

Funciones Derivables

Contenido

1	DERIVADAS LATERALES Y LOS LÍMITES LATERALES DE $F'(x)$	2
2	TEOREMA DE ROLLE.....	3
3	TEOREMA DEL VALOR MEDIO	4
4	EXTREMOS RELATIVOS. CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN	12
5	APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS. OPTIMIZACIÓN	20

1 Derivadas laterales y los limites laterales de $f'(x)$

1. Ejercicio

Sea $f(x) = \begin{cases} ax + b \ln x & \text{Si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$ Calcular a y b para que f sea derivable en $x = 1$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b \ln x) = a + b * 0 = a;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1;$$

Para que sea continua $a = 1$;

$$f(x) = ax + b \ln x; \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \left(a + \frac{b}{x}\right) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2; \end{cases} \quad a + b = 2; \text{ como } a \text{ ha de ser } = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ y } b = 1;$$

2. Ejercicio

Comprobar si es continua y derivable la funcion en $x = 0$; $f(x) = \begin{cases} x^2 + \sen x & \text{Si } x \leq 0 \\ e^{2x} - 1 & \text{Si } x > 0 \end{cases}$

Solución

Comprobamos si la funcion es continua en $x = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + \sen x) = 0 + 0 = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0;$$

La funcion es continua en $x = 0$;

Comprobamos si la funcion es derivable en $x = 0$;

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \sen x & \text{Si } x \leq 0 \\ e^{2x} - 1 & \text{Si } x > 0 \end{cases}; \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + \cos x) = 0 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 * e^{2x}) = 2 * 1 = 2; \end{cases}$$

La funcion no es derivable en $x = 0$;

3. Ejercicio

Dada la funcion $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{Si } x \leq 1 \\ x + k - 1 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$

a) Demuestra que la funcion es continua para cualquier valor de k

b) Calcula el valor de k para que la funcion sea derivable en todo el dominio

Solución

Comprobamos si la funcion es continua en $x = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} kx^2 = k;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + k - 1) = k;$$

La funcion es continua en $x = 1$; para todo valor de k

b) Calcula el valor de k para que la funcion sea derivable en todo el dominio

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{Si } x \leq 1 \\ x + k - 1 & \text{Si } x > 1 \end{cases}; \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} 2kx = 2k \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (1) = 1; \end{cases}$$

Para que sea derivable en todo el dominio $k = \frac{1}{2}$;

4. Ejercicio

Halla los valores de a y b $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{Si } x < 0 \\ \text{sen } 2x + \cos x & \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$

Sea continua y derivable $x = 0$;

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b) = b;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\text{sen } 2x + \cos x) = \text{sen } 0 + \cos 0 = 1;$$

La función es continua para $b = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a) = a;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \cos 2x - \text{sen } x) = 2;$$

La función es derivable $a = 2$;

5. Ejercicio

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{Si } x \leq 0 \\ bx + x^2 & \text{Si } x > 0 \end{cases}$

Hallar el valor de b para que la función sea derivable $x = 0$;

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\text{sen } x) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (bx + x^2) = 0 + 0 = 0$$

La función es continua para todo b ;

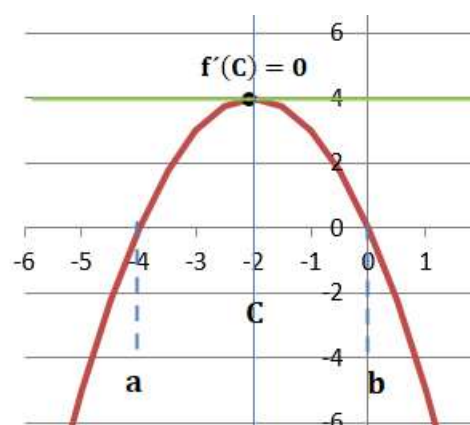
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x) = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (b + 2x) = b;$$

La función es derivable $b = 1$;

2 Teorema de Rolle

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ derivable en el intervalo (a, b) y además $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto C del intervalo (a, b) donde $f'(C) = 0$;



6. Ejercicio

Sea $f(x) = (x+1)^3(x-2)^2 + 3$.

Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$

en algun punto del intervalo $[-1,2]$

Solución

$$f(-1) = (-1+1)^3(-1-2)^2 + 3 = 12$$

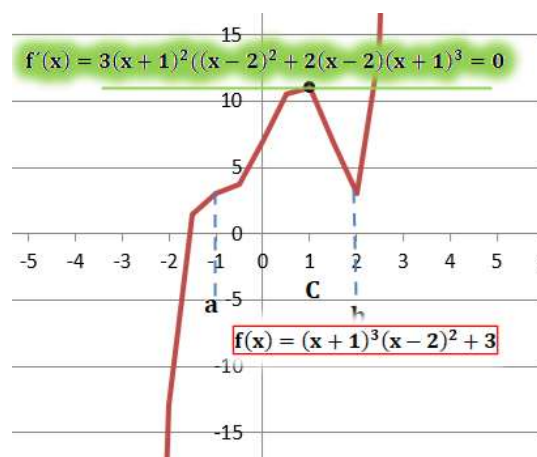
$$f(2) = (2+1)^3(2-2)^2 + 3 = 12;$$

Como es igual el teorema de Rolle nos asegura

que existe un punto C donde $f'(x) = 0$

se comprueba que existe un punto $C=1$

$$f'(x) = 3(x+1)^2((x-2)^2 + 2(x-2)(x+1)^3) = 0;$$



7. Ejercicio

Aplicando el teorema de Rolle, justifica que la grafica de la funcion $f(x) = 3x^5 + 7x + 1$

no puede cortar dos veces al eje X

Solución

Dado que $f'(x) = 15x^4 + 7$ nunca puede ser 0 eso implica que no se puede aplicar el teorema de Rolle

8. Ejercicio

Demuestra que la ecuación $2x^5 - 30x + c = 0$; no puede tener mas de una solucion en el intervalo $[-1,1]$

sea cual sea en valor de c

Solución

$$f(-1) = 2(-1)^5 - 30(-1) = -2 + 30 = 28;$$

$$f(2) = 2(1)^5 - 30(1) = 2 - 30 = -28;$$

Como es distinto el teorema de Rolle no asegura que existe un punto C donde $f'(x) = 0$

Dado que $f'(x) = 10x^4 - 30$ nunca puede ser 0,

eso implica que no puede cortar mas de una vez en eje X en el intervalo

3 Teorema del valor medio

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo (a, b) , existe un numero $C \in (a, b)$

donde $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$; esto implica

$f'(x) = 0$ en todo el intervalo implica que f es constante en todo el intervalo

$f'(x) > 0$ en todo el intervalo implica que f es creciente en todo el intervalo

$f'(x) < 0$ en todo el intervalo implica que f es decreciente en todo el intervalo

9. Ejercicio

Dada la función $f(x) = x^3$

a) ¿Hay algún punto de su gráfica en el que la tangente sea paralela a la recta que une los puntos

$A(-1, -1)$ y $B(2, 8)$? Hallalo;

b) Calcula la ecuación de la tangente mencionada

Solución

Recta $A(-1, -1)$ y $B(2, 8)$; $y = mx + n$;

$$y - (-1) = \frac{8 - (-1)}{2 - (-1)}(x - (-1)); y + 1 = \frac{9}{3}x + \frac{9}{3}; y = 3x + 3 - 1;$$

$$y = 3x + 2$$

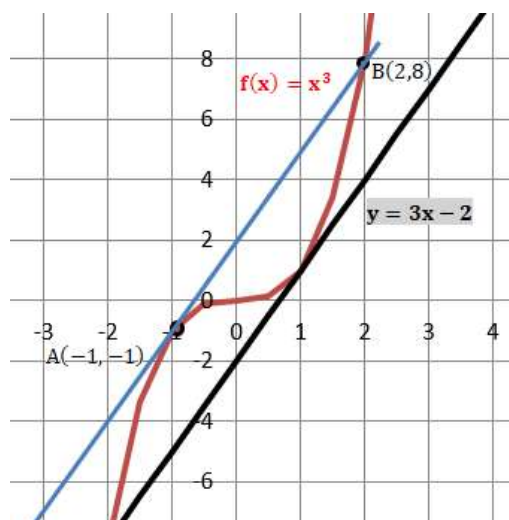
Para que la tangente de la gráfica $f(x) = x^3$

sea paralela a la recta que pasa por

$A(-1, -1)$ y $B(2, 8)$ su derivada ha de ser igual a 3;

$$f(x) = x^3; f'(x) = 3x^2 = 3; \text{ se cumple en } x = \pm 1$$

La tangente será pendiente m y punto de paso $(-1, -1)$; $y - 1 = 3(x - 1)$; $y = 3x - 2$



