

Análisis de las Funciones

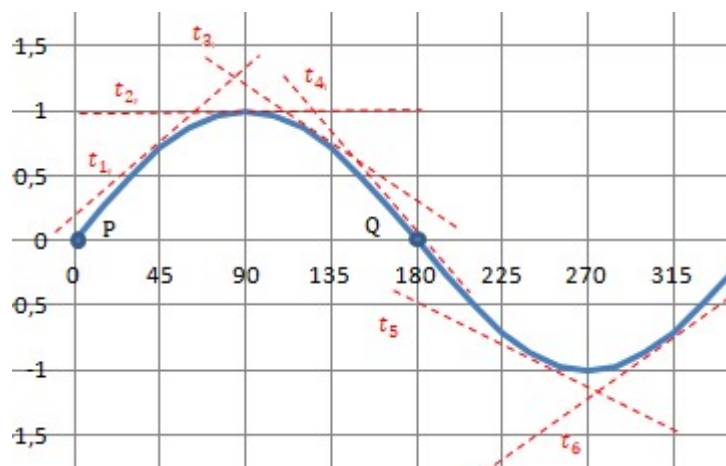
Contenido

1	APLICACIÓN DE LA DERIVADA SEGUNDA.....	2
2	SIMETRÍAS	3
3	ESTUDIO DE UNA FUNCIÓN	4
4	PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES	12
4.1	PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES Y SIGNO DE LA FUNCIÓN	12
4.2	SIMETRÍAS	13
5	FUNCIONES POLINÓMICAS.....	13
6	FUNCIONES RACIONALES	15
7	FUNCIONES EXPONENCIALES.....	17
8	FUNCIONES LOGARÍTMICAS	21
9	FUNCIONES PERIÓDICAS.....	25
10	CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES POR TRANSLACIÓN Y DILATACIÓN.....	28

1 Aplicación de la derivada segunda

La derivada de una función nos determina la pendiente de la recta tangente en cualquier punto del dominio de la función

Las tangentes en los distintos puntos de la curva van ocupando posiciones por encima de la curva t_1 , t_2 , t_3 , t_4 , y por debajo de la curva t_5 , t_6 . Los puntos P y Q son puntos donde la tangente cambia de posición, Puntos de inflexión de la función



Del estudio de la posición de la tangente respecto a la curva se determina

Si la tangente está por encima de la curva el signo de la segunda derivada en ese punto es negativo

Si la tangente está por debajo de la curva el signo de la segunda derivada en ese punto es positivo

Por otro lado podemos afirmar:

Si $f''(x) > 0$ en ese punto la función es cóncava hacia arriba

Si $f''(x) < 0$ en ese punto la función es cóncava hacia abajo

1. Ejercicio

Estudiar la curvatura de la siguiente función

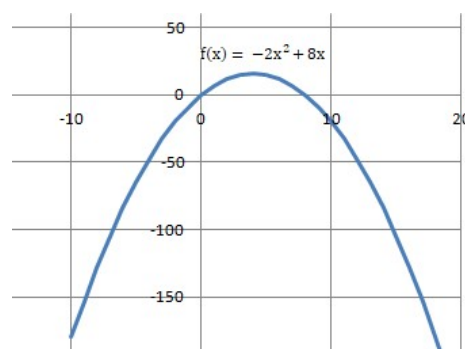
$$f(x) = -2x^2 + 8x;$$

Solución

$$f(x) = -2x^2 + 8x;$$

$$f'(x) = -4x + 8;$$

$f''(x) = -4$ dado que es menor que 0 la función es cóncava en todo el dominio



2. Ejercicio

Estudiar la curvatura de la siguiente función

$$f(x) = 3x^3;$$

Solución

$$f(x) = 3x^3$$

$$f'(x) = 9x^2$$

$$f''(x) = 18x$$

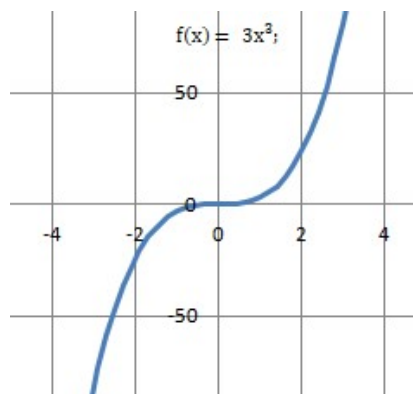
Igualemos a 0 y nos da los puntos de inflexión

$$18x = 0; x = 0;$$

$$\text{para } x < 0 \quad x = -1 \Rightarrow f''(x) = -18;$$

$$\text{para } x > 0 \quad x = 1 \Rightarrow f''(x) = 18;$$

función concava hacia abajo $(-\infty, 0)$ y concava hacia arriba $(0, +\infty)$



3. Ejercicio

Estudiar la curvatura de la siguiente función

$$f''(x) = (x+1)(x-3)^2(x-7)$$

Solución

Los puntos de inflexión son $x = -1, x = 3; y x = 7;$

$$\text{para } x < -1 \quad x = -2 \Rightarrow f''(x) = 225; \text{ concava hacia arriba}$$

$$\text{para } -1 < x < 3 \quad x = 2 \Rightarrow f''(x) = -63; \text{ concava hacia abajo}$$

$$\text{para } 3 < x < 7 \quad x = 5 \Rightarrow f''(x) = -15; \text{ concava hacia abajo}$$

$$\text{para } x > 7 \quad x = 8 \Rightarrow f''(x) = 225; \text{ concava hacia arriba}$$

x	f''(x)
-1	0
3	0
7	0
-2	225
0	-63
4	-15
8	225

$-\infty$	-2	-1	0	3	4	7	8	$+\infty$
+		-		-		-		+

concava hacia arriba $(-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$

concava hacia abajo $(-1, 3) \cup (3, 7)$

2 Simetrías

Simetría respecto al eje Y o simetría par

Una función es simétrica respecto al eje y si para todo el dominio se cumple que

$$\text{Simetría par } f(-x) = f(x);$$

Simetría respecto al origen o simetría impar

Una función es simétrica respecto al origen si para todo el dominio se cumple que

$$\text{Simetría impar } f(-x) = -f(x);$$

3 Estudio de una función

Tomaremos como ejemplo la función $f(x) = y = x^3 - 3x + 2$;

Dominio de la función: es el conjunto de los números reales para los cuales la función está definida

$f(x) = y = x^3 - 3x + 2$ la función está definida para todos los valores de $\mathbb{R}$

Puntos de corte de la función al eje de abscisas

Descompongo la función por Ruffini para hallar las raíces $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 1)(x + 2)$

Las raíces de la función: puntos en que la función corta al eje de abscisas

Para hallar los puntos de corte igualo la función a 0; $(x - 1)(x - 1)(x + 2) = 0$

Los puntos de corte son las raíces del polinomio $x = -2$ y $x = 1$ (raíz doble)

Cálculo de los puntos críticos, máximos y mínimos

Los máximos y mínimos de la función estarán donde la pendiente de la función o lo que es lo mismo la derivada primera de la función es 0 es decir la tangente a la curva es horizontal

$$f(x) = x^3 - 3x + 2; f'(x) = 3x^2 - 3;$$

$$\text{Hallamos la primera derivada } f'(x) = m = 3x^2 - 3 = 0; x = \sqrt{1}; x = 1, x = -1$$

puntos máximos o mínimos

Hallamos los puntos:

$$\text{Para } x = 1, y = (1)^3 - 3 \cdot (1) + 2; y = 1 - 3 + 2 = 0; y = 0 \Rightarrow (1, 0) \text{ Mínimo}$$

$$\text{Para } x = -1, y = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2; y = -1 + 3 + 2 = 4 \Rightarrow (-1, 4) \text{ Máximo}$$

Para saber si estos puntos son máximos o mínimos hallamos la segunda derivada

$$f''(x) = 6x \text{ y estudiamos su valor en esos puntos}$$

$$\text{para } x = 1 \Rightarrow f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 \text{ positiva (cóncava hacia arriba)} \Rightarrow \text{es un mínimo}$$

$$\text{para } x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 \text{ negativo (cóncava hacia abajo)} \Rightarrow \text{es un máximo}$$

Cálculo de los puntos de inflexión

Son los puntos en que la función pasa de cóncava a convexa o viceversa es decir $f''(x) = 0$;

$$f(x) = x^3 - 3x + 2; f''(x) = 6x; 6x = 0 \text{ punto de inflexión } x = 0; f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2, y = 2$$

El punto de inflexión está en $(0, 2)$

Cálculo de los intervalos donde la función es creciente o decreciente

Estudiamos la derivada de la función alrededor de los puntos críticos (máximos y mínimos)

$-\infty$	-3	-1	0	1	4	$+\infty$
$f'(x) > 0$		$f'(x) < 0$		$f'(x) > 0$		

Entre $-\infty$ y -1 la derivada de la función $f'(x) = 3x^2 - 3$ es positiva la función crece

Tomo un valor intermedio ej $x = -3$; $f'(-3) = 3(-3)^2 - 3 = +27 - 3 = +24$; creciente $(-\infty, -1)$

Entre -1 y 1 la derivada de la función $f'(x) = 3x^2 - 3$ es negativa la función decrece

Tomo un valor intermedio ej $x = 0$; $f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3$; decreciente $(-1, 1)$

Entre 1 y $+\infty$ la derivada de la función $f'(x) = 3x^2 - 3$ es positiva la función crece

Tomo un valor intermedio ej $x = 4$; $f'(4) = 3(4)^2 - 3 = +48 - 3 = +45$; creciente $(1, +\infty)$

La función crece $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; La función decrece $(-1, 1)$

Cálculo de los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o abajo

Estudiamos la segunda derivada de la función alrededor de los puntos de inflexión

En nuestro caso el punto de inflexión (0,2)

$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$
$f''(x) > 0$		$f''(x) < 0$		

Tomo un valor intermedio ej $x = -4$; $f''(x) = 6x$; $\Rightarrow f''(-4) = 6 * (-4) = -24$;

$f''(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ la función es cóncava hacia abajo

Tomo un valor intermedio ej $x = 4$; $f''(x) = 6x$; $\Rightarrow f''(4) = 6 * (4) = 24$;

$f''(x) > 0$ en el intervalo $(0, +\infty)$ la función es cóncava hacia arriba

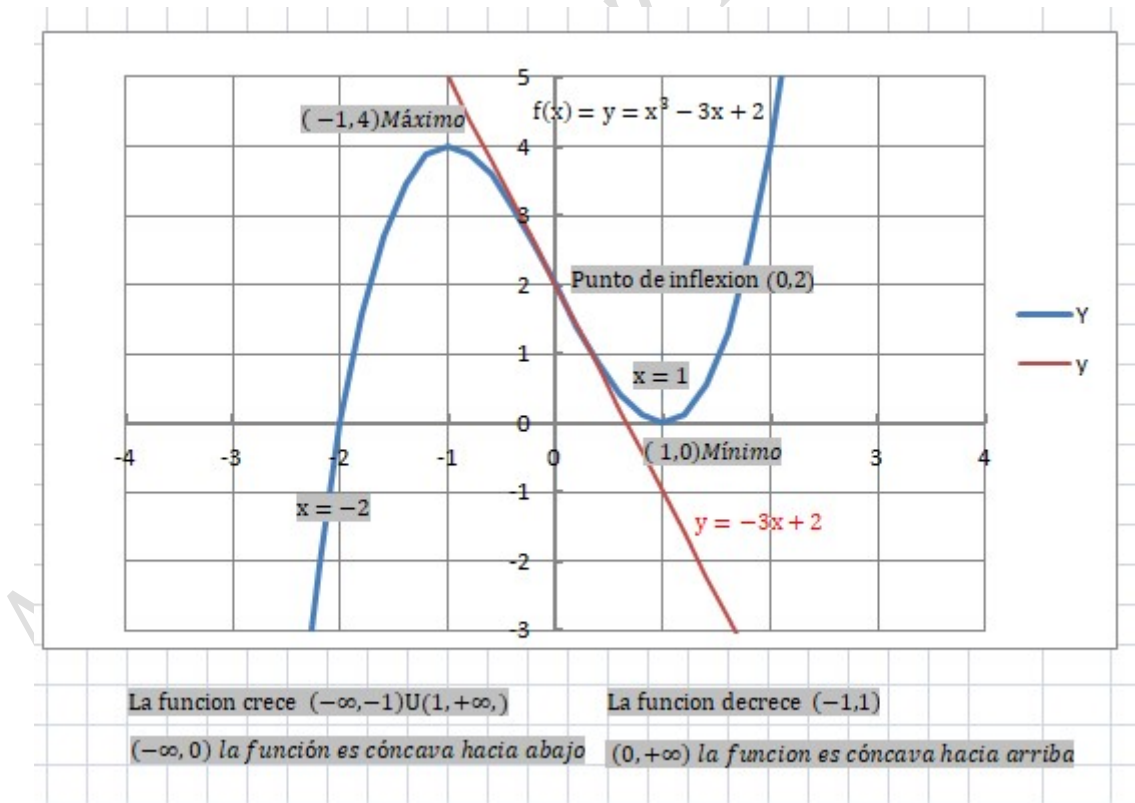
Cálculo de la tangente en el punto de inflexión

