} = 2;$$

$$f(x) = 2x; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1 + h) - (2 * 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + 2h - 2}{h} = 2$$

La función es derivable en $a = 1$;

3. Ejercicio

Explica por que no existe la derivada de las funciones en los puntos indicado.

$$a) f(x) = |x - 5| \text{ en } x = 5; \quad b) f(x) = \frac{x}{x-2} \text{ en } x = 2; \quad c) f(x) = |x^2 - 7x + 11| \text{ en } x = 4$$

Solución

$$a) f(x) = |x - 5| \text{ en } x = 5; \quad \begin{cases} f(x) = x + 5 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = -x - 5 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = x + 5 \text{ si } x \geq 0; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+5) + 5 - (5+5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1;$$

$$f(x) = -x + 5 \text{ si } x < 0; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(h+5) + 5 - (-5+5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-5+5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1;$$

No existe la derivada pues no coincide por la derecha e izquierda

$$b) f(x) = \frac{x}{x-2} \text{ en } x = 2 \text{ La funcion no es continua en } x = 2; \text{ luego no existe derivada}$$

$$c) f(x) = |x^2 - 7x + 11| \text{ en } x = 4; \quad \begin{cases} f(x) = x^2 - 7x + 11 & \text{para } x \geq 0 \\ f(x) = x^2 + 7x + 11 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = x^2 - 7x + 11 \text{ para } x \geq 0; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+4)^2 - 7(h+4) + 11 - (16 - 28 + 11)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 8h + 16 - 7h - 28 + 11 - (16 - 28 + 11)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+1)}{h} = 1;$$

$$f(x) = -(x^2 - 7x + 11) \text{ para } x < 0; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-((h+4)^2 - 7(h+4) + 11) - (-16 + 28 - 11)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 8h - 16 + 7h + 28 - 11 - (-16 + 28 - 11)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h-1)}{h} = -1;$$

No existe la derivada pues no coincide la derivada en ese punto

4. Ejercicio

Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones en los puntos indicado.

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{Si } x \neq 1 \\ f(x) = -1 & \text{Si } x = 1; \end{cases} \quad b) \begin{cases} f(x) = 7 - 3x & \text{si } x < 2; \\ f(x) = x^2 - 7x + 11 & \text{si } x \geq 2; \end{cases} \text{ en } x = 2;$$

Solución

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{Si } x \neq 1 \\ f(x) = -1 & \text{Si } x = 1; \end{cases} \text{ en } x = 1$$

En $x = 1$ la funcion presenta una discontinuidad; luego hay que hallar limite por la derecha e izquierda

$$\text{Para } x \neq 1; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1;$$

$$f(x) = -1 \text{ Si } x = 1;$$

La funcion es continua

Comprobamos la derivabilidad:

$$\text{Para } x \neq 1; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(h+1)^2 - 3(h+1) + 2}{(h+1) - 1} - \frac{(1)^2 - 3(1) + 2}{(1+1) - 1}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 + 2h + 1 - 3h - 3 + 2}{h} - \frac{-1}{1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 + 2h + 1 - 3h - 3 + 2}{h} + 1}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 - h}{h} + \frac{h}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h^2} = 1;$$

$$f(x) = -1; f'(x) = 0;$$

No es derivable

$$b) \begin{cases} f(x) = 7 - 3x & \text{si } x < 2; \\ f(x) = x^2 - 7x + 11 & \text{si } x \geq 2; \end{cases} \text{ en } x = 2$$

Comprobamos continuidad:

$$f(x) = 7 - 3x; \lim_{x \rightarrow 2} 7 - 3x = 1$$

$$f(x) = x^2 - 7x + 11; \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 7x + 11 = 1$$

La funcion es continua en $x = 2$;

Comprobamos la derivabilidad

$$\begin{aligned} \text{Para } x < 2; f(x) = 7 - 3x; f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7 - 3(h+2) - (7 - 6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7 - 3h - 6 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{h} = -3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } x \geq 2; f(x) = x^2 - 7x + 11; f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+2)^2 - 7(h+2)x + 11 - (4 - 14 + 11)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h + 4 - 7h - 14 + 11 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 3) = -3; \end{aligned}$$

La funcion es derivable en $x = 2$;

5. Ejercicio

$$\text{Calcular la derivada de la funcion } \begin{cases} f(x) = x^2 + x & \text{si } x \leq 0; \\ f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 & \text{si } x > 0; \end{cases} \text{ en } x = 0;$$

Solución

Derivabilidad por la izquierda $f(x) = x^2 + x$;

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+0)^2 + (h+0) - 0^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 1 = 1;$$

Derivabilidad por la derecha $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$;

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(h+0)^2}{2} + 1 - \left(\frac{0^2}{2} + 1\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2}{2} + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2} = \frac{1}{2};$$

La funcion es derivable en $x = 0$;

6. Ejercicio

Demuestra que la segunda derivada de una funcion polinomica de segundo grado es siempre una funcion constante ¿ Cuanto vale la constante? $f(x) = x^2 + x$

Solución

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c ; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(h+x)^2 + b(h+x) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah^2 + ax^2 + 2ahx + bh + bx + c - ax^2 - bx - c}{h} = \\
 &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah^2 + 2ahx + bh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (ah + 2ax + b) = 2ax + b \\
 f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2a(h+x) + b - (2ax + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + 2ax + b - 2ax - b}{h} = \\
 &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah}{h} = 2a ; \text{ es una funcion constante}
 \end{aligned}$$

7. Ejercicio

Dada la funcion $f(x) \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1; \\ cx & \text{si } x \geq 1; \end{cases}$ Calcular el valor de a, b, c para que la funcion sea derivable en $x = 1$; sabiendo que $f(0) = f(4)$

Solución

$$f(0) = f(4) \begin{cases} f(0) = 0^2 + a \cdot 0 + b \\ f(4) = 4 \cdot c \end{cases} \quad b = 4c$$

Derivabilidad por la izquierda $f(x) = x^2 + ax + b$;

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+1)^2 + a(h+1) + b - (1^2 + a \cdot 1 + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + 1 + ah + a + b - 1 - a - b}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2 + a) = 2 + a
 \end{aligned}$$

Derivabilidad por la derecha $f(x) = cx$;

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(h+1) - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ch + c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ch}{h} = c;$$

$$f(1) = 1^2 + a \cdot 1 + b = 1 + a + b$$

Para que sea derivable se ha de cumplir $2 + a = c$;

$$\begin{cases} b = 4c; c = \frac{b}{4} \\ 2 + a = c; \\ 1 + a + b = c; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 + a = \frac{b}{4} \\ 1 + a + b = \frac{b}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 + a = \frac{b}{4} \\ 1 + a = -\frac{3b}{4}; \end{cases} \quad 1 = \frac{4}{4}b; b = 1;$$

$$c = \frac{b}{4} \quad \text{Sustituyo } b = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4};$$

$$2 + a = c; \text{ sustituyo } c = \frac{1}{4} \Rightarrow a = -2 + \frac{1}{4}; a = -\frac{7}{4};$$

3 Interpretación Geométrica

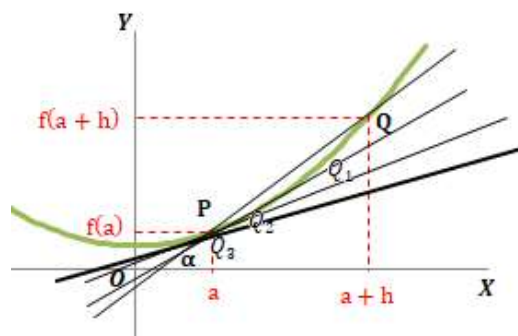
Si vamos dando valores a h cada vez más pequeños, de forma que Q se vaya acercando a P , cuando h vale 0 la recta definida será tangente a la curva de la función en el punto $P=Q$

La tangente de esta recta, tangente a la función en el punto P es lo que llamamos f' (derivada) de la función $f(x)$ en el punto P .

$$\begin{aligned} \text{Derivada} = f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m \text{ pendiente de la recta} \end{aligned}$$

La recta tangente a la función en el punto P será $f(x) - f(0) = m(x - x_0)$

La recta perpendicular a la tangente a la función en el punto P será $f(x) - f(0) = -\frac{1}{m}(x - x_0)$



8. Ejercicio

Calcula el área del triángulo formado por el eje y , la recta tangente y normal a curva

$f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$;

Solución

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \text{ para } x = 1; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+h)} - \frac{1}{1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+h)} - \frac{1+h}{(1+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(1+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(1+h)} = -1; \end{aligned}$$

Punto de la curva en $x = 1$; $y = 1$;

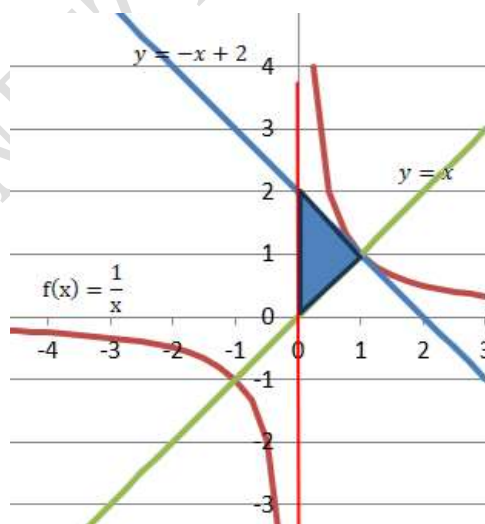
Recta tangente a la curva en $x = 1$;

$y - 1 = -1(x - 1)$; $y = -x + 2$;

Recta normal a la tangente a la curva en $x = 1$

$y - 1 = 1(x - 1)$; $y = x$;

Área del triángulo de vértices $(0,2)$; $(1,1)$ y $(0,0)$; $A = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 u$



9. Ejercicio

La tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(2, f(2))$ pasa por el punto $Q(-3, 0)$.

Sabiendo que $f'(2) = \frac{1}{2}$ calcular $f(2)$;

Solución

La ecuación de la tangente será $y = mx + n$; como $m = \frac{1}{2}$; será $y = \frac{1}{2}x + n$;

Como la tangente ha de pasar por $Q(-3, 0)$ sustituyó en la ecuación $0 = \frac{1}{2} \cdot (-3) + n$; $n = \frac{3}{2}$

La ecuación de la tangente será $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$;

Como la tangente ha de pasar por $P(2, f(2))$ también se cumplirá sustituyendo en $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{3}{2}; \quad f(2) = \frac{5}{2}$$

10. Ejercicio

Hallar la derivada de $y = \frac{3}{x-2}$ en los puntos de abscisas, 1, -1 y 5

Solución

$$\text{Derivada} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{(x+h)-2}\right) - \left(\frac{3}{x-2}\right)}{h}$$

$$\text{En el valor de } x = 1; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{(1+h)-2}\right) - \left(\frac{3}{1-2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{h-1}\right) - \left(\frac{3}{-1}\right)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{h-1}\right) + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3+3h-3}{h-1}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+3h-3}{h^2-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{h-1} =$$

$$= \frac{3}{0-1}; \text{ Derivada} = f'(x) = -3;$$

$$x = -1; \text{ Derivada} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{(x+h)-2}\right) - \left(\frac{3}{x-2}\right)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{(-1+h)-2}\right) - \left(\frac{3}{-1-2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{h-3}\right) - \left(\frac{3}{-3}\right)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{h-3}\right) + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3+h-3}{h-3}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+h-3}{h^2-3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(h-3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-3} =$$

$$= \frac{1}{0-3} = \text{Derivada} = f'(x) = -\frac{1}{3};$$

$$\text{En el valor de } x = 5; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{(5+h)-2}\right) - \left(\frac{3}{5-2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{h+3}\right) - \left(\frac{3}{3}\right)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{h+3}\right) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3-h-3}{h+3}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h^2+3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h(h+3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{h+3} =$$

$$= \frac{3}{3}; \text{ Derivada} = f'(x) = 1;$$

11. Ejercicio

Hallar la derivada de $y = \frac{x^2}{2} + 7x$ en los puntos de abscisas, 1, -1 y 3

Solución

$$\text{Derivada} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{(x+h)^2}{2} + 7(x+h)\right) - \left(\frac{x^2}{2} + 7x\right)}{h}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^2 + h^2 + 2xh}{2} + 7(x+h) \right) - \left(\frac{x^2}{2} + 7x \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^2 + h^2 + 2xh + 14x + 14h}{2} \right) - \left(\frac{x^2 + 14x}{2} \right)}{h} \\
& = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + h^2 + 2xh + 14x + 14h - x^2 - 14x}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 + 2xh + 14h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x + 14)}{2h} \\
& = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + 2x + 14}{2} = x + 7
\end{aligned}$$

Para $x = 1$; $f'(x) = x + 7$; $f'(1) = 1 + 7 = 8$;

Para $x = -1$; $f'(x) = x + 7$; $f'(-1) = -1 + 7 = 6$;