10. Ejercicio

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4}x - 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 3; \end{cases} \quad \text{Comprueba que:}$$

a) f es continua en $[1, 3]$ y derivable en $(1, 3)$

b) Encuentra el número $c \in (1, 3)$ cuya existencia asegura el teorema del valor medio

Solución

a) f es continua en $[1, 3]$ y derivable en $(1, 3)$

El punto donde puede no ser continua es $x = 2$;

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{4}x - 1 \right) = \frac{2}{4} - 1 = -\frac{1}{2};$$

La función es continua en el intervalo $[1, 3]$;

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4};$$

La función es derivable en $(1, 3)$;

b) Encuentra el número $c \in (1, 3)$ cuya existencia asegura el teorema del valor medio

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{para } x = 1; y = -\frac{1}{1} = -1 \\ \frac{1}{4}x - 1 & \text{Para } x = 3; y = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\text{Comprobamos } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; \Rightarrow \frac{-\frac{1}{4} - (-1)}{3 - 1} = \frac{-\frac{1}{4} + 1}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}; f'(x) = \frac{3}{8};$$

$$f'(x) \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{4} \end{cases} \text{ el numero } C \text{ ha de estar en el intervalo } 1 \leq x < 2; \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{3}{8};$$

$$x^2 = \frac{8}{3}; x = +\sqrt{\frac{8}{3}} \text{ pues el valor de } x \text{ negativo no pertenece al intervalo } 1 \leq x < 2$$

11. Ejercicio

a) Comprueba que la función $f(x) = \frac{3}{x}$ satisface las condiciones del valor medio en el intervalo $[1,3]$

y b) encuentra el número C cuya asistencia asegura dicho teorema

Solución

a) f es continua en $[1,3]$ y derivable en $(1,3)$

El punto donde puede no ser continua es $x = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{x} \right) = \frac{3}{0} \text{ indeterminado aplicamos } L'H; \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{0}{1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{3}{x} \right) = \frac{3}{0} \text{ indeterminado aplicamos } L'H; \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{0}{1} \right) = 0;$$

La función es continua en el intervalo $[1,3]$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-3}{x^2} \right) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{0}{1} \right) = 0;$$

La función es derivable en $(1,3)$;

b) encuentra el número C cuya asistencia asegura dicho teorema

$$f(3) = \frac{3}{3} = 1; f(1) = \frac{3}{1} = 3;$$

$$\text{Comprobamos } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{1 - 3}{3 - 1} = \frac{-2}{2} = -1;$$

$$f'(c) = \left(\frac{-3}{c^2} \right) = -1; -c^2 = -3; c = \sqrt{3}; \text{ la solución negativa no es del intervalo}$$

12. Ejercicio

$$\text{Sea } f(x) \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2; \end{cases}$$

¿Existen valores de a y b para los cuales f satisfaga la hipótesis del valor medio en el intervalo $[0,4]$?

Razona la contestación y en caso afirmativo calcula dichos valores

Solución

El punto donde puede no ser continua es $x = 2$;

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b$$

Para que sea continua $4 = 4 + 2a + b; 2a + b = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + a) = 4 + a;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2) = 2;$$

Para que sea derivable $4 + a = 2; a = -2$;

Sustituyo en la ecuacion $2a + b = 0$; $-4 + b = 0$; $b = 4$;

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 4 & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2; \end{cases}$$

Razona la contestacion y en caso afirmativo calcula dichos valores

$$f(4) = 2 * 4 = 8;$$

$$f(0) = 0^2 + 2 * 0 - 4 = -4;$$

$$\text{Comprobamos } f'(c) = \frac{8 - (-4)}{4 - 0} = 3; f'(c) = f(x) \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 2; \\ 2 & \text{si } x \geq 2; \end{cases}$$

Como 3 no puede ser = 2 implica que el valor estará para valores < 2

$$2x - 2 = 3; x = \frac{5}{2};$$

13. Ejercicio

Aplicando el teorema de Lagrange de los incrementos finitos (Valor medio) demuestra que para

$$x > 0 \text{ se verifica } \arct(2x) - \arctg x < \frac{x}{1 - x^2}$$

Solución

dado que la funcion arct es continua y derivable en todo el dominio;

Si tomamos un intervalo $[a, 2a]$ donde $a > 0$ poderemos encontrar un un numero c tal que $a < c < 2a$;

$$\text{aplico la formula del valor medio } f'(c) = \frac{f(2a) - f(a)}{2a - a}; f'(c)(2a - a) = f(2a) - f(a)$$

$$f'(c)a = f(2a) - f(a); \text{ siendo } f(x) = \arctg(x)$$

$$f(2a) - f(a) = \arct(2a) - \arctg(a); f(x) = \arctg x \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}(\arctg x) = \frac{1}{1 + x^2};$$

$$\text{para } x = c \Rightarrow \frac{1}{1 + c^2}$$

$$\arct(2a) - \arctg(a) = f'(c)a = a \frac{1}{1 + c^2} = \frac{a}{1 + c^2}$$

$$\text{comprobamos si se cumple } \arct(2a) - \arctg a = \frac{a}{1 + c^2} < \frac{a}{1 - a^2};$$

$$\text{dado que } a < c < 2a \Rightarrow \frac{a}{1 + c^2} < \frac{a}{1 - a^2} \text{ se cumple siempre para todo valor de } a$$

14. Ejercicio

$$\text{Se considera la funcion } f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + mx^2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de m y n para que cumpla la hipotesis de valor medio en el intervalo $[-4, 2]$

b) Hallos los puntos del intervalo cuya existencia garantiza dicho teorema

Solución

a) Determinar el valor de m y n para que cumpla la hipotesis de valor medio en el intervalo $[-4, 2]$

El punto donde puede no ser continua es $x = -2$;

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + nx) = 4 - 2n$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^3 + mx^2) = -8 + 4m$$

$$\text{Para que sea continua } 4 - 2n = -8 + 4m; 12 = 4m + 2n$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (2x + n) = -4 + n;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (3x^2 + 2mx) = 12 - 4m;$$

Para que sea derivable $-4 + n = 12 - 4m$; $16 = 4m + n$;

$$\begin{cases} 12 = 4m + 2n \\ 16 = 4m + n \end{cases} \text{ restamos; } -4 = n; \text{ Sustituimos } m = 5;$$

$$\text{sustituyo valores } f(x) \begin{cases} x^2 - 4x & \text{si } x < -2 \\ x^3 + 5x^2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; \text{ Si } x < -2; f'(x^2 - 4x) = \frac{f(2) - f(-4)}{2 - (-4)}$$

$$2x - 4 = \frac{-4 - 8 - (16 + 16)}{2 - (-4)} = \frac{-12 - 32}{6}; 2x = 4 - \frac{44}{6} = -\frac{20}{6}; x = -\frac{20}{2 \cdot 6} = -\frac{5}{3}; c = -\frac{5}{3};$$

$$c = -\frac{5}{3} \text{ NO SE CUMPLE PUES. } c \text{ NO ES MENOR QUE } -2$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; \text{ Si } x \geq -2; f'(x^3 + 5x^2) = \frac{f(2) - f(-4)}{2 - (-4)}$$

$$3x^2 + 10x = \frac{8 + 20 - (-64 + 80)}{2 - (-4)} = \frac{12}{6} = 2; 3x^2 + 10x - 2 = 0; x = -\frac{10 \pm \sqrt{124}}{6}$$

$$x = \frac{-10 + \sqrt{124}}{6} \text{ SOLO VALDRAIA ESTE VALOR PUES ES EL QUE ES } > -2$$

15. Ejercicio

Halla los siguientes limites :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}; \text{ b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}; \text{ c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}; \text{ d) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

