

Integrales

Contenido

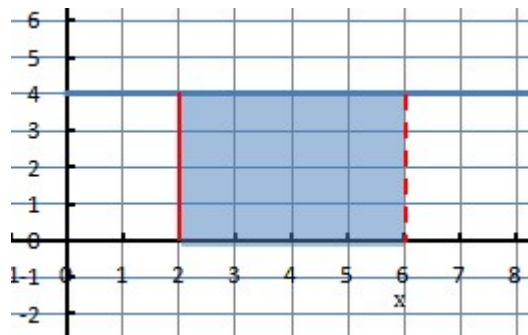
1	ÁREAS BAJO UNA RECTA O CURVA.....	2
1.1	TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.....	3
2	INTEGRALES	4
2.1	INTEGRALES INMEDIATAS.....	4
2.2	PROPIEDADES.....	4
2.3	CUADRO DE INTEGRALES INMEDIATAS.....	5
3	INTEGRALES DEFINIDAS REGLA DE BARROW.....	13
3.1	FUNCION CONTINUA Y POSITIVA EN EL INTERVALO	13
3.2	FUNCION CONTINUA Y NEGATIVA EN EL INTERVALO	13
3.3	FUNCION CONTINUA Y CON CAMBIO DE SIGNO EN EL INTERVALO ..	14
4	APLICACIONES DE LAS INTEGRALES	19
4.1	CÁLCULO ÁREAS Y VOLÚMENES.....	19
4.2	CÁLCULO DEL MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO	23
4.3	CALCULO DEL TRABAJO MECÁNICO.....	24

1 Áreas bajo una recta o curva

Si las áreas están limitadas por rectas, el cálculo se puede realizar aplicando formulas sencillas y áreas de polígonos

1. Ejercicio

Hallar el area limitada por el eje de abscisas,
una recta horizontal $y = 4$, ($f(x) = 4$)
y dos rectas verticales $x = 2$ y $x \geq 2$
el area será, $A = (x - 2)4$;
 $A = 4x - 8$; $A(x) = 4x - 8$;



$A'(x) = 4$ es la funcion que define la región $f(x) = 4$

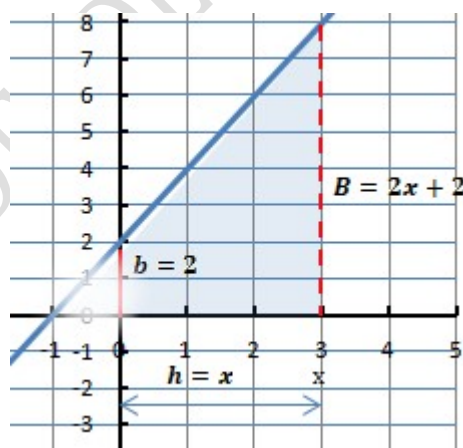
2. Ejercicio

Hallar el area limitada por el eje de abscisas,
una recta $y = 2x + 2$, ($f(x) = 2x + 2$)
y dos rectas verticales $x = 0$ y $x \geq 0$
el area será el area de un trapecio

$$A = \frac{B + b}{2} * h; B = 2x + 2; b = 2; h = x$$

$$A = \frac{2 + (2x + 2)}{2} * x = \frac{2x + 4}{2} * x = x^2 + 2x;$$

$$A(x) = x^2 + 2x;$$



$A'(x) = 2x + 2$ es la funcion que define la región $f(x) = 2x + 2$

3. Ejercicio

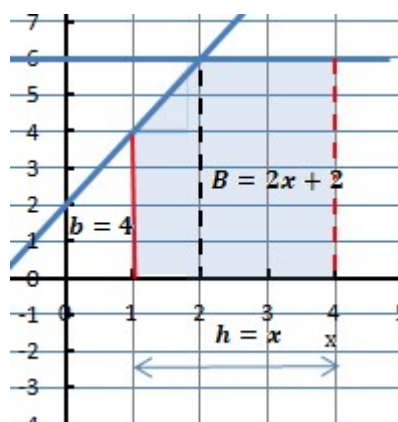
Hallar el area limitada por el eje de abscisas,
una recta $y = 2x + 2$, ($f(x) = 2x + 2$),
 $y = 6$ y dos rectas verticales $x = 1$ y $x \geq 1$
Si $1 \leq x \leq 2$ el area será el area de un trapecio

$$A = \frac{B + b}{2} * h; B = 2x + 2; b = 4; h = x$$

$$A = \frac{4 + (2x + 2)}{2} * (x - 1) = \frac{2x + 6}{2} * (x - 1)$$

$$= \frac{2x^2 + 4x - 6}{2} = x^2 + 2x - 3;$$

$$A(x) = x^2 + 2x - 3$$



Si $x > 2$ el área será el área de un trapecio + área del rectángulo

$$A = \text{área del trapecio} + \text{área del rectángulo} A = \left(\frac{4+6}{2} * 1\right) + ((x-2) * 6) = 5 + 6x - 12 = 6x - 7$$

$$A(x) = 6x - 7$$

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2; f(x) = x^2 + 2x - 3 \\ x > 2; f(x) = 6x - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2; A'(x) = 2x + 2; \text{la función que define la región } f(x) = 2x + 2 \\ x > 2; A'(x) = 6; \text{la función que define la región } f(x) = 6 \end{cases}$$

1.1 Teorema fundamental del cálculo

De los cálculos de los ejercicios anteriores podemos deducir que :

Si $F(x)$ nos da el área limitado por la función $f(x)$, el eje abscisas y dos rectas perpendiculares al intervalo.

Si la función es continua en dicho intervalo $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$, se cumple en dicho intervalo que

$$F'(x) = f(x)$$

Método para calcular áreas:

Si la función es continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$. El área limitado por la función $f(x)$, el eje abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$ se puede calcular

1º Buscando la función $F(x)$ cuya derivada sea igual a $f(x)$

2º El valor del área buscada será $F(b) - F(a)$

4. Ejercicio

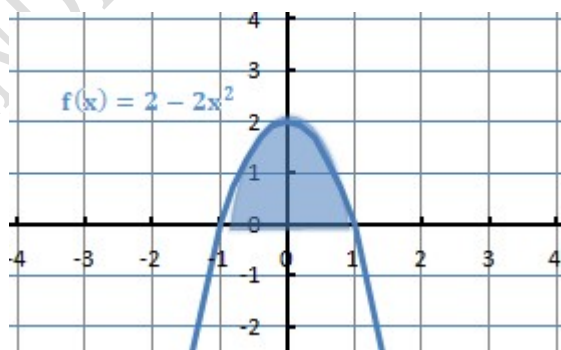
Calcular el área de la región sombreada

$$f(x) = 2 - 2x^2$$

Solución

Una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ será

$$F(x) = 2x - \frac{2}{3}x^3;$$



$$\text{El área pedida será } F(1) - F(-1) = \left(2 * 1 - \frac{2}{3}1^3\right) - \left((2(-1) - \frac{2}{3}(-1)^3)\right);$$

$$2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}; \text{Área} = \frac{8}{3}$$

5. Ejercicio

Calcular el área de la región limitada

$$\text{por la función } y = f(x) = \frac{1}{x}$$

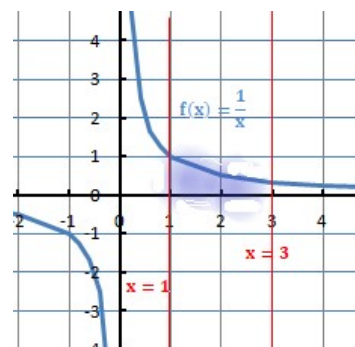
y las rectas $x = 1, x = 3$;

Solución

Una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ será

$$F(x) = \ln x;$$

$$\text{El área pedida será } F(3) - F(1) = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3; \text{Área} = \ln 3$$



2 Integrales

Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, una primitiva de $f(x)$ será $F(x)$, de forma que

$$F'(x) = f(x);$$

Al conjunto de todas las primitivas de f se denominan Integral indefinida $\int_a^b f(x)dx$

2.1 Integrales inmediatas

Son aquellas integrales que se pueden deducir directamente sin necesidad de hacer ninguna transformación.