Para $x = 3$; $f'(x) = x + 7$; $f'(3) = 3 + 7 = 10$;

12. Ejercicio

Sea la función $f(x) = x^2 + ax + b$. Hallar los valores de a y b para que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica en el punto $P(2,4)$

Solución

Si la recta $y = 2x$ es tangente a $f(x)$ en el punto $p(2,4)$; $f'(x) = 2$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((h+2)^2 + a(h+2) + b) - (2^2 + a \cdot 2 + b)}{h} = \\
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h + 4 + ah + 2a + b - (4 + 2a + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h + 4 + ah + 2a + b - 4 - 2a - b}{h} \\
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h + ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 4 + a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4 + a) = 4 + a; \text{ que ha de ser igual a } 2 \Rightarrow a = -2
\end{aligned}$$

$f(x) = x^2 + ax + b$; ha de pasar por $(2,4)$; $4 = 2^2 + a \cdot 2 + b$; $b = -2a$;

como $a = -2 \Rightarrow b = 4$;

13. Ejercicio

Demuestra que la recta $y = -x$ es tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$;

Hallar los puntos de tangencia

Solución

Si la recta es tangente tendrá un punto común $\Rightarrow$

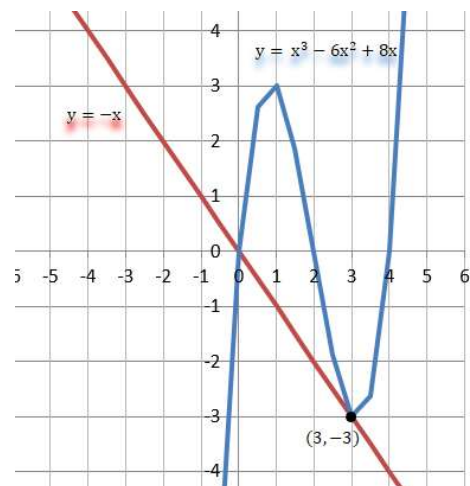
$$-x = x^3 - 6x^2 + 8x; -x = x(x^2 - 6x + 8);$$

$$\text{Se cortan en } x = 0; -x = x(x^2 - 6x + 8); (0,0);$$

$$\text{el punto de tangencia será } -1 = x^2 - 6x + 8;$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0; x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2};$$

$$x = \frac{6}{2} = 3; \text{ Punto de tangencia } (3, -3)$$



14. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$ comprueba que la recta tangente en el punto de corte en el eje Y, es paralela a la asíntota de la función

Solución

El punto de corte de

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3} \text{ con eje Y será } x = 0; y = \frac{5}{3}; (0, \frac{5}{3})$$

Hallamos la derivada para conocer la tag en el punto $x = 0$;

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(h+0)^3 - (h+0)^2 + 3(h+0) + 5}{(h+0)^2 + 3} - \frac{0^3 - 0^2 + 3 \cdot 0 + 5}{0^2 + 3}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 - h^2 + 3h + 5}{h^2 + 3} - \frac{5}{3}}{h}$$

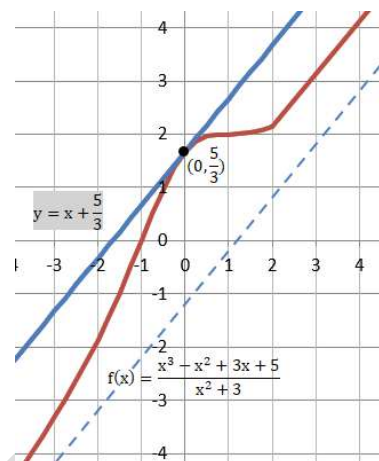
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3(h^3 - h^2 + 3h + 5) - 5(h^2 + 3)}{3(h^2 + 3)}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3h^3 - 3h^2 + 9h + 15 - 5h^2 - 15}{3h^2 + 9}}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^3 - 3h^2 + 9h + 15 - 5h^2 - 15}{3h^3 + 9h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^3 - 8h^2 + 9h}{3h^3 + 9h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3h^2 - 8h + 9)}{h(3h^2 + 9)} = \frac{9}{9}; f'(x) = 1;$$

$$\text{La recta tangente } y - \frac{5}{3} = 1(x - 0); y = x + \frac{5}{3}$$



4 Derivadas de distintas funciones

4.1.1 Derivada de una constante

$$f(x) = K;$$

$$\text{Derivada} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(k) - (k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f(x) = K; \quad f'(x) = 0$$

4.1.2 Derivada de una potencia

$$f(x) = x^n;$$

$$\text{Derivada} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h};$$

$$\text{binomio de newton } (x+h)^n = x^n + n x^{n-1}h + \dots + nx h^{n-1} + h^n$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + n x^{n-1}h + \dots + nx h^{n-1} + h^n - x^n}{h} =$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(n x^{n-1} + \dots + nx h^{n-2} + h^{n-1})}{h} = n x^{n-1}$$

$$f(x) = x^n; \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

4.1.3 Derivada de una raíz

$$\text{Partimos de la derivada de una potencia } f(x) = x^n; \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) \sqrt[n]{x} = f(x)x^{\frac{1}{n}}; \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{-n+1}{n}} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{x}; \quad f'(x) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$f(x) = \sqrt{x^n}; \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^{2-1}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

15. Ejercicio

Hallar las derivada de las siguientes funciones a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Solución

$$\text{a) } f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}; \quad f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

4.1.4 Derivada de la suma de funciones

$F(x) = f(x) + g(x)$; ejemplo $F(x) = x^2 + x$

$$\text{Derivada} = F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h};$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + h^2 + 2xh) + x + h - (x^2 + x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + h^2 + 2xh) + x + h - x^2 - x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 2x + 1 = 2x + 1;$$

$$\text{Derivada} = F'(x) = 2x + 1$$

$$F'(x) = f'(x) + g'(x);$$

16. Ejercicio

Hallar las derivadas de las siguientes funciones a) $f(x) = x^4 - 3x$; b) $f(x) = 2x + 4$;

c) $f(x) = 5x^4 + 2x^3 + 7x^2$

Solución

Aplicamos la derivada de la suma de funciones

a) $f(x) = x^4 - 3x$; $f'(x) = 4x^3 - 3$

b) $f(x) = 2x + 4$; $f'(x) = 2$

c) $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 7x^2$; $f'(x) = 20x^3 + 6x^2 - 14x$

17. Ejercicio

Hallar las derivadas de las siguientes funciones a) $f(x) = (x^2 + 1)^2$;

b) $f(x) = (3x^3 - 2x^2 - x + 1)^2$

Solución

a) $f(x) = (x^2 + 1)^2$; $f(x) = x^4 + 1 + 2x^2$; $f'(x) = 4x^3 + 4x$

b) $f(x) = (3x^3 - 2x^2 - x + 1)^2 = 9x^6 - 12x^5 - 2x^4 + 10x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

$$f'(x) = 54x^5 - 60x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 6x - 2;$$

4.1.5 Derivada de un producto

$$F(x) = f(x) * g(x); F'(x) = f'(x) * g(x) + g'(x) * f(x);$$

$$F(x) = f(x) * g(x) * h(x); F'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

4.1.6 Derivada de un cociente

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) * \frac{1}{g(x)} = f(x) * g(x)^{-1} \text{ aplicamos la formula del producto}$$

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f'(x) * g(x)^{-1} + [(g(x)^{-1})]' * f(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} + \left(-\frac{f(x) * g'(x)}{g(x)^2}\right)$$

$$\frac{f'(x) * g(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x) * g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x) * g(x) - g'(x) * f(x)}{g(x)^2}$$

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; F'(x) = \frac{f'(x) * g(x) - g'(x) * f(x)}{g(x)^2};$$

18. Ejercicio

Encuentra la abscisa de los puntos de la curva $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 1$ en que la tangente sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante

Solución

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 1; f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(h+x)^3}{3} - (h+x)^2 + (h+x) + 1 - (\frac{x^3}{3} - x^2 + x + 1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3+h^3+3hx^2+3xh^2}{3} - (x^2+h^2+2hx) + (h+x) + 1 - (\frac{x^3}{3} - x^2 + x + 1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3+h^3+3hx^2+3xh^2 - (3x^2+3h^2+6hx) + (3h+3x) + 3 - (x^3-3x^2+3x+3)}{3}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3+h^3+3hx^2+3xh^2 - 3x^2 - 3h^2 - 6hx + 3h + 3x + 3 - x^3 + 3x^2 - 3x - 3}{3h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3hx^2 + 3xh^2 - 3h^2 - 6hx + 3h}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 + 3x^2 + 3xh - 3h - 6x + 3)}{3h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 3x^2 + 3xh - 3h - 6x + 3)}{3} = \frac{3x^2 - 6x + 3}{3} = x^2 - 2x + 1$$

la bisectriz del primer cuadrante

será $y = x$; donde $m = 1$;

Si ha de ser paralela a la a la bisectriz

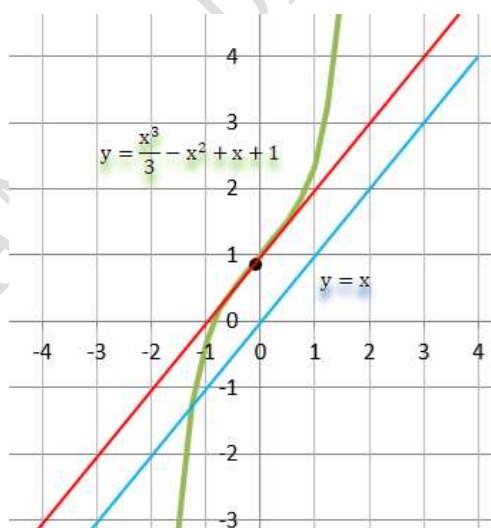
del primer cuadrante tendra la

misma pendiente;

$x^2 - 2x + 1 = 1$; $x^2 - 2x = 0$;

los puntos que cumplen esto serán

$x = 0$ y $x = 2$;



19. Ejercicio

¿ Hay algun punto en la grafica $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ con tangente horizontal?

Solución

Para que sea tangente horizontal $m = 0$;

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}; \text{ aplico la formula del cociente de funciones } f'(x) = \frac{f'(x) * g(x) - g'(x) * f(x)}{g(x)^2}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}; f'(x) = \frac{1(x^2-1) - (2x * x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = m$$

$$\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = 0; -x^2-1 = 0; \text{ No hay solución en los numeros reales } x = \sqrt{-1}$$

20. Ejercicio

Calcula las derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x) = (x-1)^3(3x^2-x+4)$

b) $f(x) = \frac{x^5}{x^4+x^2+1}$

Solución

a) $f(x) = (x-1)^3(3x^2-x+4); f'(x) = 3 \cdot 1(x-1)^2(3x^2-x+4) + (6x-1)(x-1)^3$
 $f'(x) = 3(x-1)^2(3x^2-x+4) + (6x-1)(x-1)^3$

b) $f(x) = \frac{x^5}{x^4+x^2+1}; f'(x) = \frac{5x^4(x^4+x^2+1) - x^5(4x^3+2x)}{(x^4+x^2+1)^2}$

21. Ejercicio

Dada la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$; $g(x) = 3x - 1$ Calcula:

a) $f'(x)$ y $g'(x)$ b) $(5f(x))'$; c) $(2f-3g)'(x)$; d) $(fg)'(x)$ e) $(5/g^2)'(x)$

Solución

a) $f'(x)$ y $g'(x); f'(x) = 2x + 2; g'(x) = 3$

b) $(5f(x))' = 5 \cdot f'(x) = 5 \cdot (2x + 2) = 10x + 10$

c) $(2f-3g)'(x) = 2f'(x) - 3g'(x) = 2(2x + 2) - 3 \cdot 3 = 4x - 5;$

d) $(fg)'(x) = (2x + 2)(3x - 1) + 3(x^2 + 2x + 1)$

e) $\left(\frac{5}{g^2}\right)'(x) = \frac{-2(3x-1)(3)5}{(3x-1)^4} = \frac{-2 \cdot 3 \cdot 5(x-1)}{(3x-1)^4} = \frac{-30(x-1)}{(3x-1)^4} = \frac{-30}{(3x-1)^3}$

22. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; averigua los puntos

de la gráfica en que la tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante

Solución

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}; f'(x) = \frac{\frac{2x(x+1)}{2\sqrt{x^2+1}} - 1\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{2x(x+1) - \sqrt{x^2+1} \cdot 2\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1} \cdot (x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - \sqrt{x^2+1} \cdot 2\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1} \cdot (x+1)^2}$$

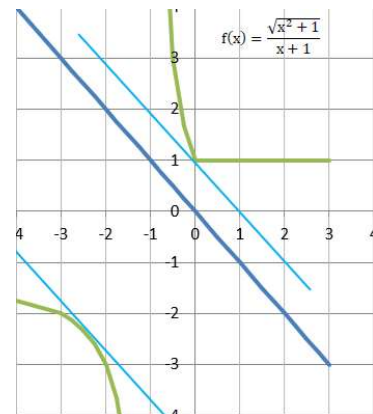
$$= \frac{2x(x+1) - 2(x^2+1)}{2\sqrt{x^2+1} \cdot (x+1)^2} = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2+1} \cdot (x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1} \cdot (x+1)^2} = m;$$

para que la tangente sea paralela a la bisectriz ha de ser $= -1$

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1} \cdot (x+1)^2} = -1; x-1 + \sqrt{x^2+1} \cdot (x+1)^2 = 0;$$

Dando valores a x buscamos el punto.