Solución

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{0}{0} \text{ aplicamos L'H; } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos 3x}{2\cos 2x} = \frac{3}{2};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}; \text{ aplicamos L'H; } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x}; \text{ aplicamos L'H } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0;$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^0 - e^{-0}}{\ln(1+0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-1}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} \text{ aplicamos L'H; } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x})(1+x) = 2;$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right); \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1) - \ln x}{(x-1)\ln x} \right) = \frac{0}{0};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1) - \ln x}{(x-1)\ln x} \right) \text{ aplicamos L'H; } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 \ln x + \frac{1}{x}(x-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{x-1}{x}}{x \ln x + x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x \ln x + x - 1} \right) \text{ aplicamos L'H } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 * \ln x + \frac{x}{x} + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x + 1 + 1} \right) = \frac{1}{2}$$

16. Ejercicio

Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\text{sen} x}$;

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\text{sen} x} = 0^{\text{sen}} = 0^0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\text{sen} x} \text{ aplicamos L'H; } y = x^{\text{sen} x} \text{ aplico Ln; } \ln y = \text{sen} x \ln x; \ln y = \frac{\ln x}{\frac{1}{\text{sen} x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\text{sen} x}}; \text{ aplicamos L'H } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\text{sen} x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\text{sen} x^2}{x \cos x} =$$

$$\text{Aplicamos L'H } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2 \text{sen} x \cos x}{\cos x - x \text{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2 \text{sen} x \cos x}{\cos x - x \text{sen} x} = \frac{2 * 0 * 1}{1 - 0 * 0} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0; \text{ siendo } y = x^{\text{sen} x} \Rightarrow \text{ Si el } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^{\text{sen} x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\text{sen} x} = 1;$$

17. Ejercicio

Calcula los siguientes: a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + 2 \cos x)^{1/\cos x}$

Solución

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2} = \frac{1 - \cos(1-1)}{(\ln 1)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2} \text{ aplico L'H } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{+\text{sen}(x-1)}{2 \ln x \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \text{sen}(x-1)}{2 \ln x} = \frac{1 \text{sen}(1x-1)}{2 \ln 1} = \frac{0}{0}$$

$$\text{aplico L'H } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{2 * \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cos(x-1)}{2} = \frac{1 \cos(1-1)}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + 2 \cos x)^{1/\cos x} = 1^\infty; \lim_{x \rightarrow \pi/2} e^{(1/\cos x)(1+2 \cos x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} e^{(2 \cos x / \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} e^2 = e^2$$

18. Ejercicio

Calcula el valor de a para que se cumpla la igualdad: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(1+ax)}{\text{sen} 2x} = 3$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(\cos ax)}{\text{Ln}(\cos 2x)} = 4$;

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\text{Ln}(e^{ax} - 1)} = 4; \text{ d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax+5} = e^2$$

Solución

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(1+ax)}{\text{sen} 2x} = \frac{\text{Ln}(1)}{\text{sen} 0} = \frac{0}{0}$$

$$\text{Aplicamos L'H } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(1+ax)}{\text{sen} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+ax}}{2 \cos 2x} = \frac{\frac{a}{1+a*0}}{2 \cos 2*0} = \frac{a}{2 \cos 0} = \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(1+ax)}{\text{sen} 2x} = \frac{a}{2} = 3; a = 6;$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(\cos ax)}{\text{Ln}(\cos 2x)} = \frac{\text{Ln}(\cos 0)}{\text{Ln}(\cos 0)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(\cos ax)}{\text{Ln}(\cos 2x)} \text{ aplicamos L'H } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-a \text{sen}(ax)}{\cos ax}}{\frac{2(-\text{sen}(2x))}{\cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \text{sen}(ax) \cos 2x}{2 \cos ax (-\text{sen}(2x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \text{sen}(ax) \cos 2x}{-2 \cos ax \text{sen}(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \cos 2x}{-2 \cos ax} * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \cos 2x}{-2 \cos ax} = \frac{a}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(2x)} \text{ aplicamos L'H } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{2 \cos 2x} = \frac{a}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos 2x)} = \frac{a}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} = 4; a^2 = 16; a = \pm 4$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\ln(e^{ax} - 1)} = 4; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\ln(e^{ax} - 1)} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\ln(e^{ax} - 1)} \text{ aplicamos L'H } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{a e^{ax}}{(e^{ax} - 1)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(e^{ax} - 1)}{a e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{ax} - 2}{a e^{ax}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{ax} - 2}{a e^{ax}}; \text{ aplicamos L'H } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ae^{ax}}{a e^{ax}} = \frac{2}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\ln(e^{ax} - 1)} = \frac{2}{a} = 4; a = \frac{1}{2};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{ax+5} = \infty^\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{ax+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{ax+5} = 1^\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(ax+5)(1+\frac{3}{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(ax+5)(\frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3ax+15}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3ax}{x}} * \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{15}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{3a} * \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{15}{x}} = e^{3a} * 1$$

$$\text{Dado que } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{ax+5} = e^{3a} = e^2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

19. Ejercicio

Determina en cada caso el valor de a que hace que la funcion sea continua en todo R

$$a) f(x) \begin{cases} \frac{1 - e^{3x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0; \end{cases} \quad b) f(x) \begin{cases} at^2 & \text{si } t \leq 1 \\ (t^2 - 1) \ln(t - 1) & \text{si } t > 1; \end{cases}$$

Solución

El punto donde la funcion pueda ser discontinua es en x = 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - e^{3x}}{x} \right) = \frac{0}{0} \text{ Aplicamos L'H; } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-3e^{3x}}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-3e^{3x}) = -3;$$

$$\text{Para que sea continua } -3 = a; a = -3;$$

$$b) f(x) \begin{cases} at^2 & \text{si } t \leq 1 \\ (t^2 - 1) \ln(t - 1) & \text{si } t > 1; \end{cases}$$

El punto donde la funcion pueda ser discontinua es en t = 1

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} (at^2) = a$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} f(1) = \lim_{t \rightarrow 1^+} ((t^2 - 1) \ln(t - 1)) =$$

$$(0 * \text{indefinido}) = \text{indefinido}$$

Para poder aplicar L'H transform

$$\lim_{x \rightarrow 1+} ((t^2 - 1) \ln(t - 1)) \text{ en } \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln(t - 1)}{\frac{1}{(t^2 - 1)}}$$

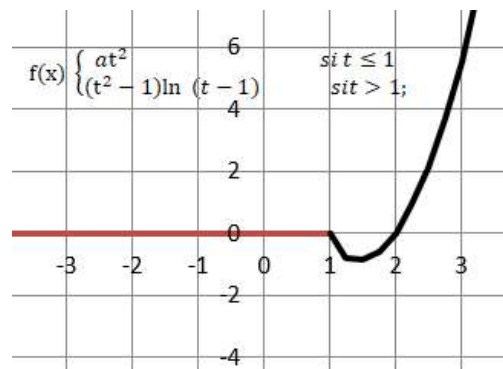
$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln(t - 1)}{\frac{1}{(t^2 - 1)}} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{1}{t-1}}{\frac{-2t}{(t^2 - 1)^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(t^2 - 1)^2}{-2t(t - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(t^2 - 1)^2}{(-2t^2 + 2t)} = \frac{0}{0} \text{ aplico L'H}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2 * (t^2 - 1) * 2t}{-4t + 2} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{4t * (t^2 - 1)}{-4t + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{4t^3 - 4t}{-4t + 2} = \frac{0}{-2} = 0;$$

Para que sea continua $0 = t$;



20. Ejercicio

Sea $f: (-\pi, \pi)$ en $\mathbb{R}$ la función derivable que para $x \neq 0$ verifica que $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\sen x}$;

a) ¿cuanto vale $f(0)$?

b) ¿cuanto vale $f'(0)$?

Solución

a) ¿cuanto vale $f(0)$?

Para que sea continua ha de cumplirse que $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\sen x} = \frac{0}{0}$;

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x^2)}{\sen x} \text{ aplico L'H } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{2x}{(1+x^2)}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x}{(1+x^2) \cos x} = \frac{0}{1} = 0;$$

$f(0) = 0$;

b) ¿cuanto vale $f'(0)$?