2.2 Propiedades

Propiedades que hay que tener en cuenta para integrar algunas funciones

—Que las constantes que multiplican o dividen a la función no se integran sino que salen fuera

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

—Que la integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones

$$\int g(x) \pm f(x) dx = \int g(x) dx \pm \int f(x) dx$$

—Según la definición de integración

$$F(x) = \int f(x) dx \Rightarrow f(x) = F'(x)$$

Si $F(x) = g(x) * h(x)$; $F'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$ según esta demostración

$$\int f(x) dx = \int (2x e^x + x^2 e^x) dx = F(x) = x^2 e^x + C$$

6. Ejercicio

Determina el valor de a, b, c y d para que $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sea primitiva de la función

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 3;$$

Solución

Para que $F(x)$ sea primitiva ha de cumplirse que $F'(x) = f(x)$; $F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $\Rightarrow$

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow 3a = 4, a = \frac{4}{3}; 2b = -5, b = -\frac{5}{2} \text{ y } c = 3; d = C;$$

7. Ejercicio

Determina el valor de a, b y c para que $F(x) = ax^3 + be^x + cx$ sea primitiva de la función

$$f(x) = x^2 + 2e^x + 3;$$

Solución

Para que $F(x)$ sea primitiva ha de cumplirse que $F'(x) = f(x)$; $F'(x) = 3ax^2 + be^x + c$; $\Rightarrow$

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow 3a = 1; a = \frac{1}{3}; b = 2 \text{ y } c = 3;$$

2.3 Cuadro de Integrales inmediatas

$$1^{\circ} \quad \int x^n d(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ siendo } n \neq -1;$$

$$2^{\circ} \quad \int x^{-1} d(x) = \ln |x| + C;$$

$$3^{\circ} \quad \int e^x d(x) = e^x + C;$$

$$4^{\circ} \quad \int a^x d(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C; \text{ siendo } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

$$5^{\circ} \quad \int \operatorname{sen} x d(x) = -\cos x + C;$$

$$6^{\circ} \quad \int \cos x d(x) = \operatorname{sen} x + C;$$

$$7^{\circ} \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} d(x) = \int 1 + \operatorname{tg}^2 x d(x) = \int \sec^2 x d(x) = \operatorname{tg} x + C;$$

$$8^{\circ} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(x) = \operatorname{arcsen} x + C = -\operatorname{arccos} x + C$$

$$8^{\circ} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(x) = \operatorname{arctg} x + C$$

Una expresion mas general es:

$$1^{\circ} \quad \int (f(x))^n * f'(x) d(x) = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C \text{ siendo } n \neq -1;$$

$$2^{\circ} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} d(x) = \ln |f(x)| + C;$$

$$3^{\circ} \quad \int e^{f(x)} * f'(x) d(x) = e^{f(x)} + C;$$

$$4^{\circ} \quad \int a^{f(x)} * f'(x) d(x) = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C; \text{ siendo } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

$$5^{\circ} \quad \int \operatorname{sen} f(x) * f'(x) d(x) = -\cos f(x) + C;$$

$$6^{\circ} \quad \int \cos f(x) * f'(x) d(x) = \operatorname{sen} f(x) + C;$$

$$7^{\circ} \quad \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} d(x) = \int f'(x)(1 + \operatorname{tg}^2 f(x)) d(x) = \int f'(x) * \sec^2 f(x) d(x) = \operatorname{tg} f(x) + C;$$

$$8^{\circ} \quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} d(x) = \operatorname{arcsen} f(x) + C = -\operatorname{arccos} f(x) + C$$

$$8^{\circ} \quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} d(x) = \operatorname{arctg} f(x) + C$$

8. Ejercicio

Hallar las primitivas de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = 3x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}; \quad b) f(x) = \frac{x}{4} - 1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}; \quad c) f(x) = 3^x - \frac{4}{\sqrt{x}}; \quad d) f(x) = 5\sin x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Solución

$$a) \int f(x) dx = \int (3x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}) dx = \frac{3}{3}x^3 + \frac{2}{3 \cdot 2}x^2 - \frac{1}{2}x = x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + C$$

$$b) \int f(x) dx = \int (\frac{x}{4} - 1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}) dx = \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - x + 3 \ln|x| - 2 \cdot x^{-2} =$$

$$\frac{1}{8}x^2 - x + 3 \ln|x| - \frac{2(x^{-2+1})}{-2+1} = \frac{1}{8}x^2 - x + 3 \ln|x| - \frac{2(x^{-1})}{-1} = \frac{1}{8}x^2 - x + 3 \ln|x| + \frac{2}{x} + C$$

$$c) \int f(x) dx = \int (3^x - \frac{4}{\sqrt{x}}) dx = \int (3^x - 4(x^{-\frac{1}{2}})) dx = \frac{3^x}{\ln 3} - 4 \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{3^x}{\ln 3} - 4 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{3^x}{\ln 3} - 8\sqrt{x} + C$$

$$d) \int f(x) dx = \int (5\sin x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) dx = 5 \cos x - \arccos x + C$$

9. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas:

$$a) \int (\sqrt{x} + x^3 - \frac{4}{x^2}) dx \quad b) \int (\frac{\sqrt{x} - x^3 + 2x}{x^2}) dx \quad c) \int (\sqrt[3]{\sqrt{x^7}}) dx \quad d) \int (\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2e^x}{7}) dx$$

Solución

$$a) \int (\sqrt{x} + x^3 - \frac{4}{x^2}) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^4}{4} - \frac{4x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{4}{-1 \cdot x} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{4}{x} + C$$

$$b) \int (\frac{\sqrt{x} - x^3 + 2x}{x^2}) dx = \int (\frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^3}{x^2} + \frac{2x}{x^2}}{x^2}) dx = \int (\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{x^2} - x + \frac{2}{x}) dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| + C$$

$$-2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| + C$$

$$c) \int (\sqrt[3]{\sqrt{x^7}}) dx = \int (\sqrt[6]{x^7}) dx = \int (\frac{7}{x^{\frac{6}{5}}}) dx = \frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + C = \frac{6}{13} \sqrt[6]{x^{13}} + C$$

$$d) \int (\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2e^x}{7}) dx = 3 \arccos x - \frac{2}{7}e^x + C$$

10. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas: $\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}} dt$

Solución

comprobamos si la función es del primer tipo $\int (f(x))^n \cdot f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$

$$\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}} dt = \int \frac{t+1}{(t^2+2t+3)^{1/2}} dt = \frac{1}{2} \int (t^2+2t+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(t+1) dt =$$

$$\frac{1}{2} \int (t^2+2t+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2t+2) dt = \frac{\frac{1}{2}(t^2+2t+3)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = (t^2+2t+3)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}} dt = \sqrt{t^2+2t+3} + C$$

Otra forma : hacemos $t^2 + 2t + 3 = u$; la derivada $u^{1/2} * u' = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} * u' = \frac{1}{2} u^{-1/2} * u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} =$

$$\frac{2t+2}{2\sqrt{t^2+2t+3}} = \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}} \Rightarrow \int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}} d(t) = \sqrt{t^2+2t+3} + C$$

11. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas: $\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}} ds$

Solución

$\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}} ds$ la función parece que puede ser del segundo tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$

$$\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}} ds = \ln \left| \frac{1}{2} (1+e^{2s}) \right| + C$$

12. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas: $\int (x^2+1)^{20} * 5x dx$

Solución

$\int (x^2+1)^{20} * 5x dx$ la función parece que puede ser del primer tipo $\int (f(x))^n * f'(x) dx$

$$\int (x^2+1)^{20} * 5x dx = 5 \int (x^2+1)^{20} * x dx = Fx = \frac{5}{2*21} (x^2+1)^{21} + C$$

$$F'x = \frac{5}{2*21} (x^2+1)^{21} + C = \frac{5}{2*21} * 21 (x^2+1)^{20} * 2x = (x^2+1)^{20} * 5x$$

13. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas: $\int \frac{\cos \ln t}{t} dt$

Solución

$\int \frac{\cos \ln t}{t} dt$ la función parece que puede ser del tipo 6 $\int \cos f(x) * f'(x) dx = \sin f(x) + C$

$$\int \frac{\cos \ln t}{t} dt = F(x) = \sin \ln t + c ; F'(x) = \cos \ln t * \frac{1}{t} = \frac{\cos \ln t}{t}$$

14. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas: $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}} dx$

Solución

$$\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}} dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} \int \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} \int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} \int x^{\frac{7}{6}} dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} * \frac{x^{\frac{7}{6}+1}}{\frac{7}{6}+1} + C = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} * \frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}} dx = F(x) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} * \frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + C ;$$

$$\text{Comprobacion } F'(x) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} * \frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + C = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} * \frac{13}{6} * x^{\frac{13}{6}-1} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} * \frac{13}{6} * x^{\frac{7}{6}} = f(x)$$

15. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas: $\int (5 \cos x + 3^x + (3x + 1)^3) dx$