23. Ejercicio

Calcula la ecuación de la tangente a la función $f(x) = 5 + \sqrt{3x - 2}$ en el punto $x = 34$

Solución

La recta tangente será del tipo $y = mx + n$;

1º Calculamos el valor de y para $x = 34$; $f(x) = y = 5 + \sqrt{3 \cdot 34 - 2} = 5 + \sqrt{100}$; $y = 15$

2º Calculamos el valor de m pendiente en el punto $x = 34$

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{2\sqrt{3x-2}} \cdot 3; f'(x) = m = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \text{ en } x = 34; m = \frac{3}{2\sqrt{100}} = \frac{3}{20}$$

3º Hallamos el valor de n sustituyendo los valores conocidos $y = mx + n$;

$$15 = \frac{3}{20} \cdot 34 + n; n = \frac{99}{10}$$

$$\text{La recta tangente en } x = 34; y = \frac{3}{20}x + \frac{99}{10};$$

5 Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena

La regla de la cadena se utiliza para hallar la derivada de una composición de funciones

Sean f y g dos funciones. La función dada por $(f \circ g) = f(g(x))$ se llama función compuesta de f con g

$$\Rightarrow F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x);$$

Otra forma de expresarlo: si tenemos una función compuesta $F(x) = f(u(x))$; $F'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$

Ejemplo:

$$\text{Si } f(x) = \sin x \text{ y } g(x) = x^2 + 1$$

$$f \text{ compuesto con } g; (f \circ g) = f(g(x)) \text{ sustituimos } g(x) \Rightarrow f(x^2 + 1) = \sin(x^2 + 1)$$

$$\text{Si hacemos } g \text{ compuesto con } f; (g \circ f) = g(f(x)) \text{ sustituimos } f(x) \Rightarrow g(\sin x) = \sin(\sin x)^2 + 1$$

Como podemos ver f compuesto con g ; $(f \circ g) \neq g$ compuesto con f ; $(g \circ f)$

24. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = (x^2 + 1)^3$;

Solución

$$u = (x^2 + 1); f(u) = u^3; u' = 2x; f'(u) = 3u^2;$$

$$f(u(x)) = 3u^2 \cdot 2x \text{ sustituyo } u \Rightarrow 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = (x^2 + 1)^2 \cdot 6x = (x^4 + 1 + 2x^2)6x \\ = 6x^5 + 6x + 12x^3;$$

Otra forma

$$f(x) = (x^2 + 1)^3; f'(g) = 3(x^2 + 1)^2 \cdot (2x + 0) = 3(x^4 + 1 + 2x^2)(2x);$$

$$f'(g) = 6x^5 + 12x^3 + 6x$$

25. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = (x^3 - x)^2(3x^2 - 1)$

Solución

$$f(x) = (x^3 - x)^2(3x^2 - 1);$$

Aplicamos regla de la cadena y producto de funciones

$$f'(x) = 2(x^3 - x)(3x^2 - 1)(3x^2 - 1) + 6x(x^3 - x)^2;$$

$$f'(x) = (18x^7 - 30x^5 + 14x^3 - 2x) + (6x^7 - 12x^5 + 6x^3) = 24x^7 - 42x^5 + 20x^3 - 2x;$$

Otro procedimiento $f'(x) = (x^3 - x)^2(3x^2 - 1) = (x^6 + x^2 - 2x^4) * (3x^2 - 1) =$
 $f(x) = 3x^8 - 7x^6 + 5x^4 - x^2; f'(x) = 24x^7 - 42x^5 + 20x^3 - 2x$

26. Ejercicio

Sean $f(x) = x^3 - x$; $y g(x) = 3x$; Hallar:

a) $(g \circ f)'(1)$; b) $(g \circ f)'(0)$ c) $(f \circ g)'(1)$ d) $(f \circ g)'(10)$

Solución

a) $(g \circ f)'(1)$; aplicamos regla de la cadena $(g \circ f)' = g'(f(x)) * (f'(x)) =$

$$\begin{cases} g'(f(x)) = 3 \\ f'(x) = 3x^2 - 1 \end{cases} (g \circ f)' = g'(f(x)) * (f'(x)) = 3 * (3x^2 - 1) = 3(3 * 1 - 1) = 3 * 2 = 6$$

b) $(g \circ f)'(0) = g'(f(x)) * (f'(x)) = 3 * (3x^2 - 1) = -3$

c) $(f \circ g)'(1)$; $(f \circ g)' = f'(g(x)) * (g'(x)) = \begin{cases} f'(g(x)) = ((3(3x)^2 - 1)) \\ g'(x) = 3 \end{cases} (f \circ g)' = (3(3x)^2 - 1) * 3$

$$(f \circ g)'(1) = (3(3 * 1)^2 - 1) * 3 = (27 - 1) * 3 = 78;$$

d) $(f \circ g)'(10) = (3(10 * 1)^2 - 1) * 3 = 897$

27. Ejercicio

Sabiendo que $f(2) = 1$; $f'(2) = 3$, $g(2) = 2$; $g'(2) = 5$ y $g'(1) = 0$;

Calcula:

a) $(f \circ g)'(2)$; b) $(g \circ f)'(2)$ c) $(f^2 \circ g)'(2)$ d) $\left(\frac{1}{f} \circ g\right)'(2)$

Solución

a) $(f \circ g)'(2) = f'(g(2)) * (g'(2)) = f'(2) * 5 = 3 * 5 = 15;$

b) $(g \circ f)'(2) = g'(f(2)) * (f'(2)) = g'(1) * 3 = 0 * 3 = 0;$

c) $(f^2 \circ g)'(2) = 2f(g(2)) * f'(g(2)) * (g'(2)) = 2f(2) * f'(2) * 5 = 2 * 1 * 3 * 5 = 30;$

d) $\left(\frac{1}{f} \circ g\right)'(2) = \left(\frac{1}{f}\right)'(g(2)) * g'(2) = \frac{-f'(g(2))}{(f(g(2)))^2} * g'(2) = \frac{-3}{(f(2))^2} * 5 = \frac{-15}{(1)^2} = -15$

28. Ejercicio

Calcula la derivada de las siguientes funciones compuestas

$$\text{a) Sean } f(x) = (\sqrt{x} + x)^5; \text{ b) } f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x^3}} \text{ c) } f(x) = \left(\frac{x+3}{x-5}\right)^3$$

Solución

$$F(x) = f(u(x)); F'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

$$f(x) = (\sqrt{x} + x)^5 \quad u(x) = \sqrt{x} + x; \quad f(u) = u^5;$$

$$u = (x^2 + 1); f(u) = u^3; u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1; f'(u) = 5u^4;$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right) \cdot 5(\sqrt{x} + x)^4$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x^3}}; \quad u = \frac{2x+1}{x^3}; f(u) = \sqrt{u}$$

$$u = \frac{2x+1}{x^3}; u' = \frac{2(x^3) - 3x^2(2x+1)}{x^6} = \frac{2x - 3(2x+1)}{x^4} = \frac{-4x-3}{x^4}$$

$$f(u) = \sqrt{u}; f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x+1}{x^3}}}$$

$$f'(x) = \frac{-4x-3}{x^4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x+1}{x^3}}}$$

$$\text{c) } f(x) = \left(\frac{x+3}{x-5}\right)^3; u = \frac{x+3}{x-5}; f(u) = u^3$$

$$u = \frac{x+3}{x-5}; u' = \frac{1(x-5) - 1(x+3)}{(x-5)^2} = \frac{-8}{(x-5)^2}$$

$$f(u) = u^3; f'(u) = 3u^2 = 3\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2$$

$$f'(x) = 3\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2 \cdot \frac{-8}{(x-5)^2} = \frac{-24(x+3)^2}{(x-5)^4}$$

29. Ejercicio

Obten la derivada de $f(x) = \frac{1+x^3}{2-x}$ y a partir del resultado obten la derivada de $g(x) = \frac{1-x^3}{2+x}$

Solución

$$f(x) = \frac{1+x^3}{2-x}; f' = \frac{3x^2(2-x) - (-1)(1+x^3)}{(2-x)^2} = \frac{6x^2 - 3x^3 + 1 + x^3}{(2-x)^2} = \frac{6x^2 - 2x^3 + 1}{(2-x)^2}$$

$$\text{Dado que } f(x) = g(-x) \Rightarrow g'(x) = \frac{-6x^2 - 2x^3 - 1}{(2-x)^2}$$

$$\text{Comprobacion; } g(x) = \frac{1-x^3}{2+x}; g'(x) = \frac{1-x^3}{2+x} = \frac{-3x^2(2+x) - (1(1-x^3))}{(2+x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-6x^2 - 3x^3 - 1 + x^3}{(2+x)^2} = \frac{-6x^2 - 2x^3 - 1}{(2+x)^2}$$

6 Derivada de la función inversa

Si $f(x)$ es una función $f(x)^{-1}$ será su inversa y se cumplirá que $(f \circ f^{-1})(x) = x$; y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$;

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

La derivada de la función inversa es la inversa de la derivada de la función

Ejemplo:

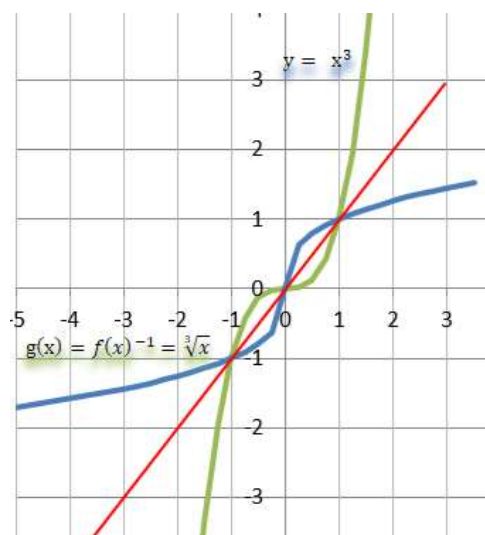
Sean las funciones $y = x^3$; $f(x) = x^3$

Hacemos un cambio de variable $y = x^3 \Rightarrow$

$$x = \sqrt[3]{y}; \quad g(x) = f(x)^{-1} = \sqrt[3]{x}$$

$$f(x)' = 3x^2; \quad g(x)' = [f(x)^{-1}]' = \frac{1}{3\sqrt{x^2}};$$

$$\text{Se cumple } g(x)' = \frac{1}{f'(g(x))};$$



30. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x)$

$$= \frac{2}{x-1}$$

Solución

$$f(x) = \frac{2}{x-1}; \quad f'(x) = \frac{-1(2)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2};$$

$$g(x) = f(x)^{-1} \text{ hacemos cambio de variables } g(x) = \frac{2+y}{y}$$

$$g(x)' = \frac{y - 1(2+y)}{y^2} = \frac{y - 2 - y}{y^2} = \frac{-2}{y^2}$$

$$\text{sustituyo y por su valor; } y = \frac{2}{x-1}; \quad g(x)' = [f(x)^{-1}]' = \frac{-2}{y^2} = \frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2} =$$

$$g(x)' = -\frac{(x-1)^2}{2};$$

$$\text{Se cumple } g(x)' = \frac{1}{f'(g(x))}; \text{ ya que } f(x)' = -\frac{2}{(x-1)^2} \text{ y } g(x)' = -\frac{(x-1)^2}{2}$$

31. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Solución

$$f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x^2}}$$

$$g(x) = f(x)^{-1} \text{ hacemos cambio de variables } g(x) = y^3$$

$$g(x)' = 3y^2$$

$$\text{Sustituyo y por su valor; } y = \sqrt[3]{x}; \quad g(x)' = [f(x)^{-1}]' = 3(\sqrt[3]{x})^2$$

$$\text{Se cumple } g(x)' = \frac{1}{f'(g(x))}; \text{ ya que } f(x)' = \frac{1}{3\sqrt{x^2}} \text{ y } g(x)' = 3(\sqrt[3]{x})^2$$

32. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$

Solución

$$f(x) = \frac{x-3}{x+3}; \quad f'(x) = \frac{1(x+3) - 1(x-3)}{(x+3)^2} = \frac{x+3 - x+3}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2}$$

$$g(x) = f(x)^{-1} \text{ hacemos cambio de variables } y = \frac{x-3}{x+3}; y(x+3) = x-3; g(x) = x^3$$

$$yx + 3y = x - 3; yx - x = -3 - 3y; x(y-1) = -3 - 3y;$$

$$x = \frac{-3 - 3y}{y-1}; \quad g(x) = \frac{-3 - 3y}{y-1}; \quad g'(x) = \frac{-3 * (y-1) - 1(-3 - 3y)}{(y-1)^2} =$$

$$g'(x) = \frac{-3y + 3 + 3 + 3y}{(y-1)^2} = \frac{6}{(y-1)^2}$$

$$\text{Sustituyo y por su valor; } y = \frac{x-3}{x+3}; \quad g'(x) = [f(x)^{-1}]' = \frac{6}{(y-1)^2} = \frac{6}{\left(\frac{x-3}{x+3} - 1\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{6}{\left(\frac{x-3-x+3}{x+3}\right)^2} = \frac{6}{\left(\frac{-6}{x+3}\right)^2} = \frac{(x+3)^2}{6}$$

$$\text{Se cumple } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}; \text{ ya que } f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \text{ y } g'(x) = \frac{(x+3)^2}{6}$$

33. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x) = x^3 + x + 1$ en el punto $x = 11$;

Solución

Como no es posible hallar la expresion $g(x) = f(x)^{-1}$ aplicamos la propiedad

$$f(x) * f(x)^{-1} = x; \quad g(x)f(x) = x; \quad (g \circ f)(x) = x;$$

$$g(x^3 + x + 1) = x; \quad g'(x^3 + x + 1)(3x^2 + 1) = 1;$$

$$g'(x^3 + x + 1)(3x^2 + 1) = 1; \quad g'(x^3 + x + 1) = \frac{1}{3x^2 + 1}$$

$$\text{para } x \text{ de la función } g(x) = f(x)^{-1} \text{ inversa} = 11 \Rightarrow x^3 + x + 1 = 11; \quad x^3 + x - 10 = 0$$

$$\text{hallamos las raices } x^3 + x - 10 = 0; \quad x^3 + x - 10 = (x-2)(x^2 + 2x + 5)$$

$$\text{tomamos la solucion real } x = 2 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3x^2 + 1} = \frac{1}{3 * 2^2 + 1} = \frac{1}{13}$$

34. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $y = x + \sqrt{x+5}$ en el punto $x = -3$

Solución

La funcion no es continua en $x = -5$.

Como no es posible hallar la expresion $g(x) = f(x)^{-1}$ aplicamos la propiedad

$$f(x) * f(x)^{-1} = x; \quad g(x)f(x) = x; \quad (g \circ f)(x) = x;$$

$$g(x + \sqrt{x+5}) = x; \text{ derivamos los dos terminos}$$

$$g'(x + \sqrt{x+5}) \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} * 1\right) = 1; \quad g'(x + \sqrt{x+5}) \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+5}}\right) = 1$$

$$g'(x + \sqrt{x+5}) * \frac{2\sqrt{x+5} + 1}{2\sqrt{x+5}} = 1; \quad g'(x) = \frac{1}{\frac{2\sqrt{x+5} + 1}{2\sqrt{x+5}}} = \frac{2\sqrt{x+5}}{2\sqrt{x+5} + 1}$$

para x de la función $g(x) = f(x)^{-1}$ inversa $= -3$ $y = x + \sqrt{x+5}$; $x + \sqrt{x+5} = -3$

quitamos la raíz $(-x-3)^2 = (\sqrt{x+5})^2$; $x^2 + 6x + 9 = x + 5$; $x^2 + 5x + 4 = 0$;

hallamos las raíces $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4) = 0$

La solución real $x = -1 \Rightarrow g(x)' = \frac{2\sqrt{x+5}}{2\sqrt{x+5}+1} = \frac{2\sqrt{(-1)+5}}{2\sqrt{(-1)+5}+1} = \frac{2\sqrt{4}}{2\sqrt{4}+1} = \frac{4}{5}$;

La solución real $x = -4 \Rightarrow g(x)' = \frac{2\sqrt{x+5}}{2\sqrt{x+5}+1} = \frac{2\sqrt{(-4)+5}}{2\sqrt{(-4)+5}+1} = \frac{2\sqrt{1}}{2\sqrt{1}+1} = \frac{2}{3}$;

35. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 10$; en el punto $x = 16$

Solución

Como no es posible hallar la expresión $g(x) = f(x)^{-1}$ aplicamos la propiedad

$f(x) * f(x)^{-1} = x$; $g(x)f(x) = x$; $(g \circ f)(x) = x$;

$g(x^3 + 2x^2 + 3x + 10) = x$; derivamos los dos términos

$g'(x^3 + 2x^2 + 3x + 10) = 1$; $g'(x^3 + 2x^2 + 3x + 10) * (3x^2 + 4x + 3) = 1$;

$g'(x^3 + 2x^2 + 3x + 10) = \frac{1}{3x^2 + 4x + 3}$

para x de la función $g(x) = f(x)^{-1}$ inversa $= 16$ $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 10$;

$x^3 + 2x^2 + 3x + 10 = 16$; $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0$; $x + \sqrt{x+5} = -3$

Hallamos las raíces $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = (x-1)(x^2 + 3x + 6) = 0$; Da una raíz

real y dos imaginarias, tomamos la raíz real $x = 1$;

$g'(x^3 + 2x^2 + 3x + 10) = \frac{1}{3x^2 + 4x + 3}$; para $x = 1$ $g'(x) = \frac{1}{3 * 1^2 + 4 * 1 + 3} = \frac{1}{10}$

36. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2 + 5}$ en el punto $x = 1$

Solución

Para x de la función $g(x) = f(x)^{-1}$ inversa $= 1$ $y = \frac{2x^2 - 4}{x^2 + 5}$

$\frac{2x^2 - 4}{x^2 + 5} = 1$; $2x^2 - 4 = x^2 + 5$; $x^2 = 9$; $x = \pm 3$;

$f'(x) = \frac{4x(x^2 + 5) - 2x(2x^2 - 4)}{(x^2 + 5)^2} = \frac{4x^3 + 20x - 4x^3 + 8x}{(x^2 + 5)^2} = \frac{28x}{(x^2 + 5)^2}$

$g(x)' = \frac{(x^2 + 5)^2}{28x}$; para $x = 3$; $g(x)' = \frac{(3^2 + 5)^2}{28 * 3} = \frac{196}{84} = \frac{7}{3}$

$g(x)' = \frac{(x^2 + 5)^2}{28x}$; para $x = -3$; $g(x)' = \frac{((-3)^2 + 5)^2}{28 * (-3)} = -\frac{196}{84} = -\frac{7}{3}$

37. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x - 4$ en el punto $x = -14$

Solución

Para x de la función $g(x) = f(x)^{-1}$ inversa $= -14$; $-14 = \frac{1}{2}x^3 + 3x - 4$

$$\text{comun denominador} \Rightarrow -\frac{28}{2} = \frac{1}{2}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - \frac{8}{2}; -28 = x^3 + 6x - 8;$$

$$x^3 + 6x + 20 = 0; \text{hallamos las raices} \Rightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 10)$$

Una raiz real $x = -2$ y dos imaginarias $x^2 - 2x + 10$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3 = \frac{3x^2 + 6}{2} \Rightarrow g(x)' = \frac{2}{3x^2 + 6}$$

$$g(x)' = \frac{2}{3x^2 + 6}; \text{para } x = -2; g(x)' = \frac{2}{3(-2)^2 + 6} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

38. Ejercicio

Hallar la derivada de las funciones inversas $f(x) = x - \sqrt{x+5}$ en el punto $x = 1$

Solución

$$\text{Para } x \text{ de la funcion } g(x) = f(x)^{-1} \text{ inversa} = 1; 1 = x - \sqrt{x+5}; x - 1 = \sqrt{x+5};$$

$$\text{elevo los dos terminos al cuadrado } (x-1)^2 = (\sqrt{x+5})^2; x^2 + 1 - 2x = x + 5;$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0; \text{hallo raices } x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2}; x = \frac{3 \pm 5}{2}; x = 4 \text{ y } x = -1;$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+5}} \cdot 1 = \frac{2\sqrt{x+5} - 1}{2\sqrt{x+5}} \Rightarrow g(x)' = \frac{2\sqrt{x+5}}{2\sqrt{x+5} - 1}; \text{Para } x = 4 \quad g(x)' = \frac{2\sqrt{4+5}}{2\sqrt{4+5} - 1} = \frac{6}{5}$$

39. Ejercicio

Calcula la ecuacion de la tangente a la curva $y = \sqrt[5]{x}$ en el punto $x = 32$

Solución

La recta tangente será del tipo $y = mx + n$;

$$y = \sqrt[5]{x} = f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{1/5}; \text{ en el punto } x = 32 = 2^5; y = \sqrt[5]{2^5} = 2 \text{ Punto de tangencia } (32, 2)$$

$$m = f'(x) = \frac{1 \cdot x^{\frac{1}{5}-1}}{5} = \frac{1 \cdot x^{-\frac{4}{5}}}{5} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}}; m = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}};$$

$$m \text{ en el punto } x = 32 \Rightarrow \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{2^{5 \cdot 4}}} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{2^{20}}} = \frac{1}{5 \cdot 2^4} = \frac{1}{80}; m = \frac{1}{80}$$

$$\text{La recta será } 2 = \frac{1}{80} \cdot 32 + n; 2 = \frac{32}{80} + n; \frac{160}{80} = \frac{32}{80} + \frac{80n}{80}; n = \frac{128}{80}$$

$$y = \frac{1}{80}x + \frac{128}{80};$$

40. Ejercicio

Calcula la derivada en $x = 11$ de la inversa de la funcion $f(x) = x^3$

Solución

$$f(x)^{-1} = \sqrt[3]{x}; \text{ dado que } f'(x) = 3x^2$$

$$(f(x)^{-1})' = \frac{1}{f'(f(x)^{-1})} = \frac{1}{f'(\sqrt[3]{x})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{Para } x = 11 \Rightarrow (f(x)^{-1})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{11^2}}$$

41. Ejercicio

Encuentra una formula para calcular la derivada de la funcion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ utilizando la funcion inversa. Aplica el resultado obtenido para hallar la derivada en $x = 5$;

Solución

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ es la funcion inversa de $g(x) = x^n$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{n * (\sqrt[n]{x})^{n-1}};$$

$$\text{Para } x = 5; f'(5) = \frac{1}{n * (\sqrt[n]{5})^{n-1}}$$

42. Ejercicio

Calcula la comida en cada caso el valor de b:

$$f'(1) = -5 \quad f^{-1}(0) = 1 \quad (f^{-1})'(0) = b$$

$$f'(0) = 1 \quad f^{-1}(-5) = 0 \quad (f^{-1})'(-5) = b$$

$$f'(-1) = b \quad f^{-1}(6) = -1 \quad (f^{-1})'(6) = 8$$

Solución

$$f'(1) = -5 \quad f^{-1}(0) = 1 \quad (f^{-1})'(0) = b;$$

$$(f(x))^{-1})' = \frac{1}{f'(f(x))}; \quad (f(0))^{-1})' = \frac{1}{f'(f(0))}; \quad b = \frac{1}{f'(1)}; \quad b = \frac{1}{-5}$$

$$f'(0) = 1 \quad f^{-1}(-5) = 0 \quad (f^{-1})'(-5) = b$$

$$(f(x))^{-1})' = \frac{1}{f'(f(x))}; \quad (f(-5))^{-1})' = \frac{1}{f'(f(-5))}; \quad b = \frac{1}{f'(0)}; \quad b = \frac{1}{1} = 1;$$

$$f'(-1) = b \quad f^{-1}(6) = -1 \quad (f^{-1})'(6) = 8$$

$$(f(x))^{-1})' = \frac{1}{f'(f(x))}; \quad (f(6))^{-1})' = \frac{1}{f'(f(6))}; \quad 8 = \frac{1}{f'(-1)}; \quad 8 = \frac{1}{b}; \quad b = \frac{1}{8}$$

7 Derivada de funciones elementales

7.1.1 Derivada de la función potencial

Siendo la funcion $f(x) = x^a$ y a un numero real ; $f'(x) = a * x^{a-1}$

$$F(x) = f(x)^a = a * f(x)^{a-1} * f'(x);$$

43. Ejercicio

Calcula la derivada de la funcion $f(x) = \sqrt{x} - 4\sqrt{x^3}$

Solución

$$f(x) = \sqrt{x} - 4\sqrt{x^3} \text{ en forma de potencia ; } f(x) = x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - 4 * \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{x}} - 6 * \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 6\sqrt{x}$$

44. Ejercicio

Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2}$

Solución

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^2}; \text{ Si operamos } f(x) = x^{-\frac{7}{4}}$$

$$f'(x) = -\frac{7}{4}x^{-\frac{7}{4}-1} = -\frac{7}{4} * x^{-\frac{11}{4}} = -\frac{7}{4} * \frac{1}{x^{\frac{11}{4}}} = -\frac{7}{4\sqrt[4]{x^{11}}} = -\frac{7}{4x^2\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\text{sin operar } f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^2}; f'(x) = -\frac{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} * x^2 - 2x * x^{\frac{1}{4}}}{x^4} = \frac{\frac{1}{4}x^{\frac{5}{4}} - 2x^{\frac{5}{4}}}{x^4} =$$

$$-\frac{\frac{7}{4}x^{\frac{5}{4}}}{x^4} = -\frac{7}{4} * x^{-\frac{11}{4}} = \frac{7}{4\sqrt[4]{x^{11}}} = \frac{7}{4x^2\sqrt[4]{x^3}}$$

45. Ejercicio

Calcula la derivada de la función $f(x) = \sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + x + 1$

Solución

$$f(x) = \sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + x + 1 = x^{\frac{1}{4}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} - 3 * \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 1 = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 1$$

46. Ejercicio

¿ Existe algun punto en la grafica de la función $y = \sqrt[5]{x}$ en la que la tangente sea paralela a la recta $3x - y = 0$?

