

Integrales “Calculo de primitivas”

Contenido

1	CONCEPTO PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN	2
2	DEFINICIÓN DE INTEGRAL INDEFINIDA.....	3
2.1	INTEGRALES INMEDIATAS.....	3
2.2	PROPIEDADES	3
2.3	CUADRO DE INTEGRALES INMEDIATAS.....	4
3	INTEGRACIÓN POR PARTES	9
4	TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES.....	13
5	INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE.....	18

1 Concepto Primitiva de una función

Si $f(x)$ es una función definida en un intervalo, una función primitiva de $f(x)$ en ese intervalo, es otra función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ en dicho intervalo

Si F es una función primitiva de f en el intervalo $[a, b]$ cualquier otra primitiva $G(x)$ de f en el intervalo $[a, b]$ es de la forma $F(x) + C$

1. Ejercicio

Comprueba que $F(x) = \sin^2 x$, es una primitiva de $f(x) = \sin 2x$ y $G(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$ es otra primitiva de $f(x)$. ¿En que constante se diferencian?

Solución

$$\text{Hallamos } F'(x) = 2 \sin x * \cos x; \quad G'(x) = -\frac{2}{2} \sin 2x = -\sin 2x$$

Dado que $\sin 2x = 2 \sin x * \cos x$

$$F'(x) = 2 \sin x * \cos x = \sin 2x$$

$$G'(x) = -\frac{2}{2} \sin 2x = -\sin 2x$$

Como ambas son primitivas $\Rightarrow F(x) = G(x) + C$

¿En que constante se diferencian?

Para calcular la constante en que se diferencian Halla $F(0) = \sin^2 0 = 0$; y $G(0) = -\frac{1}{2} \cos(2 * 0)$

$$\begin{cases} F(0) = \sin^2 0 = 0 \\ G(0) = -\frac{1}{2} \cos(2 * 0) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow F(0) = G(0) + C; 0 = -\frac{1}{2} + C; C = \frac{1}{2}$$

2. Ejercicio

Calcula la derivada de las funciones $f(x) = \arctg x$ y $g(x) = -\arctag \frac{1}{x}$;

Sin calculadora obten el valor de $\arctg 7 + \arctag \frac{1}{7}$

Solución

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$g(x) = -\arctag f(x);$$

$$g'(x) = -f'(x) \left(\frac{1}{1+(f(x))^2} \right) = -\left(-\frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \right) = \frac{1}{x^2} * \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{1+x^2}$$

Como $f(x)$ y $g(x)$ tienen la misma derivada son funciones primitivas de $\frac{1}{1+x^2}$

por lo que $f(x) = g(x) + C$

Dado que $f(1) = -g(1) \Rightarrow f(1) = -f(1) + C$; $2f(1) = C$; $C = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ para todo x ;

$$\text{Sin calculadora obten el valor de } \arctg 7 + \arctag \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$

3. Ejercicio

Comprueba que $F(x) = \arcsen x$ y $G(x) = -\arccos x$ son ambas primitivas de una misma función.

¿De qué función se trata? ¿En qué constante difieren?

Solución

$$F(x) = \arcsen x ; F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$G(x) = -\arccos x ; G'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Como $F(x)$ y $G(x)$ tienen la misma derivada son funciones primitivas de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

por lo que $F(x) = G(x) + C$

$$\text{Dado que } F(0) = G(0) + C \Rightarrow \begin{cases} \arcsen 1 = \frac{\pi}{2} \\ -\arccos x = 0 \end{cases} \frac{\pi}{2} = 0 + C; C = \frac{\pi}{2}$$

2 DEFINICIÓN DE INTEGRAL INDEFINIDA.

Se llama integral indefinida de $f(x)$ al conjunto de todas las funciones primitivas de $f(x)$ y se representa

$$\int f(x) dx$$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ se cumple que $f(x) dx = F(x) + C ; C \in \mathbb{R}$

2.1 Integrales inmediatas

Son aquellas integrales que se pueden deducir directamente sin necesidad de hacer ninguna transformación.

2.2 Propiedades

Propiedades que hay que tener en cuenta para integrar algunas funciones

—Que las constantes que multiplican o dividen a la función no se integran sino que salen fuera

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

—Que la integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones

$$\int g(x) \pm f(x) dx = \int g(x) dx + \int f(x) dx$$

—Según la definición de integración

$$F(x) = \int f(x) dx \Rightarrow f(x) = F'(x)$$

Si $F(x) = g(x) \cdot h(x)$; $F'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$ según esta demostración

$$\int f(x) dx = \int (2x e^x + x^2 e^x) dx = F(x) = x^2 e^x + C$$

2.3 Cuadro de Integrales inmediatas

$$1^{\circ} \quad \int x^n d(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ siendo } n \neq -1;$$

$$2^{\circ} \quad \int x^{-1} d(x) = \ln |x| + C;$$

$$3^{\circ} \quad \int e^x d(x) = e^x + C;$$

$$4^{\circ} \quad \int a^x d(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C; \text{ siendo } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

$$5^{\circ} \quad \int \operatorname{sen} x d(x) = -\cos x + C;$$

$$6^{\circ} \quad \int \cos x d(x) = \operatorname{sen} x + C;$$

$$7^{\circ} \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} d(x) = \int 1 + \operatorname{tg}^2 x d(x) = \int \sec^2 x d(x) = \operatorname{tg} x + C;$$

$$8^{\circ} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(x) = \operatorname{arcsen} x + C = -\operatorname{arccos} x + C$$

$$8^{\circ} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(x) = \operatorname{arctg} x + C$$

Una expresion mas general es:

$$1^{\circ} \quad \int (f(x))^n * f'(x) d(x) = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C \text{ siendo } n \neq -1;$$

$$2^{\circ} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} d(x) = \ln |f(x)| + C;$$

$$3^{\circ} \quad \int e^{f(x)} * f'(x) d(x) = e^{f(x)} + C;$$

$$4^{\circ} \quad \int a^{f(x)} * f'(x) d(x) = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C; \text{ siendo } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

$$5^{\circ} \quad \int \operatorname{sen} f(x) * f'(x) d(x) = -\cos f(x) + C;$$

$$6^{\circ} \quad \int \cos f(x) * f'(x) d(x) = \operatorname{sen} f(x) + C;$$

$$7^{\circ} \quad \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} d(x) = \int f'(x)(1 + \operatorname{tg}^2 f(x)) d(x) = \int f'(x) * \sec^2 f(x) d(x) = \operatorname{tg} f(x) + C;$$

$$8^{\circ} \quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} d(x) = \operatorname{arcsen} f(x) + C = -\operatorname{arccos} f(x) + C$$

4. Ejercicio

Calcula las siguientes integrales indefinidas

$$a) \int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}} d(t); \quad b) \int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}} d(s); \quad c) \int (x^2+1)^{20} * 5x d(x); \quad d) \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} d(s);$$

Solución

$$a) \int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}} d(t) = \int \frac{2t+2}{2\sqrt{t^2+2t+3}} d(t) = \sqrt{t^2+2t+3} + C$$

$$b) \int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}} d(s) = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2s}}{1+e^{2s}} d(s) = \ln(1+e^{2s}) + C$$

$$c) \int (x^2+1)^{20} * 5x d(x) = \frac{5}{2} \int 2(x^2+1)^{20} * x d(x) = \frac{5}{2*21} (x^2+1)^{21} + C = \frac{5}{42} (x^2+1)^{21} + C$$

$$d) \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} d(s); \text{ es una integral del tipo } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} d(x) = \arcsen f(x) + C$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+(x^2)^2}} d(s) = \arcsen x^2 + C;$$

5. Ejercicio

Halla la primitiva de las siguientes funciones :

$$a) f(x) = 2x(\sen x^2)(\cos x^2)^4 \quad b) \int \operatorname{tag} (3x+2)d(x)$$