Solución

$$\int (5 \cos x + 3^x + (3x + 1)^3) dx = \int 5 \cos x dx + \int 3^x dx + \int (3x + 1)^3 dx$$

$$\int 5 \cos x dx = 5 \int \cos x dx = 5 \sin x$$

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3}$$

$$\int (3x + 1)^3 dx = \text{aplico la formula } \int f(x) * f'(x) = \int f(x)$$

$\int f(x) * f'(x) =$ como falta la derivada $f'(x)$ de $(3x + 1)$ que será 3 multiplico y divido la integral

$$\text{por 3 y me quedará } \int (3x + 1)^3 dx = \frac{1}{3} \int ((3x + 1)^3 * 3) dx = \frac{1}{3} \frac{(3x + 1)^4}{4} + C = \frac{(3x + 1)^4}{12} + C$$

$$\int (5 \cos x + 3^x + (3x + 1)^3) dx = 5 \sin x + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{(3x + 1)^4}{12} + C;$$

16. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas: $\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x} dx$

Solución

Compruebo si esta funcion es del tipo 2; $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$

Hallo la derivada del denominador $f(x) = x^3 - 3x$; $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

y veo que es igual al numerador multiplicado por 3 luego para que sea igual multiplico el numerador por 3

$$\text{multiplico y divido por 3 } \int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3(x^2 - 1)}{x^3 - 3x} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 - 3x);$$

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 - 3x) + C = Fx;$$

$$\text{Comprobacion } F'(x) = \frac{1}{3} \frac{f'(x)}{f(x)} \ln e = \frac{1}{3} \frac{(3x^2 - 3)}{(x^3 - 3x)} * 1 = \frac{1}{3} * \frac{3(x^2 - 1)}{(x^3 - 3x)} = \frac{(x^2 - 1)}{(x^3 - 3x)}$$

17. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas: $\int (\frac{1}{x} + 2) dx$

Solución

$$\text{Es una funcion del tipo 1 y 2 } \int (\frac{1}{x} + 2) dx = \frac{1}{x} dx + \int 2 dx = \ln x + 2x + C$$

18. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas: $\int (x^6 + 4x^2 + 4x)(6x^2 + 3) dx$

Solución

Multiplico los polinomios y hallo la integral $\int (x^6 + 4x^2 + 4x)(6x^2 + 3) dx$

$$\int (x^6 + 4x^2 + 4x)(6x^2 + 3) dx = \int (6x^8 + 3x^6 + 24x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 12x) dx =$$

$$\frac{6}{9} x^9 + \frac{3}{7} x^7 + \frac{24}{5} x^5 + \frac{24}{4} x^4 + \frac{12}{3} x^3 + \frac{12}{2} x^2 + C = \frac{6}{9} x^9 + \frac{3}{7} x^7 + \frac{24}{5} x^5 + \frac{24}{4} x^4 + \frac{12}{3} x^3 + \frac{12}{2} x^2 + C$$

19. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas: $\int \frac{x}{1+x^4} dx$

Solución

comprobamos si es del tipo 9º $\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} d(x) = \arctg f(x) + C$

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx, \quad \text{la transformamos} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} d(x) = \frac{1}{2} \arctg(x^2) + C$$

Comprobación dado que la derivada de $f(x) = \arctg u$; $f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \arctg(x^2) + C; \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+(x^2)^2} = \frac{x}{1+x^4}$$

20. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas: $\int \frac{x^4 + 2x^2 - 1}{2\sqrt{x}} dx$

Solución

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 2x^2 - 1}{2\sqrt{x}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{x^4 + 2x^2 - 1}{x^{1/2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^4}{x^{1/2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x^2}{x^{1/2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^{1/2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int x^{4-1/2} dx + \int x^{2-1/2} dx - \frac{1}{2} \int x^{-1/2} dx = \frac{1}{2} \int x^{7/2} dx + \int x^{3/2} dx - \frac{1}{2} \int x^{-1/2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{9/2}}{9/2} + \frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{x^{9/2}}{9} + \frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{1}{2} x^{1/2} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^2 - 1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{x^9}}{9} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \sqrt{x} + C$$

21. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas: $\int x^2 \sqrt[4]{x^5} dx$

Solución

$$\int x^2 \sqrt[4]{x^5} dx = \int \sqrt[4]{x^8} x^5 dx = \int \sqrt[4]{x^{13}} = \int x^{13/4} = \frac{x^{17/4}}{17/4} + C$$

22. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales indefinidas: $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Solución

comprobamos si se corresponde al primer caso

$$\int (f(x))^n \cdot f'(x) d(x) = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C \text{ siendo } n \neq -1$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} dx = \int (1+x^2)^{-1/2} \cdot x dx = \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{-1/2} \cdot 2x dx =$$

$$\frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{1/2}}{1/2} = \sqrt{1+x^2} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + C$$

23. Ejercicio

Hallar las siguientes integrales:

$$a) \int (1 + \ln x) dx; \quad b) \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) dx; \quad c) \int \left(\frac{\sin x}{x} + (\ln x) \cos x \right) dx;$$

$$d) \int (e^x \sin x - e^x \cos x) dx$$

Solución

$$a) \int (1 + \ln x) dx = x \ln x + C = F(x); F'(x) = 1 \ln x + x * \frac{1}{x} \ln e = \ln x + 1$$

$$b) \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) dx = \sqrt{x} \ln x + C = F(x); F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{1}{x} \sqrt{x}$$

$$c) \int \left(\frac{\sin x}{x} + (\ln x) \cos x \right) dx = \ln x \sin x + C = F(x); F'(x) = \frac{1}{x} \sin x + \cos x \ln x$$

$$d) \int (e^x \sin x - e^x \cos x) dx = -e^x \cos x + C = F(x); F'(x) = -(e^x \cos x + (-\sin x) e^x) =$$

$$F'(x) = -e^x \cos x + \sin x e^x$$

24. Ejercicio

$$\text{Calcular la siguiente integral } \int \frac{2x+3}{8x^2-16x+10} dx;$$

Solución

Al ser del tipo fracción puede ser del tipo $\ln$, x arco tag

Busco si es del tipo $\int \frac{f'x}{fx} dx = \ln fx$. No es, pues el numerador no es la derivada del denominador.

$$\text{tampoco es del tipo } \arctan \int \frac{f'x}{1+fx^2} dx$$

$$\text{intento convertirla en } \int \frac{f'x}{fx} dx + \int \frac{f'x}{1+fx^2} dx$$

Para convertirla en $\ln fx$ $\int \frac{f'x}{fx} dx$ tendría que ser el numerador $16x - 16$ dividido y multiplico por 8

$$\frac{1}{8} \int \frac{2x+3}{8x^2-16x+10} dx = \frac{1}{8} \int \frac{16x+24}{8x^2-16x+10} dx = \frac{1}{8} \int \frac{16x-16+24+16}{8x^2-16x+10} dx;$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{16x-16+40}{8x^2-16x+10} dx = \frac{1}{8} \int \frac{16x-16}{8x^2-16x+10} dx + \frac{1}{8} \int \frac{40}{8x^2-16x+10} dx$$

$$\frac{1}{8} \int \frac{16x-16}{8x^2-16x+10} dx = \frac{1}{8} \ln(8x^2-16x+10) + C$$

$$\text{para resolver esta integral } \frac{1}{8} \int \frac{40}{8x^2-16x+10} dx \text{ hago que sea del tipo } \int \frac{f'x}{1+fx^2} dx$$

$$\frac{1}{8} \int \frac{40}{8x^2-16x+10} dx = \text{simplifico } \frac{1}{8} \int \frac{20}{4x^2-8x+5} dx \text{ el denominador debe ser}$$

$$\text{el cuadrado de una diferencia } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{si fuera todo positivo sería el cuadrado de una suma } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{para que sea igual } \begin{cases} 4x^2 - 8x + 5 \\ a^2 - 2ab + b^2 \end{cases} 4x^2 = a^2 \Rightarrow a = 2x \text{ y } 8x = 2ab = 2(2x)b \Rightarrow b = 2;$$

$$(2x+2)^2 = 4x^2 + 8x + 4 \text{ para que sea } = 4x^2 - 8x + 5 + 4 - 4 = 4x^2 - 8x + 4 + 1 = 1 + (2x+2)^2$$

$$\frac{1}{8} \int \frac{20}{4x^2-8x+5} dx = \frac{1}{8} \int \frac{20}{1+(2x+2)^2} dx \text{ para que el numerador } = f'x \text{ debe ser } = 2$$

$$\frac{1}{8} * 10 \int \frac{20/10}{1 + (2x + 2)^2} dx = \frac{10}{8} \int \frac{2}{1 + (2x + 2)^2} dx = \frac{10}{8} \arctg (2x + 2) + C$$

$$\int \frac{2x + 3}{8x^2 - 16x + 10} dx = \frac{1}{8} \ln(8x^2 - 16x + 10) + \frac{10}{8} \arctg (2x + 2) + C$$

25. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$;

Solución

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx \text{ tenemos que simplificar para conseguir una integral inmediata} =$$

$$\int \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x} dx = \int \frac{1 + e^x}{1 + e^x} dx - \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int 1 dx - \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = x - \ln e^x + C$$