Solución

Hallamos la derivada de la función para que nos de las tangentes a la misma $y = \sqrt[5]{x}$

$$y = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}};$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}};$$

$$f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

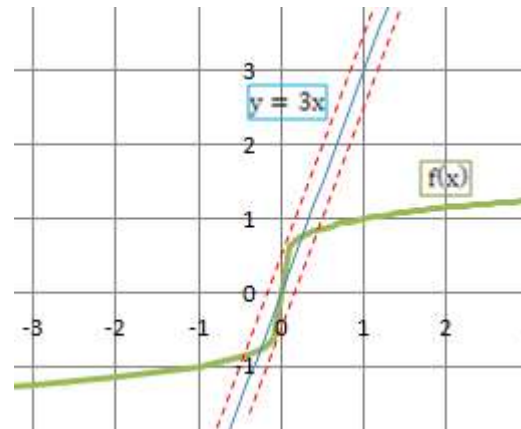
Para que la derivada sea paralela ha de tener la misma pendiente $y = mx + n$;

$$y = 3x; m = 3; \Rightarrow$$

$$3x = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}; 3x = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}; 15x = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} \text{ quitamos raices } (15x)^5 = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\right)^5;$$

$$(15x)^5 = \frac{1}{x^4}; 15^5 * x^5 * x^4 = 1; 15^5 * x^9 = 1; x^9 = \frac{1}{15^5}; x = \frac{1}{\sqrt[9]{15^5}};$$

$$x = \pm 0,22213$$



47. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{6x-3}$. Hallar :

a) $f'(1)$; $g(x) = f(x)^{-1}$ y $g(x)'$.

b) $g(x)' f(1)$ y compararlo con $f(1)$

c) $= f(2)$

Solución

a) $f(x) = \sqrt[3]{6x-3}$; $f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(6x-3)^2}} \cdot 6$; $f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{(6x-3)^2}}$;

$f'(1) = \frac{2}{\sqrt[3]{(6 \cdot 1 - 3)^2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9}}$; $f'(1) = \frac{2}{\sqrt[3]{9}}$

$g(x) = f(x)^{-1}$; $f(x) = \sqrt[3]{6x-3}$; hacemos cambio de variable $x = \sqrt[3]{6y-3}$;

$x^3 = 6y - 3$; $y = \frac{x^3 + 3}{6} = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}$; $f(x)^{-1} = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}$;

$g(x)' = (f(x)^{-1})' = \frac{3x^2}{6} = \frac{x^2}{2}$

b) $g(x)' f(1)$; dado que $(f(x)^{-1})' = \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$; sustituimos y por su valor

$(f(x)^{-1})' f(1) = \frac{y^2}{2} = \frac{(\sqrt[3]{6x-3})^2}{2}$; para $f(1)$, $(f(x)^{-1})' f(1) = \frac{\sqrt[3]{9}}{2}$.

Si, el resultado es el correcto.

c) $f(x)^{-1} = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}$; $f(2)^{-1} = \frac{2^3}{6} + \frac{1}{2} = \frac{8}{6} + \frac{3}{6} = \frac{11}{6}$; $f(2)^{-1} = \frac{11}{6}$;

7.1.2 Derivada de la función logarítmica

$F(x) = \log_a f(x)$; aplicamos la siguiente fórmula $F(x)' = \frac{f(x)'}{f(x)} \log_a e$

$f(x) = \log_a u$; aplicamos la siguiente fórmula $f(x)' = \frac{u'}{u} \log_a e$

Dado que $\log_a e = \frac{\ln e}{\ln a}$; $f(x)' = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\ln a}$

48. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = \ln(x^3 - 2x + 1)$

Solución

$f(x) = \ln(x^3 - 2x + 1)$; $f(x)' = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 1} \ln e = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 1} \cdot 1 = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 1}$

$f(x)' = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 1}$

49. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = \sqrt{x} \ln(7x^2)$

Solución

$f(x) = \sqrt{x} \ln(7x^2)$ aplico la fórmula de la derivada del producto de funciones

$f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(7x^2) + \frac{14x}{7x^2} \ln e \cdot \sqrt{x} = \frac{\ln(7x^2)}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln(7x^2)}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

$f(x)' = \frac{\ln(7x^2)}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

50. **Ejercicio**

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = 5x \log_5 x^4$

Solución

$f(x) = 5x \log_5 x^4$ aplico la formula de la derivada del producto de funciones

$$f(x)' = 5 \log_5 x^4 + \frac{4x^3}{x^4} \log_5 e * 5x = 5 \log_5 x^4 + \frac{20x^4}{x^4} \log_5 e = 5 \log_5 x^4 + 20 \log_5 e$$

hacemos un cambio de base $\log_5 e = \frac{\ln e}{\ln 5}$; $f(x)' = 5 \log_5 x^4 + 20 \frac{\ln e}{\ln 5} = 5 \log_5 x^4 + \frac{20}{\ln 5}$

$$f(x)' = 5 \log_5 x^4 + \frac{20}{\ln 5}$$

51. **Ejercicio**

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = \log_3(x^5 + 1)$

Solución

$$f(x) = \log_3(x^5 + 1); f(x)' = \frac{5x^4}{x^5 + 1} \log_3 e = \frac{5x^4}{x^5 + 1} * \frac{1}{\ln 3}$$

52. **Ejercicio**

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = \sqrt{\ln x}$

Solución

$f(x) = \sqrt{\ln x} = (\ln x)^{1/2}$ aplico la formula de la derivada de una potencia

$$f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} * \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

53. **Ejercicio**

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = x^x$

Solución

aplicamos logaritmo neperiano a los dos terminos

$\ln f(x) = \ln x^x$; aplicamos la propiedad de los logaritmos $\ln x^a = a * \log x$;

$$\ln f(x) = \ln x^x = x * \ln x; \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = 1 \ln x + \frac{1}{x} \ln e * x; \frac{f(x)'}{f(x)} = \ln x + \frac{x}{x};$$

$$f(x)' = (\ln x + 1) f(x); \text{sustituyo } f(x)' = (\ln x + 1) x^x$$

54. **Ejercicio**

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = x^{x^x}$

Solución

Aplicamos logaritmo neperiano a los dos terminos

$$\ln f(x) = \ln x^{x^x}; \ln f(x) = x^x \ln x; \text{ derivamos } \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = (x^x)' * \ln x + \frac{1}{x} \ln e * x^x$$

En el ejercicio anterior calculamos $(x^x)' = (\ln x + 1) x^x$ sustituyo

$$\frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = (x^x)' * \ln x + \frac{1}{x} \ln e * x^x = (\ln x + 1) x^x \ln x + x^{x-1}$$

$$\frac{f(x)'}{f(x)} = x^x (\ln x)^2 + x^x \ln x + x^{x-1}; f(x)' = (x^x (\ln x)^2 + x^x \ln x + x^{x-1}) x^{x^x}$$

55. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Solución

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \text{ Aplicamos logaritmo neperiano } \ln f(x) = \ln x^{\frac{1}{x}}; \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x$$

$$\text{derivamos } \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = -\frac{1}{x^2} * \ln x + \frac{1}{x} \ln e * \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} * \ln x + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} (\ln x - 1)$$

$$f(x)' = \frac{1}{x^2} (\ln x - 1) * f(x) \text{ sustituimos ; } f(x)' = \frac{1}{x^2} (\ln x - 1) * x^{\frac{1}{x}}$$

56. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Solución

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \text{ Aplicamos logaritmo neperiano } \ln f(x) = \ln e^{\frac{1}{x}}; \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln e$$

$$\text{derivamos } \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = -\frac{1}{x^2} * \ln e + \frac{0}{e} \ln e * \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} * 1 = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x)' = -\frac{1}{x^2} * f(x) \text{ sustituimos ; } f(x)' = -\frac{1}{x^2} * e^{\frac{1}{x}}$$

57. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = x^{\ln x}$

Solución

Aplicamos logaritmo neperiano a los dos terminos

$$\ln f(x) = \ln x^{\ln x}; \ln f(x) = \ln x * \ln x; \text{ derivamos } \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = \frac{1}{x} * \ln e * \ln x + \frac{1}{x} \ln e * \ln x$$

$$\frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = \frac{2}{x} \ln x; f(x)' = \frac{2}{x} \ln x * f(x) \text{ sustituyo } f(x)' = \frac{2}{x} \ln x * x^{\ln x}$$

58. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$

Solución

Aplicamos logaritmo neperiano a los dos terminos

$$\ln f(x) = \ln (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}; \ln f(x) = \sqrt{x} * \ln \sqrt{x};$$

$$\text{derivamos } \frac{f(x)'}{f(x)} \ln e = \frac{1}{2\sqrt{x}} * \ln \sqrt{x} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} * \ln e * \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} * \ln \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln \sqrt{x} + 1);$$

$$\frac{f(x)'}{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln \sqrt{x} + 1); f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln \sqrt{x} + 1) * f(x) \text{ sustituyo}$$

$$f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln \sqrt{x} + 1) * (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$$

7.1.3 Derivada de la función exponencial

Para hallar la derivada de una función exponencial aplicamos la fórmula:

$$F(x) = a^{f(x)} \Rightarrow F'(x) = f'(x) * \ln a * a^{f(x)};$$

- Siendo la función $f(x) = e^x$; aplico logaritmos $\ln f(x) = \ln e^x \Rightarrow \ln f(x) = x \ln e$

$$\text{derivamos } \frac{f'(x)}{f(x)} \ln e = 1 * \ln e + \frac{0}{e} \ln e = 1; f'(x) = f(x) * 1 = e^x$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x;$$

- Siendo la función $F(x) = e^{f(x)}$; aplico logaritmos $\ln F(x) = \ln e^{f(x)} \Rightarrow$

$$\ln F(x) = f(x) \ln e$$

$$\text{derivamos } \frac{F'(x)}{F(x)} \ln e = f'(x) * \ln e + \frac{0}{e} \ln e * f(x) = f'(x) + \frac{0}{e} f(x);$$

$$F'(x) = f'(x) * F(x); F'(x) = f'(x) * e^{f(x)}$$

$$F(x) = e^{f(x)} \Rightarrow F'(x) = f'(x) * e^{f(x)};$$

- Siendo la función $f(x) = a^x$; aplico logaritmos $\ln f(x) = \ln a^x \Rightarrow \ln f(x) = x \ln a$

$$\text{derivamos } \frac{f'(x)}{f(x)} \ln a = 1 * \ln a + \frac{0}{a} \ln a = \ln a; f'(x) = f(x) * \ln a = a^x \ln a$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln a * a^x;$$

- Siendo la función $F(x) = a^{f(x)}$; aplico logaritmos $\ln F(x) = \ln a^{f(x)} \Rightarrow$

$$\ln F(x) = f(x) \ln a$$

$$\text{derivamos } \frac{F'(x)}{F(x)} \ln a = f'(x) * \ln a + \frac{0}{a} \ln a * f(x) = f'(x) \ln a + \frac{0}{e} f(x);$$

$$F'(x) = f'(x) \ln a * F(x); F'(x) = f'(x) * \ln a * a^{f(x)}$$

$$F(x) = a^{f(x)} \Rightarrow F'(x) = f'(x) * \ln a * a^{f(x)};$$

59. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = e^{3x^3-5x+1}$

Solución

Aplicamos logaritmo neperiano a los dos términos

$$\ln f(x) = \ln e^{3x^3-5x+1}; \ln f(x) = (3x^3 - 5x + 1) * \ln e; \ln f(x) = (3x^3 - 5x + 1)$$

$$\text{derivamos } \frac{f'(x)}{f(x)} \ln e = (9x^2 - 5); f'(x) = (9x^2 - 5) * f(x)$$

$$f'(x) = (9x^2 - 5) * e^{3x^3-5x+1}$$

60. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = \frac{e^{x^3} + x^3}{x}$; *Solución*

$$f(x) = \frac{e^{x^3} + x^3}{x} = \frac{e^{x^3}}{x} + \frac{x^3}{x} = \frac{e^{x^3}}{x} + x^2; \text{ derivamos}$$

$$f'(x) = \frac{(e^{x^3})' * x - 1e^{x^3}}{x^2} + 2x; \text{ la derivada de la función } g(x) = e^{x^3} \text{ será}$$

$$g(x)' = (e^{x^3})' = 3x^2 * e^{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{(e^{x^3})' * x - 1e^{x^3}}{x^2} + 2x = \frac{3x^2 * e^{x^3} * x - 1e^{x^3}}{x^2} + 2x = \frac{3x^3 * e^{x^3} - 1e^{x^3}}{x^2} + 2x$$

$$f'(x) = \frac{e^{x^3} (3x^3 - 1)}{x^2} + 2x$$

61. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = \sqrt{x} * e^x$

Solución

$$f(x) = \sqrt{x} * e^x; f(x)' = (\sqrt{x})' e^x + (e^x)' * \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} * e^x + e^x \sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{e^x + 2e^x * x}{2\sqrt{x}}; f(x)' = \frac{e^x(1 + 2x)}{2\sqrt{x}}$$

62. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = 2^{x^2-1}$

Solución

$$f(x) = 2^{x^2-1} \text{ aplicamos logaritmo neperiano } \ln f(x) = \ln 2^{x^2-1}$$

$$\ln f(x) = (x^2 - 1) \ln 2; \text{ derivamos los dos terminos;}$$

$$\frac{f(x)'}{f(x)} * \ln e = 2x * \ln 2 + \frac{0}{2} \ln e (x^2 - 1) = 2x * \ln 2;$$

$$f(x)' = 2x * \ln 2 * f(x) \text{ sustituyo por su valor } f(x)' = 2x * \ln 2 * 2^{x^2-1}$$

63. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = 3^{\sqrt{x^2-1}}$

Solución

$$f(x) = 3^{\sqrt{x^2-1}}; \text{ aplicamos } \ln \Rightarrow \ln f(x) = \ln 3^{\sqrt{x^2-1}};$$

$$\ln f(x) = \sqrt{x^2 - 1} * \ln 3; \text{ derivamos los dos terminos}$$

$$\frac{f(x)'}{f(x)} * \ln e = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} 2x * \ln 3 + \frac{0}{3} \ln e \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} 2x * \ln 3$$

$$f(x)' = \frac{2x \ln 3}{2\sqrt{x^2-1}} * f(x) \text{ sustituyo; } f(x)' = \frac{x \ln 3}{\sqrt{x^2-1}} 3^{\sqrt{x^2-1}}$$

64. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente funcion $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$

Solución

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}; f(x)' = \frac{(e^{2x})' \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{2x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{(e^{2x})' \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{2x}}{x};$$

dado que $(e^{2x})' = 2 * e^{2x}$ sustituimos

$$f(x)' = \frac{(e^{2x})' \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{2x}}{x} = \frac{2 * e^{2x} \sqrt{x} - \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2\sqrt{x}(2 * e^{2x} \sqrt{x}) - e^{2x}}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$f(x)' = \frac{\frac{4x * e^{2x} - e^{2x}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{4x * e^{2x} - e^{2x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{e^{2x}(4x - 1)}{2x\sqrt{x}}; f(x)' = \frac{e^{2x}(4x - 1)}{2x\sqrt{x}}$$

65. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguiente función $f(x) = \frac{2^x - x}{3^x}$

Solución

$$f(x) = \frac{2^x - x}{3^x} = \frac{2^x}{3^x} - \frac{x}{3^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{x}{3^x}; \quad f(x)' = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)' - \left(\frac{x}{3^x}\right)'$$

$$g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x; \ln g(x) = \ln \left(\frac{2}{3}\right)^x; \ln g(x) = x * \ln \frac{2}{3}, \text{ derivamos}$$

$$\frac{g(x)'}{g(x)} = \ln \frac{2}{3}; \quad g(x)' = \ln \frac{2}{3} g(x); \text{ sustituimos, } g(x)' = \ln \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\left(\frac{x}{3^x}\right)' = -\frac{1 * 3^x - (3^x \ln 3)x}{(3^x)^2} = \frac{3^x - 3^x x \ln 3}{3^{2x}}$$

$$f(x)' = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)' - \left(\frac{x}{3^x}\right)' = \ln \frac{2}{3} * \left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{3^x - 3^x * x * \ln 3}{3^{2x}};$$

$$f(x)' = \frac{(\ln 2 - \ln 3) \frac{2^x}{3^x} * 3^{2x} - (3^x - 3^x * x * \ln 3)}{3^{2x}} =$$

$$= \frac{(\ln 2 - \ln 3) 2^x * 3^x - (3^x - 3^x * x * \ln 3)}{3^{2x}} = \frac{\ln 2 * 2^x 3^x - \ln 3 * 2^x 3^x - 3^x + 3^x * x * \ln 3}{3^{2x}}$$

$$f(x)' = \frac{\ln 2 * 2^x 3^x - \ln 3 * 2^x 3^x - 3^x + 3^x * x * \ln 3}{3^{2x}}$$

Otra forma de resolverlo; $f(x) = \frac{2^x - x}{3^x}; \quad f(x)' = \frac{(2^x \ln 2 - 1) * 3^x - 3^x \ln 3 (2^x - x)}{3^{2x}}$

$$f(x)' = \frac{2^x 3^x \ln 2 - 3^x - 3^x 2^x \ln 3 + x * 3^x \ln 3}{3^{2x}}$$

66. Ejercicio

De terminar para que valores de x se anula la derivada de $f(x) = e^{-x^2+5x-6}$

Solución

$$f(x) = e^{-x^2+5x-6}; \quad f(x)' = (-2x + 5) * e^{-x^2+5x-6}; \text{ la derivada se anula } = 0 \text{ para}$$

$$(-2x + 5) = 0; \quad 2x = 5; \quad x = \frac{5}{2};$$

67. Ejercicio

Hallar la derivada de la función $f(x) = \sqrt{3x^3} * e^x$

Solución

$$f(x) = \sqrt{3x^3} * e^x; \quad f(x)' = \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{3x^3}} * 9x^2 * e^x + e^x \sqrt{3x^3} = \frac{9x^2 * e^x}{2\sqrt{3x^3}} + e^x \sqrt{3x^3}$$

$$f(x)' = \frac{9x^2 * e^x}{2\sqrt{3x^3}} + \frac{(e^x \sqrt{3x^3})(2\sqrt{3x^3})}{2\sqrt{3x^3}} = \frac{(9x^2 * e^x) + (e^x 2 * 3x^3)}{2\sqrt{3x^3}} = \frac{(9x^2 * e^x) + (e^x 6x^3)}{2\sqrt{3x^3}}$$

$$f(x)' = \frac{3x^2 e^x (3 + 2x)}{2\sqrt{3x^3}}$$

7.1.4 Derivadas de funciones trigonométricas

- Derivada del seno ; $f(x) = \text{sen } x$; $f(x)' = \cos x$
- Derivada del coseno ; $f(x) = \cos x$; $f(x)' = -\text{sen } x$

Las demas funciones se hallan desarrollando estas dos

Derivada de la tangente; $f(x) = \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$;

$$f(x)' = \frac{(\text{sen } x)' \cos x - (\cos x)' \text{sen } x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \cos x - (-\text{sen } x) \text{sen } x}{(\cos x)^2}$$

$$f(x)' = \frac{(\cos x)^2 + (\text{sen } x)^2}{(\cos x)^2} = \text{dado que } (\cos x)^2 + (\text{sen } x)^2 = 1 \Rightarrow f(x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

68. Ejercicio

Hallar la derivada de las siguientes funciones a) $f(x) = \text{sen}(2x^2 + 3x)$; b) $f(x) = \sqrt{x} \cos x$;

c) $f(x) = \text{tg}^2 2x$; d) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

Solución

a) $f(x) = \text{sen}(2x^2 + 3x)$; $f(x)' = (4x + 3) \cos(2x^2 + 3x)$

b) $f(x) = \sqrt{x} \cos x$; $f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + (-\text{sen } x * \sqrt{x})$; $f(x)' = \frac{\cos x - 2x \text{sen } x}{2\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \text{tg}^2 2x$; $f(x)' = 2 * 2 \text{tg } 2x * \frac{1}{(\cos 2x)^2} = \frac{4 \text{tg } 2x}{(\cos 2x)^2} = \frac{4 \text{sen } 2x}{(\cos 2x)^3}$; $f(x)' = \frac{4 \text{sen } 2x}{(\cos 2x)^3}$

d) $f(x) = \sqrt{\cos x}$; $f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} * (-\text{sen } x) = \frac{-\text{sen } x}{2\sqrt{\cos x}}$; $f(x)' = \frac{-\text{sen } x}{2\sqrt{\cos x}}$

69. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función a) $f(x) = \text{sen}^2 \frac{x}{2}$; b) $f(x) = \frac{x + \text{sen } x}{\cos 4x}$

Solución

a) $f(x) = \text{sen}^2 \frac{x}{2}$; $f(x)' = 2 \text{sen } \frac{x}{2} * \cos \frac{x}{2} * \frac{1}{2} = \text{sen } \frac{x}{2} * \cos \frac{x}{2}$; $f(x)' = \text{sen } \frac{x}{2} * \cos \frac{x}{2}$

b) $f(x) = \frac{x + \text{sen } x}{\cos 4x}$; $f(x)' = \frac{(1 + \cos x) \cos 4x - (4(-\text{sen } 4x))(x + \text{sen } x)}{(\cos 4x)^2}$

$$f(x)' = \frac{(1 + \cos x) \cos 4x + (4 * \text{sen } 4x)(x + \text{sen } x)}{(\cos 4x)^2}$$

70. Ejercicio

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = \sec 4x * \text{sen } 4x$

Solución

$$f(x) = \sec 4x * \text{sen } 4x = \frac{1}{\cos 4x} * \text{sen } 4x = \frac{\text{sen } 4x}{\cos 4x};$$

$$f(x)' = \frac{(\text{sen } 4x)' * \cos 4x - (\cos 4x)'(\text{sen } 4x)}{(\cos 4x)^2} = \frac{4 \cos 4x * \cos 4x - (-4 \text{sen } 4x)(\text{sen } 4x)}{(\cos 4x)^2}$$

$$f(x)' = \frac{4 (\cos 4x)^2 + 4 (\text{sen } 4x)^2}{(\cos 4x)^2} = 4(1 + (\text{tg } 4x)^2)$$

71. **Ejercicio**

Hallar la derivada de la siguiente función $f(x) = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{cotg} \frac{x}{2}}{2}$

Solución

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{cotg} \frac{x}{2}}{2} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{cotg} \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \right)$$

$$f(x)' = \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{2} \frac{\cos \frac{x}{2} * \cos \frac{x}{2} - (-\operatorname{sen} \frac{x}{2} * \operatorname{sen} \frac{x}{2})}{(\cos \frac{x}{2})^2} + \frac{1}{2} \frac{(-\operatorname{sen} \frac{x}{2}) * \operatorname{sen} \frac{x}{2} - (\cos \frac{x}{2} * \cos \frac{x}{2})}{(\operatorname{sen} \frac{x}{2})^2} \right)$$

$$f(x)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{(\cos \frac{x}{2})^2 + (\operatorname{sen} \frac{x}{2})^2}{(\cos \frac{x}{2})^2} + \frac{1}{2} \frac{(-\operatorname{sen} \frac{x}{2})^2 * (-\cos \frac{x}{2})^2}{(\operatorname{sen} \frac{x}{2})^2} \right) =$$

$$\text{Dado que } (\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1 \Rightarrow f(x)' = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(\cos \frac{x}{2})^2} - \frac{1}{(\operatorname{sen} \frac{x}{2})^2} \right)$$

$$f(x)' = 1/4((\sec \frac{x}{2})^2 + (\operatorname{cosec} \frac{x}{2})^2)$$

72. **Ejercicio**

Hallar la recta tangente a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el origen

Solución

$f(x) = \operatorname{sen} x$; la tangente es la derivada de la función $f(x)' = \cos x$; $y = \cos x$

la recta tangente será de la forma $y = mx + n$; si ha de pasar por el origen será de la forma

$y = \cos x$; en el punto $x = 0$; $y =$ pendiente $= 1$;

$y = mx$; $y = 1 * x$; $y = x$;

73. **Ejercicio**

Hay algún punto de la gráfica $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$ en la que la tangente tenga menor pendiente que la bisectriz del primer cuadrante

Solución

La bisectriz del primer cuadrante $y = mx$; donde $m = 1$; $y = x$

$$f(x) = \operatorname{tg}(2x); f(x)' = 2 \frac{\cos 2x * \cos 2x - (-\operatorname{sen} 2x * \operatorname{sen} 2x)}{(\cos 2x)^2} = \frac{2}{(\cos 2x)^2}$$

Dado que los valores del $\cos x$ van de 0 a 1, la tg a esta curva siempre será mayor que 1