La tangente tendrá la forma $y = mx + n$; en el punto de inflexión (0,2)

sabemos $f'(x) = m = 3x^2 - 3$ en el punto (0,2) $\Rightarrow m = 3(0)^2 - 3 = -3$; $m = -3$

$y = mx + n$; en el punto de inflexión (0,2) con pendiente $m = -3$; $2 = -3(0) + n$; $n = 2$;

La tangente en el punto de inflexión $y = -3x + 2$;



4. Ejercicio

Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ en su punto de inflexión de abscisa positiva

Solución

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; \text{ para } x = 0 \text{ la función es } 0;$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - (2x \cdot x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1) - (2x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}; \quad f'(x) = m = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x((x^2 + 1)^2) - 2(x^2 + 1)(2x)(-x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2x((x^2 + 1)^2) - 2(x^2 + 1)(2x)(-x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$\frac{-2x((x^2 + 1)^2) - 2(x^2 + 1)(2x)(-x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = 0; -2x((x^2 + 1)^2) - 2(x^2 + 1)(2x)(-x^2 + 1) = 0;$$

$$-2x((x^2 + 1)^2) = 2(x^2 + 1)(2x)(-x^2 + 1); -(x^2 + 1) = 2(-x^2 + 1); -x^2 - 1 = -2x^2 + 2;$$

$$x^2 = 3; x = \pm\sqrt{3}; \text{ tomamos abscisa positiva } x = \sqrt{3}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; \text{ para } x = \sqrt{3}; y = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{4};$$

Punto de inflexión abscisa positiva $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

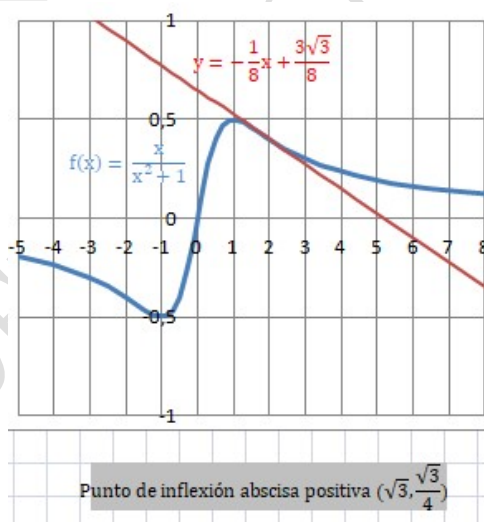
$$\text{para } x = \sqrt{3} \text{ la pendiente } m \text{ será } f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2};$$

$$m = \frac{-\sqrt{3}^2 + 1}{((\sqrt{3})^2 + 1)^2} = \frac{-3 + 1}{16}; m = \frac{-2}{16};$$

$$\text{la tangente será } y = mx + n; \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{-2}{16}\right) \cdot \sqrt{3} + n;$$

$$n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{16} = \frac{4\sqrt{3}}{16} + \frac{2\sqrt{3}}{16} = \frac{6\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$y = -\frac{2}{16}x + \frac{3\sqrt{3}}{8}; y = -\frac{1}{8}x + \frac{3\sqrt{3}}{8}$$



5. Ejercicio

Hallar los valores de las constantes a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tengan un mínimo en $(-2, -3)$, un máximo en $x = 1$ y $f(0) = -1$

Solución

$$\text{Para que } f(0) = a0^3 + b0^2 + c0 + d = -1 \Rightarrow d = -1;$$

$$\text{Si hay un mínimo en } (-2, -3) \text{ se cumplirá } -3 = f(-2) \Rightarrow -3 = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) - 1$$

$$-3 = -8a + 4b - 2c - 1; 8a - 4b + 2c = 2$$

Para que haya un máximo o un mínimo la derivada de la función ha de ser 0 en ese punto;

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0;$$

$$\text{Para } x = -2; f'(-2) = 3a(-2)^2 + 2b(-2) + c = 0; 12a - 4b + c = 0$$

$$\text{Para } x = 1; f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 0; 3a + 2b + c = 0$$

Resuelvo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 8a - 4b + 2c = 2 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a - 4b + 2c = 2 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a - 4b + 2c = 2 \\ 2a - 3c = 2 \\ 3a - 8b + 0 = 2 \end{cases}$$

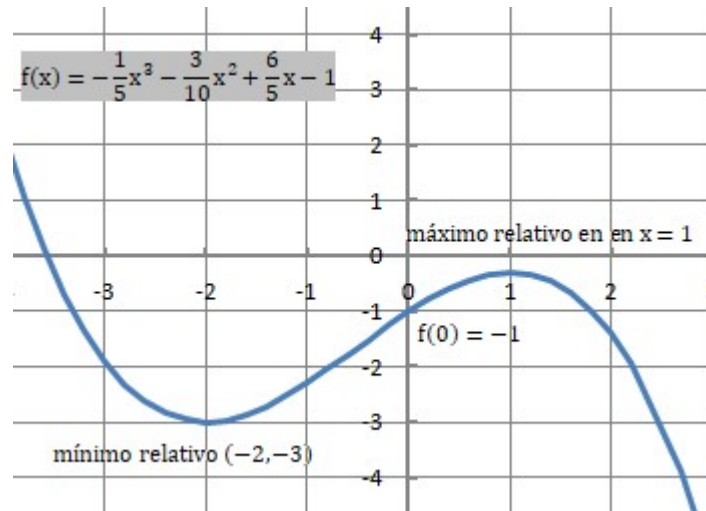
$$-30a + 0 + 0 = 6; a = -\frac{1}{5}; \text{ sustituyo en la } 3^a \text{ } 2a - 8b + 0 = 2; -\frac{2}{5} - 8b = 2; b = -\frac{12}{40}; b = -\frac{3}{10};$$

Sustituyo en la 1ª $8a - 4b + 2c = 2$; $-\frac{1}{5} * 8 - 4 * \left(-\frac{3}{10}\right) + 2c = 2$; $\frac{8}{5} - \frac{12}{10} + 2 = 2c$;

$$c = \frac{6}{5}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; f(x) = -\frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{6}{5}x - 1$$

mínimo relativo $(-2, -3)$, un máximo relativo en $x = 1$ y $f(0) = -1$



6. Ejercicio

Hallar los valores de las constantes a, b, c que hacen que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, tengan un máximo o un mínimo en $(3, 12)$ y pase por $(-1, 20)$

Solución

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ pasa por $(-1, 20)$ se cumplirá $20 = a(-1)^2 + b(-1) + c$; $20 = a - b + c$;

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ pasa por $(3, 12)$ se cumplirá $12 = a(3)^2 + b(3) + c$; $12 = 9a + 3b + c$;

Para que haya un máximo la derivada de la función ha de ser 0 en ese punto $x = 3$;

$$f'(x) = 2ax + b = 0; f'(x) = 2a * 3 + b = 0; 6a + b = 0; a = -\frac{b}{6}$$

$$\text{sustituyo en } \begin{cases} 20 = a - b + c \\ 12 = 9a + 3b + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 = -\frac{b}{6} - b + c; & 20 = -\frac{7}{6}b + c \\ 12 = 9\left(-\frac{b}{6}\right) + 3b + c; & 12 = \frac{9}{6}b + c \end{cases}$$

$$\text{restamos } 8 = -\frac{16}{6}b + 0;$$

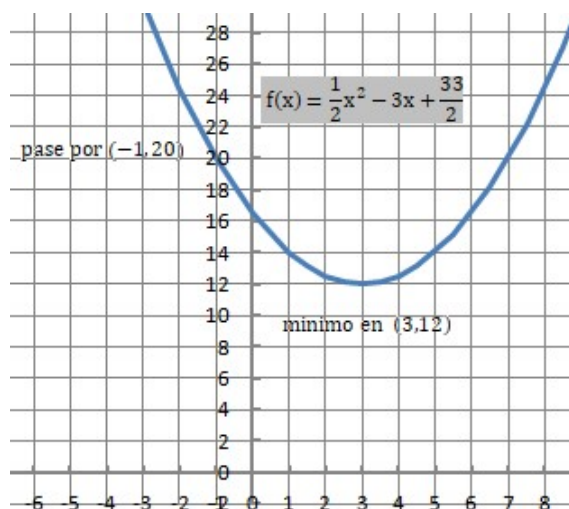
$$b = -\frac{48}{16} = -3; b = -3;$$

$$a = -\frac{b}{6}; a = -\left(-\frac{3}{6}\right); a = \frac{1}{2}$$

Sustituyo en una de las ecuaciones

$$20 = a - b + c; 20 = \frac{1}{2} - (-3) + c; c = \frac{33}{2}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c; f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{33}{2}$$



7. Ejercicio

Hallar las dimensiones de un rectángulo que podamos construir con un hilo de 25cm, de forma que su área sea máxima

Solución

$$2a + 2b = 25; a = \frac{25 - 2b}{2}$$

$A = \text{Área} = a * b$; sustituyo a

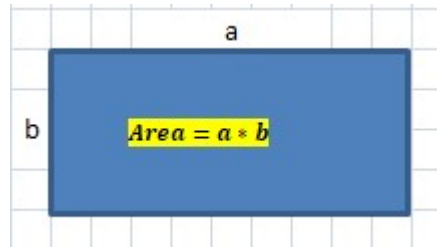
$$A = \left(\frac{25 - 2b}{2}\right) * b = \frac{25}{2}b - \frac{2}{2}b^2$$

Para que sea un máximo $A'(b) = 0$;

$$A'(b) = -2b + \frac{25}{2} = 0; 2b = \frac{25}{2}; b = \frac{25}{4};$$

$$\text{sustituyo para hallar } a \Rightarrow a = \frac{25 - \frac{2 * 25}{4}}{2} = \frac{25 - \frac{25}{2}}{2} = \frac{50 - 25}{2} = \frac{25}{4}$$

lados del rectángulo $a = \frac{25}{4}$; $b = \frac{25}{4}$; será un cuadrado



8. Ejercicio

Hallar las dimensiones de una caja de base cuadrada sin tapa que tienen un área total de 192 cm² para que su volumen sea máximo.