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx = x - \ln e^x + C$$

26. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int \frac{x^3}{4 - 5x^4} dx$;

Solución

Actualizamos para ver si es del tipo 2; $\int \frac{f'x}{fx} dx = \ln fx$

$$\int \frac{x^3}{4 - 5x^4} dx = \int \frac{x^3}{4 - 5x^4} dx = \text{la derivada del denominador debe ser igual al numerados ;}$$

$$4 - 5x^4 = -20x^3; \text{ para que sea igual multiplico y divido por } -20$$

$$\int \frac{x^3}{4 - 5x^4} dx = -\frac{1}{20} \int \frac{-20x^3}{4 - 5x^4} dx = -\frac{1}{20} \ln(4 - 5x^4) + C$$

27. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(3 + \sqrt{x})}$;

Solución

Actualizamos para ver si es del tipo 2; $\int \frac{f'x}{fx} dx = \ln fx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(3 + \sqrt{x})} = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(3 + \sqrt{x})} dx = 2 \ln(3 + \sqrt{x}) + C$$

$$\text{Comprobación } Fx = 2 \ln(3 + \sqrt{x}) + C; F'x = 2 \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(3 + \sqrt{x})} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(3 + \sqrt{x})} + C = \frac{1}{\sqrt{x}(3 + \sqrt{x})} + C$$

28. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int \sqrt{1 + \sin x} \, dx$;

Solución

Actualizamos para intentar que sea del tipo $1 \int (f(x))^n * f'(x) \, d(x) = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$ siendo $n \neq -1$

$$\int \sqrt{1 + \sin x} \, dx = \int \sqrt{1 + \sin x} \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x}} \, dx = \int \frac{\sqrt{1 + \sin x} * \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x}} \, dx =$$

$$\int \frac{\sqrt{(1 + \sin x) * (1 - \sin x)}}{\sqrt{1 - \sin x}} \, dx = \int \frac{\sqrt{1^2 - \sin^2 x}}{\sqrt{1 - \sin x}} \, dx = \int \frac{\sqrt{\cos^2 x}}{\sqrt{1 - \sin x}} \, dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} \, dx =$$

$$\int \cos x * (1 - \sin x)^{-\frac{1}{2}} \, dx = - \int -\cos x * (1 - \sin x)^{-\frac{1}{2}} \, dx = - \left[\frac{(1 - \sin x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right] + C$$

$$- \left[\frac{(1 - \sin x)^{1/2}}{1/2} \right] + C = -2\sqrt{1 - \sin x} + C$$

$$\int \sqrt{1 + \sin x} \, dx = -2\sqrt{1 - \sin x} + C$$

29. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int \sqrt{1 + \cos x} \, dx$;

Solución

Actualizamos para intentar que sea del tipo $1 \int (f(x))^n * f'(x) \, d(x) = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$ siendo $n \neq -1$

$$\int \sqrt{1 + \cos x} \, dx = \int \sqrt{1 + \cos x} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 - \cos x}} \, dx = \int \frac{\sqrt{1 + \cos x} * \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 - \cos x}} \, dx =$$

$$\int \frac{\sqrt{(1 + \cos x) * (1 - \cos x)}}{\sqrt{1 - \cos x}} \, dx = \int \frac{\sqrt{1^2 - \cos^2 x}}{\sqrt{1 - \cos x}} \, dx = \int \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\sqrt{1 - \cos x}} \, dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} \, dx =$$

$$\int \sin x * (1 - \cos x)^{-\frac{1}{2}} \, dx = \int \sin x * (1 - \cos x)^{-\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{(1 - \cos x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right] + C$$

$$\left[\frac{(1 - \cos x)^{1/2}}{1/2} \right] + C = 2\sqrt{1 - \cos x} + C$$

$$\int \sqrt{1 + \cos x} \, dx = 2\sqrt{1 - \cos x} + C$$

30. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int \frac{x^2 + x - 4}{x - 1} \, dx$;

Solución

$$\int \frac{x^2 + x - 4}{x - 1} \, dx; \text{ el ser mayor el numerador que el denominador hago la division}$$

$$\text{Realizo la division } \frac{x^2 + x - 4}{x - 1} = (x + 2) + \frac{-2}{x - 1} = (x + 2) - \frac{2}{x - 1}$$

$$\int \frac{x^2 + x - 4}{x - 1} \, dx = \int (x + 2) - \frac{2}{x - 1} \, dx \text{ esto se resuelve por integrales inmediatas}$$

$$\int (x+2) - \frac{2}{x-1} dx = \int (x+2) dx - \int \frac{2}{x-1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x - 2\ln(x-1) + C$$

$$\int \frac{x^2 + x - 4}{x-1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x - 2\ln(x-1) + C$$

3 Integrales definidas Regla de Barrow

3.1 Funcion continua y positiva en el intervalo

Funcion continua y positiva en el intervalo $[a,b]$, $f(x) \geq 0$;

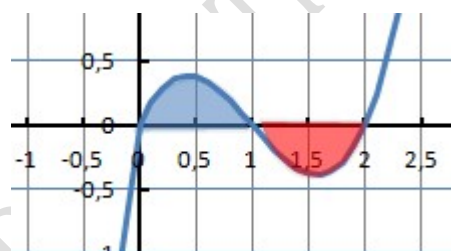
Se llama integral definida de $f(x)$ entre a y b al area de la region limitada por la curva

$y = f(x)$ el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$;

Se representa por $\int_a^b f(x)$ y su valor es $F(b) - F(a)$, siendo F una primitiva de $f(x)$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

Si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) \geq 0$;



31. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$;

Solución

$$\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right] = \left(\frac{1^4}{4} - \frac{3 \cdot 1^3}{3} + \frac{2 \cdot 1^2}{2} \right) - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{3 \cdot 0^3}{3} + \frac{2 \cdot 0^2}{2} \right)$$

$$\left(\frac{1}{4} - 1 + \frac{2}{2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \frac{1}{4}$$

3.2 Funcion continua y negativa en el intervalo

Funcion continua y negativa en el intervalo $[a,b]$, $f(x) \leq 0$

Se llama integral definida de $f(x)$ entre a y b al area de la region limitada por la curva

$y = f(x)$ el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$;

$\int_a^b f(x) = - \int_a^b (-f(x))$ representa el opuesto del area representado en el apartado anterior

Si $f(x) < 0$ en el intervalo $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) < 0$;

32. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$;

Solución

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx &= \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right] \\ &= \left(\frac{2^4}{4} - \frac{3 \cdot 2^3}{3} + \frac{2 \cdot 2^2}{2} \right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{3 \cdot 1^3}{3} + \frac{2 \cdot 1^2}{2} \right) = \left(\frac{16}{4} - \frac{24}{3} + \frac{8}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{3} + \frac{2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{1} + \frac{8}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} \right) = \left(\frac{16}{4} - \frac{32}{4} + \frac{16}{4} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{4} + \frac{4}{4} \right) = 0 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = -\frac{1}{4}; \text{ Area} = \frac{1}{4}$$

3.3 Función continua y con cambio de signo en el intervalo

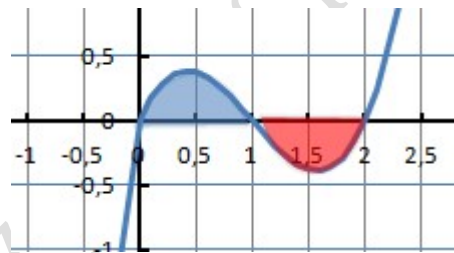
Función continua y con cambio de signo en el intervalo $[a, b]$

Si $f(x)$ cambia de signo en el intervalo $[a, b]$,

la integral $\int_a^b f(x) dx$ nos da la suma algebraica

de las áreas que están por encima y por debajo

del eje OX, cada una con su signo



33. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$;

Solución

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx &= \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right] \\ &= \left(\frac{2^4}{4} - \frac{3 \cdot 2^3}{3} + \frac{2 \cdot 2^2}{2} \right) - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{3 \cdot 0^3}{3} + \frac{2 \cdot 0^2}{2} \right) = \left(\frac{16}{4} - 8 + \frac{8}{2} \right) - 0 \\ &= \left(\frac{16}{4} - \frac{32}{4} + \frac{16}{4} \right) = 0 \end{aligned}$$

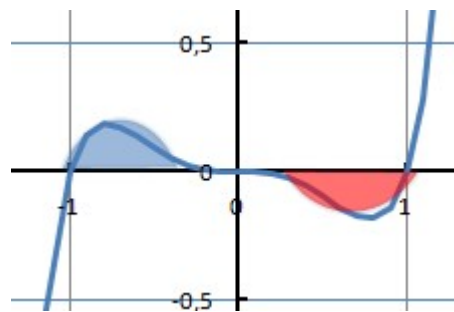
$$\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = 0; \text{ la suma algebraica de las dos áreas es } 0;$$

34. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int_{-1}^1 x(x^2 - 1) dx$; y $\int_0^1 x(x^2 - 1)$

Solución

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x(x^2 - 1) dx &= \int_{-1}^1 (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right] \\ &= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0; \\ \int_0^1 x(x^2 - 1) dx &= \int_0^1 (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right] \\ &= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}; \end{aligned}$$

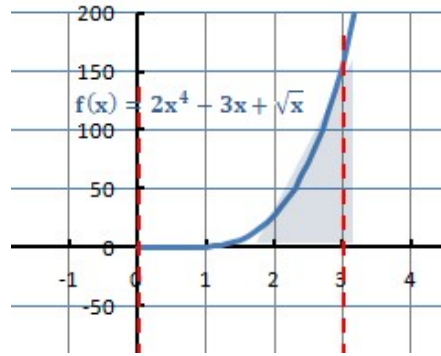


35. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int_0^3 (2x^4 - 3x + \sqrt{x}) dx$;

Solución

$$\begin{aligned} \int_0^3 (2x^4 - 3x + \sqrt{x}) dx &= \left[\frac{2x^5}{5} - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] = \\ \left[\frac{2x^5}{5} - \frac{3x^2}{2} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right] &= \left(\frac{2 \cdot 3^5}{5} - \frac{3 \cdot 3^2}{2} + \frac{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{3} \right) = \\ \left(\frac{2 \cdot 3^5}{5} - \frac{3 \cdot 3^2}{2} + \frac{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{3} \right) &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^5}{30} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^2}{30} + \frac{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{30} = \frac{2916}{30} - \frac{405}{30} + \frac{20 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{30} \\ \left(\frac{817}{10} + 2\sqrt{3} \right) u^2; \int_0^3 (2x^4 - 3x + \sqrt{x}) dx &= \left(\frac{817}{10} + 2\sqrt{3} \right) u^2 \end{aligned}$$



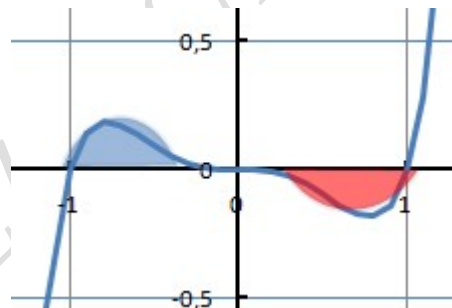
36. Ejercicio

Calcular el area encerrada por el eje X, la grafica

$f(x) = x(x^2 - 1)$ y las rectas $x = 1$ y $x = -1$;

Solución

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x(x^2 - 1) dx &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right] \\ &= \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right) = +\frac{1}{4}u^2 \\ \int_0^1 x(x^2 - 1) dx &= \int_0^1 (x^3 - x) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right] \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}u^2; \\ \text{Area} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}u^2 \end{aligned}$$



37. Ejercicio

Determina la funcion definida en todo R por $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabiendo que tiene un

minimo relativo en $(2, -4)$ y que $\int_{-3}^0 f(x) dx = 45$;

Solución

Si tiene un minimo $(2, -4)$ se ha de cumplir

$$f'(x) = 2ax + b = 0; x = -\frac{b}{2a}; 2 = -\frac{b}{2a}; b = -4a$$

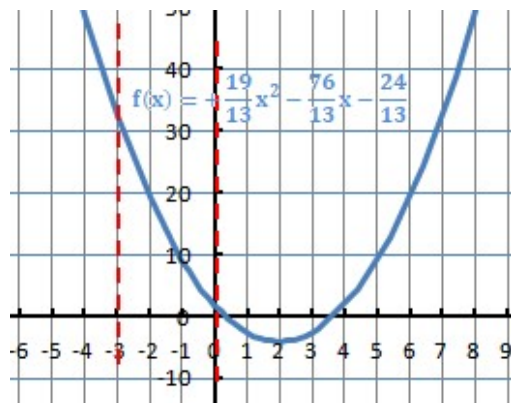
la curva ha de pasar por $2, -4$;

$$-4 = a2^2 + b2 + c; -4 = 4a + 2b + c$$

$$\int_{-3}^0 f(x) dx = 45 = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + c \cdot x \right] =$$

$$0 - \left(\frac{a}{3}(-3)^3 + \frac{b}{2}(-3)^2 + c \cdot (-3) \right) =$$

$$+9a - \frac{9}{2}b + 3c = 45$$



$$\begin{cases} b = -4a \\ -4 = 4a + 2b + c \\ +9a - \frac{9}{2}b + 3c = 45 \end{cases} \begin{cases} -4 = 4a - 8a + c; & -4 = -4a + c; c = -4 + 4a \\ +9a - \frac{9}{2}(-4a) + 3c = 45; & +27a + 3c = 45; \end{cases}$$

$$+27a + 3(-4 + 4a) = 45; +27a - 12 + 12a = 45;$$

$$39a = 57; a = +\frac{57}{39} = +\frac{19}{13}; a = +\frac{19}{13}$$

$$b = -4a; b = -4\left(+\frac{19}{13}\right) = -\frac{76}{13}; b = -\frac{76}{13}$$

$$c = -4 - 4\left(+\frac{19}{13}\right) - 2\left(-\frac{76}{13}\right) =$$

$$-\frac{52}{13} - \frac{76}{13} + \frac{152}{13} = \frac{24}{13}; c = \frac{24}{13}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c;$$

$$f(x) = +\frac{19}{13}x^2 - \frac{76}{13}x - \frac{24}{13}$$

38. Ejercicio

Cuanto debe valer el parametro a en la funcion $f(x) = x - a \sin x$; sabiendo que $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$

Solución

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = 0; \int_0^{\pi} (x - a \sin x) dx = \left[\frac{x^2}{2} - a(-\cos x) \right] = \left(\frac{\pi^2}{2} + a * \cos \pi \right) = 0 = \frac{\pi^2}{2} - a;$$

$$\text{dado que } \cos \pi = -1; a = \frac{\pi^2}{2}$$

39. Ejercicio

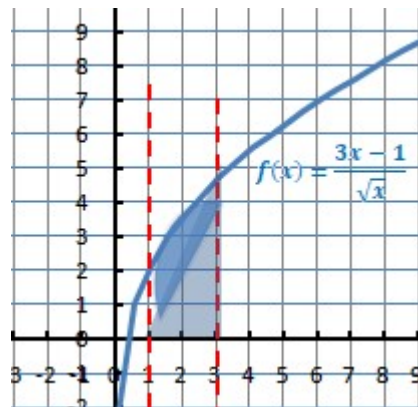
Calcular la siguiente integral $\int_1^3 \frac{3x-1}{\sqrt{x}} dx$

Solución

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{3x-1}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^3 \frac{3x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_1^3 (3x * x^{-\frac{1}{2}}) - (x^{-\frac{1}{2}}) dx = \int_1^3 (3x^{\frac{1}{2}}) - (x^{-\frac{1}{2}}) dx = \\ &= \left[\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x^{-\frac{1}{2}})}{\frac{1}{2}} \right] = \left[2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$= \left(2 * 3^{\frac{3}{2}} - 2 * 3^{\frac{1}{2}} \right) - \left(2 * 1^{\frac{3}{2}} - 2 * 1^{\frac{1}{2}} \right) = 2\sqrt{3} (3 - 1) = 4\sqrt{3}$$

$$\int_1^3 \frac{3x-1}{\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{3}$$



40. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int_0^{3\pi} \cos \frac{b}{2} db$;

Solución

$\int_0^{3\pi} \cos \frac{b}{2} db$; comprobamos si la podemos convertir del tipo 6

$$\int \cos f(x) * f'(x) d(x) = \text{sen } f(x) + C$$

$$\int_0^{3\pi} \cos \frac{b}{2} db = 2 \int_0^{3\pi} \cos \frac{b}{2} * \frac{1}{2} db = 2 \left[\text{sen} \frac{b}{2} \right] = 2 \left(\text{sen} \frac{3\pi}{2} - \text{sen} \frac{0}{2} \right) = 2 \left(\text{sen} \frac{3\pi}{2} - \text{sen } 0 \right)$$

$$\int_0^{3\pi} \cos \frac{b}{2} db = 2 \text{sen} \frac{3\pi}{2};$$

41. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int_0^2 (1+x^2)\sqrt{x} dx$;