74. **Ejercicio**

Encuentra los puntos con abscisa en $[0, 2\pi]$ para que la tg a la curva

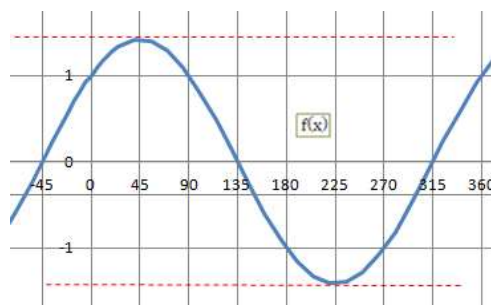
$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ sea horizontal

Solución

$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$; $f(x)' = \cos x - \operatorname{sen} x$

Para que la tangente $f(x)' = 0$; $\cos x = \operatorname{sen} x$ eso se cumple en los siguientes puntos

Los puntos son $x = 45^\circ$ y $x = 225^\circ$



75. Ejercicio

Hallar la derivada de la función $f(x) = \sin(\ln x)$

Solución

$$f(x) = \sin(\ln x); f(x)' = \cos(\ln x) * \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \cos(\ln x); f(x)' = \frac{1}{x} \cos(\ln x)$$

7.1.5 Derivada de funciones trigonométricas inversas

Derivada del arcoseno ;

$$y = f(x) = \arcsen x; \Rightarrow \sin y = x;$$

$$\text{Derivamos los dos terminos } y' \cos y = 1; y' = \frac{1}{\cos y}$$

Consideramos la propiedad $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$; sustituyo $\sin^2 y$ por su valor

$$x^2 + \cos^2 y = 1; \cos^2 y = 1 - x^2; \cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{sustituyo en la derivada } y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; f(x)' = y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Derivada del arco cos ;

$$y = f(x) = \arccos x; \Rightarrow \cos y = x;$$

$$\text{Derivamos los dos terminos } y'(-\sin y) = 1; y' = -\frac{1}{\sin y}$$

Consideramos la propiedad $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$; sustituyo $\cos^2 y$ por su valor

$$\sin^2 y + x^2 = 1; \sin^2 y = 1 - x^2; \sin y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{sustituyo en la derivada } y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; f(x)' = y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Derivada del arctg ;

$$y = f(x) = \arctg x; \Rightarrow \tg y = x; \text{ derivamos los dos terminos}$$

$$y'(1 + \tg^2 y) = 1; \text{ sustituyo por su valor } \Rightarrow f(x)' = y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

76. Ejercicio

Hallar la derivada de la función a) $f(x) = \arcsen(x^2)$; b) $f(x) = \arctg(1 + x^2)$;

c) $f(x) = \ln(\sen x + \arcsen x)$ d) $f(x) = \arcsen(e^x)$

Solución

$$\text{a) } f(x) = \arcsen(x^2); f(x)' = 2x * \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}}$$

$$\text{b) } f(x) = \arctg(1 + x^2); f(x)' = 2x * \frac{1}{1 + (1 + x^2)^2}; f(x)' = \frac{2x}{1 + (1 + x^2)^2}$$

$$\text{c) } f(x) = \ln(\sen x + \arcsen x); f(x)' = \frac{(\sen x + \arcsen x)'}{\sen x + \arcsen x} \ln e = \frac{\cos x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{\sen x + \arcsen x}$$

$$f(x)' = \frac{\cos x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{\sen x + \arcsen x}$$

$$\text{d) } f(x) = \arcsen(e^x); f(x)' = (e^x)' * \frac{1}{\sqrt{1 - (e^x)^2}} = e^x * \frac{1}{\sqrt{1 - (e^x)^2}}; f(x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1 - (e^x)^2}}$$

77. Ejercicio

Encuentra los puntos con abscisa en los que la tg a la curva

$$f(x) = \arctg x \text{ sea horizontal}$$

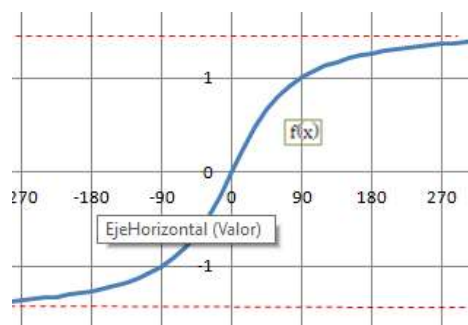
Solución

$$f(x) = \arctg x; f'(x) = y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Para que la tangente $f'(x) = 0$; $x = \pm\infty$

eso se cumple en los siguientes puntos

Los puntos son $x = \pm\infty$



78. Ejercicio

Hallar la derivada de la función $f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x}$

Solución

$$f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x}; f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} * \frac{-1}{(x)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} * \frac{-1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0;$$

79. Ejercicio

Hallar la recta tangente y normal a la función $f(x) = \frac{2-x}{x^3}$ en el punto $x = -1$

Solución

$$f(x) = \frac{2-x}{x^3}; y = \frac{2-x}{x^3} \text{ en el punto } x = -1; y = \frac{2-(-1)}{(-1)^3} = -3; \text{ punto } (-1, -3)$$

$$f(x) = \frac{2-x}{x^3}; f'(x) = \frac{-1 * x^3 - 3x^2(2-x)}{(x^3)^2} = \frac{-x^3 - 6x^2 + 3x^3}{(x^3)^2} = \frac{-6x^2 + 2x^3}{x^6} =$$

$$\frac{x^2(-6+2x)}{x^6} = \frac{(-6+2x)}{x^4};$$

para $x = -1 \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{(-6+2(-1))}{(-1)^4} = \frac{-6-2}{1} = -8;$$

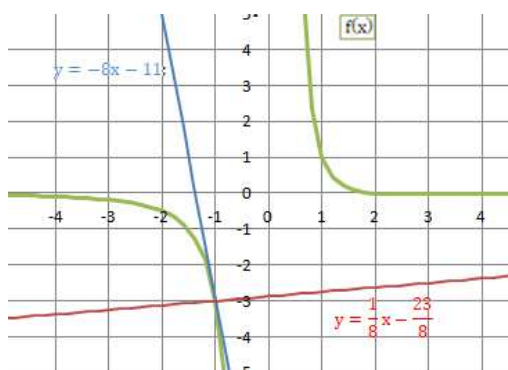
$$m = -8;$$

La recta tangente será $y = -8x + n$;

si ha de pasar por $(-1, -3)$;

$$-3 = -8(-1) + n; n = -11;$$

la recta tangente será $y = -8x - 11$;



La recta normal será $y = \frac{1}{8}x + n$; si ha de pasar por $(-1, -3)$; $-3 = \frac{1}{8}(-1) + n$;

$$n = -3 + \frac{1}{8} = -\frac{23}{8}; \text{ la recta normal será } y = \frac{1}{8}x - \frac{23}{8};$$

80. Ejercicio

Hallar la recta tangente a la función $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x$ cuya pendiente sea 3

Solución

La recta tangente será $y = 3x + n$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x; f'(x) = \frac{4x^3}{4} - 4x + 3 = x^3 - 4x + 3;$$

$$f'(x) = m \text{ en un punto } (x, y) \text{ tienen que ser igual a } 3; x^3 - 4x + 3 = 3;$$

$$x^3 - 4x = 0; x(x^2 - 4) = 0 = \text{esto se cumple en } x = 0; x = +2 \text{ y } x = -2$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow y = f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x = 0; \text{ Un punto será } (0,0) \Rightarrow n = 0;$$

Recta tangente en $(0,0)$ $y = 3x$

$$\text{Para } x = 2 \Rightarrow y = f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x; y = \frac{2^4}{4} - 2 * 2^2 + 3 * 2 = 2$$

$$\text{otro punto será } (2,2), \text{ la tangente } y = 3x + n \Rightarrow 2 = 3 * 2 + n; n = -4;$$

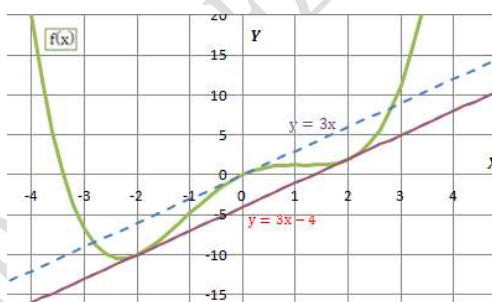
la recta tangente en $(2,2)$ será $y = 3x - 4$;

$$\text{Para } x = -2 \Rightarrow$$

$$y = f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x; y = \frac{(-2)^4}{4} - 2 * (-2)^2 + 3 * (-2) = -10$$

$$\text{otro punto será } (-2,-10), \text{ la tangente } y = 3x + n \Rightarrow -10 = 3 * (-2) + n; n = -4;$$

la recta tangente en $(-2,-10)$ será $y = 3x - 4$;



81. Ejercicio

Hallar la recta tangente a la función $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ en el punto de corte con el eje de abscisas

Solución

El punto de corte de la función con el eje de abscisas será $y=0$;

$$\frac{x-2}{x+1} = 0; x = 2; \text{ Punto de corte } (2,0)$$

$$f'(x) = m \text{ en un punto } (2,0) f'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+2}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2};$$

$$\text{en } a = 2 \Rightarrow m = \frac{3}{(2+1)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}; m = \frac{1}{3}$$

$$\text{La tangente a la función } f(x) = \frac{x-2}{x+1} \text{ será; } y = mx + n; y = \frac{1}{3}x + n$$

$$\text{si pasa por el punto } (2,0); 0 = \frac{1}{3} * 2 + n; n = -\frac{2}{3};$$

$$\text{La tangente pedida será } y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3};$$

82. Ejercicio

Obten la ecuación de la tangente a la curva $y = e^{2x+1}$ en el punto $x = -\frac{1}{2}$;

Solución

El punto de tangencia será $y = e^{2(-\frac{1}{2})+1} = 1$; $(-\frac{1}{2}, 0)$;

$$F(x) = a^{f(x)} \Rightarrow F(x)' = f(x)' * \ln a * a^{f(x)};$$

$$y = f(x) = e^{2(-\frac{1}{2})+1} \text{ donde } f'(x) = m;$$

$$f'(x) = e^{2x+1} * 2 * \ln e = 2e^{2x+1} \text{ en el punto } x = -\frac{1}{2}; m = 2;$$

$$\text{tangente; } y - 1 = m \left(x - \left(-\frac{1}{2} \right) \right); y - 1 = 2 \left(x + \frac{1}{2} \right); y - 1 = 2x + 1; y = 2x + 2;$$

83. Ejercicio

Calcula la derivada de $f(x) = \ln(x^2 + 1)^3$

Solución

$$f(x) = \log_a u; \text{ aplicamos la siguiente formula } f(x)' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u} * \frac{1}{\ln a}$$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)^3; f(x)' = \frac{3(x^2 + 1)^2 * 2x}{(x^2 + 1)^3} \frac{1}{\ln e} = \frac{6x}{x^2 + 1}$$

84. Ejercicio

Hay algun punto de la grafica $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ con derivada Horizontal

Solución

Para que haya una derivada Horizontal $\Rightarrow m = f'(x)$ ha de ser igual a 0;

$$y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1(1-x) - (-1)(1+x)}{(1-x)^2} \right)}{\frac{1+x}{1-x}} \ln e = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \right)}{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2} * \left(\frac{2}{(1-x)^2} \right)}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{\left(\frac{1+x}{1-x} \right) (1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$m = \frac{1}{1-x^2} \text{ m no puede ser } 0 = \frac{1}{1-x^2} = 0 = 1 \text{ indeterminado}$$

85. Ejercicio

Calcula, simplificando al máximo la derivada de la función $f(x) = \ln \frac{(e^x + 1)}{(e^x - 1)}$

Solución

$$f(x) = \ln \frac{(e^x + 1)}{(e^x - 1)};$$

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(e^x + 1)(e^x - 1) - \frac{d}{dx}(e^x - 1)(e^x + 1)}{\frac{(e^x + 1)}{(e^x - 1)}} \ln e = \frac{\frac{d}{dx}(e^x + 1)(e^x - 1) - \frac{d}{dx}(e^x - 1)(e^x + 1)}{(e^x + 1)(e^x - 1)}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x + 1) = \frac{d}{dx}e^x = e^x * 1 * \frac{1}{\ln e} = e^x$$

$$f'(x) = \ln e = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)(e^x - 1)} = \frac{-2e^x}{(e^x + 1)(e^x - 1)} = \frac{-2e^x}{(e^{x^2} - 1)}$$