Solución

$$\text{Volumen} = a^2 * b = a^2 * b$$

Área total = área de la base + áreas laterales

$$\text{área total} = a * a + 4(a * b) = 192 \text{ cm}^2;$$

$$192 = a^2 + 4ab; 192 - a^2 = 4ab; b = \frac{192 - a^2}{4a}$$

$$b = \frac{192 - a^2}{4a}; \text{by } a \text{ son } > 0 \text{ y } b \text{ depende de } a \text{ en esa proporción}$$

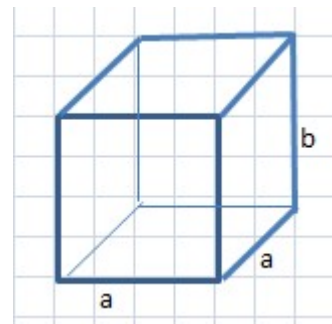
Sustituyo en el volumen b por su valor;

$$V = a^2 * b = a^2 * \frac{192 - a^2}{4a} = \frac{192a - a^3}{4} \text{ para que sea máxima ha de cumplirse}$$

$$V'(a) = \frac{(192 - 3a^2)4}{16} = \frac{(192 - 3a^2)}{4} = 0; 192 - 3a^2 = 0; a = \sqrt{\frac{192}{3}} \quad a = 8;$$

$$b = \frac{192 - a^2}{4a}; \text{sustituyo } b = \frac{192 - 8^2}{4 * 8} = \frac{192 - 64}{32} = 4; \quad b = 4$$

$$V = a^2 * b = 64 * 4 = 256 \text{ cm}^3$$



9. Ejercicio

De todas las rectas que pasan por (1,4) determinar la que forma con los ejes de coordenadas un triángulo mínimo

Solución

$$y = mx + n; \text{ si ha de pasar por } 1,4 \Rightarrow 4 = m + n; n = 4 - m;$$

la ecuación de la recta será $y = mx + (4 - m)$

El punto A es la intersección de las rectas $\begin{cases} y = mx + (4 - m) \\ x = 0; \end{cases} y = 4 - m; A(0, 4 - m)$

El punto BA es la interseccion de las recta $\begin{cases} y = mx + (4 - m) \\ y = 0; \end{cases} \Rightarrow 0 = mx + (4 - m); x = \frac{m - 4}{m}$

$$B\left(\frac{m - 4}{m}, 0\right)$$

$$A = \text{Area del triangulo} = \frac{OB * OA}{2} = \frac{\frac{m - 4}{m} * (4 - m)}{2} = \frac{-m^2 + 8m - 16}{2m}$$

$$\text{para que sea un minimo } V' = \frac{(-2m + 8)2m - 2(-m^2 + 8m - 16)}{(2m)^2} =$$

$$= \frac{-4m^2 + 16m + 2m^2 - 16m + 32}{(2m)^2} = \frac{-2m^2 + 32}{(2m)^2} = 0; -2m^2 + 32 = 0; m = \pm 4;$$

$$V' = \frac{-2m^2 + 32}{(2m)^2} \text{ Para ver si es un minimo } V'' = 0 \text{ para } m \neq 4$$

$m = +4; A(0, 4 - m) = A(0, 4 - 4) = A(0, 0)$ no valdría pues sería el origen.

$m = -4; A(0, 4 - m) = A(0, 4 - (-4)) = A(0, 8);$

$$B(m = -4; B\left(\frac{m - 4}{m}, 0\right); B\left(\frac{-8}{-4}, 0\right); B = (2, 0)$$

Puntos de corte $A(0, 8); B = (2, 0)$

$$V' = \frac{-2m^2 + 32}{(2m)^2} \text{ Para ver si es un minimo } V'' = 0 \text{ para } m \neq 4$$

$$V'' = \frac{-4m * 4m^2 - ((-2m^2 + 32) * 4m)}{(2m)^4} =$$

$$\frac{-16m^3 - (-8m^3 + 128m)}{(2m)^4}$$

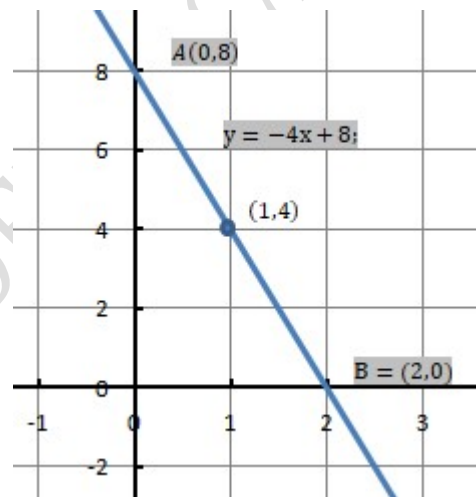
$$= \frac{-16m^3 + 8m^3 - 128m}{(2m)^4}$$

$$V'' = \frac{-8m^3 - 128m}{(2m)^4};$$

$$\text{Para } m = -4; V'' = \frac{-8(-4)^3 - 128(-4)}{(2(-4))^4} = \frac{512 + 512}{4096} > 0; \text{ minimo;}$$

La ecuacion de la recta será $y = mx + (4 - m)$; para $m = -4; y = (-4)x + (4 - (-4))$

$$y = -4x + 8;$$



10. Ejercicio

Hallar dos numeros naturales que sumen 9 y que la suma del cuadrado de uno mas 6 veces el otro sea minimo

Solución

Un número sería a el otro b ;

$$\begin{cases} a + b = 9; & b = 9 - a \\ s = a^2 + 6b; \end{cases}$$

$$s = a^2 + 6b; s = a^2 + 6(9 - a) = a^2 + 54 - 6a;$$

Para que sea mínimo o máximo $s' = 0; s' = 2a - 6 = 0; a = 3; b = 9 - a; b = 6;$

$$s' = 2a - 6; s'' = 2;$$

Para que sea mínimo $s'' > 0; Se cumple$

11. Ejercicio

Queremos delimitar una parcela rectangular de 700 m^2 . La valla que da a la calle vale a $40 \frac{\text{Euros}}{\text{m}}$.

La valla de los otros dos lados cuesta a $16 \frac{\text{euros}}{\text{m}}$. Calcular las dimensiones de la parcela para que la valla sea lo mas barato posible.

Solución

$$a \cdot b = 700;$$

$$\text{Precio} = P = a \cdot 40 \frac{\text{€}}{\text{m}} + b \cdot 16 \frac{\text{€}}{\text{m}} + 2b \cdot 16 \frac{\text{€}}{\text{m}}; P = 40a + 16a + 2b \cdot 16 = 56a + 32b$$

$$\begin{cases} a \cdot b = 700, a = \frac{700}{b}; \\ P = 56a + 32b; \end{cases} \text{ Sustituyo en la segunda } P = 56 \cdot \frac{700}{b} + 32b; P = \frac{39200}{b} + 32b;$$

$$P = \frac{39200 + 32b^2}{b};$$

$$\text{Para que el precio sea minimo } P' = 0; P' = \frac{64b \cdot b - (39200 + 32b^2)}{b^2} = \frac{64b^2 - 39200 - 32b^2}{b^2} = 0;$$

$$P' = \frac{32b^2 - 39200}{b^2} = 0;$$

$$64b^2 - 39200 - 32b^2 = 0; 32b^2 - 39200 = 0; b^2 = \frac{39200}{32} = 1225; b = \pm 35;$$

$$b = 35; a = \frac{700}{35} = 20;$$

$$\text{Para ver si es minimo } P'' > 0; P'' = \frac{64b \cdot b^2 - 2b(32b^2 - 39200)}{b^4} = \frac{64b^3 - 64b^3 + 2b \cdot 39200}{b^4}$$

$$P'' = \frac{78400b}{b^4}; \text{ para } b = 35; P'' > 0; \text{valor mínimo}$$

12. Ejercicio

Calcular los puntos de corte con los ejes de la tangente a la curva

$$y = \frac{1}{x-1} \text{ en el punto } (2,1)$$

Solución

$$y' = \frac{-1}{(x-1)^2} = m;$$

La tangente en el puto (2,1) será

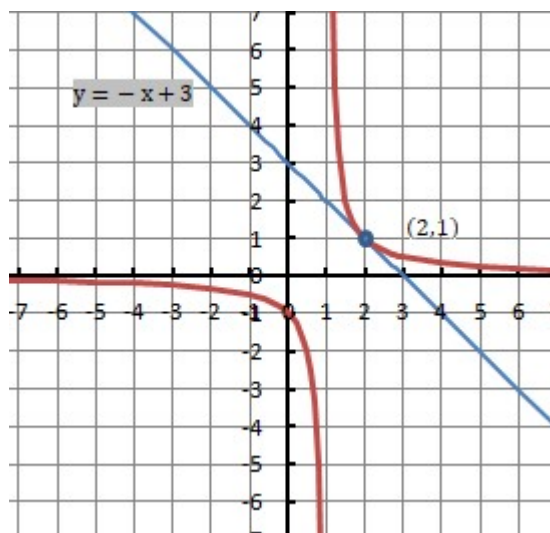
$$m = \frac{-1}{(2-1)^2}; m = -1;$$

La tangente será $y = mx + n$,

tienen pendiente $m = -1$

y ha de pasar por (2,1),

$$1 = -1 \cdot 2 + n; n = 3; \text{ La tangente será } y = -x + 3;$$



13. Ejercicio

Hallar la función definida en el intervalo (0,2) de forma que pase por el punto (1,3) y cumpla

$$f'(x) = 1 \text{ si } 0 < x \leq 1 \text{ y } f'(x) = 2 \text{ si } 1 < x < 2 ;$$

Solución

$$\text{función definida a trozos } \begin{cases} f'(x) = 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ f'(x) = 2 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x + c; & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ f(x) = 2x + d; & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Si pasa por el punto (1,3) se cumplirá $f(x) = x + c$; si $0 < x \leq 1$; $3 = 1 + c$; $c = 2$;

La función será $\begin{cases} f(x) = x + 2; & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ f(x) = 2x + d; & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$ donde d puede tomar cualquier valor

14. Ejercicio

Hallar los puntos en que la curva tiene la misma tangente $y = x^4 - 2x^2 - x$;

Solución

$$y = x^4 - 2x^2 - x; y = x(x^3 - 2x - 1); y'(x) = 4x^3 - 4x - 1; \text{ La tangente es igual en } x = 1 \text{ y } x = -1$$

$$\begin{cases} \text{para } x = 1; f'(x) = 4 * 1^3 - 4 * 1 - 1 = 1; \\ \text{para } x = -1; f'(x) = 4 * (-1)^3 - 4 * (-1) - 1 = 1 \end{cases}$$

15. Ejercicio

En dos pasillos perpendiculares uno de 2m de ancho y otro de 4m de ancho. Hallar la longitud máxima que puede tener un muble para poder pasarlo de forma horizontal