Para que sea derivable ha de cumplirse $f'(0) = \text{derivada de } \frac{\ln(1+x^2)}{\sen x}$

Aplicamos definición de la derivada $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h^2)}{\sen h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h^2)}{h \sen h} = \frac{0}{0} \text{ Aplico L'H } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h}{(1+h^2)}}{1 \sen h + h \cos h} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{(1+h^2)(\sen h + h \cos h)} = \text{Aplico L'H } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{2h(\sen h + h \cos h) + (1+h^2)(\cosh + \cos h - h \sen h)}$$

$$= \frac{2}{0 + (1+0)(2-0)} = \frac{2}{2} = 1; f'(0) = 1;$$

4 Extremos relativos. Curvatura y puntos de inflexión

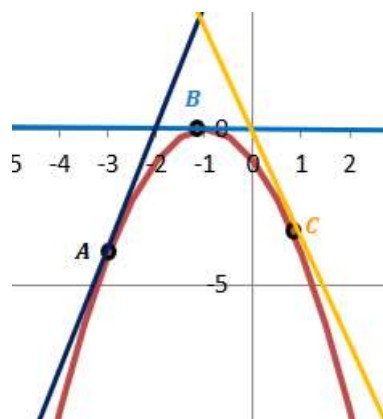
Si una función es derivable a, dado que $f'(a) = m =$ pendiente de la tangente a la función en a

- a) Si $f'(a) > 0$ la función es creciente en a
- b) Si $f'(a) < 0$ la función es decreciente en a
- c) Si $f'(a) = 0$; tendremos un máximo o un mínimo relativo

$f'(A) > 0$ La función es creciente en A

$f'(B) = 0$ La función presenta un máximo relativo en B

$f'(C) < 0$ La función es decreciente en C



21. Ejercicio

Señala las abscisas de todos los puntos donde la función presente extremos relativos sea $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

Solución

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3; f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 0;$$

Presentará extremos relativos en $x = 0$ y $x = +1$; $x = -1$;

22. Ejercicio

Sea f una función tal que $f'(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)$.

Obten las abscisas de los extremos relativos diciendo que son

Solución

$f'(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)$ se iguala a 0 para ver los extremos relativos

Presentará extremos relativos en $x = 1$ y $x = 3$; y $x = 5$;

Para ver que extremo es tomo un valor menor que 1 y veo si es creciente o decreciente

$$f'(0) = (-1)(-3)(-5) = -15 < 0 \text{ función decreciente} \Rightarrow x = 1 \text{ mínimo relativo}$$

$x = 3$ máximo relativo y $x = 5$ mínimo relativo

23. Ejercicio

Obten las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{1}{1 + |x - 1|} + \frac{1}{1 + |x - 4|}$

Solución

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x - 1|} + \frac{1}{1 + |x - 4|} \begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 + x - 1} + \frac{1}{1 - (x - 4)} \text{ para } 1 < x < 4 \\ f(x) = \frac{1}{1 - (x - 1)} + \frac{1}{1 - (x - 4)} \text{ para } x < 1 \\ f(x) = \frac{1}{1 + x - 1} + \frac{1}{1 + x - 4} \text{ para } x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{-x + 2} + \frac{1}{-x + 5} \text{ para } x < 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{-x + 5} \text{ para } 1 < x < 4 \\ f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 3} \text{ para } x > 4 \end{cases} \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2 - x} + \frac{1}{5 - x} \text{ para } x < 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{5 - x} \text{ para } 1 < x < 4 \\ f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 3} \text{ para } x > 4 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \frac{-1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(5-x)^2} = 0 \text{ para } x < 1; \\ f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(5-x)^2} = 0 \text{ para } 1 < x < 4 \\ f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{(x-3)^2} = 0 \text{ para } x > 4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \frac{(5-x)^2(2-x)^2}{(2-x)^2(5-x)^2} = \frac{2x^2 - 12x + 29}{(2-x)^2(5-x)^2} = 0; 2x^2 - 12x + 29 = 0 \\ f'(x) = \frac{+x^2 - (5-x)^2}{x^2(5-x)^2} = \frac{25 - 10x}{x^2(5-x)^2} = 0; -25 + 10x = 0; x = 2,5 \\ f'(x) = \frac{-x^2 - (x-3)^2}{x^2(x-3)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 9}{x^2(x-3)^2} = 0; 2x^2 + 6x - 9 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 2x^2 - 12x + 29 = 0; x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 29}}{2 \cdot 2} = \frac{12 \pm \sqrt{-88}}{4} \text{ (indeterminado)} \\ f'(x) = -25 + 10x = 0; x = 2,5 \\ f'(x) = -2x^2 + 6x - 9 = 0; x = \frac{-6 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-9)}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-68}}{4} \text{ (indeterminado)} \end{array} \right.$$

24. Ejercicio

Considera la función $f(x) = x g(x)$ Sabiendo que :

I) La función $g(x)$ es continua derivable y tiene un máximo en $x = 1$;

II) $f(1) = 4$;

a) tiene a la función f un máximo en $x = 1$?

b) si además sabemos que $g(x) = ax^2 + bx + c$

calcula los valores de a, b, c para que f tenga un mínimo en $x = 0$

Solución

calcula los valores de a, b, c para que f tenga un mínimo en $x = 0$;

$$f'(x) = 1 g(x) + x g'(x) = g(x) + x g'(x);$$

$$g'(x) = 0 \text{ tiene un máximo} \Rightarrow f'(x) = g(x) + x g'(x) = g(x) + x \cdot 0; f'(x) = g(x);$$

$$f'(x) = g(x); \text{ dado que } g(x) = 4 \Rightarrow f'(x) = 4 \text{ por lo que la función } f \text{ es creciente en } x = 1;$$

b) Si además sabemos que $g(x) = ax^2 + bx + c$

calcula los valores de a, b, c para que f tenga un mínimo en $x = 0$

$$g(x) = ax^2 + bx + c;$$

$$\text{Dado que } g(x) \text{ tiene un máximo en } x = 1 \Rightarrow g'(x) = 2ax + b = 0;$$

$$g'(1) = 2a \cdot 1 + b = 0; \Rightarrow b = -2a;$$

Por otro lado sabemos $f(x) = x g(x)$

$$f'(x) = g(x) + x g'(x) = ax^2 + bx + c + x(2ax + b) = 3ax^2 + 2x + c;$$

$$\text{Si tiene un mínimo en } x = 0; f'(0) = 0 + 0 + c = 0; c = 0;$$

$$\text{Dado que } g(1) = 4; g(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow g(1) = a(1)^2 + b(1) = 4; a + b = 4;$$

$$\text{sustituyo } b \text{ por su valor; } b = -2a; a - 2a = 4; a = -4; b = 8;$$

$$g(x) = ax^2 + bx + c; \text{ sustituyo } g(x) = -4x^2 + 8x; g(x) = -x^2 + 2x;$$

25. Ejercicio

Determina un punto de la curva $f(x) = xe^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima

Solución

$$f(x) = xe^{-x^2} = \frac{x}{e^{x^2}}; \ln f(x) = \ln(xe^{-x^2}) = \ln x - x^2 \ln e = \ln x - x^2$$

$$\ln f(x) = \ln x - x^2; \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ derivamos } \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1-2x^2}{x};$$

$$f'(x) = xe^{-x^2} \left(\frac{1-2x^2}{x} \right) = \frac{x(1-2x^2)}{xe^{x^2}} = \frac{1-2x^2}{e^{x^2}}$$

Para que $f'(x)$ sea máxima calculo la derivada de $f'(x) = f''(x)$

$$f''(x) = \frac{(0-4x)e^{x^2} - (1-2x^2)(e^{x^2} * 2x)}{(e^{x^2})^2} = \frac{e^{x^2}(-4x - (2x - 2x^2 * 2x))}{(e^{x^2})^2} = \frac{-4x - 2x + 4x^3}{e^{x^2}}$$

$$f''(x) \text{ para que sea maximo o minimo} = 0; f''(x) = \frac{4x^3 - 6x}{e^{x^2}} = 0; 4x^3 - 6x = 0; 2x(2x^2 - 3) = 0;$$

$$2x(2x^2 - 3) = 0; \text{ soluciones } \begin{cases} x = 0; \\ x = +\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \text{ hallo } f'' \text{ para distintos valores}$$

$(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ para $x = -2$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$ Parax = -1	0	$(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$ Parax = 1	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$ Parax = 2
- decreciente	0 mínimo	+ creciente	0 máximo	- decreciente	0 mínimo	+ creciente