Solución

$$a) f(x) = 2x(\sen x^2)(\cos x^2)^4;$$

$$\int 2x(\sen x^2)(\cos x^2)^4 d(x) = -\frac{1}{5} \int -5 * 2x(\sen x^2)(\cos x^2)^4 d(x) = -\frac{1}{5} (\cos x^2)^5 + C$$

$$b) \int \operatorname{tag} (3x+2)d(x) = -\frac{1}{3} \int \frac{-3\sen (3x+2)}{\cos (3x+2)} = -\frac{1}{3} \ln(\cos(3x+2)) + C$$

6. Ejercicio

Calcula las derivadas de $f(x) = \operatorname{tag}^2 x$ y $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ Simplifica y explica

Solución

$$f(x) = \operatorname{tag}^2 x = \frac{\sen^2 x}{\cos^2 x}; f'(x) = \frac{2\sen x \cos x * \cos^2 x + 2 \cos x \sen x * \sen^2 x}{(\cos x)^4}$$

$$= \frac{2\sen x \cos^2 x + 2 \sen x * \sen^2 x}{(\cos x)^3} = \frac{2\sen x (\cos^2 x + \sen^2 x)}{(\cos x)^3} = \frac{2\sen x}{(\cos x)^3} = 2 \frac{\sen x}{(\cos x)^3}$$

$$g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}; g'(x) = \frac{-2 \cos x (-\sen x)}{(\cos x)^4} = 2 \frac{\sen x}{(\cos x)^3}$$

$$\text{Esto implica que } f(x) \text{ y } g(x) \text{ son dos priitivas de } h = \frac{2\sen x}{(\cos x)^3} \Rightarrow f(x) = g(x) + C$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow f(0) = g(0) + C; \quad 0 = 1 + C; C = -1;$$

$$\operatorname{tag}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

7. Ejercicio

Calcula una primitiva de $f(x) = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}}$;

Solución

$$\int \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}} d(x) = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) d(x) = \int (x^{\frac{3}{2}} + 3 * x^{-\frac{1}{2}}) = \int x^{\frac{3}{2}} d(x) + \int 3 * x^{-\frac{1}{2}} d(x)$$

$$\int x^{\frac{3}{2}} d(x) = \frac{2}{5} \int \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} d(x) = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x};$$

$$\int 3 * x^{-\frac{1}{2}} d(x) = 3 * 2 \int \frac{1}{2} * x^{-\frac{1}{2}} d(x) = 6 * x^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x}$$

$$\int \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}} d(x) = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + 6\sqrt{x} + C$$

8. Ejercicio

Determinar $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 24x$; $f''(0) = 2$; $f'(0) = 1$ y $f(0) = 0$;

Solución

Si $f'''(x) = 24x \Rightarrow$ que la ecuación es de potencia $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$;

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0; f(0) = e = 0; ;$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 0; f'(0) = 1 \Rightarrow d = 1;$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c; f''(0) = 2c = 2; c = 1;$$

$$f'''(x) = 24ax + 6b; f'''(x) = 24ax + 6b = 24x \Rightarrow a = 1; b = 0$$

$$f(x) = x^4 + x^2 + x = 0; ;$$

9. Ejercicio

Dada una función $y = f(x)$, $x > -1$ se sabe que tiene por derivada $y' = \frac{a}{1+x}$ donde a es una constante .

Determinar la función sabiendo que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$;

Solución

$$y' = \frac{a}{1+x}; y = \int \frac{a}{1+x} d(x) = a \int \frac{1}{1+x} d(x) = a \ln(1+x) + c; y = f(x) = a \ln(1+x) + c$$

$$f(x) = a \ln(1+x) + C; \begin{cases} f(0) = a \ln(1+0) + C = a \ln(1) + C = 1; C = 1; \\ f(1) = a \ln(1+1) + C = a \ln(2) + 1 = -1; a = \frac{-2}{\ln 2} = -2,88539 \end{cases}$$

$$f(x) = -2,88539 \ln(1+x) + 1;$$

10. Ejercicio

Hallar una función $F(x)$ que verifique $x^5 F'(x) + x^3 + 2x = 3$ para $x \neq 0$;

Solución

$$x^5 F'(x) + x^3 + 2x = 3; F'(x) = \frac{-x^3 - 2x + 3}{x^5}; F(x) = \int \frac{-x^3 - 2x + 3}{x^5} d(x)$$

$$F(x) = \int \frac{-x^3 - 2x + 3}{x^5} d(x); F(x) = \int \frac{3}{x^5} d(x) - \int \frac{x^3}{x^5} d(x) - \int \frac{2x}{x^5} d(x) =$$

$$3 * \frac{1}{-4} \int (-4)x^{-5} d(x) - \frac{1}{-1} \int (-1)x^{-2} d(x) - \frac{2}{-3} \int (-3)x^{-4} d(x) = -\frac{3}{4}x^{-4} + x^{-1} + \frac{2}{3}x^{-3} + C;$$

$$F(x) = -\frac{3}{4x^4} + \frac{1}{x} + \frac{2}{3x^3} + C$$

11. Ejercicio

Halla la ecuación de la curva $y = f(x)$, sabiendo que pasa por el punto (1,1)

y la pendiente de la recta tangente a la curva en x es $3x + 1$;

Solución

Si la pendiente de la recta tangente a la curva en x es $3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x + 1$;

$$f(x) = \int (3x + 1) dx = \frac{3}{2} \int 2x dx + 1 \int dx = \frac{3}{2} x^2 + x + C$$

$$f(x) = \frac{3}{2} x^2 + x + C \text{ Si la curva ha de pasar por el punto } (1,1) \Rightarrow 1 = \frac{3}{2} 1^2 + 1 + C$$

$$C = 1 - \frac{3}{2} - 1; C = -\frac{3}{2};$$

$$f(x) = \frac{3}{2} x^2 + x - \frac{3}{2}$$

12. Ejercicio

De la función $f: (-1, +\infty)$ se sabe que $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2) = 0$;

a) determina $f(x)$

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0,1)

Solución

a) determina $f(x)$

$$f(x) = \int \frac{3}{(x+1)^2} dx = 3 \int (x+1)^{-2} dx = 3 \frac{1}{-1} (x+1)^{-2+1} + C = -\frac{3}{(x+1)} + C$$

$$f(x) = -\frac{3}{x+1} + C; f(2) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2+1} + C = 0; \Rightarrow C = 1;$$

$$f(x) = -\frac{3}{x+1} + 1;$$

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0,1)

$$g(x) = -3 \int \left(\frac{1}{(x+1)^2} + 1 \right) dx = -\frac{3}{2} \ln(x+1)^2 + x + C$$

$$g(x) = -\frac{3}{2} \ln(x+1)^2 + x + C; \text{ si pasa por } (0,1) \Rightarrow 1 = -\frac{3}{2} \ln(0+1)^2 + 0 + C \Rightarrow C = 1$$

13. Ejercicio

De todas las primitivas de la función $f(x) = 2 \tan x \cdot \sec^2 x$ halla la que pasa por $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

Solución

$$F(x) = 2 \tan x \cdot \sec^2 x \Rightarrow f = \int 2(\tan x \cdot \sec^2 x) dx = \frac{1}{\cos^2 x} + C$$

$$\text{La prueba es } f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + C \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{-2 \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2 (\sin x)}{\cos^3 x} = 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \tan x \cdot \sec^2 x$$

$$\text{Halla la que pasa por } P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right); f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} + C; 1 = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + C; 1 = 2 + C;$$

$$C = -1; f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

14. Ejercicio

Calcula $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$

Solución

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^2 * x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \int 2x * x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \int 2x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - 2 \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

15. Ejercicio

Halla la función $f(x)$ tal que $F(0) = 2$; y que sea primitiva de la función $\frac{e^x}{e^x + 1}$