Solución

Aplicando teorema de tales

$$\frac{2}{y} = \frac{x}{4}; y = \frac{8}{x}$$

Aplicando teorema de pitágoras

$$\text{Longitud del listón } l^2 = (y + 2)^2 + (x + 4)^2$$

$$\text{Longitud del listón } l^2 = \left(\frac{8}{x} + 2\right)^2 + (x + 4)^2$$

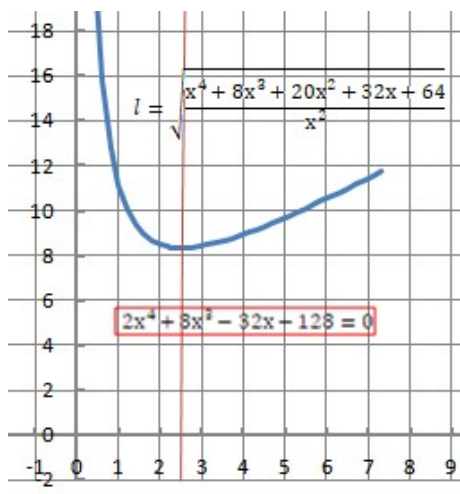
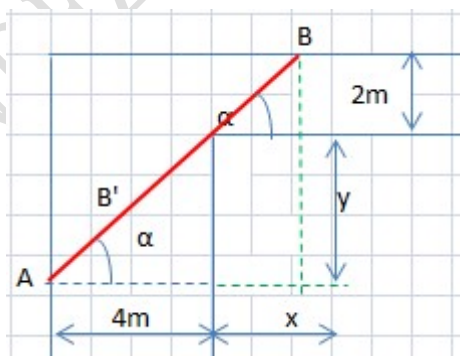
$$l = \sqrt{\left(\frac{8}{x} + 2\right)^2 + (x + 4)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{64}{x^2} + 4 + \frac{32}{x} + x^2 + 16 + 8x} =$$

$$l = \sqrt{\frac{64}{x^2} + \frac{32}{x} + x^2 + 8x + 20} =$$

$$\sqrt{\frac{64 + 32x + x^4 + 8x^3 + 20x^2}{x^2}};$$

$$l = \sqrt{\frac{x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 32x + 64}{x^2}}$$



$$l' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 32x + 64}{x^2}}} * \frac{(4x^3 + 24x^2 + 40x + 32)x^2 - 2x(x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 32x + 64)}{x^4}$$

$$l' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 32x + 64}{x^2}}} * \frac{4x^5 + 24x^4 + 40x^3 + 32x^2 - 2x^5 - 16x^4 - 40x^3 - 64x^2 - 128x}{x^4}$$

$$l' = \frac{2x^5 + 8x^4 - 32x^2 - 128x}{2 * x^4 \sqrt{\frac{x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 32x + 64}{x^2}}} = 0; \text{ para que sea un minimo}$$

$$2x^5 + 8x^4 - 32x^2 - 128x = 0; x(2x^4 + 8x^3 - 32x - 128) = 0;$$

$$x = 0 \text{ no vale y } 2x^4 + 8x^3 - 32x - 128 = 0;$$

$$x = 2,51; \text{ Longitud del mueble } 8,323 \text{ m}$$

4 Propiedades de las funciones

4.1 Puntos de corte con los ejes y signo de la función

Punto de corte de la función $y=f(x)$ con el eje X se calcula haciendo $f(x)=0$;

Punto de corte de la función $y=f(x)$ con el eje Y se calculando la función para $x=0$;

El signo de la función nos indica los valores de x en que la función es positiva o negativa

$$f(x)>0;$$

16. Ejercicio

Determinar los puntos de corte y signo de la función $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x+1}$

Solución

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x+1} = 0;$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

Puntos de corte con el eje X son:

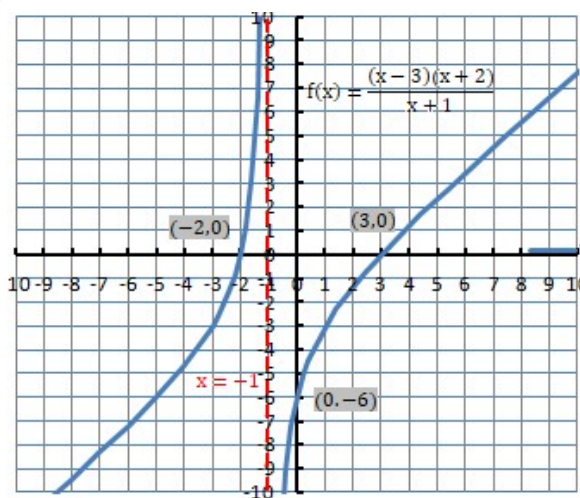
en (3,0) y (-2,0)

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x+1};$$

$$y = \frac{(0-3)(0+2)}{0+1} = \frac{(-3)(+2)}{1} = -6;$$

Puntos de corte con el eje Y es en (0,-6)

La función es indeterminada en $x = -1$;



-∞ -2 -1 3 +∞

$(x+2)$	-	+	+	+
$(x+1)$	-	-	+	+
$(x-3)$	-	-	-	+
$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x+1}$	-	+	-	+

4.2 Simetrías

Una función es simétrica respecto al eje Y si se cumple $f(x) = f(-x)$. Simetría Par

Una función es simétrica respecto al origen de coordenadas si se cumple $f(-x) = -f(x)$; Simetría Impar

17. Ejercicio

Determinar los puntos de corte y signo y simetría de

$$\text{la función } f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

Solución

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} = 0; \text{ Punto de corte eje X } (0,0)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}; y = \frac{0^2}{0^2 - 4} = 0; \text{ Punto de corte eje Y } (0,0)$$

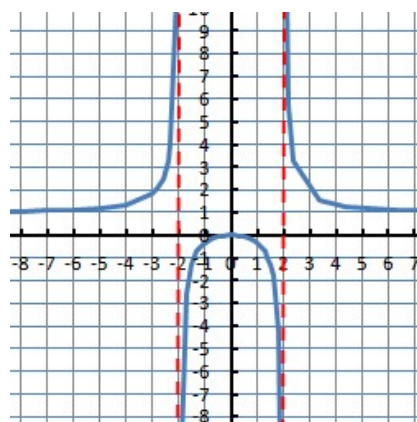
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)}$$

= La función es indeterminada en x

= -2 y x = 2;

-∞ -2 -0 2 +∞

$(x+2)$	-	+	+	+
$(x-2)$	-	-	-	+
$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$	+	-	+	+



$$f(x) = f(-x); f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}; f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} \text{ se cumple simetría par}$$

5 Funciones polinómicas

18. Ejercicio

Estudiar la siguiente función $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$

Solución

$$f(x) = (x^2 - 4)(x + 1) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

a) Dominio

El dominio de la función es R

b) Puntos de corte y signo

$$f(x) = (x^2 - 4)(x + 1) = (x + 2)(x - 2)(x + 1)$$

$$f(x) = (x + 2)(x - 2)(x + 1) = 0;$$

Punto de corte eje X; $x = -2; x = 2; x = -1$

$(-2,0); (2,0); (-1,0)$

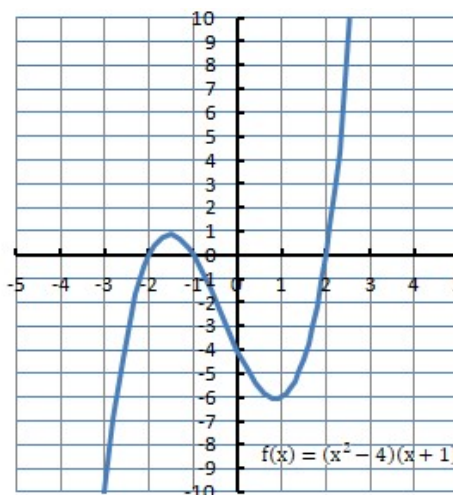
Punto de corte eje Y; para $x = 0$;

$$y = (0 + 2)(0 - 2)(0 + 1)$$

$$y = 2 * (-2)(1) = -4; (0, -4)$$

Signo:

Para $-\infty < x < -2$ $f(x) < 0$;



para $-2 < x < -1$ $f(x) > 0$;

para $-1 < x < 0$ $f(x) < 0$;

para $0 < x < 2$ $f(x) < 0$;

para $2 < x < \infty$ $f(x) > 0$;

c) *Simetrías*

No hay simetrías

d) *Limites en el infinito*

$$f(x) = (x^2 - 4)(x + 1); \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty;$$

e) *Máximos, mínimos y puntos de inflexión*

$$f(x) = (x^2 - 4)(x + 1) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4; \text{ para hallar máximos y mínimos } = 0$$

$$3x^2 + 2x - 4 = 0; x = \frac{-2 + \sqrt{52}}{6} = 0,8686; x = \frac{-2 - \sqrt{52}}{6} = -1,5352$$

Estudiamos si es máximo o mínimo $f''(x) = 6x + 2$

$$\text{Para } x = \frac{-2 + \sqrt{52}}{6} = 0,8686; f''(x) = 6x + 2 \text{ es mayor que } 0 \text{ mínimo}$$

$$\text{Para } x = \frac{-2 - \sqrt{52}}{6} = -1,5352; f''(x) = 6x + 2 \text{ es menor que } 0 \text{ máximo}$$

f) *Puntos de inflexión*

Si hay solo un máximo y un mínimo habrá solo un punto de inflexión

$$f''(x) = 6x + 2 = 0; x = -\frac{2}{6} = -0,333; y = x^3 + x^2 - 4x - 4;$$

$$y = \left(-\frac{2}{6}\right)^3 + \left(-\frac{2}{6}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{6}\right) - 4 = -\frac{560}{216} = -2,593;$$

$$\text{Punto de inflexión } \left(-\frac{2}{6}, -\frac{560}{216}\right)$$

19. Ejercicio

Escribe una función polinómica de 3º grado que tenga un máximo y un mínimo relativo

Solución

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

La función tendrá tres puntos de corte con el eje X.

Para que tenga máximos y mínimos relativos calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ si igualo a } 0; 3ax^2 + 2bx + c = 0;$$

Para que haya un máximo y un mínimo relativo la solución de esta ecuación tendría que tener dos raíces reales distintas;

Por ejemplo

$$f'(x) = (x - 2)(x - 1) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x +;$$

6 Funciones racionales

Las funciones racionales son del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

20. Ejercicio

Estudiar la siguiente función $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$

Solución

a) *Dominio y continuidad*

Dado que la función no está definida en $x=1$; La función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

b) *Corte con los ejes y signo*

Corte con el eje X; $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = 0$; $x^2 - 3x = 0$; $x(x - 3) = 0$; solución $x = 0$ y $x = 3$;

los puntos de corte con el eje X son $(0,0)$ y $(3,0)$;

Corte con el eje Y; $x = 0$; ; $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$; $f(0) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0}{0 - 1}$

El punto de corte con el eje Y es $(0,0)$;

Signo: Tomamos los puntos de corte e indeterminación ($x = 0$; $x = 1$; $x = 3$)

Para $-\infty < x < 0$ ej $x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{(-1)^2 - 3(-1)}{(-1) - 1} = \frac{1 + 3}{-2} < 0$, $f(x) < 0$;

para $0 < x < 1$ ej $x = 0,5 \Rightarrow f(0,5) = \frac{(0,5)^2 - 3(0,5)}{(0,5) - 1} = \frac{0,25 - 1,5}{-0,5} > 0$; $f(x) > 0$;

para $1 < x < 3$ ej $x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{(2)^2 - 3(2)}{(2) - 1} = \frac{4 - 6}{1} < 0$; $f(x) < 0$;

para $3 < x < \infty$ ej $x = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{(4)^2 - 3(4)}{(4) - 1} = \frac{16 - 12}{-2} > 0$, $f(x) > 0$

c) *Simetrías*

$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1} \neq f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3(-x)}{(-x) - 1} = \frac{x^2 + 3x}{-x - 1}$ No simetría par

$f(-x) \neq -f(x)$; $\frac{x^2 + 3x}{-x - 1} \neq -\frac{x^2 - 3x}{x - 1} = \frac{-x^2 + 3x}{-x + 1}$; No simetría impar

d) *Asíntotas*

Asíntota vertical la función se hace indeterminada para valor de $x = 1$; $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = \infty$; esto implica que tiene asíntota vertical

Calculamos las ramas de la función por la derecha y la izquierda.