86. Ejercicio

Calcula la recta tangente a la curva $f(x) = \sin x$ en el origen

Solución

$f(x) = \sin x$; el origen es $(0,0)$; $f'(x) = \cos x$; para $x = 0$; $m = \cos 0 = 1$;

$$y = mx; y = x;$$

87. Ejercicio

Halla las derivadas de las funciones a) $f(x) = \sin^3(x^2 - x)$;

$$b) f(x) = \frac{1}{\cos^3(3x^2 + 2x)}$$

Solución

$$a) f(x) = \sin^3(x^2 - x) = (\sin(x^2 - x))^3;$$

$$f'(x) = 3 \sin^2(x^2 - x) \cos(x^2 - x) * (2x - 1);$$

$$b) f(x) = \frac{1}{\cos^3(3x^2 + 2x)} = \frac{1}{(\cos(3x^2 + 2x))^3}$$

$$f'(x) = \frac{-(3 \cos(3x^2 + 2x))^2 * (-\sin(3x^2 + 2x)) * (6x + 2)}{(\cos(3x^2 + 2x))^6} =$$

$$f'(x) = \frac{-(3 * (-\sin(3x^2 + 2x))) * (6x + 2)}{(\cos(3x^2 + 2x))^3} = \frac{(3 \sin(3x^2 + 2x)) * (6x + 2)}{(\cos(3x^2 + 2x))^3}$$

88. Ejercicio

Deriva y simplifica $f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x}$;

Solución

$$f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x}; f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} * \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2 + \frac{x^2}{x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0;$$

89. Ejercicio

Calcula mediante derivada logaritmica las derivadas a) $f(x) = x^x$ con $x > 0$;

b) $f(x) = x^{\text{sen } x}$ con $x > 0$;

Solución

a) $f(x) = x^x$; $\ln f(x) = \ln x^x = x \ln x$; $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 * \ln x + \frac{1}{x} * x =$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1; f'(x) = x^x (\ln x + 1)$$

b) $f(x) = x^{\text{sen } x}$; $\ln f(x) = \ln x^{\text{sen } x}$; $\ln f(x) = \text{sen } x * \ln x$ $\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{d}{dx} (\text{sen } x * \ln x)$;

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\cos x * \ln x) + \frac{1}{x} \text{sen } x = \ln x * \cos x + \frac{\text{sen } x}{x};$$

$$f'(x) = (\ln x * \cos x + \frac{\text{sen } x}{x}) x^{\text{sen } x}$$

90. Ejercicio

Obten la tangente a la curva $\pi^2 y^3 \cos x - x^2 y + 2 \pi^2 = 0$; en el punto $(\pi, 1)$

Solución

La pendiente de la curva será $m = \frac{d}{dx} y = y'$

$$\text{Derivamos } \pi^2 y^3 \cos x - x^2 y + 2 \pi^2 = 0 \Rightarrow 3y^2 y' \pi^2 \cos x + \pi^2 y^3 (-\text{sen } x) - (2xy + y' x^2)$$

$$3y^2 y' \pi^2 \cos x + \pi^2 y^3 (-\text{sen } x) - (2xy + y' x^2) = 0; \text{ en el punto } x = \pi; \text{ sustituyo}$$

$$3y^2 y' \pi^2 \cos \pi + \pi^2 y^3 (-\text{sen } \pi) - (2\pi y + y' \pi^2) = -3y^2 y' \pi^2 - 2\pi y - y' \pi^2$$

$$-3y^2 y' \pi^2 - 2\pi y - y' \pi^2 = 0 \text{ para } y = 1 \text{ sustituyo } -3y' \pi^2 - 2\pi - y' \pi^2;$$

$$y'(-3\pi^2 - \pi^2) = 2\pi; y' = \frac{2\pi}{-3\pi^2 - \pi^2} = \frac{2\pi}{-4\pi^2} = -\frac{1}{2\pi}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2\pi}(x - \pi); y - 1 = -\frac{x}{2\pi} + \frac{\pi}{2\pi}; y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2} + 1; y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{3}{2}$$

91. Ejercicio

Halla la derivada de las siguientes funciones: a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)\tan x$; b) $f(x) = \sin \sqrt{x^2 + 4}$

$$c) f(x) = \frac{2\pi^2 \ln(x^3 + x)}{\tan(\pi x)}; d) f(x) = \frac{\sqrt{te^t + 4}}{\sqrt[4]{t^3 - t^2}}$$

Solución

$$a) f(x) = \ln(x^2 + 1)\tan x; f'(x) = \frac{2x \tan x}{x^2 + 1} + \frac{1}{(\cos x)^2} * \ln(x^2 + 1) = \frac{2x \tan x}{x^2 + 1} + \frac{\ln(x^2 + 1)}{(\cos x)^2}$$

$$b) f(x) = \sin \sqrt{x^2 + 4} = \sin (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}; f'(x) = \cos \sqrt{x^2 + 4} * \frac{1}{2} (x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} (2x)$$

$$f'(x) = \frac{x \cos \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$c) f(x) = \frac{2\pi^2 \ln(x^3 + x)}{\tan(\pi x)};$$

$$f'(x) = \frac{0(\ln(x^2 + x) + 2\pi^2 \frac{3x^2 + 1}{(x^3 + x)})\tan(\pi x) - \frac{1}{(\cos x)^2} \pi * (2\pi^2) \ln(x^3 + x)}{(\tan(\pi x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{6\pi^2 (x^2 + 1)\tan(\pi x)}{(x^3 + x)} - \frac{2\pi^3 \ln(x^3 + x)}{(\cos x)^2}}{(\tan(\pi x))^2}$$

$$d) f(x) = \frac{\sqrt{te^t + 4}}{\sqrt[4]{t^3 - t^2}} = \frac{(te^t + 4)^{\frac{1}{2}}}{(t^3 - t^2)^{\frac{1}{4}}}; f'(x) = \frac{\frac{d}{dt}(te^t + 4)^{\frac{1}{2}} * (t^3 - t^2)^{\frac{1}{4}} - \frac{d}{dt}(t^3 - t^2)^{\frac{1}{4}} * (te^t + 4)^{\frac{1}{2}}}{((\pi t^3 - t^2)^{\frac{1}{4}})^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(te^t + 4)^{-\frac{1}{2}} * (e^t + te^t) * 1(t^3 - t^2)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}(t^3 - t^2)^{-\frac{3}{4}}(3t^2 - 2t) * (te^t + 4)^{\frac{1}{2}}}{(t^3 - t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt[4]{t^3 - t^2}(e^t + te^t)}{2\sqrt{te^t + 4}} - \frac{(3t^2 - 2t)\sqrt{te^t + 4}}{4\sqrt[4]{t^3 - t^2}}}{\sqrt{t^3 - t^2}}$$

92. Ejercicio

Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de función

$$f(x) = 2xe^x + \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4} \text{ en el punto } x = 0;$$

Solución

$$f(x) = 2xe^x + \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}; \text{ para } x = 0 \Rightarrow -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2};$$

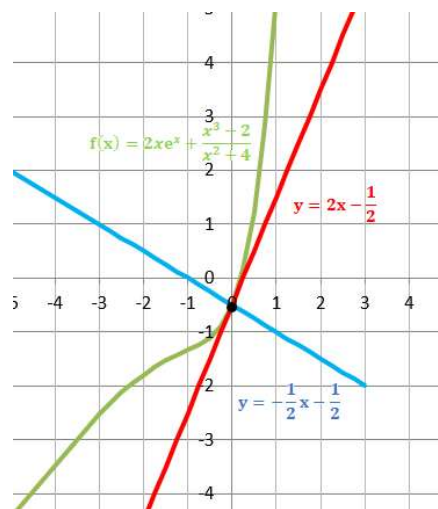
$$\text{punto de tangencia } (0, -\frac{1}{2})$$

$$f'(x) = m = 2e^x + 2xe^x + \frac{3x^2(x^2 + 4) - (2x(x^3 - 2))}{(x^2 + 4)^2};$$

$$m \text{ en el punto } x = 0 \Rightarrow m = 2;$$

$$\text{recta tangente: } y + \frac{1}{2} = 2x; y = 2x - \frac{1}{2};$$

$$\text{recta normal: } y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x; y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2};$$



93. Ejercicio

Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y = \frac{2x}{1-x^2}$ para $x > 1$;

En el punto $P\left(2, -\frac{3}{4}\right)$ la abandona y sigue desplazándose a lo largo de la tangente a dicha curva

a) hallar la ecuación de la recta tangente

b) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra el punto en que la partícula encuentra al eje x

c) Si el desplazamiento es de derecha a izquierda halla el punto en que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P

Solución

a) hallar la ecuación de la recta tangente

$$f(x) = y = \frac{2x}{1-x^2}; \text{ para } x = 2 \Rightarrow y = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

punto de tangencia $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$

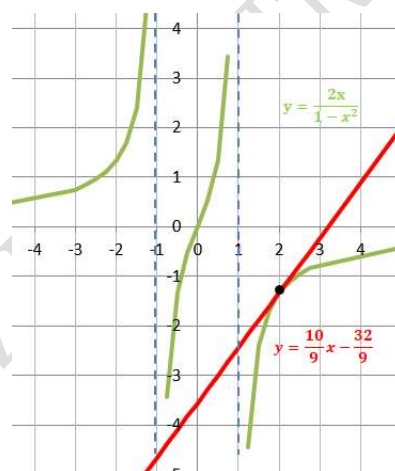
$$f'(x) = m = \frac{2(1-x^2) - (-2x \cdot 2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2) - (-2x \cdot 2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$m = \frac{2 + 2x^2}{(1-x^2)^2} \text{ en el punto } x = 2 \Rightarrow m = \frac{2 + 8}{3^2} = \frac{10}{9};$$

$$\text{Tangente; } y - \left(-\frac{4}{3}\right) = (x - 2) \frac{10}{9}; y = \frac{10}{9}x - \frac{20}{9} - \frac{4}{3};$$

$$y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$$



b) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra el punto en que la partícula encuentra al eje x

$$y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \text{ cortará al eje } x \text{ en } y = 0;$$

$$0 = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}; \frac{10}{9}x = \frac{32}{9}; x = \frac{32}{10}$$

c) Si el desplazamiento es de derecha a izquierda halla el punto en que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P

La asíntota más próxima al punto P es $x = 1$;

La partícula encontrará a la asíntota en $(1, \infty)$

94. Ejercicio

Hallar el area del triangulo formado por eje X y las rectas tangentes y normal a la curva de ecuacion $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa de $x = -1$;

Solución

$$f(x) = y = e^{-x}; \ln f(x) = \ln e^{-x} = -x * \ln e ;$$

derivamos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -1;$$

$$f'(x) = -e^{-x} = m = -e^{-x}$$

en el punto $x = -1$; $m = -e$

Punto de tangencia $x = -1$;

$$y = e^1 = e; \text{ punto } (-1, e)$$

$$\text{Recta tangente } y - e = (x + 1)(-e);$$

$$y = -ex$$

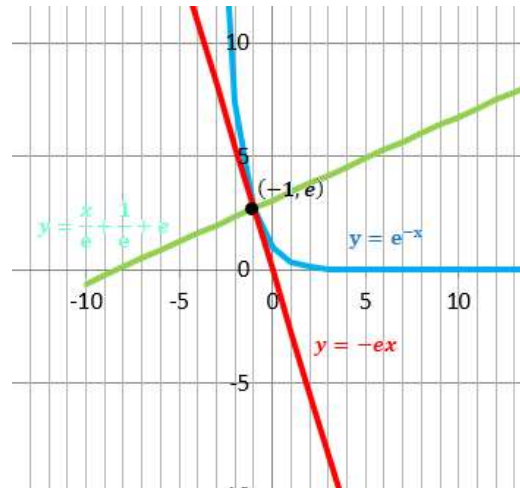
$$\text{Recta Normal } y - e = (x + 1)\left(\frac{1}{e}\right);$$

$$y = \frac{x}{e} + \frac{1}{e} + e$$

Punto de corte de tangente con eje X; $y = -ex$ en $y = 0$; $x = 0$; $(0,0)$

Punto de corte de la normal $y = \frac{x}{e} + \frac{1}{e} + e$; $0 = \frac{x}{e} + \frac{1}{e} + \frac{e^2}{e}$; $x = -1 - e^2$; $((-1 - e^2), 0)$

$$\text{Area del triangulo} = \frac{(1 + e^2) * e}{2} = \frac{e + e^3}{2}$$



8 Tabla de las principales derivadas

TABLA DE DERIVADAS	
Función	Derivada
$f(x) = K$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$F(x) = f(x) + g(x)$	$F'(x) = f'(x) + g'(x)$
$F(x) = f(x) \cdot g(x)$	$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x);$
$F(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$	$F'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$
$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$F'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}$
$F(x) = f(g(x))$	$F'(x) = f'(g) \cdot g'(x)$
Derivada de la inversa de $f(x)$	$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$
$F(x) = f(x)^a$	$F(x) = f(x)^a = a \cdot f(x)^{a-1} \cdot f'(x);$
$F(x) = \log_a f(x)$	$F(x)' = \frac{f(x)'}{f(x)} \log_a e$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$F(x) = e^{f(x)}$	$F(x)' = f(x)' \cdot e^{f(x)};$
$f(x) = a^x$	$\ln a \cdot a^x;$
$F(x) = a^{f(x)}$	$F(x)' = f(x)' \cdot \ln a \cdot a^{f(x)}$
$f(x) = \sin x$	$f(x)' = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f(x)' = -\sin x$
$f(x) = \arcsen x$	$f(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f(x)' = \frac{1}{1+x^2}$