Solución

$$F(x) = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) + C;$$

Dado que $F(0) = 2 \Rightarrow 2 = \ln(e^0 + 1) + C = \ln 2 + C$; $C = 2 - \ln 2$;

$$F(x) = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) + (2 - \ln 2);$$

16. Ejercicio

Calcula la integral $\int (\sqrt{x^2 + 20x} + (x^2 + 20x)(x + 10)) dx$

Solución

$$\int (\sqrt{x^2 + 20x} + (x^2 + 20x)(x + 10)) dx = \int \sqrt{x^2 + 20x} dx + \int (x^3 + 30x^2 + 200x) dx =$$

$$\int (x^2 + 20x)^{\frac{1}{2}} dx + \int (x^3 + 30x^2 + 200x) dx = \frac{1}{\frac{3}{2}} (x^2 + 20x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} (30)x^3 + \frac{200}{2} x^2 + C$$

$$\frac{2}{3} (x^2 + 20x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} (30)x^3 + \frac{200}{2} x^2 + C = \frac{2}{3} (x^2 + 20x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} x^4 + 10x^3 + 100x^2 + C$$

$$\int (\sqrt{x^2 + 20x} + (x^2 + 20x)(x + 10)) dx = \frac{2}{3} (x^2 + 20x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} x^4 + 10x^3 + 100x^2 + C$$

17. Ejercicio

Calcula la integral $\int (e^{2x^2-x+3}(1-4x)) dx$

Solución

$$\int (e^{2x^2-x+3}(1-4x)) dx \text{ comprobamos si se corresponde 3}^o \quad \int e^{f(x)} * f'(x) dx = e^{f(x)} + C;$$

$f'(2x^2 - x + 3) = 4x - 1 = -(1 - 4x)$ se corresponde con el caso 3

$$\int (e^{2x^2-x+3}(1-4x)) dx = -e^{2x^2-x+3} + C$$

3 Integración por partes

La integración por partes se utiliza cuando tenemos un producto o una división que se podrá escribir como producto $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{La fórmula podemos aprenderla con la siguiente frase}$$

"Un día vi una vaca sin cola vestida de uniforme"

Una forma de saber cual debemos elegir como u o como dv es con la palabra

ILATE (Tipo de función que tendremos) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Inversa} \\ \text{Logarítmica} \\ \text{Aritmética} \\ \text{Trigonométrica} \\ \text{Exponencial} \end{array} \right.$

$\int x^2 \ln x dx$ Las dos funciones que aparecen son x^2 exponencial la logarítmica en ILATE la logarítmica está antes de la exponencial luego tomaremos $\ln x = u$ y $x^2 = dv$

$$\int x^2 \ln x dx \left\{ \begin{array}{l} x^2 = dv; \text{integraremos } v = \frac{x^3}{3} \\ \ln x = u; \text{derivamos } d(u) = \frac{1}{x} dx \end{array} \right. \text{sustituimos en la fórmula}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \Rightarrow \int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx$$

$$\frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

18. Ejercicio

Obten las siguientes primitivas $\int (x^2 - 5x + 1) \cos x dx$;

Solución

$$\int (x^2 - 5x + 1) \cos x dx; \left\{ \begin{array}{l} (x^2 - 5x + 1) = u; \quad d(u) = (2x - 5)dx \\ \cos x = dv; v = \sin x \end{array} \right.$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int (x^2 - 5x + 1) \cos x dx = (x^2 - 5x + 1) \sin x - \int \sin x * (2x - 5) dx$$

$$\int \sin x * (2x - 5) dx; \text{integraremos por parte } \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5 = u; \quad d(u) = 2dx \\ \sin x = dv; v = -\cos x \end{array} \right.$$

$$\int \sin x * (2x - 5) dx = (2x - 5)(-\cos x) - \int (-\cos x * 2) dx = (2x - 5)(-\cos x) - 2 \sin x$$

$$-(2x - 5) \cos x - (-2 \sin x) = -(2x - 5) \cos x + 2 \sin x + C$$

$$\int (x^2 - 5x + 1) \cos x dx = (x^2 - 5x + 1) \sin x - [-(2x - 5) \cos x + 2 \sin x + C]$$

$$\int (x^2 - 5x + 1) \cos x dx = (x^2 - 5x + 1) \sin x + (2x - 5) \cos x - 2 \sin x + C$$

$$\int (x^2 - 5x + 1) \cos x dx = (x^2 - 5x - 1) \sin x + (2x - 5) \cos x + C$$

19. Ejercicio

Obten la siguientes primitivas $\int \operatorname{arctag} x \, d(x)$;

Solución

$$\int \operatorname{arctag} x \, d(x) = \int \operatorname{arctag} x \, d(x) * 1 \quad \text{integraremos por parte} \quad \begin{cases} \operatorname{arctag} x = u; & d(u) = \frac{1}{1+x^2} dx \\ 1 dx = dv; & v = x \end{cases}$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \Rightarrow x \operatorname{arctag} x - \int x * \frac{1}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\int \operatorname{arctag} x \, d(x) = x \operatorname{arctag} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

20. Ejercicio

Obten la siguientes primitivas $\int \operatorname{arcsen} x \, d(x)$;

Solución

$$\int \operatorname{arcsen} x \, d(x) = \int \operatorname{arcsen} x \, d(x) * 1 \quad \text{integraremos por parte} \quad \begin{cases} \operatorname{arcsen} x = u; & d(u) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ 1 dx = dv; & v = x \end{cases}$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \Rightarrow x \operatorname{arcsen} x - \int x * \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \operatorname{arcsen} x \, d(x) = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

21. Ejercicio

Obten la siguientes primitivas $\int \sqrt{x} \ln x \, d(x)$;

Solución

$$\int \sqrt{x} \ln x \, d(x); \quad \text{integraremos por parte} \quad \begin{cases} \ln x = u; & d(u) = \frac{1}{x} dx \\ \sqrt{x} dx = dv; & v = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \end{cases}$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \Rightarrow \ln x * \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \int \frac{2}{3} \sqrt{x^3} * \frac{1}{x} dx = \ln x * \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \int \frac{2}{3} \sqrt{x^3} * \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{2}{3} \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} \int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} * \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$$

$$\int \sqrt{x} \ln x \, d(x) = \ln x * \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right) + C$$

$$\int \sqrt{x} \ln x \, d(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right) + C$$

22. Ejercicio

Obten la siguientes primitivas $\int x (\ln x)^2 dx$;

Solución

$$\int x (\ln x)^2 dx; \text{ integramos por parte } \begin{cases} (\ln x)^2 = u; & d(u) = 2 \ln x * \frac{1}{x} dx \\ x dx = dv; & v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \Rightarrow (\ln x)^2 * \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{1}{2} x^2 * 2 \ln x * \frac{1}{x} dx = (\ln x)^2 * \frac{1}{2} x^2 - \int x \ln x dx$$

$$\int x \ln x dx; \text{ integramos por parte } \begin{cases} \ln x = u; & d(u) = \frac{1}{x} dx \\ x dx = dv; & v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \Rightarrow \ln x * \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{1}{2} x^2 * \frac{1}{x} dx = \ln x * \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \int x dx$$

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\int x \ln x dx = \ln x * \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} * \frac{1}{2} x^2 + C = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

$$\int x (\ln x)^2 dx = (\ln x)^2 * \frac{1}{2} x^2 - \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right) + C = (\ln x)^2 * \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C$$

$$\int x (\ln x)^2 dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C$$

23. Ejercicio

Sea $f: (-1,1)$ definida por $f(x) = \ln(1-x^2)$. Calcular la primitiva de f cuya grafica pasa por $P(0,1)$