Solución

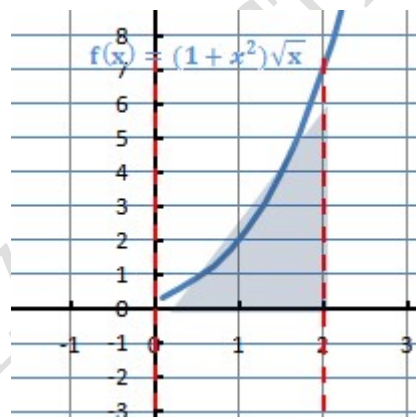
$$\int_0^2 (1+x^2)\sqrt{x} dx = \int_0^2 (\sqrt{x} + x^2\sqrt{x}) dx =$$

$$\int_0^2 (x^{\frac{1}{2}} + x^2 x^{\frac{1}{2}}) dx = \int_0^2 (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{2}}) dx =$$

$$\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \right] = \left(\frac{2 * x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2 * x^{\frac{7}{2}}}{7} \right) =$$

$$\left(\frac{2^2 * \sqrt{2}}{3} + \frac{2^4 * \sqrt{2}}{7} \right) = \frac{7 * 2^2 * \sqrt{2}}{21} + \frac{3 * 2^4 * \sqrt{2}}{21} = \frac{2^2 \sqrt{2} (7 + 3 * 2^2)}{21} = \frac{19 * 2^2 \sqrt{2}}{21};$$

$$\int_0^2 (1+x^2)\sqrt{x} dx = \frac{19 * 2^2 \sqrt{2}}{21}$$



42. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int_{-2}^2 x + |1-x| dx$;

Solución

$$|1-x| \begin{cases} (1-x) \text{ Si } (1-x) \geq 0; x \leq 1 \\ -(1-x) \text{ Si } (1-x) < 0; x > 1 \end{cases}$$

Dado que tenemos el valor 1 donde la función cambia estudiaremos de -2 a 1 y de 1 a 2

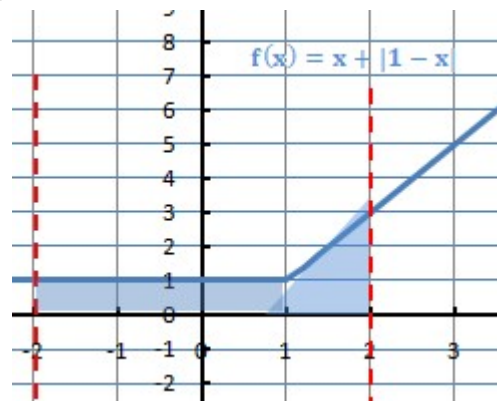
$$\int_{-2}^1 (x + (1-x)) dx + \int_1^2 (x + (-(1-x))) dx =$$

$$\int_{-2}^1 1 dx + \int_1^2 (x - 1 + x) dx =$$

$$\int_{-2}^1 1 dx + \int_1^2 (2x - 1) dx = [x]_{-2}^1 + \left[\frac{2x^2}{2} - x \right]_1^2$$

$$= (1 - (-2)) + \left(\frac{2 * 2^2}{2} - 2 \right) - \left(\frac{2 * 1^2}{2} - 1 \right) = 3 + (4 - 2) - (1 - 1) = 3 + 2 = 5;$$

$$\int_{-2}^2 x + |1-x| dx = 5$$



43. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int_{-2}^2 |x^2 + 4| dx$;

Solución

$$\int_{-2}^2 |x^2 + 4| dx; \text{ dado que } x^2 + 4 \text{ siempre será positivo} \Rightarrow \int_{-2}^2 |x^2 + 4| dx = \int_{-2}^2 x^2 + 4 dx;$$

$$\int_{-2}^2 x^2 + 4 dx = \left[\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 4 * 2 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + 4 * (-2) \right) = \left(\frac{32}{3} + \frac{32}{3} \right) = \frac{64}{3};$$

$$\int_{-2}^2 |x^2 + 4| dx = \frac{64}{3}$$

44. Ejercicio

Calcular la siguiente integral $\int_{-5}^4 |x^2 - 4| dx$;

Solución

El punto de cambio será $x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2$;

para $x \geq 2$ la función es positiva; para $x \leq -2$ la función es positiva

para valores de $-2 < x < 2$ la función es negativa

$$f(x) \begin{cases} (x^2 - 4) \text{ para } x < -2 \\ -(x^2 - 4) \text{ para } -2 < x < 2 \\ (x^2 - 4) \text{ para } x > 2 \end{cases}$$

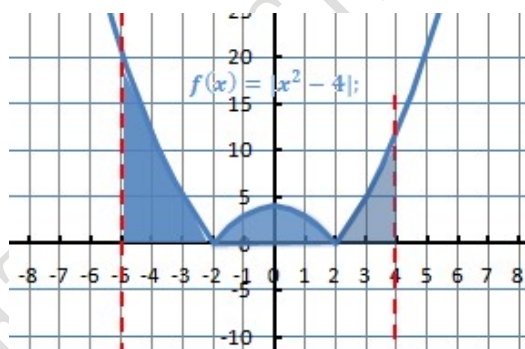
$$\int_{-5}^4 |x^2 - 4| dx = \int_{-5}^{-2} (x^2 - 4) dx + \int_{-2}^2 -(x^2 - 4) dx + \int_2^4 (x^2 - 4) dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-5}^{-2} + \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^4 = \left(\left(\frac{(-2)^3}{3} - 4(-2) \right) - \left(\frac{(-5)^3}{3} - 4(-5) \right) \right)$$

$$+ \left(\left(-\frac{2^3}{3} + 4 * 2 \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4 * (-2) \right) \right) + \left(\left(\frac{(4)^3}{3} - 4(4) \right) - \left(\frac{(2)^3}{3} - 4(2) \right) \right)$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 8 + \frac{125}{3} - 20 \right) + \left(-\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 \right) + \left(\frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 8 \right) = 27 + \frac{32}{3} + \frac{32}{3} = \frac{145}{3}$$

$$\int_{-5}^4 |x^2 - 4| dx = \frac{145}{3}$$



4 Aplicaciones de las integrales

4.1 Cálculo áreas y volúmenes

La integral definida es un método rápido para calcular áreas, volúmenes, longitudes, etc

45. Ejercicio

Calcular el area encerrada entre las curvas

$$f(x) = x^4 - 4 \text{ y } g(x) = 2x - 1$$

Solución

El área que buscamos es la punteada

$$\begin{aligned} \text{calculamos } - \int_{-1}^2 |x^2 - 4| dx &= - \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-1}^2 = \\ &= - \left(\left(\frac{2^3}{3} - 4 \cdot 2 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 4 \cdot (-1) \right) \right) \\ &= - \left(-\frac{16}{3} - \frac{11}{3} \right) = \frac{27}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Quitamos el area del triangulo pequeño} = \frac{1,5 \cdot 3}{2} = \frac{4,5}{2}$$

$$\text{Area de la parte negativa} = \frac{27}{3} - \frac{4,5}{2} = \frac{40,5}{6} u^2$$

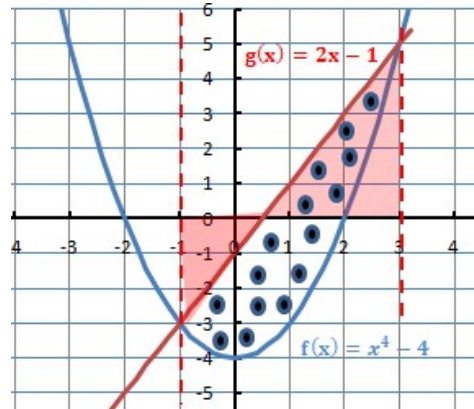
Calculamos area parte positiva limitado por la curva:

$$\int_2^3 |x^2 - 4| dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^3 = \left(\left(\frac{27}{3} - 4 \cdot 3 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \cdot (2) \right) \right) = \left(-\frac{9}{3} + \frac{16}{3} \right) = \frac{7}{3}$$

$$\text{calculamos el Area triangulo mayor} = \frac{2,5 \cdot 5}{2} = \frac{12,5}{2}$$

$$\text{Area de la parte positiva} = \frac{12,5}{2} - \frac{7}{3} = \frac{37,5}{6} - \frac{14}{6} = \frac{23,5}{6} u^2$$

$$\text{Area total punteada, entre la dos curvas, } \frac{40,5}{6} u^2 + \frac{23,5}{6} u^2 = \frac{64}{6} u^2 = \frac{32}{3} u^2$$