26. Ejercicio

Sea la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

a) Calcula c sabiendo que que la recta tangente en $x = 0$ es horizontal

b) Para el valor de c calcula a y b sabiendo que la funcion tiene un ext – remo relativo en el punto

$x = -2$ y que corta al eje X en $x = 1$;

c) Para los valores obtenidos calcula extremos relativos , crecimeitno y decrecimiento

Solución

a) Calcula c sabiendo que que la recta tangente en

$x = 0$ es horizontal

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$ para que la tangente sea horizontal en $x = 0$;

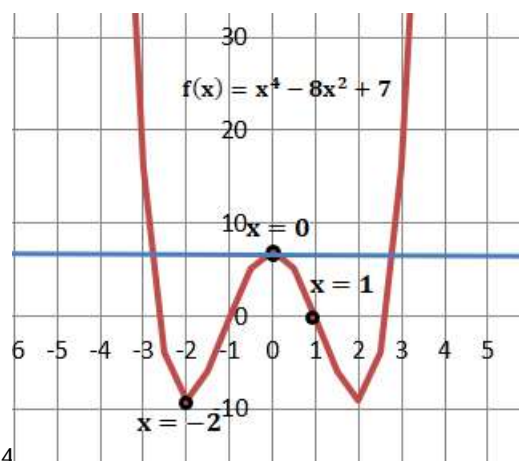
$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = 0;$$

$$f'(0) = 0 + 0 + 0 + c; \underline{c = 0};$$

b) Para el valor de c calcula a y b sabiendo

que la funcion tiene un extremo relativo

en el punto $x = -2$ y que corta al eje X en $x = 1$;



$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 7;$$

si tiene un extremo en $x = -2 \Rightarrow$ para $x = -2$; $f'(-2) = 0$; $4(-2)^3 + 3a(-2)^2 + 2b(-2) = 0$
 $-32 + 12a - 4b = 0$;

si corta al eje X en $x = 1 \Rightarrow$ que para $x = 1$ $y = 0$; $f(1) = 1^4 + a1^3 + b1^2 + 7 = 0$;

$$0 = 1 + a + b + 7; 0 = a + b + 8;$$

$$\begin{cases} -32 + 12a - 4b = 0 \\ 8 + a + b = 0 \end{cases} \begin{cases} -32 + 12a - 4b = 0 \\ 32 + 4a + 4b = 0 \end{cases} \begin{matrix} 16a = 0; \\ a = 0; \end{matrix} b = -8;$$

c) Para los valores obtenidos calcula extremos relativos, crecimiento y decrecimiento

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7; f(x) = x^4 - 8x^2 + 7;$$

27. Ejercicio

Para cada h se considera la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + h$

a) Halla los valores en que la función alcanza los valores máximos y mínimos

b) Encuentra el valor de h para que el valor de f en el mínimo local hallado antes sea 0;

Solución

a) Halla los valores en que la función alcanza los valores máximos y mínimos

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + h$; $f'(x) = 6x^2 - 6x = 0$ los valores máximos y mínimos estarán en

$$6x(x - 1) = 0; x = 0; y x = 1;$$

$(-\infty, 0)$ para $x = -2$	0	$(0, 1)$ Para $x = 0,5$	1	$(1, \infty)$ Para $x = 2$
+	0	-	0	+
creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

b) Encuentra el valor de h para que el valor de f en el mínimo local hallado antes sea 0;

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + h; \text{ la función presenta un mínimo en } x = 1; f(x) = 2 * 1^3 - 3 * 1^2 + h = 2 - 3 + h$$

$$f(x) = -1 + h \text{ Para que } f(x) \text{ sea } 0 \text{ h tendrá el valor } 1; h = 1;$$

28. Ejercicio

Bajo que condiciones de a, b, c, d podemos asegurar que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; con $a \neq 0$; es estrictamente creciente o decreciente en R

Solución

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

Si la función tuviera máximos o mínimos sería en los puntos donde $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$;

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0; x = \frac{-2b \pm \sqrt{(-2b)^2 - 4(3a)c}}{2 * 3a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a};$$

si x tuviera dos soluciones tendría un máximo y un mínimo pero como solo a de ser

creciente o decreciente, solo tendrá una solución para que esto suceda $4b^2 - 12ac$ ha de ser igual a 0;

$$4b^2 - 12ac = 0; b = \pm \sqrt{\frac{12ac}{4}}; b = \pm \sqrt{3ac}; ac \geq 0;$$

29. Ejercicio

Calcula para la función $f(x) = (x+1)e^{-x}$ intervalos de crecimiento, decrecimiento extremos relativos, puntos de inflexión e intervalos de curvatura

Solución

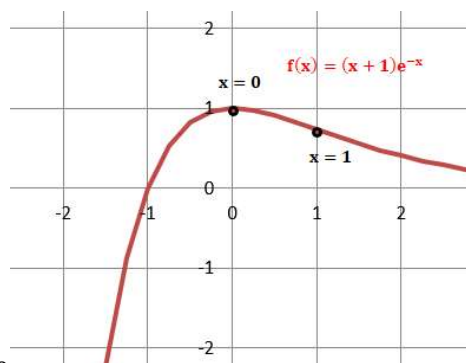
$f(x) = (x+1)e^{-x}$ Hallamos máximos y mínimos

$$f'(x) = e^{-x} - 1e^{-x}(x+1)$$

$$= e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x} \text{ igualamos a } 0;$$

$$f'(x) = -xe^{-x} = 0;$$

se anula en $x = 0$; en $x = 0$ habrá un máximo o mínimo



Intervalo	$(-\infty, 0)$ para $x = -1; f'(x) = +$	0	$(0, \infty)$ Para $x = 1; f'(x) = -$
Signo de $f'(x)$	+	0	-
A	creciente	máximo	decreciente

Hallamos la segunda derivada $f''(x) = -1e^{-x} + (-1e^{-x} * -x) = -e^{-x} + (xe^{-x}) = e^{-x}(x-1)$

$$f''(x) = e^{-x}(x-1) = 0; \Rightarrow x = 1;$$

Intervalo	$(-\infty, 1)$ para $x = 0; f''(x) = +$	1	$(1, \infty)$ Para $x = 2; f''(x) = +$
Signo de $f''(x)$	-	0	+
F(x)	cóncava	Punto de inflexión	Convexa

30. Ejercicio

Sea la función $f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}$

a) Halla puntos de corte con los ejes y asíntotas

b) Calcula los intervalos de crecimiento, decrecimiento y extremos relativos

c) Estudia curvatura y puntos de inflexión

Solución

a) Halla puntos de corte con los ejes y asíntotas

Para $x = 0$; $f(x) = x^3 + \frac{3}{x} = \infty$; No corta al eje X;

Asíntotas Verticales $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 + 3}{x} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 + 3}{x} = +\infty$ asíntota vertical en $x = 0$

Para $y = 0$; $0 = f(x) = \frac{x^4 + 3}{x} = 0$; $x^4 + 3 = 0$; $x =$ indeterminado No corta al eje Y

Asíntotas Horizontales $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{x^4 + 3}{x} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{x^4 + 3}{x} = +\infty$ No tiene asíntota Horizontal

Asíntotas Oblicuas $m = \lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{F(x)}{x}$; $m = \lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{\frac{x^4 + 3}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{x^4 + 3}{x^2} = +\infty$

$m = \lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{\frac{x^4 + 3}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{x^4 + 3}{x^2} = +\infty = +\infty$ No tiene asíntota Oblicua

b) Calcula los intervalos de crecimiento,

$$f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}; f'(x) = \frac{4x^3 \cdot x - 1(x^4 + 3)}{x^2} = \frac{4x^4 - x^4 - 3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2} = 0; 3x^4 = 3; x = \pm 1;$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$$

Intervalo	$(-\infty, -1)$ para $x = -2$; $f'(x) = +$	-1	$(-1, 0)$ para $x = -0,5$ $f'(x) = -$	$(0, 1)$ para $x = 0,5$ $f'(x) = +$	0	$(1, \infty)$ Para $x = 2$; $f'(x) = +$
Signo de $f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$F(x)$	creciente	máximo	decreciente	decreciente	mínimo	creciente

c) Estudia curvatura y puntos de inflexión

Hallamos la derivada segunda $f''(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$;