Solución

$$f(x) = \ln(1-x^2) \text{ integramos por parte } \begin{cases} \ln(1-x^2) = u; & d(u) = -\frac{2x}{(1-x^2)} dx \\ 1 dx = dv; & v = x \end{cases}$$

$$\int u dv = uv - \int v du = x \ln(1-x^2) - \int x \left(-\frac{2x}{(1-x^2)} \right) dx = x \ln(1-x^2) + \int \frac{2x^2}{(1-x^2)} dx$$

$$\int \frac{2x^2}{(1-x^2)} dx = \int \frac{2x^2 + 2 - 2}{(1-x^2)} dx = \int \frac{2(x^2 - 1) + 2}{(1-x^2)} dx = \int \frac{-2(1-x^2) + 2}{(1-x^2)} dx$$

$$= \int \left(-2 + \frac{+2}{(1-x^2)} \right) dx = \int (-2) dx + \int \frac{+2}{(1-x^2)} dx = -2x + \int \frac{+2}{(1-x^2)} dx$$

$$\int \frac{+2}{(1-x^2)} dx = \int \frac{+2}{(1+x)(1-x)} dx$$

$$\frac{+2}{(1+x)(1-x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A(1-x)}{(1+1)(1-x)} + \frac{B(1+x)}{(1+1)(x-1)} = \frac{A(1-x) + B(1+x)}{(1+1)(x-1)};$$

$$2 = A(1-x) + B(1+x) = A - Ax + B + Bx; \text{ para todo } x$$

$$\text{para } x = 0 \Rightarrow 2 = A + B$$

$$\text{para } x = 1 \Rightarrow 2 = 2B; B = 1; \Rightarrow A = 1$$

$$\int \left(\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{1-x} \right) dx + \int \left(\frac{1}{1+x} \right) dx = -\ln(1-x) + \ln(1+x) + C =$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} + C$$

$$\int \ln(1-x^2) dx = x \ln(1-x^2) - 2x + \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C; F = x \ln(1-x^2) - 2x + \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

Si ha de pasar por $P(0,1) \Rightarrow 1 = 0 \ln(1-0^2) - 2 * 0x + \ln \left| \frac{1+0}{1-0} \right| + C; 1 = \ln 1 + C; C = 1;$

$$F = x \ln(1-x^2) - 2x + \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + 1$$

24. Ejercicio

Calcula la siguiente integral indefinida en función de los parámetros a, b, c $\int (e^{ax}(x^2 + bx + c))dx$

Solución

$$\int (e^{ax}(x^2 + bx + c))dx \text{ integramos por parte } \begin{cases} x^2 + bx + c = u; & d(u) = 2x + b \\ e^{ax}dx = dv; & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{cases}$$

$$\int u dv = uv - \int v du = (x^2 + bx + c) \frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax}(2x + b)dx = (x^2 + bx + c) \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax}(2x + b)dx$$

$$\int e^{ax}(2x + b)dx \text{ integramos por parte } \begin{cases} 2x + b = u; & d(u) = 2 \\ e^{ax}dx = dv; & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{cases}$$

$$\int u dv = uv - \int v du = (2x + b) \frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax} 2 =$$

$$(2x + b) \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{2}{a} \int e^{ax} = (2x + b) \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{2}{a^2} e^{ax}$$

$$\int (e^{ax}(x^2 + bx + c))dx = (x^2 + bx + c) \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a} \left((2x + b) \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{2}{a^2} e^{ax} \right);$$

$$\int (e^{ax}(x^2 + bx + c))dx = e^{ax} \left(\frac{x^2 + bx + c}{a} - \frac{(2x + b)}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) + C$$

4 Teorema de descomposición en fracciones simples

Cualquier fracción de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $P(x) <$ grado de $Q(x)$ se puede escribir como suma de fracciones

El método de descomposición en fracciones simples consiste en descomponer el cociente en una suma de fracciones de polinomios de menor grado. Esto se utiliza principalmente en el cálculo de integrales

Caso 1: Las raíces del polinomio $Q(x)$ son raíces reales simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x + a_1} + \frac{A_2}{x + a_2} + \frac{A_3}{x + a_3} \dots \text{ Donde } A_1, A_2, A_3 \dots \text{ Son constantes a determinar}$$

Caso 2: Las raíces del polinomio $Q(x)$ son raíces reales múltiples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x + a_1} + \frac{A_2}{(x + a_1)^2} + \frac{A_3}{(x + a_1)^3} \dots \text{ Donde } A_1, A_2, A_3 \dots \text{ Son constantes a determinar}$$

Caso 3: Las raíces del polinomio $Q(x)$ son raíces complejas simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \frac{A_3x + B_3}{a_3x^2 + b_3x + c_3} \dots$$

Donde $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 \dots$ Son constantes a determinar

Caso 4: Las raíces del polinomio $Q(x)$ es una raíz compleja múltiple

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^2} + \frac{A_3x + B_3}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^3} \dots$$

Donde $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 \dots$ Son constantes a determinar

25. Ejercicio

Calcular la siguiente primitiva previa descomposición en fracciones simples $\int \frac{dx}{2x + 5}$;

Solución

$$\int \frac{dx}{2x + 5}; \text{ se calcula directa } = \frac{1}{2} \ln x + 5$$

26. Ejercicio

Calcular la siguiente primitiva previa descomposición en fracciones simples $\int \frac{x dx}{(x - 1)(x + 3)(x + 5)}$;

Solución

$$\int \frac{x}{(x - 1)(x + 3)(x + 5)} dx = \int \frac{A}{(x - 1)} dx + \int \frac{B}{(x + 3)} dx + \int \frac{C}{(x + 5)} dx$$
$$\frac{x}{(x - 1)(x + 3)(x + 5)} = \frac{A(x + 3)(x + 5) + B(x - 1)(x + 5) + C(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(x + 3)(x + 5)} \Rightarrow$$

$x = A(x + 3)(x + 5) + B(x - 1)(x + 5) + C(x - 1)(x + 3)$ ha de cumplirse para cualquier valor de x

$$\text{Para } x = 1; 1 = A(x + 3)(x + 5); A = \frac{1}{(1 + 3)(1 + 5)} = \frac{1}{24}; A = \frac{1}{24}$$

$$\text{Para } x = -3; -3 = B(x-1)(x+5); B = \frac{-3}{(-3-1)(-3+5)}; B = \frac{-3}{-8}; B = \frac{3}{8}$$

$$\text{Para } x = -5; -5 = C(x-1)(x+3); C = \frac{-5}{(-5-1)(-5+3)} = \frac{-5}{12}; C = -\frac{5}{12}$$

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+3)(x+5)} dx = \int \frac{A}{(x-1)} dx + \int \frac{B}{(x+3)} dx + \int \frac{C}{(x+5)} dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{24}}{(x-1)} dx + \int \frac{\frac{3}{8}}{(x+3)} dx + \int \frac{-\frac{5}{12}}{(x+5)} dx$$

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+3)(x+5)} dx = \frac{1}{24} \ln(x-1) + \frac{3}{8} \ln(x+3) - \frac{5}{12} \ln(x+5) + C$$

27. Ejercicio

Calcular la siguiente primitiva previa descomposicion en fracciones simples $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx$;

Solución

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx = \int \frac{A}{(x-1)} dx + \int \frac{B}{(x-2)} dx;$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow 2x-1 = A(x-2) + B(x-1)$$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow 2x-1 = A(x-2); \text{ sustituyo } 2 \cdot 1 - 1 = A(1-2); A = \frac{1}{-1}; A = -1;$$

$$\text{Para } x = 2 \Rightarrow 2x-1 = B(x-1); \text{ sustituyo } 2 \cdot 2 - 1 = B(2-1); B = \frac{3}{1}; B = 3;$$

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx = \int \frac{A}{(x-1)} dx + \int \frac{B}{(x-2)} dx; \text{ sustituyo } = \int \frac{-1}{(x-1)} dx + \int \frac{3}{(x-2)} dx$$

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx = -\ln(x-1) + 3 \ln(x-2) + C$$

28. Ejercicio

Calcular la siguiente primitiva previa descomposicion en fracciones simples $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$;