Calculo límites laterales

$\lim_{x \rightarrow 0,9} \frac{(0,9)^2 - (3 \cdot 0,9)}{0,9 - 1} = \frac{+0,81 - 2,7}{-0,1} = \frac{-1,89}{-0,1} = +$ (por la izquierda tiende a $+\infty$)

$\lim_{x \rightarrow 1,1} \frac{(1,1)^2 - (3 \cdot 1,1)}{1,1 - 1} = \frac{+1,21 - 3,3}{+0,1} = \frac{-2,09}{+0,1} = -$ (Por la derecha tiende a $-\infty$)

Asíntotas horizontales, oblicuas o ramas parabólicas (Las funciones solo tienen una de estas asíntotas)

Asintota horizontal. Si grado de $P(x) \leq$ grado de $Q(x)$ hay asintota Horizontal

Asintota oblicua $P(x) =$ grado de $Q(x) + 1$ hay asintota Oblicua

Como se cumple esto solo habrá asintota Oblicua

Para calcular la asintota oblicua $y = mx + n$;

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2x}{x^2 - x}\right) = 1; m = 1;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx); \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x - 1} = -2;$$

Asintota oblicua $y = x - 2$;

Otra forma

Si divido numerador por el denominador

$$\frac{x^2 - 3x}{x - 1} = (x - 2) - \frac{2}{x - 1}, \text{ el cociente de la division es la asintota oblicua } y = x - 2$$

Calculamos las ramas de la función respecto a la asintota oblicua

Calculo para $x = 100$

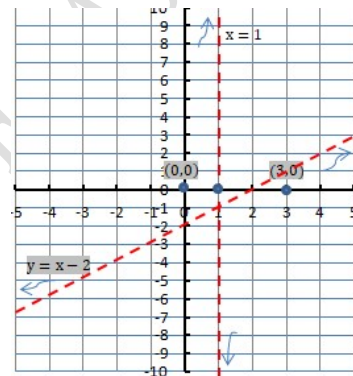
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}; f(100) = \frac{100^2 - 3(100)}{100 - 1} = 97,97 \\ y = x - 2; y = 100 - 2 = 98; \end{cases}$$

es mayor la asintota

Calculo para $x = -100$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}; f(-100) = \frac{(-100)^2 - 3(-100)}{-100 - 1} = -101,98 \\ y = x - 2; y = -100 - 2 = -102; \end{cases}$$

es mayor la función



e) *Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos*

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}; f'(x) = \frac{(2x - 3)(x - 1) - 1(x^2 - 3x)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2};$$

igualamos a 0 para ver maximos y minimos

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2} = 0; x^2 - 2x + 3 = 0$$

esta ecuacion no tienen solucion en los numeros reales.

No hay maximos ni minimos

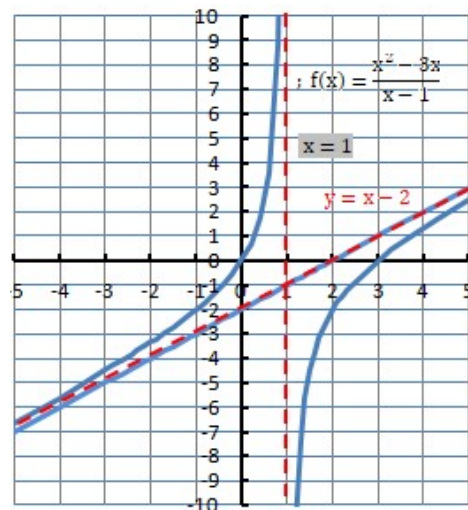
.Creciente en todo el dominio.

f) *Curvatura y puntos de inflexión*

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1};$$

$$f''(x) = \frac{(2x - 2)(x - 1)^2 - (2(x - 1) * 1)(x^2 - 3x)}{(x - 1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 6x - 2 - 2x^3 + 8x^2 - 6x}{(x - 1)^3} = \frac{10x^2 - 2}{(x - 1)^3};$$



Para $x < -2$; $f''(x) < 0$; concava hacia arriba

Para $x > 4$; $f''(x) > 0$; concava hacia abajo

Como nunca se anula no hay puntos de inflexión

Damos valores a la ecuación y calculamos puntos intermedios de la función

21. Ejercicio

Hallar y representar la función que cumple las siguientes características:

Sus asíntotas son $x = -2$, $x = 4$, $y = -2$;

Su derivada no se anula nunca y sea negativa en todos los puntos del dominio

Solución

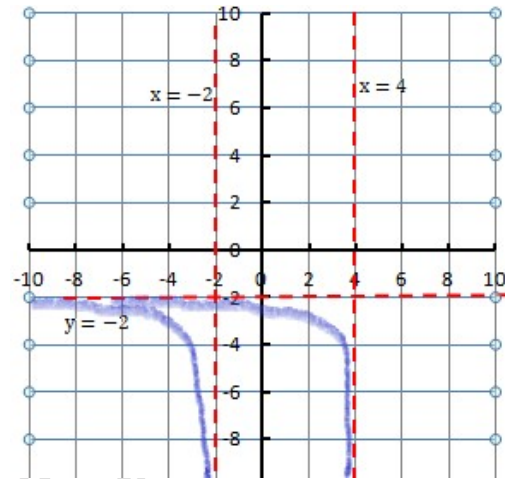
La función será $f(x) = \frac{p(x)}{Q(x)}$

• *Asíntotas*

Verticales $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$;

La función sería $f(x) = \frac{p(x)}{(x+2)(x-4)}$;

$f(x) = \frac{P(x)}{x^2 - 2x - 8}$;



7 Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales son del tipo $f(x) = a^x$ donde a es un número positivo distinto de 1

22. Ejercicio

Estudiar la siguiente función $f(x) = e^x - 1$;

Solución

a) *Dominio y continuidad*

El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y es continua en todo el dominio

b) *Puntos de corte con los ejes y signo*

Corte con el eje X; $f(x) = e^x - 1 = 0$; $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$ punto de corte (0,0)

los puntos de corte con el eje X son (0,0)

Corte con el eje Y; $x = 0$; $f(x) = e^x - 1$; $f(0) = e^0 - 1 = 0$;

El punto de corte con el eje Y es (0,0);

Signo estudio la función a los lados del punto de corte

Para $-\infty < x < 0$ ej $x = -1 \Rightarrow f(-1) = e^{-1} - 1 = -0,6321$, $f(x) < 0$;

para $0 < x < \infty$ ej $x = 1 \Rightarrow f(1) = e^1 - 1 = 1,7182$; $f(x) > 0$;

c) *Simetrías*

$f(x) = e^x - 1 \neq f(-x) = e^{-x} - 1 = \frac{1}{e^x} - 1$ No simetría par

$f(-x) \neq -f(x)$; $\frac{1}{e^x} - 1 \neq -(e^x - 1) = -e^x + 1$; No simetría impar

d) *Asíntotas*

Asíntota vertical: Dado que la función es continua en todo el dominio

No hay asíntota vertical.

Asíntotas horizontales, oblicuas o ramas parabólicas (Las funciones solo tienen una de estas asíntotas)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - 1) = \infty - 1 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = e^{-\infty} - 1 = \frac{1}{e^{\infty}} - 1 = 0 - 1 = -1;$$

Asíntota horizontal por la izquierda en $y = -1$;

En teoría do tendría asíntota oblicua pero como la asíntota horizontal solo está en la izquierda de la función para $x = -\infty$ habrá que calcular si tiene asíntota oblicua. $y = mx - n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x - 1)}{x} = \frac{(e^{\infty} - 1)}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{indeterminado}$$

esto se resuelve aplicamos la regla L'Hopital

para aplicar L'Hopital derivamos arriba y abajo independientemente y hallamos límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x - 0)}{1} = \frac{(e^{\infty} - 0)}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty; \text{No hay asíntota oblicua por la derecha}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x - 1)}{x} = \frac{(e^{-\infty} - 1)}{-\infty} = \frac{(\frac{1}{e^{\infty}} - 1)}{-\infty} = \frac{(0 - 1)}{-\infty} = \frac{-1}{-\infty} = 0;$$

No hay asíntota oblicua por la izquierda

e) *Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos*

$$f(x) = e^x - 1; f'(x) = e^x \ln e * x' - 0; f'(x) = e^x$$

para ver si tiene máximos o mínimos $f'(x) = e^x = 0$;

como no hay ningún valor de x que al elevar

e nos de 0 no hay máximos ni mínimos

Para ver si la función es creciente o decreciente tomaría los puntos críticos

Como no hay puntos críticos, la función será creciente o decreciente en todo el dominio

$$f'(x) = e^x \ln e * x' - 0; f'(x) = e^x$$

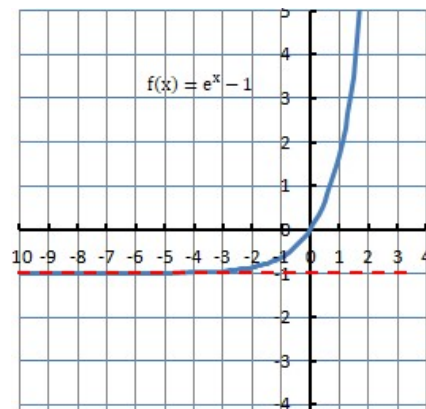
tomo cualquier punto y veo si es positivo o negativo

ejemplo para $x = 0$; $f'(0) = e^0 = 1$ positivo $\Rightarrow$

función creciente en todo el dominio

Damos valores a x en $f(x) = e^x - 1$

y obtengo la función



23. Ejercicio

Estudiar la siguiente función $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$;

Solución

a) *Dominio y continuidad*

El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y es continua en todo el dominio

b) *Puntos de corte con los ejes y signo*

Corte con el eje de las X; $f(x) = \frac{x^2}{e^x} = 0; \Rightarrow x = 0$; Punto de corte (0,0)

los puntos de corte con el eje X son (0,0)

Corte con el eje Y; $x = 0$; $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$; $f(0) = \frac{0^2}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$; Punto de corte (0,0)

El punto de corte con el eje Y es (0,0);

Signo estudio la función a los lados del punto de corte

Para $-\infty < x < 0$ ej $x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{(-1)^2}{e^{-1}} = 2,72$ $f(x) > 0$;

para $0 < x < \infty$ ej $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{(1)^2}{e^1} = 0,36$; $f(x) > 0$;

c) *Simetrías*

$f(x) = \frac{x^2}{e^x} \neq f(-x) = \frac{(-x)^2}{e^{(-x)}} = e^x * x^2$ No simetría par

$f(-x) \neq -f(x)$; $e^x * x^2 \neq -\frac{x^2}{e^x}$ No simetría impar

d) *Asíntotas*

Asíntota vertical: Dado que la función es continua en todo el dominio

No hay asíntota vertical.

Asíntotas horizontales, oblicuas o ramas parabólicas (Las funciones solo tienen una de estas asíntotas)

por la derecha; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty^2}{e^\infty} = \frac{\infty}{\infty}$;

como el denominador se hace mayor para valores mas grandes $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow$ tiende a 0;

por la izquierda $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{(-\infty)^2}{e^{-\infty}} = (-\infty)^2 * e^\infty = \infty$;

Asíntota horizontal por la derecha $y = 0$;

En teoría do tendría asíntota oblicua pero como la asíntota horizontal solo está en la en derecha habría que calcular si tiene asíntota oblicua por la izquierda $y = mx - n$

$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{x}{e^x} = \frac{-\infty}{e^{-\infty}} = (-\infty)(e^\infty) = -\infty$;

No hay asíntota oblicua por la izquierda

e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}; f'(x) = \frac{(2x * e^x) - e^x * x^2}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2x - x^2)}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

para ver si tiene máximos o mínimos $f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x} = 0; 2x - x^2 = 0; x(2 - x) = 0;$

se hace 0 para $x = 0$ y $x = 2$; luego hay máximos o mínimos en esos puntos

Para ver si la función es creciente o decreciente tomaría los puntos críticos

Estudiamos la derivada de la función alrededor de los puntos críticos (máximos y mínimos)

$-\infty$	-3	0	1	2	4	$+\infty$
$f'(x) < 0$			$f'(x) > 0$		$f'(x) < 0$	

Entre $-\infty$ y 0 tomo un valor intermedio ej $x = -3$; $f'(-3) = \frac{2(-3) - (-3)^2}{e^{-3}} = (-6 - 9)e^3$

$f'(-3) = (-15)e^3 < 0$ la función decrece

Entre 0 y 2 tomo un valor intermedio ej $x = 1$; $f'(1) = \frac{2(1) - (1)^2}{e^{-3}} = (2 - 1)e^3$

$f'(1) = e^3 > 0$ la función crece

Entre 2 y ∞ tomo un valor intermedio ej $x = 4$; $f'(4) = \frac{2(4) - (4)^2}{e^{-3}} = (8 - 16)e^3$

$f'(4) = (-8)e^3 < 0$ la función decrece

Minimo en $x = 0$ y un máximo relativo en

$x = 2$;