46. Ejercicio

Calcular el area encerrada entre las curvas

$$f(x) = x(x-1)(x-2) \text{ y } g(x) = x(x-1)$$

Solución

$$\text{Area}(0,1) = f(x) + g(x)$$

$$\text{Area}(1,2) = g(x) + f(x)$$

$$\text{Area}(2,3) = g(x) - f(x)$$

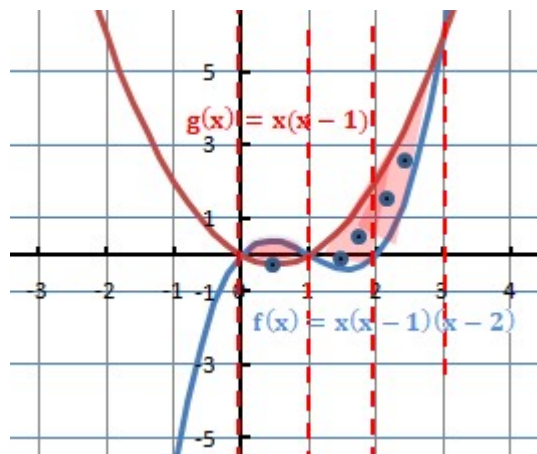
- $\text{Area}(0,1) = f(x) + g(x)$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}$$

$$- \int_0^1 g(x) dx = - \int_0^1 (x^2 - x) dx = - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}$$

$$\text{Area}(0,1) = f(x) + g(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$



- $\text{Area}(1,2) = f(x) + g(x)$

$$-\int_1^2 f(x)dx = -\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx =$$

$$-\left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_1^2 = -\left(\left(\frac{16}{4} - \frac{24}{3} + \frac{8}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right)\right) = -\left(0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (x^2 - x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\text{Area}(0,1) = f(x) + g(x) = \frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{13}{12}$$

- $\text{Area}(2,3) = g(x) - f(x)$

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_2^3 = \left(\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{3} + \frac{18}{2}\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{24}{3} + \frac{8}{2}\right)\right) =$$

$$= \left(\left(\frac{243}{12} - \frac{324}{12} + \frac{108}{12}\right) - 0\right) = \frac{27}{12}$$

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_2^3 (x^2 - x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \left(\left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right)\right) = \left(\left(\frac{54}{6} - \frac{27}{6}\right) - \left(\frac{16}{6} - \frac{12}{6}\right)\right) =$$

$$\frac{27}{6} - \frac{4}{6} = \frac{23}{6}$$

$$\text{Area}(2,3) = f(x) + g(x) = \frac{23}{6} - \frac{27}{12} = \frac{19}{12}$$

$$\text{Area}(0,3) = \text{AREA TOTAL} = \frac{5}{12} + \frac{13}{12} + \frac{19}{12} = \frac{37}{12}u^2$$

47. Ejercicio

Considerar el espacio recorrido por el móvil en cada intervalos de tiempo

a) $v(t) = (t^2 - 5t + 6) \frac{m}{s}$ en el intervalo $t(1,3 s)$

Solución

$$\text{Espacio entre (1,2)} \int_1^2 v(t)dt = \int_1^2 (t^2 - 5t + 6)dt = \left[\frac{t^3}{3} - 5\frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^2 =$$

$$\left(\left(\frac{8}{3} - 5\frac{4}{2} + 12\right) - \left(\frac{1}{3} - 5\frac{1}{2} + 6\right)\right) =$$

$$\left(\left(\frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 12\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6\right)\right) =$$

$$\frac{16 - 60 + 72}{6} - \frac{2 - 15 + 36}{6} = \frac{18}{6} - \frac{23}{6} = \frac{28 - 23}{6} = \frac{5}{6} m$$

$$\text{Espacio entre(2,3)} - \int_2^3 v(t)dt = - \int_2^3 (t^2 - 5t + 6)dt =$$

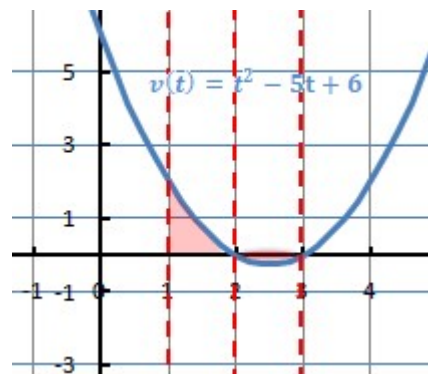
$$-\left[\frac{t^3}{3} - 5\frac{t^2}{2} + 6t\right]_2^3$$

$$= -\left(\left(\frac{27}{3} - 5\frac{9}{2} + 18\right) - \left(\frac{8}{3} - 5\frac{4}{2} + 12\right)\right) =$$

$$-\left(\left(\frac{27}{3} - \frac{45}{2} + 18\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 12\right)\right) = -\left(\frac{54 - 135 + 108}{6} - \frac{16 - 60 + 72}{6}\right) =$$

$$-\left(\frac{27}{6} - \frac{28}{6}\right) = \frac{1}{6} m$$

$$\text{Distancia total recorrida } \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1 m$$



48. Ejercicio

Calcula el volumen de una esfera de radio 5 cm
haciendo girar la semicircunferencia

$$y = \sqrt{25 - t^2} \text{ al rededor del eje X}$$

Solución

Para $t = 0$; el radio valdra 5;

Si hacemos girar la recta r alrededor del eje X
se genera un circulo .

$$\text{area del circulo} = \pi r^2, \text{ siendo } r = \sqrt{25 - t^2}; \Rightarrow$$

$$\text{area} = \pi r^2 = \pi (\sqrt{25 - t^2})^2$$

El volumen de la esfera será

$$V(t) = \int_{-5}^5 \pi (\sqrt{25 - t^2})^2 dt = \pi \int_{-5}^5 (25 - t^2) dt = \pi \left[25t - \frac{t^3}{3} \right]_{-5}^5 =$$

$$\pi \left(25 * 5 - \frac{5^3}{3} \right) - (25 * (-5) - \frac{(-5)^3}{3}) = \pi \left(\left(125 - \frac{125}{3} \right) - \left(-125 - \frac{-125}{3} \right) \right) =$$

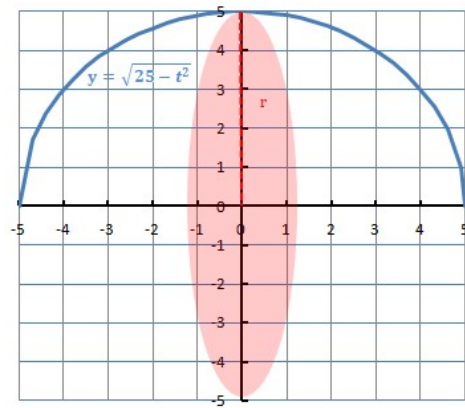
$$\pi \left(125 - \frac{125}{3} + 125 - \frac{125}{3} \right) = \pi \left(\frac{750}{3} - \frac{250}{3} \right) = \frac{500}{3} \pi u^3;$$

$$\text{El volumen de la esfera será} = \frac{500}{3} \pi = \frac{4 * 125}{3} \pi u^3;$$

Comprobación

Comprobacion dado que el volumende la esfera = $\frac{4}{3} \pi r^3$;

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi 5^3 = \frac{4}{3} \pi 125 = 4 * \frac{125}{3} \pi u^3$$



49. Ejercicio

Calcula el volumen generado por la figura

al girar sobre el eje X

Solución

El triangulo está limitado por el eje X,

la recta r y la recta $y = \frac{1}{2}x$

Al girar la figura sobre el eje X se genera un cono

de base, un circulo que tendrá de area πr^2 ;

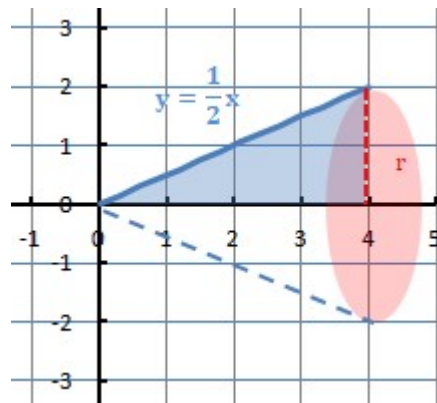
$$A = \pi \left(\frac{1}{2}x \right)^2;$$

$$V(\text{cono}) = \int_0^4 \pi \left(\frac{1}{2}x \right)^2 dt = \pi \int_0^4 \frac{1}{4}x^2 dt = \pi \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{4^3}{12} \right) = \pi \left(\frac{16}{3} \right) = \frac{16}{3} \pi u^3$$

Comprobación

Comprobacion dado que el volumende la cono = $\frac{\text{area de la base} * \text{altura}}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3} =$;

$$\text{Volumen} = \frac{\pi 2^2 4}{3} = \frac{16}{3} \pi u^3$$



50. Ejercicio

Hallar el valor de $a > 0$ para que el área limitada por el eje X y la grafica

$$f(x) = a(x+2)^2 - (x+2)^3 \text{ valga } 108.$$

Solución

Calculamos los puntos de corte de la grafica con el eje X; $f(x) = a(x+2)^2 - (x+2)^3$

$$f(x) = a(x+2)^2 - (x+2)^3 \text{ sacamos factor comun } f(x) = (x+2)^2(a-x-2)$$