Solución

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx; \text{ dividimos los polinomios } = \int (x^2 + x + 4) dx + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} dx$$

$$\int (x^2 + x + 4) dx \text{ integral directa } = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + C;$$

$$\int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} dx; \text{ descomponemos } x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$$

$$\int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x+2)(x-2)} dx = \int \frac{A}{(x)} dx + \int \frac{B}{(x+2)} dx + \int \frac{C}{(x-2)} dx$$

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A}{(x)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x-2)} = \frac{A(x+2)(x-2) + B(x)(x-2) + Cx(x+2)}{(x)(x+2)(x-2)}$$

$$\text{Para todo } x \text{ se ha de cumplir } 4x^2 + 16x - 8 = A(x+2)(x-2) + 8(x)(x-2) + Cx(x+2);$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow -8 = A(0+2)(0-2); A = 4;$$

$$\text{Para } x = 2 \Rightarrow 16 + 32 - 8 = C \cdot 2(2+2); C = 5$$

$$\text{Para } x = -2 \Rightarrow 16 - 32 - 8 = B \cdot (-2)(-2-2); B = -3$$

$$\int \frac{4x^2 + 16x - 8}{(x(x+2)(x-2))} dx = \int \frac{A}{(x)} dx + \int \frac{B}{(x+2)} dx + \int \frac{C}{(x-2)} dx \text{ sustituimos}$$

$$\int \frac{4x^2 + 16x - 8}{(x(x+2)(x-2))} dx = \int \frac{4}{(x)} dx + \int \frac{-3}{(x+2)} dx + \int \frac{5}{(x-2)} = 4\ln x - 3\ln(x+2) + 5\ln(x-2) + C$$

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4\ln x - 3\ln(x+2) + 5\ln(x-2) + C$$

29. Ejercicio

Calcular la siguiente primitiva $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$;

Solución

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = \int \frac{A}{(x-1)} dx + \int \frac{B}{(x-1)^2} dx + \int \frac{C}{(x-2)} dx =$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = \int \frac{A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)} dx \Rightarrow$$

$$1 = A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2 \text{ Para todo valor de } x$$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow 1 = B(1-2); B = -1;$$

$$\text{Para } x = 2 \Rightarrow 1 = C(2-1)^2; C = 1;$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow 1 = A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2; \text{ sustituyo valores}$$

$$1 = A(0-1)(0-2) + (-1)(0-2) + 1(0-1)^2 = 2A + 2 + 1; A = -1;$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = \int \frac{-1}{(x-1)} dx + \int \frac{-1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{(x-2)} dx$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} dx \text{ se resuelve integral directa caso 1 } \int (f(x))^n * f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C;$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{(x-1)}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = -\ln(x-1) + \frac{1}{(x-1)} + \ln(x-2) + C$$

30. Ejercicio

Calcular la siguiente primitiva $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$;

Solución

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1};$$

$$\text{descomponemos en factores usando ruffini } x^3 + 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \int \frac{A}{(x-1)} dx + \int \frac{Bx + C}{(x^2 + x + 1)}$$

$$\frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx + C}{(x^2 + x + 1)} = \frac{A(x^2 + x + 1) + (x-1)(Bx + C)}{x^3 + 1}$$

$$1 = A(x^2 + x + 1) + (x-1)(Bx + C)$$

$$\text{Para } x = -1 \Rightarrow 1 = A((-1)^2 + (-1) + 1) + ((-1) - 1)(B(-1) + C) = A + 2B - 2C$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow 1 = A((0)^2 + 0 + 1) + (0 - 1)(B * 0 + C) = A - C$$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow 1 = A((1)^2 + 1 + 1) + (1 - 1)(B(-1) + C) = 3A; A = \frac{1}{3}$$

$$1 = A - C \text{ sustituyo } \Rightarrow 1 = \frac{1}{3} - C; C = -\frac{2}{3}$$

$$1 = A + 2B - 2C \text{ Sustituyo } 1 = \frac{1}{3} + 2B - 2\left(-\frac{2}{3}\right) = 2B + \frac{5}{3}; B = -\frac{1}{3}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1} = \int \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x-1)} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{(x^2 + x + 1)}$$

$$\int \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{(x^2 + x + 1)} = -\frac{1}{3} \int \frac{(x+2)}{(x^2 + x + 1)}; \text{desarrollo para buscar una derivable del denominador}$$

$$(x+2) = \frac{1(2x+1)}{2} + \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{3} \int \frac{(x+2)}{(x^2 + x + 1)} = -\frac{1}{3} \int \frac{\left(\frac{2x+1}{2} + \frac{3}{2}\right)}{(x^2 + x + 1)} = -\frac{1}{3} * \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)} - \frac{1}{3} \int \frac{\frac{3}{2}}{(x^2 + x + 1)} = ;$$

$$= -\frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)} - \frac{3}{6} \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)} = -\frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)} - \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)}$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)} \text{ hacemos el denominador como un cuadrado } \Rightarrow$$

$$x^2 + x + 1 = \text{ha de ser} = (x+a)^2 = x^2 + a^2 + 2ax \text{ como } 2ax = x \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + (\frac{1}{2})^2 + 2\frac{1}{2}x = x^2 + \frac{1}{4} + x; \text{para que sea igual a 1} \Rightarrow \text{he de sumar } \frac{3}{4}$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}; \frac{3}{4} \text{ lo puedo poner como potencia} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\text{sustituimos en la integral} -\frac{1}{3} \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx$$

$$\text{dividimos por } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + 1} dx$$

$$-\frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \text{ sustituimos}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x-1)} dx - \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)} - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} =$$

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{3} * \frac{2}{\sqrt{3}} \text{acotang} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

31. Ejercicio

Calcular la siguiente primitiva $\int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$

Solución

$$\int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx = \text{descomponemos en factores; } x^2 = t; t^2 + 6t + 8 = 0; t = -2; t = -4; \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^3 - 6}{(x^2 + 2)(x^2 + 4)} dx; \int \frac{x^3 - 6}{(x^2 + 2)(x^2 + 4)} dx = \int \frac{Ax + B}{(x^2 + 2)} dx; + \int \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)} dx;$$

$$\frac{x^3 - 6}{(x^2 + 2)(x^2 + 4)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)} = \frac{(Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)(x^2 + 4)}$$

$$x^3 - 6 = (Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 2) \text{ para todo } x$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow -6 = (A \cdot 0 + B)(0^2 + 4) + (C \cdot 0 + D)(0^2 + 2) = 4B + 2D$$

$$\text{Para } x = 2 \Rightarrow 2 = (A \cdot 2 + B)(2^2 + 4) + (C \cdot 2 + D)(2^2 + 2) = 16A + 8B + 12C + 6D$$

$$\text{Para } x = -2 \Rightarrow -14 = (A \cdot (-2) + B)((-2)^2 + 4) + (C \cdot (-2) + D)((-2)^2 + 2) = -16A + 8B - 12C + 6D$$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow -5 = (A \cdot (1) + B)((1)^2 + 4) + (C \cdot (1) + D)((1)^2 + 2) = 5A + 5B + 3C + 3D$$

$$\begin{cases} -6 = 4B + 2D \\ 2 = 16A + 8B + 12C + 6D \\ -14 = -16A + 8B - 12C + 6D \\ -5 = 5A + 5B + 3C + 3D \end{cases} \begin{cases} -6 = 4B + 2D \\ -12 = 16B + 12D \end{cases} D = 3; B = -3;$$

$$\begin{cases} -14 = -16A + 8B - 12C + 6D \\ -5 = 5A + 5B + 3C + 3D \end{cases} \text{ sustituimos } D \text{ y } B \begin{cases} -14 = -16A - 24 - 12C + 18 \\ -5 = 5A - 15 + 3C + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8 = -16A - 12C \\ 1 = 5A + 3C \end{cases} A = -1; C = 2$$

$$\int \frac{x^3 - 6}{(x^2 + 2)(x^2 + 4)} dx = \int \frac{-x - 3}{(x^2 + 2)} dx; + \int \frac{2x + 3}{(x^2 + 4)} dx =;$$

$$- \int \frac{x}{(x^2 + 2)} dx - \int \frac{3}{(x^2 + 2)} dx + \int \frac{2x}{(x^2 + 4)} dx + \int \frac{3}{(x^2 + 4)} dx$$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + 2)} dx - \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2 + 1} dx + \int \frac{2x}{(x^2 + 4)} dx + \frac{3}{2} \int \frac{2}{(\frac{x}{2})^2 + 1} dx$$

$$\int \frac{x^3 - 6}{(x^2 + 2)(x^2 + 4)} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + \ln(x^2 + 4) + \frac{3}{2} \arctg \frac{x}{2} + C$$