Sustituyo estos valores en la ecuación

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}; f(0) = \frac{0^2}{e^0} = 0;$$

$y = 0$ Mínimo en $(0,0)$

Sustituyo estos valores en la ecuación

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}; f(2) = \frac{2^2}{e^2} = 0,5;$$

$y = 0,5$ Máximo relativo $(2,0,5)$

f) Puntos de inflexión y curvatura

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}; f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x};$$

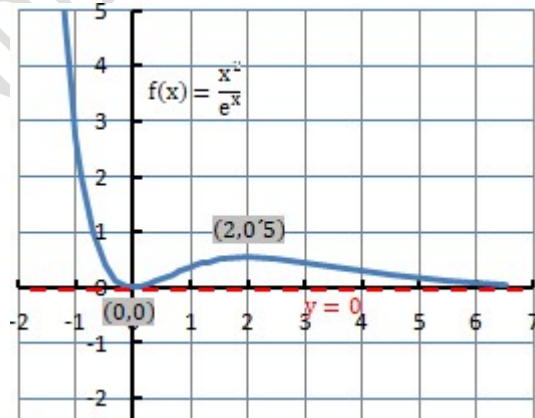
$$f''(x) = \frac{(2 - 2x)e^x - 1 * e^x * \ln e * (2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{(2 - 2x)e^x - e^x(2x - x^2)}{e^{2x}} =$$

$$\frac{((2 - 2x) - (2x - x^2))e^x}{e^{2x}} = \frac{(2 - 2x - 2x + x^2)}{e^x} = \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x} = \frac{(x - 3,41)(x + 0,586)}{e^x}$$

Puntos de inflexión $x = 3,41$; $x = -0,586$;

g) Tabla de valores

Para definir la gráfica damos valores a la x en la función $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ y obtengo y



8 Funciones logarítmicas

Las funciones logarítmicas son del tipo $f(x) = \log_a x$,

donde a es un número positivo distinto de 1

y x es un número positivo

$f(x) = \log_a x$ es inversa de la función

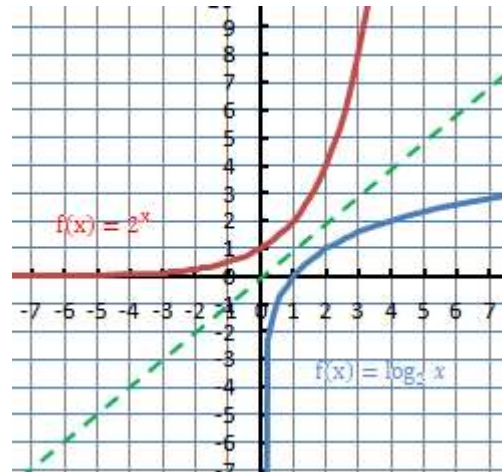
exponencial $x = a^y$

Representamos $f(x) = \log_2 x$ y $f(x) = 2^x$

vemos que son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f(x) = 2^x$$



24. Ejercicio

Estudiar la siguiente función $f(x) = \log \frac{\sqrt{x}}{1-x}$

Solución

a) Dominio y continuidad

Para calcular el dominio tenemos que tener en cuenta:

El denominador no puede ser 0 $\Rightarrow x \neq 1$

No existen logaritmos de números negativos ni 0 $\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{1-x} > 0$;

Para calcular esto hallamos los puntos críticos igualando a 0 el numerador y denominador

$$\sqrt{x} = 0; \Rightarrow x = 0;$$

$$1 - x = 0; x = 1$$

Calculo los valores de la función al lado de los puntos críticos

Negativo=No existe

> 0 positivo

negativo=no existe



$$\text{Para } x = -1; \frac{\sqrt{-1}}{1-(-1)} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \text{ no existe la raíz}$$

$$\text{Para } x = 0,5; \frac{\sqrt{0,5}}{1-0,5} > 0$$

$$\text{Para } x = 2; \frac{\sqrt{2}}{1-2} < 0$$

El dominio de la función es (0,1)

b) Puntos de corte con los ejes y signo

$$\text{Corte con el eje de las X; } f(x) = \log \frac{\sqrt{x}}{1-x} = 0; \Rightarrow 10^0 = \frac{\sqrt{x}}{1-x} = 1; \sqrt{x} = 1-x;$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0; x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}; x = 0,382 \text{ el otro punto no es válido está fuera del dominio}$$

Punto de corte eje X (0'382,0)

$$\text{Corte con el eje de las Y; } x = 0; f(x) = \log \frac{\sqrt{0}}{1-0} \text{ No existe } \log 0; \text{ no hay punto de corte;}$$

Signo :estudio la función a los lados del punto de corte

$$\text{Para } 0 < x < 0,382 \text{ ej } x = 0,2 \Rightarrow f(0,2) = \log \frac{\sqrt{0,2}}{1-0,2} = 0,56; f(x) > 0;$$

$$\text{para } 0,382 < x < 1 \text{ ej } x = 0,5 \Rightarrow f(0,5) = \log \frac{\sqrt{0,5}}{1-0,5} = 1,41; f(x) > 0;$$

la función es creciente en el dominio.

c) Simetrías

$$\begin{cases} f(x) = f(-x) \text{ simetría par;} \\ -f(x) = f(-x) \text{ simetría impar} \end{cases}$$

No hay simetría

d) Asíntotas

Asíntota vertical:

Se halla calculando el límite de la función cuando x tiende a un número; puntos críticos $x = 0$ y $x = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x); \lim_{x \rightarrow 0} \log \frac{\sqrt{x}}{1-x}; \log \frac{\sqrt{0}}{1-0} = \log \frac{\sqrt{0}}{1} = \log 0 \text{ no existe; asíntota en } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x); \lim_{x \rightarrow 1} \log \frac{\sqrt{x}}{1-x}; \log \frac{\sqrt{1}}{1-1} = \log \frac{\sqrt{1}}{0} = \text{Indeterminado asíntota en } x = 1;$$

Asíntotas horizontales, oblicuas o ramas parabólicas (Las funciones solo tienen una de estas asíntotas)

Asíntota Horizontal

$$\begin{cases} \text{por la derecha; } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \\ \text{por la izquierda; } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \end{cases} \text{ no existe porque el dominio solo va de } 0 \text{ a } 1;$$

e) Máximos y mínimos

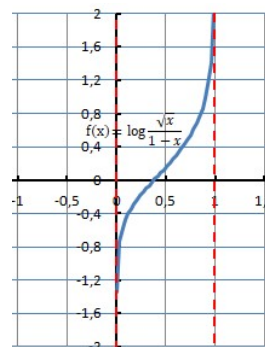
No hay máximos ni mínimos. En todo el dominio la función es creciente

f) Puntos de inflexión curvatura No hay puntos de inflexión pues no hay ni máximos ni mínimos

g) Definición de la función

Para definir la gráfica damos valores a la x en la

$$\text{función } f(x) = \log \frac{\sqrt{x}}{1-x} \text{ y obtengo y}$$



25. Ejercicio

Estudiar la siguiente función $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

Solución

h) Dominio y continuidad

Para calcular el dominio tenemos que tener en cuenta:

No existen logaritmos de números negativos ni $0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0$

$$x^2 - 1 = 0; x = \pm\sqrt{1}; x = -1, x = 1;$$

Calculo los valores de la función al lado de los puntos críticos

>0 positivo

<0 negativo

>0 positivo



Para $x = -2$; $2^2 - 1 = 3 > 0$; La función existe

Para $x = 0$; $0^2 - 1 < 0$; La función no existe

Para $x = 2$; $2^2 - 1 = 3 > 0$; La función existe

El dominio de la función es $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

a) *Puntos de corte con los ejes y signo*

Corte con el eje de las X; $f(x) = \ln(x^2 - 1) = 0; \Rightarrow e^0 = x^2 - 1 = 1; x^2 = 2;$

$x = \pm\sqrt{2}; x = \pm 1,4142$; *Puntos de corte* $(-1,4142, 0); (1,4142, 0)$

Corte con el eje de las Y; $x = 0; f(x) = \ln(0^2 - 1); \ln(-1)$ No existe;

$x=0$ no pertenece al dominio

b) *Simetrías*

$$\begin{cases} f(x) = f(-x) \text{ simetría par;} \\ -f(x) = f(-x) \text{ simetría impar} \end{cases}$$

$\ln(x^2 - 1) = \ln((-x)^2 - 1); x^2 = (-x)^2$ existe simetría par;

c) *Periodicidad*

No es periódica (las periódicas son las funciones trigonométricas)

d) *Asíntotas*

Asíntota vertical:

Se halla calculando el límite de la función cuando x tiende a un número; puntos críticos

$x = 1$ y $x = -1$;

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x); \lim_{x \rightarrow -1} \ln(x^2 - 1); \ln((-1)^2 - 1) = \ln(1 - 1) = \ln(0) = -\infty$ luego hay asíntota

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x); \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^2 - 1); \ln(1^2 - 1) = \ln(0) = -\infty$ luego hay asíntota

Asíntotas horizontales, oblicuas o ramas parabólicas (Las funciones solo tienen una de estas asíntotas)

Asíntota Horizontal

$$\begin{cases} \text{por la derecha;} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2 - 1); \ln(\infty^2 - 1) = \infty \\ \text{por la izquierda;} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 1); \ln((-\infty)^2 - 1) = \infty \end{cases} \text{ no existe asíntota horizontal}$$

Asíntota oblicua $y=mx+n$

Hay que calcular los límites cuando x tiende a infinito y menos infinito

$$\text{Calculamos } m \text{ y } n; m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$

calculo primero para $x \rightarrow \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}; \frac{\ln \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{indeterminado}$

$$\text{Regla de l'Hopital} = \text{derivada numerador y denominador } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2 - 1}(2x)}{1}; \frac{\frac{1}{\infty^2 - 1}(2\infty)}{1} = \frac{2\infty}{\infty^2} = 0$$

$y = 0x + n; y = n$; sería asíntota vertical; luego no hay asíntota oblicua

calculo para $x \rightarrow -\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}; \frac{\ln \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{indeterminado}$

Regla de l'Hopital = derivada numerador y denominador

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^2 - 1}(2x)}{1}; \frac{\frac{1}{(-\infty)^2 - 1}(2(-\infty))}{1} = \frac{-2\infty}{\infty^2} = 0$$

$y = 0x + n; y = n$; sería asíntota vertical; luego no hay asíntota oblicua

e) *Máximos, mínimos relativos crecimiento, decrecimiento*

$f(x) = \ln(x^2 - 1); f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} * 2x = \frac{2x}{x^2 - 1}$; para hallar máximos y mínimos igualamos a 0

$\frac{2x}{x^2 - 1} = 0; 2x = 0; x = 0$; no pertenece al dominio; no hay ni máximos ni mínimos relativos

calculo la derivada en los puntos del dominio $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} * \ln e * 2x = \frac{2x}{x^2 - 1}$

$f'(x) < 0$; decreciente

$f'(x) > 0$ creciente



para $x = -2$; $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{-4}{4 - 1} = \frac{-4}{3} < 0$

para $x = 2$; $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{4}{4 - 1} = \frac{4}{3} > 0$

La funcion es decreciente de $(-\infty a - 1)$

y creciente de $1 a + \infty$

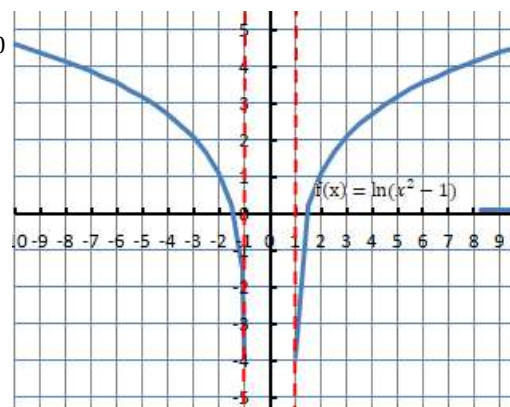
f) Curvatura y puntos de inflexión 2º derivada