$(x) = a(x+2)^2(a-x-2)$. Los puntos de corte serán $x = -2$ y $x = a-2$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_{-2}^{a-2} a(x+2)^2 - (x+2)^3 dx = \left[\frac{a(x+2)^3}{3} - \frac{(x+2)^4}{4} \right]_{-2}^{a-2} \\ &= \left(\frac{a((a-2)+2)^3}{3} - \frac{((a-2)+2)^4}{4} \right) - \left(\frac{a((-2)+2)^3}{3} - \frac{((-2)+2)^4}{4} \right) \\ &= \frac{a(a-2+2)^3}{3} - \frac{(a-2+2)^4}{4} - \left(\frac{a(-2+2)^3}{3} - \frac{(-2+2)^4}{4} \right) = \\ &= \left(\frac{a(a)^3}{3} - \frac{(a)^4}{4} - \left(\frac{a(0)^3}{3} - \frac{(0)^4}{4} \right) \right) = \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} = \frac{4a^3 - 3a^4}{12} = \frac{a^4}{12}. \text{ Como esto debe ser } = 108 \end{aligned}$$

$$\frac{a^4}{12} = 108; a^4 = 108 * 12 = 1296; a = 6;$$

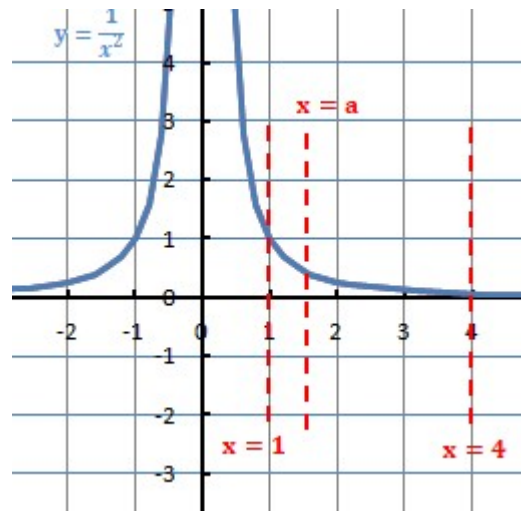
51. Ejercicio

Hallar el valor de a para que la recta $x = a$ divida en dos partes de igual área,

la zona limitada por el eje X, las rectas $x = 1$, $x = 4$ y la funcion $y = \frac{1}{x^2}$

Solución

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Area} = \int_1^a \frac{1}{x^2} dx - \int_a^4 \frac{1}{x^2} dx; \\ \int_1^a \frac{1}{x^2} dx &= \int_a^4 \frac{1}{x^2} dx \\ \int_1^a \frac{1}{x^2} dx &= \int_1^a x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^a = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a \\ &= \left(-\frac{1}{a} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{a} + 1 \\ \int_a^4 \frac{1}{x^2} dx &= \int_a^4 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_a^4 = \\ \left[-\frac{1}{x} \right]_a^4 &= \left(-\frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{1}{a} \right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} + 1 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{a}; -\frac{1}{a} + \frac{a}{a} = -\frac{a}{4a} + \frac{4}{a}; \\ \frac{a-1}{a} &= \frac{4-a}{4a}; 4a-4 = 4-a; 5a = 8; a = \frac{8}{5} \end{aligned}$$



4.2 Cálculo del movimiento uniformemente acelerado

El movimiento uniformemente acelerado es aquel en que la aceleración es constante

Dado que $\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow dv = a dt$; por definición de integrales; $v = \int a dt$;

$$v = \int a dt = a \int dt = a * t + C; v = at + C$$

En el momento inicial $t = 0 \Rightarrow v_0 = a * 0 + C; v_0 = C$

$$v = at + v_0;$$

Dado que $v = \frac{de}{dt} \Rightarrow de = v dt$; por definición de integrales; $e = \int v dt$; sustituimos v por su valor

$$e = \int (at + v_0) dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + C$$

En el momento inicial $t = 0 \Rightarrow e_0 = \frac{1}{2}a * 0^2 + v_0 * 0 + C; e_0 = C$

$$e = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + e_0$$

52. Ejercicio

Un cuerpo se mueve en línea recta, con movimiento uniformemente acelerado, con aceleración

De $2 \frac{m}{s^2}$, una velocidad inicial de $1 \frac{m}{s}$. de terminar las distancias recorridas entre los intervalos (0 y 2 s)

y (2 y 3s)t

Solución

$$e = \int_0^2 (at + v_0) dt = \left[\frac{a t^2}{2} + v_0 t \right]_0^2 = \left(\frac{2 * 2^2}{2} + 1 * 2 \right) - \left(\frac{2 * 0^2}{2} + 1 * 0 \right) = \frac{2 * 2^2}{2} + 1 * 2 = 4 + 2 = 6 \text{ m}$$

$$e = \int_2^3 (at + v_0) dt = \left[\frac{a t^2}{2} + v_0 t \right]_2^3 = \left(\frac{2 * 3^2}{2} + 1 * 3 \right) - \left(\frac{2 * 2^2}{2} + 1 * 2 \right) =$$

$$\left(\frac{2 * 3^2}{2} + 1 * 3 \right) - \left(\frac{2 * 2^2}{2} + 1 * 2 \right) = (9 + 3) - (4 + 2) = 12 - 6 = 6 \text{ m}$$

53. Ejercicio

Un móvil se desplaza con una velocidad de $v = (5t + 7) \frac{m}{s}$. Hallar el espacio recorrido

entre los 2 y 5 segundos.

Solución

$$e = \int v dt; e = \int_2^5 (5t + 7) dt = \left[\frac{5t^2}{2} + 7t \right]_2^5 = \left(\frac{5 * 5^2}{2} + 7 * 5 \right) - \left(\frac{5 * 2^2}{2} + 7 * 2 \right) =$$

$$= \frac{125}{2} + 35 - 10 - 14 = \frac{125}{2} + 11 = \frac{147}{2}; e = \frac{147}{2} \text{ m}$$

54. Ejercicio

Al pisar el freno en un semaforo la velocidad de un coche esta dada por la $v(t) = (30 - 6t) \frac{m}{s}$

Calcula los segundos que tarda en frenar y el espacio recorrido.

Solución

Si la velocidad responde a la formula $v(t) = (30 - 6t) \frac{m}{s}$; cuando el coche se pare $v(t) = 0$

$$0 = (30 - 6t) \frac{m}{s}; 30 = 6t; t = 5 \text{ seg};$$

$$e = \int v \, dt; e = \int_0^5 (30 - 6t) dt = \left[30t - \frac{6t^2}{2} \right]_0^5 = \left(30 * 5 - \frac{6 * 5^2}{2} \right) = 150 - 75 = 75 \text{ m};$$

$$e = 75m$$

4.3 Calculo del trabajo mecánico

El trabajo es una magnitud escalar que se representa con la letra W y se mide en la en el SI en Julios

El trabajo mecánico, es el producto de la fuerza ejercida sobre un cuerpo por el desplazamiento que produce.

$$dW = f(x) * dx; \text{ lo que implica que } W = \int f(x) dx;$$

Midiéndose en el Sistema Internacional la fuera en Newtons (N) y el desplazamiento en metros (m)

55. Ejercicio

Calcular el trabajo desarrollado por una fuerza que varia con la posicion segun la formula

$$f(x) = x^2 - 2x + 8 \text{ en el intervalo } (1,3)$$

Solución

$$W = \int_1^3 (x^2 - 2x + 8) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 8x \right]_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} - \frac{2 * 3^2}{2} + 8 * 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{2 * 1^2}{2} + 8 * 1 \right) =$$
$$(9 - 9 + 24) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 8 \right) = 11 - \left(\frac{1}{3} + 7 \right) = \frac{11}{3}; W = \frac{11}{3} \text{ Julios}$$

56. Ejercicio

Un cuerpo es empujado por una fuerza $f(t) = 4t + 6$; y adquiere una velocidad de $2 \frac{m}{s}$.

Calcular trabajo producido en los intervalos (1,2) segundos

Solución

$$W = \int f(x) dx; \text{ como tenemos que calcular el trabajo en funcion del tiempo, no del espacio.}$$

convertimos $W = \int f(x) dx$; por otro lado tenemos $v = \frac{ds}{dt} = ds = v dt$. sustituimos

$$W = \int_1^2 f(x) * v * dt = \int_1^2 (4t + 6) * 2 * dt = \int_1^2 (8t + 12) dt = \left[\frac{8t^2}{2} + 12t \right]_1^2 =$$

$$\left(\frac{8 * 2^2}{2} + 12 * 2 \right) - \left(\frac{8 * 1^2}{2} + 12 * 1 \right) = \left(\frac{32}{2} + 24 \right) - \left(\frac{8}{2} + 12 \right) = \frac{32 + 48}{2} - \frac{8 + 24}{2} = \frac{80}{2} - \frac{32}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$W = 24 \text{ Julios}$$