32. Ejercicio

Calcular la siguiente primitivas $H = \int \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} dx$ que cumple $H(1) = 1$;

Solución

$$H = \int \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} dx \text{ dividimos } \Rightarrow \int (2x + 1) dx + \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2} dx =$$

$$x^2 + x + \int \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2} dx = x^2 + x + \int \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2} dx = x^2 + x + \ln(6x^2 - 7x + 2) + C$$

$$\text{si ha de cumplir } H(1) = 1 = 1^2 + 1 + \ln(6 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 2) + C = 2 + \ln 1 + C;$$

$$2 + 0 + C = 1; C = -1;$$

$$H = \int \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} dx = x^2 + x + \ln(6x^2 - 7x + 2) - 1$$

5 Integración por cambio de variable

El método de cambio de variable o de sustitución lo utilizaremos cuando no podamos identificar una integral con ninguno de los tipos de primarias inmediatas

33. Ejercicio

Calcular las siguientes primitivas a) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ b) $\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1} dx$ c) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$;

Solución

a) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ Hacemos un cambio de variable $\begin{cases} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{cases} \Rightarrow \int \frac{1-\sqrt{t^2}}{1+\sqrt{t^2}} 2t dt$;

$$\int \frac{1-t}{1+t} 2t dt = \int \frac{2t-2t^2}{1+t} dt = 2 \int \frac{t-t^2}{1+t} dt = 2 \int (2-t) - \frac{2}{1+t} dt = 2 \int (2-t) dt - 2 \int \frac{2}{1+t} dt =$$

$$2 \int 2 dt - 2 \int t dt - 2 \int \frac{2}{1+t} dt = 4t - t^2 - 4 \ln(1+t) + C$$

$$4t - t^2 - 4 \ln(1+t) + C \text{ sustituimos } \Rightarrow 4\sqrt{x} - \sqrt{x}^2 - 4 \ln(1+\sqrt{x}) + C$$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{x} - x - 4 \ln(1+\sqrt{x}) + C$$

b) $\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1} dx$ Hacemos un cambio de variable $\begin{cases} e^x = t \\ e^x dx = dt; d(x) = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{cases} \Rightarrow$

$$\int \frac{1+t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1+t}{t^3+t} dt = \int \frac{1+t}{t(t^2+1)} dt$$

$$\frac{1+t}{t^3+t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{A(t^2+1) + Bt^2 + Ct}{t^3+t} \Rightarrow 1+t = A(t^2+1) + Bt^2 + Ct \text{ para todo } t;$$

$$\text{Para } t=0 \Rightarrow 1+0 = A \cdot (0+1) + B \cdot 0 + C \cdot 0 \Rightarrow 1 = A;$$

$$\text{Para } t=-1 \Rightarrow 0 = A(1+1) + B \cdot 1 + C(-1) \Rightarrow 0 = 2A + B - C;$$

$$\text{Para } t=1 \Rightarrow A(1+1) + B \cdot 1 + C(1) \Rightarrow 2 = 2A + B + C;$$

$$\begin{cases} 0 = 2A + B - C; \\ 2 = 2A + B + C; \end{cases} \text{ restamos } 2 = 2C; C = 1$$

$$0 = 2A + B - C \text{ sustituimos } \Rightarrow 0 = 2 \cdot 1 + B - 1; B = -1$$

$$\frac{1+t}{t^3+t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \text{sustituimos } \frac{1}{t} + \frac{-t+1}{t^2+1}$$

$$\int \frac{3+t}{t^3+t} dt = \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{t^2+1} dt + \int \frac{-t}{t^2+1} dt = \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{t^2+1} dt - \int \frac{t}{t^2+1} dt$$

$$\ln t + \arctan t + \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt = \ln t + \arctan t - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + C$$

$$\ln t + \arctan t - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + C \text{ deshacemos los cambios } \Rightarrow \ln e^x + \arctan e^x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) + C$$

$$\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1} dx = \ln e^x + \arctan e^x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) + C$$

c) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$ Hacemos un cambio de variable $\begin{cases} \sqrt[3]{x} = t; x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt; \end{cases}$

$$\int \frac{1}{t+1} 3t^2 dt = \int \frac{3t^2}{t+1} dt \text{ dividimos } 3 \int (t-1) + \frac{1}{t+1} dt =$$

$$3 \int t + 3 \int -1 dt + 3 \int \frac{1}{t+1} dt = \frac{3}{2}t^2 - 3t + 3 \ln(t+1) + C \text{ deshacemos los cambios}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 3 \ln(\sqrt[3]{x}+1) + C$$

34. Ejercicio

Calcular las siguientes primitivas a) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$ b) $\int \sqrt{\frac{x+5}{x}} dx$

Solución

$$a) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}+1} dx \text{ hallamos el comun denominador } \Rightarrow \int \frac{x^{\frac{3}{6}}}{x^{\frac{2}{6}}+1} dx$$

Hacemos un cambio de variable $\begin{cases} x^{\frac{1}{6}} = t; x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt; \end{cases}$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} = \int \frac{\sqrt{t^6}}{\sqrt[3]{t^6}+1} 6t^5 dt = \int \frac{t^3}{t^2+1} 6t^5 dt = \int \frac{6t^8}{t^2+1} dt = 6 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt = \text{dividimos}$$

$$6 \int \left((t^6 - t^4 + t^2 - 1) + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + \frac{6}{3}t^3 - 6t + 6 \arctan(t^2+1) + C$$

$$\frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + \frac{6}{3}t^3 - 6t + 6 \arctan(t^2+1) + C \text{ deshacemos cambio}$$

$$\frac{6}{7}x^{\frac{1}{2}} - \frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}} + \frac{6}{3}x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \arctan\left(x^{\frac{1}{6}}+1\right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{6}{3}x^{\frac{3}{6}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \arctan\left(x^{\frac{1}{6}}+1\right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{6}{3}x^{\frac{3}{6}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \arctan\left(\sqrt[6]{x^2}+1\right) + C$$

$$b) \int \sqrt{\frac{x+5}{x}} dx; \text{ Hacemos un cambio de variable } \begin{cases} \frac{x+5}{x} = t^2; 1 + \frac{5}{x} = t^2; x = \frac{5}{t^2-1} \\ dx = \frac{-2t \cdot 5}{(t^2-1)^2} dt; dx = \frac{-10t}{(t^2-1)^2} dt \end{cases}$$

$$\int \sqrt{\frac{x+5}{x}} dx = \int \sqrt{t^2} \cdot \frac{-10t}{(t^2-1)^2} dt = \int \frac{-10t \cdot t}{(t^2-1)^2} dt = -10 \int \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt = -10 \int \frac{t^2}{t^4+1-2t^2} dt$$

$$\text{resolvemos la ecuacion cuadratica } = t^4 + 1 - 2t^2 = (t-1)(t-1)(t+1)(t+1)$$

$$= -10 \int \frac{t^2}{t^4+1-2t^2} dt = -10 \int \frac{t^2}{(t-1)(t-1)(t+1)(t+1)} dt = -10 \int \frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} dt;$$

usamos el teorema de descomposicion de fracciones

$$\frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{A}{(t-1)} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{(t+1)} + \frac{D}{(t+1)^2} =$$