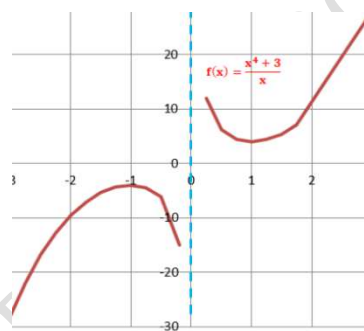
$$f''(x) = \frac{12x^3x^2 - 2x(3x^4 - 3)}{x^4};$$

$$f''(x) = \frac{12x^5 - 6x^5 + 6x}{x^4} = \frac{6x}{x^4} = 0; x = 0;$$

$f''(x)$ es negativa para valores de $x < 0$

y positiva para valores de $x > 0$

$f(x)$ es convexa para $x (-\infty, 0)$ y concava para $x(0, \infty)$



31. Ejercicio

De la función definida $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que:

a) tiene un máximo en $x = -1$

b) Su gráfica corta al eje X en $x = -2$

c) Tiene un punto de inflexión en $x = 0$;

Calcular a, b, c, d sabiendo que la recta tangente a la curva en $x = 2$ tiene un pendiente 9;

Solución

a) tiene un máximo en $x = -1$;

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ su derivada $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ en $x = -1$ vale 0;

$$f'(-1) = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0; 3a - 2b + c = 0;$$

b) Su gráfica corta al eje X en $x = -2$

$$f(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = 0; -8a + 4b - 2c + d = 0$$

La recta tangente a la curva en $x = 2$ tiene un pendiente 9

$$f'(2) = 3a(2)^2 + 2b(2) + c = 9; 12a + 4b + c = 9;$$

c) Tiene un punto de inflexión en $x = 0$;

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ su derivada } f''(x) = 6ax + 2b;$$

$$f''(0) = 6a \cdot 0 + 2b = 0; 2b = 0; b = 0$$

$$\begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = 0 \\ 12a + b + c = 0 \\ b = 0; \end{cases} \begin{cases} 3a + c = 0 \\ -8a - 2c + d = 0 \\ 12a + 4b + c = 9 \end{cases} \begin{cases} 3a + c = 0 \\ 12a + c = 9 \end{cases} \begin{cases} 9a = 9; a = 1; c = -3; \end{cases}$$

$$\text{despejo en } -8a + 4b - 2c + d = 0; -8 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 2(-3) + d = 0; d = 2;$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

32. Ejercicio

Demuestra que la curva de la ecuación $y = f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no tiene ningún punto de inflexión. Halla la ecuación de la tangente a la curva en el punto (x_0, y_0) siendo x_0 el punto que hace mínima $f'(x)$.

Solución

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1;$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

$f''(x) = 12x^2 + 2$ para que haya punto de inflexión estaría en $f''(x) = 0$;

$$f''(x) = 12x^2 + 2 = 0; x = \sqrt{-\frac{2}{12}} \text{ no existe en } \mathbb{R}$$

Tangente a la curva en el punto (x_0, y_0) siendo x_0 el punto que hace mínima $f'(x)$

recta tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$

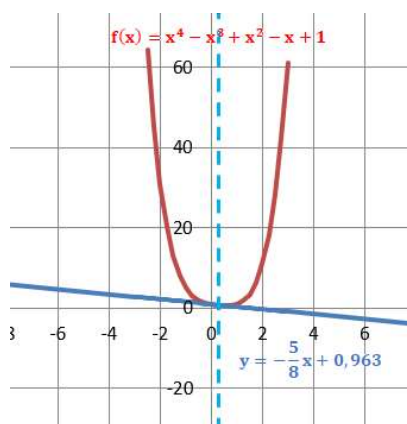
$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \text{ en el punto } x_0 \Rightarrow m = 4x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0 - 1$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x + 2 = 0; \text{ para que sea mínima } f'''(x_0) = 24x_0 - 6 = 0; x_0 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}; x_0 = \frac{1}{4}$$

$$m = 4x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0 - 1 \text{ para } x_0 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = -\frac{5}{8};$$

$$\text{en } x = \frac{1}{4}; y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1; \text{ sustituyo } \Rightarrow y = \frac{205}{256}$$

$$\text{recta tangente } y - \frac{205}{256} = -\frac{5}{8}\left(x - \frac{1}{4}\right); y = -\frac{5}{8}x + \frac{7885}{8192};$$



33. Ejercicio

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$.

Determina a y b sabiendo que la recta tangente

a la curva en el punto de inflexión es la recta

$$y = 2x + 3;$$

Solución

Hallamos el punto de inflexión de la curva $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$

$$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$$

$$f''(x) = 12x + 24 = 0; x = -2$$

$$\text{Punto de inflexión } x = -2; y = 32 - 2a + b$$

$$f'(x) = 6x^2 + 24x + a; \text{ La recta tangente en } x = -2 \text{ será } m = -24 + a;$$

$$\text{como ha de ser igual a la recta } y = 2x + 3 \Rightarrow m = 2 = -24 + a; a = 26;$$

recta tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$ sustituyo recta tangente

$$y - (32 - 2a + b) = 2(x - (-2)) \text{ sustituyo } a = 26;$$

$$y - (32 - 2 \cdot 26 + b) = 2x + 4 \Rightarrow y + 20 - b = 2x + 4; y = 2x - 16 + b$$

$$\text{Para que } y = 2x - 16 + b, \text{ sea igual a la recta } y = 2x + 3 \Rightarrow -16 + b = 3; b = 19;$$

$$\text{La curva será } f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 26x + 19;$$

34. Ejercicio

Calcula los valores del parametro a siendo $a \neq 0$, que hacen que las tangentes a la curva de ecuacion $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en los puntos de inflexion sean perpendiculares

Solución

Hallamos puntos de inflexion $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$; $y' = 4ax^3 + 6ax^2 - a$;

$$y'' = 12ax^2 + 12ax = 12ax(x+1) = 0; \text{ Puntos de inflexion } \begin{cases} x=0; y=1512 \\ x=-1; y=1512 \end{cases} (0,1512) \quad (-1,1512)$$

La pendiente $y' = 4ax^3 + 6ax^2 - a$; a la curva en los puntos de inflexion $\begin{cases} x=0; m_1 = -a; \\ x=-1; m_2 = -4a + 6a - a \end{cases}$

$$\begin{cases} m_1 = -a; \\ m_2 = -4a + 6a - a = a \end{cases} \text{ si han de ser perpendiculares se ha de cumplir } m_1 * m_2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = -1; \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{rectas para } a = 1 \begin{cases} s; y = x * 1 + n_1; \text{ en } (0, 1512) \Rightarrow 1512 = 1 * 0 + n_1 = 1512; \\ t; y = -\frac{1}{1}x + n_2; \text{ en } (-1, 1512); \Rightarrow 1512 = -1(-1) + n_2; n_2 = 1511; \end{cases}$$

$$\text{rectas tangentes } \begin{cases} s: y = x + 1512; \\ t: y = -x + 1511; \end{cases}$$

$$\text{rectas para } a = -1 \begin{cases} s; y = x * (-1) + n_1; \text{ en } (0, 1512) \Rightarrow 1512 = 1 * 0 + n_1 = 1512; \\ t; y = -\frac{1}{1}x + n_2; \text{ en } (-1, 1512); \Rightarrow 1512 = -1(-1) + n_2; n_2 = 1511; \end{cases}$$

$$\text{rectas tangentes } \begin{cases} s: y = x + 1512; \\ t: y = -x + 1511; \end{cases}$$

Para $a = 1$; ecuacion de la curva $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512 \Rightarrow y = 1x^4 + 2x^3 - 1x + 1512$

$$y = x^4 + 2x^3 - x + 1512$$

Para $a = -1$; ecuacion de la curva $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512 \Rightarrow y = -x^4 - 2x^3 + 1x + 1512$

$$y = -x^4 - 2x^3 + x + 1512$$

35. Ejercicio

Sea $P(x)$ un poligono de grado 4 tal que :

- $P(x)$ es una funcion Par
- Dos de sus raices son $x = 1$ y $x = -\sqrt{5}$
- $P(0) = 5$