No hay puntos de inflexión porque no hay máximos ni mínimos

g) Definición de la función

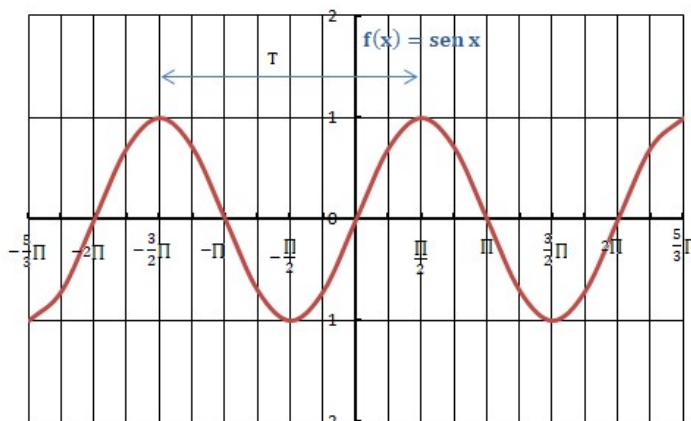
Para definir la grafica damos valores a la x en la

funcion $f(x) = \log \frac{\sqrt{x}}{1-x}$ y obtengo y



9 Funciones periódicas

Una función es periódica si se cumple para todo el dominio $f(x + T) = f(x)$, siendo T el tiempo o valor que tarda en repetirse la función



26. Ejercicio

Estudiar la siguiente función $f(x) = \text{sen } x$

Solución

a) La función es periódica pues $f(x) = f(x + 2\pi)$. periodo $T = 2\pi$ por lo que solo habría que representar la función entre 0 y 2π y luego repetirla

b) *Dominio y continuidad*

La función es continua en todo $\mathbb{R}$ por lo que su dominio es $\mathbb{R}$

c) *Puntos de corte con los ejes y signo*

Corte con el eje de las X; $f(x) = \text{sen } x = 0; \Rightarrow y = 0$ para $\text{sen } 0$ y $\text{sen } 360(2\pi)$

Puntos de corte (0,0) y $(2\pi, 0)$

Corte con el eje de las Y; $x = 0; f(x) = \text{sen } x; y = 0 = \text{sen } 0; (0,0)$

d) *Simetrías*

$$\begin{cases} f(x) = f(-x) \text{ simetría par;} \\ -f(x) = f(-x) \text{ simetría impar} \end{cases}$$

$\text{sen } x \neq \text{sen } (-x)$; no existe simetría par; $\text{sen } \pi \neq \text{sen } (-\pi)$; $\text{sen } \pi/2 = \text{sen } (-\pi/2)$

$-\text{sen } x = \text{sen } (-x)$; existe simetría impar; $-\text{sen } \pi = \text{sen } (-\pi)$; $-\text{sen } \pi/2 = \text{sen } (-\pi/2)$

e) *Asíntotas*

Asíntota vertical: No hay asíntota vertical. La función es continua

Asíntotas horizontales, oblicuas o ramas parabólicas (Las funciones solo tienen una de estas asíntotas)

Asíntota Horizontal: No hay asíntotas horizontal, ni oblicua

f) *Máximos, mínimos relativos crecimiento, decrecimiento*

$f(x) = \text{sen } x$; $f'(x) = \cos x$; para hallar máximos y mínimos igualamos a 0

$\cos x = 0$; para valores de $x = \pi/2$, $y = \frac{3\pi}{2}$; luego en esos puntos tenemos máximos y mínimos

Podemos comprobarlo $\text{sen } \pi/2 = 1$ y $\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$;

g) *Definición de la función*

Para definir la gráfica damos valores a la x en la

función $f(x) \text{sen } x$ y obtengo y

27. Ejercicio

Estudiar la siguiente función $f(x) = \cos x$

Solución

a) La función es periódica pues $f(x) = f(x + 2\pi)$. periodo $T = 2\pi$ por lo que solo habría que representar la función entre 0 y 2π y luego repetirla

b) *Dominio y continuidad*

La función es continua en todo $\mathbb{R}$ por lo que su dominio es $\mathbb{R}$

c) *Puntos de corte con los ejes y signo*

Corte con el eje de las X; $f(x) = \cos x = 0$; $\Rightarrow y = 0$ para $\cos \frac{\pi}{2}$ y $\cos de 270 \left(\frac{3}{2}\pi\right)$

Puntos de corte $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$

Corte con el eje de las Y; $x = 0$; $f(x) = \cos x$; $y = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$; $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

d) *Simetrías*

$$\begin{cases} f(x) = f(-x) \text{ simetría par;} \\ -f(x) = f(-x) \text{ simetría impar} \end{cases}$$

$$\cos x = \cos(-x); \text{ existe simetría par}; \cos \pi = \cos(-\pi); \cos \frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\cos x \neq \cos(-x); \text{ no existe simetría impar}; -\cos \pi \neq \cos(-\pi); -\cos \frac{\pi}{2} \neq \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

e) *Asíntotas*

Asíntota vertical: *No hay asíntota vertical. La función es continua*

Asíntotas horizontales, oblicuas o ramas parabólicas. (Las funciones solo tienen una de estas asíntotas)

Asíntota Horizontal: *No hay asíntotas horizontal, ni oblicua*

f) *Máximos, mínimos relativos crecimiento, decrecimiento*

$$f(x) = \cos x; f'(x) = -\sin x \text{ para hallar máximos y mínimos igualamos a } 0$$

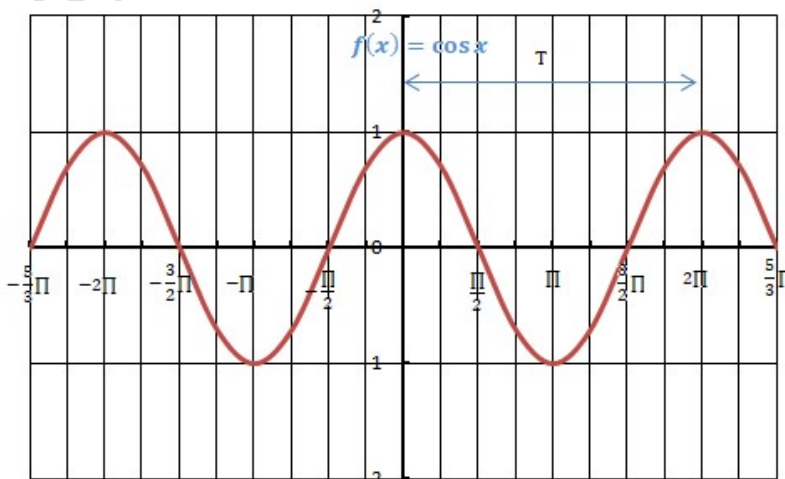
$$-\sin x = 0; \text{ para valores de } x = 0 \text{ y } x = \pi; \text{ luego en esos puntos tenemos máximos y mínimos}$$

$$\text{Podemos comprobarlo } \cos 0 = 1 \text{ y } \cos \pi = -1;$$

g) *Definición de la función*

Para definir la gráfica damos valores a la x en la

función $f(x) = \cos x$ y obtengo y



28. Ejercicio

Estudiar la siguiente función $f(x) = \operatorname{tg} x$

Solución

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

a) La función es periódica pues $f(x) = f(x + \pi)$. periodo $T = \pi$ por lo que solo habría que representar la función entre 0 y 2π y luego repetirla

b) *Dominio y continuidad*

No es continua en los valores de x que hacen 0 $\cos x$;

la función es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

c) *Puntos de corte con los ejes y signo*

Corte con el eje de las X; $f(x) = \operatorname{tg} x = 0; \Rightarrow y = 0$ para $\operatorname{tg} 0$ y $\operatorname{tg} \pi$

Puntos de corte $(0,0)$ y $(\pi, 0)$

Corte con el eje de las Y; $x = 0$; $f(x) = \operatorname{tg} x$; $y = 0 = \operatorname{tg} 0$; $(0,0)$

d) *Simetrías*

$$\begin{cases} f(x) = f(-x) \text{ simetría par;} \\ -f(x) = f(-x) \text{ simetría impar} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-x); \text{ existe simetría par}; \operatorname{tg} \pi = \operatorname{tg}(-\pi); \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\operatorname{tg} x \neq \operatorname{tg}(-x); \text{ no existe simetría impar}; -\operatorname{tg} \pi \neq \operatorname{tg}(-\pi); -\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \neq \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

e) *Asíntotas*

Asíntota vertical: hay asíntota vertical en los puntos críticos $\frac{\pi}{2} + k\pi$

Asíntotas horizontales, oblicuas o ramas parabólicas (Las funciones solo tienen una de estas asíntotas)

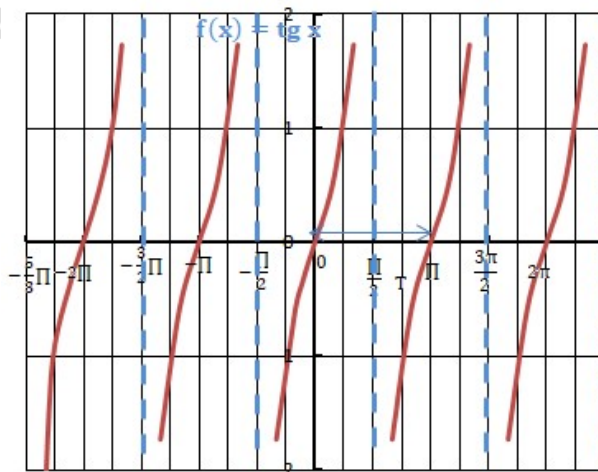
Asíntota Horizontal: No hay asíntotas horizontal, ni oblicua.

f) *Máximos, mínimos relativos crecimiento, decrecimiento*

No hay máximos ni mínimos, la $f(x) = \operatorname{tg} x$; es creciente en todo el dominio

g) *Definición de la función*

Para definir la gráfica damos valores a la x en la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ y obtengo y



10 Construcción de funciones por translación y dilatación

Translaciones:

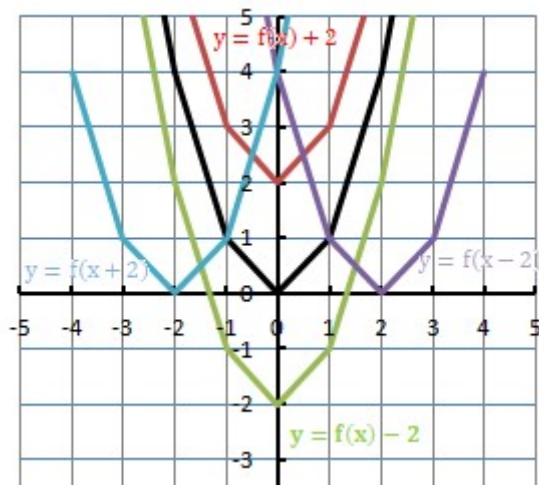
Si tenemos una función $f(x)$ y queremos trasladarla hacia arriba, abajo o hacia los lados tendremos en cuenta los siguientes criterios. Sea la función $y=f(x)$:

Si quiero desplazarla 2 unidades hacia arriba se transformara en $y = f(x) + 2$

Si quiero desplazarla 2 unidades hacia abajo se transformara en $y = f(x) - 2$

Si quiero desplazarla 2 unidades hacia la derecha se transformara en $y = f(x - 2)$

Si quiero desplazarla 2 unidades hacia la izquierda se transformara en $y = f(x + 2)$



Dilataciones:

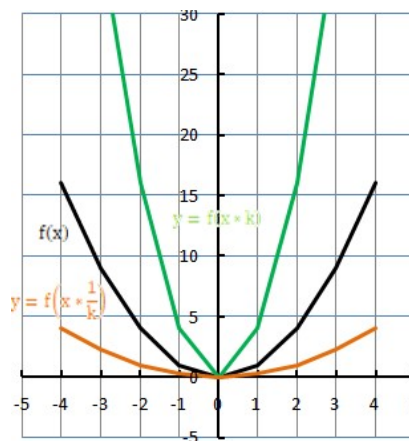
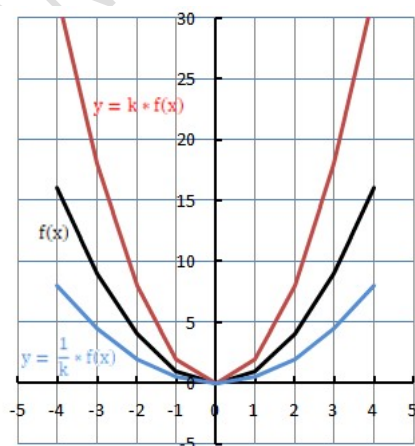
Siendo una función $f(x)$ y k en número real mayor de 0 se cumple:

Si multiplicamos $k * f(x)$ la función resultante $y = k * f(x)$ se ha ampliado respecto al eje de Ordenadas

Si dividimos $\frac{1}{k} * f(x)$ la función resultante $y = \frac{1}{k} * f(x)$ se ha reducido respecto al eje de Ordenadas

Si multiplicamos $f(x * k)$ la función resultante $y = f(x * k)$ se ha ampliado respecto al eje de abscisas

Si dividimos $f\left(x * \frac{1}{k}\right)$ la función resultante $y = f\left(x * \frac{1}{k}\right)$ se ha reducido respecto al eje de abscisas



29. Ejercicio

Un editor sabe que para la primera edición de un determinado libro la función oferta y demanda viene determinada por la formula

$$f_o(p) = 282p - 422; \quad f_d(p) = 14362 - 422p$$

Calcular :

- ¿Cuántos ejemplares de la primera edición debe poner en el mercado para conseguir el equilibrio de mercado y precio de venta?
- ¿Qué pasará si decide poner el precio de venta a a 15€. Y si lo pone a 25€?

Solución

a) equilibrio $f_o(p) = f_d(p)$; $282p - 422 = 14362 - 422p$; $704p = 14784$; $p = 21€$

Numero de ejemplares, sustituyo en una de la ecuaciones $f_o(p) = 282p - 422$;

$$f_o(p) = 282 * 21 - 422 = 5500 \text{ libros pondra en el mercado}$$

b) a 15 € $\begin{cases} f_o(p) = 282 * 15 - 422 ; f_o(p) = 3808 \\ f_d(p) = 14362 - 422 * 15 ; f_d(p) = 8032 \end{cases}$ hay exceso de demanda

a 25 € $\begin{cases} f_o(p) = 282 * 25 - 422 ; f_o(p) = 6628 \\ f_d(p) = 14362 - 422 * 25 ; f_d(p) = 3812 \end{cases}$ hay exceso de oferta

30. Ejercicio

La tabla indica el numero de conejos que hay en una granja la cabo de t meses

C (Conejos)	0	1	2	3	4	5
t (tiempo en meses)	25	43	75	130	226	391

- Responde la población a una función exponencial
- Hallar dicha función
- ¿Cuánto tiempo se necesita para doblar la población de conejos
- Cuanto tiempo necesitaríamos para alcanzar una población de 1000 conejos

Solución

a) funcion exponencial de crecimiento será de la forma $y = a(1 + r)^t$

a = valor inicial , r= tasa de crecimiento; t periodo

Si la funcion es exponencia cumpliria

$$43 = 25(1 + r)^1; \quad r = 0,72$$

$$75 = 25(1 + r)^2; \quad r = 0,73$$

$$130 = 25(1 + r)^3; \quad r = 0,73$$

$$226 = 25(1 + r)^4; \quad r = 0,73$$

$$391 = 25(1 + r)^5; \quad r = 0,73$$

b) La funcion de crecimiento será $f(x) = 25(1 + 0,73)^t$; $r = 0,73$

c) Cuanto tiempo se necesita para doblar la poblacion de conejos

$$f(x) = 25(1 + 0,73)^t; \text{ El doble de la poblacion será } 50; 50 = 25(1 + 0,73)^t; \ln \frac{50}{25} = t \ln(1 + 0,73);$$

$$t = 1,265 \text{ meses}$$

d) Cuanto tiempo se necesita para alcanzar una poblacion de 1000 conejos

$$f(x) = 25(1 + 0,73)^t; 1000 = 25(1 + 0,73)^t; \ln \frac{1000}{25} = t \ln(1 + 0,73); t = 6,73 \text{ meses}$$

31. Ejercicio

En los países anglosajones se utiliza la escala F (fahrenheit) para medir la temperatura y en el resto la escala Celsius.

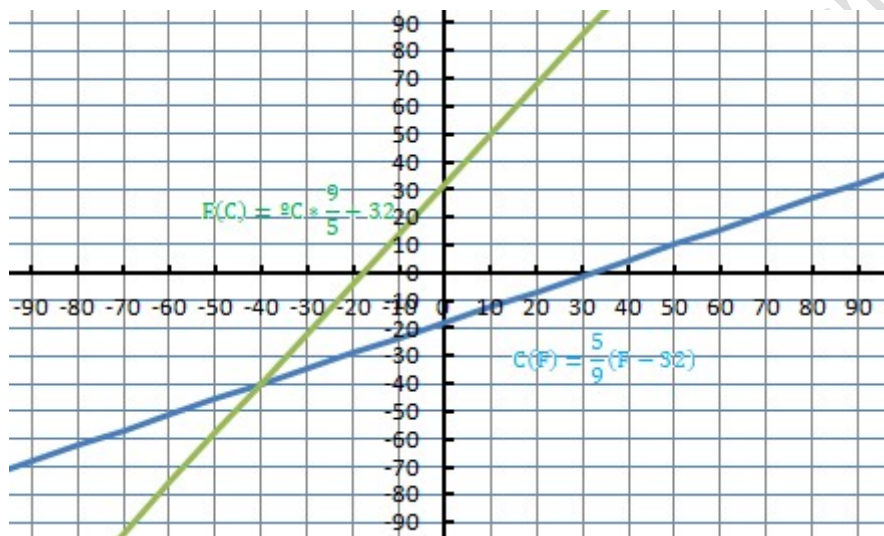
la función que relaciona las dos escalas es $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$

- ¿Cuántos grados Celsius son 41°F ?
- ¿Cuántos grados Fahrenheit son -3°C ?
- Representa sobre los mismos ejes la función $C(F)$ y su inversa

Solución

$$\text{a) } C(F) = \frac{5}{9}(F - 32); 41^\circ\text{F} \Rightarrow C(F) = \frac{5}{9}(41 - 32) = 5^\circ\text{C}$$

$$\text{b) } C(F) = \frac{5}{9}(F - 32); \text{ la inversa } \Rightarrow F(C) = C(F) * \frac{9}{5} + 32; F(C) = -3^\circ\text{C} * \frac{9}{5} + 32 = 21,6^\circ\text{F};$$



32. Ejercicio

La ley de enfriamiento de Newton indica que un objeto se enfría según la siguiente función

$$T_t = T_{\text{ambiente}} + (T_0 - T_{\text{ambiente}}) * e^{-kt};$$

T_t Temperatura final; T_0 temperatura del inicial del objeto T_{ambiente} Temperatura ambiente

k constante dependiendo de la naturaleza del objeto

Una taza de café en una habitación a 20°C se enfría de 80°C a 60°C e 3 minutos ¿Cuánto tardará en enfriarse a 30°C y en alcanzar la temperatura ambiente?

Solución

$$T_t = T_{\text{ambiente}} + (T_0 - T_{\text{ambiente}}) * e^{-kt}; 60^\circ\text{C} = 20^\circ\text{C} + (80^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) * e^{-k3};$$

$$60^\circ\text{C} = 20^\circ\text{C} + (80^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) * e^{-k3}; 40 = 60e^{-k3}; \frac{40}{60} = e^{-k3}; \ln \frac{4}{6} = -3k \ln e; k = 0,1352$$

$$30 = 20 + (80 - 20) * e^{-0,1352t}; 10 = 60 * e^{-0,1352t}; \frac{1}{6} = e^{-0,1352t}; \ln \frac{1}{6} = -0,1352t \ln e$$

$$\ln \frac{1}{6} = -0,1352t \ln e; t = 13,253 \text{ minutos}$$

33. Ejercicio

La población bacteriana que crece en un cultivo depende del tiempo en minutos y responde a la formula

$$N(t) = \frac{10^9}{1 + 10^4 e^{-t}}$$

a) Cual es la poblacion inicial en $t = 0$?

b) comprueba que la poblacion es siempre positiva, crece a medida que pasa el tiempo y tiende a estabilizarse

Solución

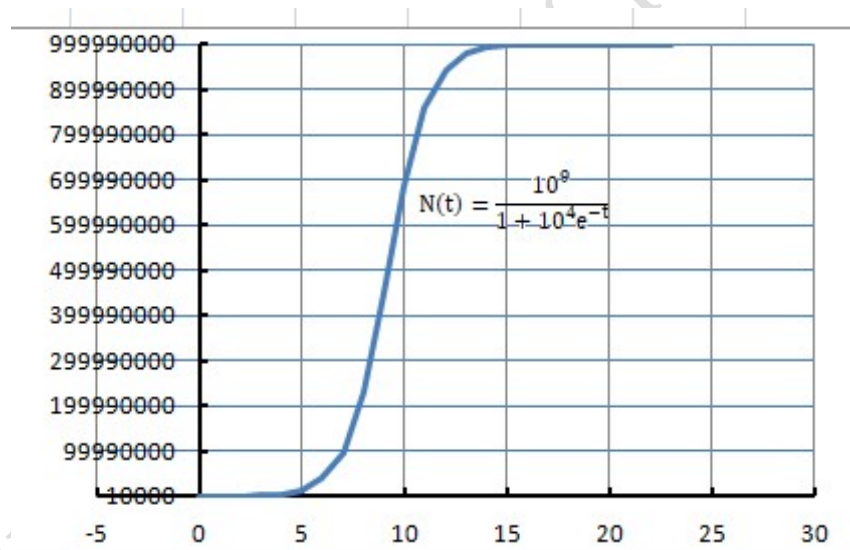
Damos valores a t y vemos la evolución

$$N(t) = \frac{10^9}{1 + 10^4 e^{-t}}$$

La poblacion inicial es 10000 bacterias

Al cabo de 15 minutos el numero de bacterias se estabiliza en $1 \cdot 10^9$

t	N(t)
0	9990
1	271754
2	738360
3	2004527
4	5430167
5	1,5E+07
6	3,9E+07
7	9,9E+07
8	2,3E+08
9	4,5E+08
10	6,9E+08
11	8,6E+08
12	9,4E+08
13	9,8E+08
14	9,9E+08
15	1E+09
16	1E+09



34. Ejercicio

Las pérdidas o ganancias de una empresa, expresadas en centenas de miles de euros cuando han transcurrido t años, sigue la función:

$$F(t) = \frac{2t - 4}{t + 2}$$

- Determinar el año en que la empresa deja de tener pérdidas.
- ¿Es creciente la ganancia? ¿En qué año la ganancia supera los 100000 euros?
- ¿Existe límite para la ganancia? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite

Solución

Damos valores a t y vemos la evolución

- La empresa deja de tener pérdidas al 2 año
- Las ganancias superan los 100000 € al 6 año
- Las ganancias seguirán creciendo indefinidamente hasta el límite de 200000 €

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t - 4}{t + 2} = 2; \text{ dado que } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{2t - 4}{t} - \frac{4}{t}}{\frac{t}{t} + \frac{2}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{t}}{1 + \frac{2}{t}} \text{ para } t \rightarrow \infty = \frac{2}{1}$$

t	F(t)
0	-2
1	-0,6667
2	0
3	0,4
4	0,6667
5	0,85714
6	1
8	1,2
10	1,33333
12	1,42857
14	1,5
16	1,55556