$$\frac{A(t-1)(t+1)^2}{(t-1)(t-1)(t+1)(t+1)} + \frac{B(t+1)^2}{(t-1)(t-1)(t+1)(t+1)} + \frac{C(t+1)(t-1)^2}{(t-1)(t-1)(t+1)(t+1)} +$$

$$+ \frac{D(t-1)^2}{(t-1)(t-1)(t+1)(t+1)} =$$

$$\frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t-1)^2(t+1) + D(t-1)^2}{(t-1)(t-1)(t+1)(t+1)};$$

$$t^2 = A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t-1)^2(t+1) + D(t-1)^2$$

$$\text{para } t = 0 \Rightarrow 0 = -A + B + C + D;$$

$$\text{para } t = 1 \Rightarrow 1 = 4B; B = \frac{1}{4}$$

$$\text{para } t = -1 \Rightarrow 1 = 4D; D = \frac{1}{4}$$

$$\text{para } t = 2 \Rightarrow 4 = 9A + 9B + 3C + D$$

$$\text{Sustituimos los valores } \begin{cases} 0 = -A + \frac{1}{4} + C + \frac{1}{4}; \\ 4 = 9A + 9 \cdot \frac{1}{4} + 3C + \frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} 0 = -A + \frac{2}{4} + C; \\ 4 = 9A + \frac{10}{4} + 3C; \end{cases} \begin{cases} F_{1-} \rightarrow F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -A + \frac{2}{4} + C; \\ 4 = 12A + \frac{4}{4} + 0; \end{cases} A = \frac{3}{12}; A = \frac{1}{4}; 0 = -\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + C; C = -\frac{1}{4}$$

$$A = \frac{1}{4}; B = \frac{1}{4}; C = -\frac{1}{4}; D = \frac{1}{4}$$

$$\int \sqrt{\frac{x+5}{x}} dx = -10 \int \frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} dt = -10 \int \left(\frac{A}{(t-1)} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{(t+1)} + \frac{D}{(t+1)^2} \right) dt =$$

$$-10 \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{(t-1)} + \frac{\frac{1}{4}}{(t-1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{(t+1)} + \frac{\frac{1}{4}}{(t+1)^2} \right) dt = -10 \int \left(\frac{1}{4(t-1)} + \frac{1}{4(t-1)^2} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4(t+1)^2} \right) dt$$

$$-10 \int \left(\frac{1}{4(t-1)} \right) dt - 10 \int \left(\frac{1}{4(t-1)^2} \right) dt - 10 \int \left(-\frac{1}{4(t+1)} \right) dt + -10 \int \left(\frac{1}{4(t+1)^2} \right) dt$$

$$- \frac{10}{4} \int \left(\frac{1}{(t-1)} \right) dt - \frac{10}{4} \int \left(\frac{1}{(t-1)^2} \right) dt + \frac{10}{4} \int \left(\frac{1}{(t+1)} \right) dt - \frac{10}{4} \int \left(\frac{1}{(t+1)^2} \right) dt$$

$$\int \left(\frac{1}{(t-1)^2} \right) dt \text{ Hacemos un cambio de variable } \begin{cases} t-1 = r \\ dr = dt; \end{cases}$$

$$\int \left(\frac{1}{(t-1)^2} \right) dt = \int \frac{1}{r^2} dr = \int r^{-2} dr = -r^{-1} + C = -\frac{1}{r} + C \text{ deshacemos el cambio } = -\frac{1}{t-1} + C$$

$$\int \sqrt{\frac{x+5}{x}} dx = -\frac{10}{4} \ln(t-1) - \frac{10}{4} \left(-\frac{1}{t-1} \right) + \frac{10}{4} \ln(t+1) - \frac{10}{4} \left(-\frac{1}{t+1} \right) + C;$$

$$\int \sqrt{\frac{x+5}{x}} dx = \frac{5}{2} (-\ln(t-1) + \left(\frac{1}{t-1} \right) + \ln(t+1) + \left(\frac{1}{t+1} \right)) + C$$

$$\text{Deshacemos el cambio de variable } \int \sqrt{\frac{x+5}{x}} dx; t = \sqrt{\frac{x+5}{x}}$$

$$\int \sqrt{\frac{x+5}{x}} dx = \frac{5}{2} \left(-\ln \left(\sqrt{\frac{x+5}{x}} - 1 \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}} - 1} \right) + \ln \left(\sqrt{\frac{x+5}{x}} + 1 \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}} + 1} \right) \right) + C$$

35. Ejercicio

Calcular la siguiente primitivas $\int \sin(\ln x) dx$

Solución

$$\int \sin(\ln x) dx \quad \text{Hacemos un cambio de variable} \begin{cases} \ln x = t \text{ por definicion de logaritmo } e^t = x \\ \frac{d}{dt} e^t = dx; \end{cases}$$

$$\int \sin t * e^t dt = \int \sin t * e^t dt$$

$$\text{resolvemos usando la integracion por partes} \begin{cases} \sin t = u; & d(u) = \cos t dt \\ e^t dt = dv; v = e^t \end{cases}$$

$$\int u dv = uv - \int v du; \quad \int \sin t * e^t dt = \sin t * e^t - \int e^t \cos t dt = e^t \sin t - \int e^t \cos t dt$$

$$\int e^t \cos t dt = \text{usando la integracion por partes} \begin{cases} \cos t = u; & d(u) = -\sin t dt \\ e^t dt = dv; v = e^t \end{cases}$$

$$\int e^t \cos t dt = e^t \cos t - \int e^t (-\sin t) dt = e^t \cos t + \int -e^t \sin t dt$$

$$\int \sin t * e^t dt = e^t \sin t - (e^t \cos t + \int e^t \sin t dt) = e^t \sin t - e^t \cos t - \int e^t \sin t dt$$

$$2 \int \sin t * e^t dt = e^t \sin t - e^t \cos t; \quad \int \sin t * e^t dt = \frac{1}{2} e^t \sin t - \frac{1}{2} e^t \cos t$$

$$\text{deshacemos el cambio de variable } \Rightarrow \int \sin t * e^t dt = \frac{1}{2} e^t \sin \ln x - \frac{1}{2} e^t \cos \ln x + C$$

$$\text{Dado que } e^t = x \Rightarrow \int \sin t * e^t dt = \frac{1}{2} x \sin \ln x - \frac{1}{2} x \cos \ln x;$$

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} x (\sin \ln x - \cos \ln x) + C$$

36. Ejercicio

Sea la integral $\int e^{2x} \sin(e^x) dx$

a) integrala mediante el cambio $t = e^x$

b) Calcula la constante de integracion para uqe la función integral pase por el origen de coordenadas

Solución

$$\int e^{2x} \sin(e^x) dx; \quad \text{Hacemos un cambio de variable} \begin{cases} t = e^x \Rightarrow x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t} dt; \end{cases}$$

$$\int e^{2x} \sin(e^x) dx = \int t^2 \sin(t) \frac{1}{t} dt = \int t \sin(t) dt$$

$$\text{usando la integracion por partes} \begin{cases} t = u; & d(u) = dt \\ \sin t dt = dv; v = -\cos t \end{cases}$$

$$\int u dv = uv - \int v du; \quad \int t \sin(t) dt = t(-\cos t) - \int (-\cos t) dt = -t \cos t + \sin t + C$$

$$\text{Deshacemos el cambio de variable } \Rightarrow -t \cos t + \sin t + C;$$

$$\int e^{2x} \sin(e^x) dx = -e^x \cos e^x + \sin e^x + C;$$

b) Calcula la constante de integracion para uqe la función integral pase por el origen de coordenadas

$$\text{Si ha de pasar por el origen } 0 = -e^0 \cos e^0 + \sin e^0 + C; \quad 0 = -1 \cos 1 + \sin 1 + C; \quad C = \cos 1 - \sin 1$$