Se pide:

a) Hallar sus puntos de inflexion

b) Dibuja su grafica

Solución

Si el poligono es par de grado 4 tendra 4 raices simetricas

$$x = \pm 1 \text{ y } x = \pm\sqrt{5};$$

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) + d = 0;$$

$$P(x) = (x^2-1)(x^2-5) + d = x^4 - 6x^2 + 5 = 0; \Rightarrow d = 0;$$

$$P(x) = x^4 - 6x^2 + 5 = 0;$$

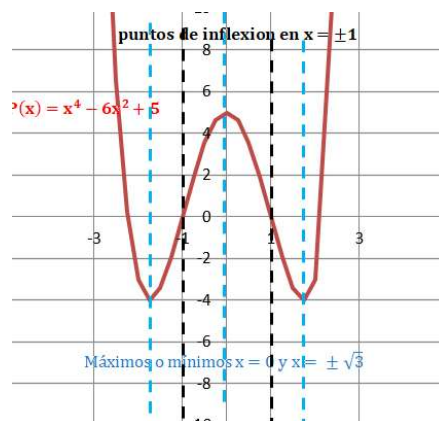
a) Hallar sus puntos de inflexion

$$P'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) = 0;$$

$$\text{Maximos o minimos } x = 0 \text{ y } x = \pm\sqrt{3}$$

$$P''(x) = 12x^2 - 12 = 0; \text{ puntos de inflexion en } x = \pm 1$$

Se da valores a x (puntos de maximo o minimo, puntos de inflexion etc y se dibuja la grafica



-3	-2,75	-2,5	-2,25	-2	-1,75	-1,5	-1,25	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	3
32	16,82	6,563	0,254	-3	-4	-3,44	-1,93	0	1,941	3,563	4,629	5	4,629	3,563	1,941	0	-1,93	-3,44	-4	-3	32

36. Ejercicio

Sea f una función real de variable real derivable con derivada continua en todos los puntos y $f(0) = 1$;

$f(1) = 2$, $f'(0) = 3$ y $f'(1) = 4$;

Calcula:

a) $g'(0)$ sabiendo que $g(x) = f(x + f(0))$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$

Solución

a) $g'(0)$ sabiendo que $g(x) = f(x + f(0))$;

calculamos $g'(x) = f'(x + f(0))$; $\Rightarrow g'(0) = f'(0 + f(0)) = f'(0 + 1) = f'(1) = 4$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \frac{2(f(0))^2 - f(0+1)}{e^0 - 1} = \frac{2(1^2 - f(0+1))}{1 - 1} = \frac{2 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ indeterminación

Aplicamos L'Hopital $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x)f'(x) - f'(x+1)}{e^x} = \frac{4f(0)f'(0) - f'(0+1)}{e^0} =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \frac{4 * 1 * 3 - 4}{1} = 8$;

5 Aplicación de las derivadas. Optimización

En el apartado Exámenes podeis ver varios problemas de Optimización

37. Ejercicio

Para anestesiar a una persona hacen falta 20 mg de anestesia por cada Kg de peso.

El anestésico se elimina de la sangre con una rapidez proporcional a la cantidad presente

Si tarda 2 horas en reducirse a la mitad. ¿Calcula aproximadamente la dosis necesaria para mantener anestesiada una persona de 60Kg durante 1 hora?

Solución

Cantidad de anestesia en sangre $A(t)$ en un tiempo t

$A'(t)$ = reduccion de anestesia en la sangre y dice el problema que es proporcional a la anestesia en sangre.

$A'(t) = A(t) * k$ donde $k = \frac{A'(t)}{A(t)}$ donde k es la derivada de la funcion $F(t) = \ln A(t)$

$F(t) = \ln A(t) = kt + b; A(t) = e^{kt} * e^b$ Llamando a $e^b = M; A(t) = e^{kt} * M$

Donde a las dos horas la anestesia en el cuerpo $A(t+2) = \frac{A(t)}{2}$

$A(t) = e^{kt} * M$ sustituyo $\Rightarrow A(t) = e^{k(t+2)} * M = \frac{e^{kt}}{2} * M \Rightarrow e^{kt+2k} = e^{kt} * e^{2k} = \frac{e^{kt}}{2}$

Por lo que $e^{2k} = \frac{1}{2}; k = -0,34657;$

La anestesia que hay que aplicar = $0,020 * 60 = 1,2\text{kg} = 1200 \text{ mg};$

Si ha de estar anestesiada una hora al cabo de una hora tendra en sangre 1200mg

Para anestesiarse a una persona hacen falta 20 mg de anestesia por cada Kg de peso.

$A(t) = e^{kt} * M$ sustituimos $\Rightarrow A(t) = e^{0,34657t} * M = 1200; M = 1702,8811;$

La funcion queda definida $A(t) = e^{0,34657t} * 1702,8811$

38. Ejercicio

En el punto B de la superficie de un lago dejamos

una gaviota en un bote. La gaviota quiere ir al

punto T. Si al volar sobre el agua gasta doble

energía que al volar sobre tierra.

Calcular la direccion de vuelo que

ha de elegir la gaviota para consumir

la minima energia en llegar de B a T.

Distancia AT = 2000m y AB = 500m

Solución

Suponemos que se desplace de B a P y luego por tierra de P a T

Distancia AP = x; Distancia BP = $\sqrt{500^2 + x^2}$; energia gastada por metro recorrido = e

Energia gastada en llegar de BT = Energia gastada de BP + energia gastada de PT = y

Ergia total $f(x) = e(\sqrt{500^2 + x^2}) + \frac{(2000 - x)e}{2}$

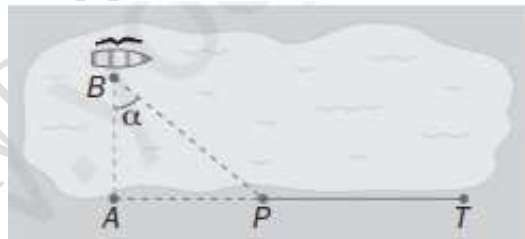
$f'(x) = e * \frac{1}{2\sqrt{500^2 + x^2}} * 2x + \frac{-1e}{2} = \frac{e * 2x - 1e}{2\sqrt{500^2 + x^2}} = \frac{ex}{\sqrt{500^2 + x^2}} - \frac{1e}{2} = e(\frac{x}{\sqrt{500^2 + x^2}} - \frac{1}{2});$

para que sea un maximo o mino = 0;

$e(\frac{2x - \sqrt{500^2 + x^2}}{2\sqrt{500^2 + x^2}}) = 0; 2x - \sqrt{500^2 + x^2} = 0; 4x^2 = 500^2 + x^2; 3x^2 - 500^2 = 0; x^2 = \frac{500^2}{3};$

$x = \sqrt{\frac{500^2}{3}}; x = \frac{500}{\sqrt{3}};$

Distancia AP = x = $\frac{500}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{AP}{AB} = \frac{\frac{500}{\sqrt{3}}}{500} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \alpha = 30^\circ$



39. Ejercicio

la funcion que nos da la posicion, en metros
de un movil con trayectoria rectilinea es

$e(t) = 2 + 30t - 3t^2$; siendo t el tiempo en segundos:

- calcula su velocidad a los 6 seg
- Calcula su aceleracion. ¿ Que tipo de movimiento es?
- ¿ En que momento cambia de sentido su trayectoria?
- ¿ Para que t vuelve a pasar por el punto de partida?

Solucion

- calcula su velocidad a los 6 seg

$$e(6) = 2 + 30 \cdot 6 - 3 \cdot 6^2 =$$

$$e(6) = 2 + 180 - 108 = 74 \text{ m}; e = 74 \text{ m};$$

velocidad; $v(t)$ = es la derivada del espacio respecto

al tiempo $\Rightarrow v(t) = e'(t) = 30 - 6t$;

$$v(6) = e'(6) = 30 - 6 \cdot 6 = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

- Calcula su aceleracion.

¿ Que tipo de movimiento es?

$a(t)$ = derivada de la velocidad respecto al tiempo

$$a(t) = v'(t) = -6;$$

El movimiento es un movimiento uniformemente acelerado con velocidad negativa (de frenado)

La velocidad inicial es de $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

- ¿ En que momento cambia de sentido su trayectoria?

Cambia de sentido cuando la funcion de la velocidad alcance un maximo

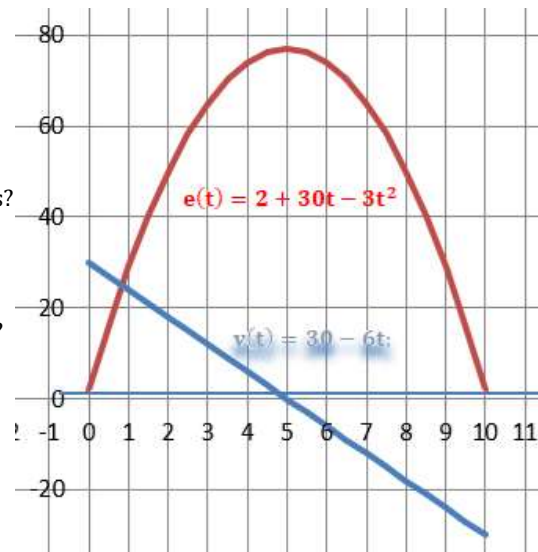
$$v(t) = e'(t) = 30 - 6t = 0; t = \frac{30}{6} = 5 \text{ segundos}$$

- ¿ Para que t vuelve a pasar por el punto de partida?

el punto de partida es en el tiempo $t = 0$; $e(t) = 2 + 30t - 3t^2$;

$$e(0) = 2 \text{ m}$$

$$e(t) = 2 + 30t - 3t^2 = 2; 30t - 3t^2 = 0; t(30 - 3t) = 0; t = 0 \text{ seg y } t = 10 \text{ seg}$$



40. Ejercicio

Calcula la base y la altura del triángulo isosceles de
perimetro 8 y area maxima

Solución

X = lado del triángulo B = base del triángulo y H altura

Perimetro del triángulo = $2x + B = 8$; $B = 8 - 2x$;

$$H = \sqrt{x^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{8-2x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - (4-x)^2}$$

$$\text{Area de Triangulo} = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{(8-2x) \cdot \sqrt{x^2 - (4-x)^2}}{2}$$

$$A = (4-x) \cdot \sqrt{x^2 - (4-x)^2} = (4-x) \cdot \sqrt{x^2 - (16 + x^2 - 8x)} = (4-x) \cdot \sqrt{8x-16}$$

Hallamos la derivada para ver puntos maximos y minimos

$$A' = (-1) \cdot \sqrt{8x-16} + \frac{1}{2\sqrt{8x-16}} \cdot 8(4-x) =$$

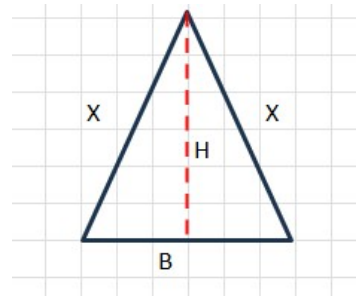
$$A' = -\sqrt{8x-16} + \frac{32-8x}{2\sqrt{8x-16}} = \frac{(32-8x) - \sqrt{8x-16} \cdot 2\sqrt{8x-16}}{2\sqrt{8x-16}} = \frac{(32-8x) - (16x-32)}{2\sqrt{8x-16}}$$

$$A' = \frac{32-8x-16x+32}{2\sqrt{8x-16}} = \frac{64-24x}{2\sqrt{8x-16}} = 0 \text{ para hallar maximo;}$$

$$64-24x=0; x = \frac{64}{24} = \frac{8}{3};$$

$$x = \frac{8}{3}; B = 8 - 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{3}; B = \frac{8}{3} \text{ Triangulo equilatero es el máximo}$$

$$H = \sqrt{x^2 - (4-x)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - \left(4 - \frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{48}{9}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}; H = \frac{4}{\sqrt{3}}$$



41. Ejercicio

En un rectangulo de 4 m de perimetro se sustituyen los lados
por semicircunferencias exteriores .

¿ Entre que valores está comprendida el area de la figura
resultante? Calcúlala

Solución

x = lado del rectangulo = diametro circunferencia mayor

y = lado rectangulo = diametro circunferencia menor

$$\text{Perimetro del rectangulo} = 2x + 2y = 4; y = \frac{4-2x}{2} = 2-x;$$

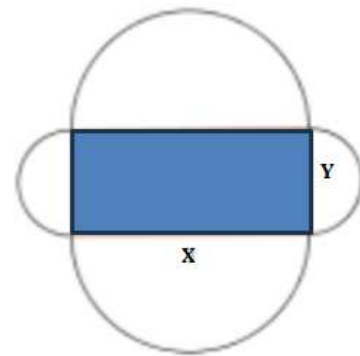
$$\text{Area del rectangulo} = x \cdot y = x(2-x) = 2x - x^2$$

$$\text{Area de la circunferencia mayor} = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{4}$$

$$\text{Area de la circunferencia menor} = \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 = \frac{\pi(4+x^2-4x)}{4}$$

$$\text{Area total A} = 2x - x^2 + \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi(4+x^2-4x)}{4} = \frac{8x-4x^2+\pi x^2+\pi(4+x^2-4x)}{4} =$$

$$\frac{8x-4x^2+\pi x^2+4\pi+\pi x^2-4\pi x}{4} = \frac{8x-4x^2+2\pi x^2+4\pi-4\pi x}{4} = \frac{(2\pi-4)x^2+(8-4\pi)x+4\pi}{4}$$



Para que el area sea maxima hallo e igualo a 0 => $A' = \frac{2(2\pi - 4)x + (8 - 4\pi)}{4} = 0$;

$2(2\pi - 4)x + (8 - 4\pi) = 0$; $(4\pi - 8)x + (8 - 4\pi) = 0$; $(\pi - 2)x + (2 - \pi) = 0$;

$x = \frac{-(2 - \pi)}{(\pi - 2)} = \frac{(\pi - 2)}{(\pi - 2)} = 1$; $x = 1$ e $y = 1$

$A = 2x - x^2 + \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi(4 + x^2 - 4x)}{4}$ sustituimos => $A = 2 - 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi(4 + 1 - 4)}{4}$

$A = 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{4 + 2\pi}{4}$

$A' = \frac{2(2\pi - 4)x + (8 - 4\pi)}{4}$

Intervalo	$(-\infty, 1)$ para $x = 0$; $A' = 2 - \pi$	1	$(1, \infty)$ Para $x = 2$; $A' = \pi$
Signo de A'	-	0	+
A	decreciente	mínimo	creciente

42. Ejercicio

Calcula el área del triangulo de máxima área que se puede formar en el primer cuadrante con los ejes de coordenadas y la tangente a la grafica $y = e^{-x}$;

Solución

La tangente a la grafica estará en un punto a de la grafica $y = e^{-x}$ el punto de la grafica será (a, e^{-a})

La pendiente de la tangente a la curva sea $y' = -e^{-x} = m$; en a será : $m = -e^{-a}$

La ecuacion de la pendiente en el punto (a, e^{-a}) será $y = mx + n$; $e^{-a} = -e^{-a} * a + n$;

$n = e^{-a} + e^{-a} * a = e^{-a}(1 + a)$; la tangente será $y = -e^{-a}x + e^{-a}(1 + a) = e^{-a}(1 + a - x)$

$y = e^{-a}(1 + a - x)$

puntos de corte con eje X => $0 = e^{-a}(1 + a - x)$;

$0 = 1 + a - x$; $x = (a + 1)$

puntos de corte con eje Y => $y = e^{-a}(1 + a - 0)$;

$y = e^{-a}(1 + a)$

Area del triangulo

$A = \frac{(a + 1) * e^{-a}(1 + a)}{2} = \frac{(1 + a)^2 * e^{-a}}{2}$

$A' = \frac{2(1 + a) * e^{-a} - e^{-a}(1 + a)^2}{4}$

$A = \frac{e^{-a}(1 + a)(2 - (1 + a))}{4} = \frac{e^{-a}(1 + a)(1 - a)}{4} = \frac{e^{-a}(a^2 - 1)}{4}$

$A'' = \frac{-e^{-a}(a^2 - 1) + 2a(e^{-a})}{4} = \frac{e^{-a}(a^2 + 2a + 1)}{4} = 0$; => $a^2 + 2a - 1 = 0$; $a = \pm 1$;

Area del triangulo para $a = 1$; $A = \frac{(1 + 1)^2 * e^{-1}}{2} = \frac{2}{e}$

recta tangente $y = e^{-a}(1 + a - x)$ para $a = 1$ => $y = e^{-1}(2 - x) = \frac{2 - x}{e}$; $y = \frac{2 - x}{e}$