$$\int e^{2x} \sin(e^x) dx = -e^x \cos e^x + \sin e^x + (\cos 1 - \sin 1)$$

37. Ejercicio

Calcula $\int x((\ln(1+x^2) + (e^{-x}))) dx$

Solución

$$x((\ln(1+x^2) + (e^{-x})))dx = \int x(\ln(1+x^2)) dx + \int x(e^{-x}) dx$$

$$\int x(\ln(1+x^2))dx ; \text{ Hacemos un cambio de variable } \begin{cases} t = 1+x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t-1} \\ dx = \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt; \end{cases}$$

$$\int x(\ln(1+x^2))dx = \int \sqrt{t-1} \ln t * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \frac{1}{2} \int \ln t dt$$

$$\int \ln t dt; \text{ resolvemos usando la integracion por partes } \begin{cases} \ln t = u; & d(u) = \frac{1}{t} dt \\ dt = dv; v = t \end{cases}$$

$$\int u dv = uv - \int v du; \int \ln t dt = t \ln t - \int t * \frac{1}{t} dt = t * \ln t - t = t(\ln t - 1) + C$$

$$\int x(\ln(1+x^2))dx = \frac{1}{2}((\ln t) - 1) + C \text{ deshacemos } \Rightarrow$$

$$\int x(\ln(1+x^2))dx = \frac{1}{2}(1+x^2)((\ln(1+x^2) - 1) + C$$

$$\int x(e^{-x}) dx; \text{ resolvemos usando la integracion por partes } \begin{cases} x = u; & d(u) = dx \\ e^{-x} dx = dv; v = -\frac{1}{e^x} \end{cases}$$

$$\int u dv = uv - \int v du; \int x(e^{-x}) dx = x\left(-\frac{1}{e^x}\right) - \int \frac{1}{e^x} dx = -x\frac{1}{e^x} - \left(\frac{1}{e^x}\right) + C = -x\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x} + C$$

$$\int x(e^{-x}) dx = -\frac{1}{e^x}(x+1)$$

$$\int x((\ln(1+x^2) + (e^{-x}))) dx = \frac{1}{2}(1+x^2)((\ln(1+x^2) - 1) - \frac{1}{e^x}(x+1) + C$$

38. Ejercicio

Calcula $\int e^{x+e^x} dx$

Solución

$$\int e^{x+e^x} dx = \int e^x * e^{e^x} dx \text{ Hacemos un cambio de variable } \begin{cases} t = e^x \Rightarrow x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t} dt; \end{cases}$$

$$\int e^x * e^{e^x} dx = \int t * e^t * \frac{1}{t} dt = \int e^t dt = e^t + C$$

$$\text{deshacemos el cambio de variable } \int e^{x+e^x} dx = e^{e^x} + C$$

$$\int e^{x+e^x} dx = e^{e^x} + C$$

39. Ejercicio

Calcula $\int \sec^3 x dx$ hacer un cambio de variable $\sin x = t$ para obtener una funcion racional

Solución

$$\int \sec^3 x dx = \text{ Hacemos un cambio de variable } \begin{cases} t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \\ dt = \cos x dx; \end{cases}$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \frac{1}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} \, dx; \text{ dado que } \cos^2 x + \sin^2 x = 1; \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2;$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \frac{1}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{(1 - \sin^2 x)^2} \, dx \text{ Hacemos el cambio de variable}$$

$$\int \frac{\cos x}{(1 - \sin^2 x)^2} \, dx = \int \frac{\cos t}{(1 - t^2)^2} \, dx = \int \frac{1}{(1 - t^2)^2} \, dt$$

$$\int \frac{1}{(1 - t^2)^2} \, dt; \text{ usamos el teorema de descomposicion de fracciones}$$

$$\frac{1}{(1 - t^2)^2}; \text{ descomponemos en factores } (1 - t^2)^2 = (1 + t)(1 - t)(1 + t)(1 - t) = (1 - t)^2(1 + t)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - t^2)^2} &= \frac{A}{(1 - t)} + \frac{B}{(1 - t)^2} + \frac{C}{(1 + t)} + \frac{D}{(1 + t)^2} \\ &= \frac{A(1 - t)(1 + t)^2}{(1 - t^2)^2} + \frac{B(1 + t)^2}{(1 - t^2)^2} + \frac{C(1 + t)(1 - t)^2}{(1 - t^2)^2} + \frac{D(1 - t)^2}{(1 - t^2)^2} = \\ &= \frac{A(1 - t)(1 + t)^2 + B(1 + t)^2 + C(1 + t)(1 - t)^2 + D(1 - t)^2}{(1 - t^2)^2} \end{aligned}$$

$$1 = A(1 - t)(1 + t)^2 + B(1 + t)^2 + C(1 + t)(1 - t)^2 + D(1 - t)^2$$

$$\text{Para } t = 1 \Rightarrow 1 = 4B; B = \frac{1}{4}$$

$$\text{Para } t = -1 \Rightarrow 1 = 4D; D = \frac{1}{4};$$

$$\text{Para } t = 0 \Rightarrow 1 = A + B + C + D$$

$$\text{Para } t = 2 \Rightarrow 1 = -9A + 9B + 3C + D$$

$$\text{sustituimos B y D } \begin{cases} 1 = A + \frac{1}{4} + C + \frac{1}{4}; \frac{1}{2} = A + C; 1 = 2A + 2C \\ 1 = -9A + 9\frac{1}{4}B + 3C + \frac{1}{4}; -\frac{3}{2} = -9A + 3C; -3 = -18A + 6C \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 2A + 2C \\ -3 = -18A + 6C \end{cases} \quad A = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}; A = \frac{1}{4}; \text{ Sustituimos en } 1 = 2A + 2C \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{1}{(1 - t^2)^2} \, dt = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{(1 - t)} + \frac{\frac{1}{4}}{(1 - t)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{(1 + t)} + \frac{\frac{1}{4}}{(1 + t)^2} \right) \, dt =$$

$$\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{(1 - t)} \, dt + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1 - t)^2} \, dt + \int \left(\frac{1}{(1 + t)} \, dt + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1 + t)^2} \, dt \right) \right) \, dt =$$

$$\int \frac{1}{(1 - t)^2} \, dt = \int \left(\frac{1}{(1 - t)^2} \right) \, dt \text{ Hacemos un cambio de variable } \begin{cases} 1 - t = r \\ dr = -dt; \end{cases}$$

$$\int \left(\frac{1}{(1 - t)^2} \right) \, dt = \int -\frac{1}{r^2} \, dr = -\int r^{-2} \, dr = -r^{-1} + C = +\frac{1}{r} + C$$

$$\text{deshacemos el cambio} = \frac{1}{1 - t} + C$$

$$\int \frac{1}{(1 + t)^2} \, dt = \int \left(\frac{1}{(1 + t)^2} \right) \, dt \text{ Hacemos un cambio de variable } \begin{cases} 1 + t = r \\ dr = dt; \end{cases}$$

$$\int \left(\frac{1}{(1 + t)^2} \right) \, dt = \int \frac{1}{r^2} \, dr = \int r^{-2} \, dr = -r^{-1} + C = -\frac{1}{r} + C$$

$$\text{deshacemos el cambio} = -\frac{1}{1 + t} + C$$

$$\int \frac{1}{(1 - t^2)^2} \, dt = -\frac{1}{4} \ln(1 - t) + \frac{1}{4} * \frac{1}{1 - t} + \frac{1}{4} \ln(1 + t) - \frac{1}{4} * \frac{1}{1 + t}$$

$$\int \frac{1}{(1 - t^2)^2} \, dt = -\frac{1}{4} \ln(1 - \sin x) + \frac{1}{4} * \frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{4} \ln(1 + \sin x) - \frac{1}{4} * \frac{1}{1 + \sin x} + C$$

40. Ejercicio

Calcula $\int \sec^3 x \, dx$

Solución

Resolvemos el ejercicio anterior usando la integración por partes

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec x * \sec^2 x \, dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \sec x = u; \quad d(u) = \tan x \sec x \, dx \\ \sec^2 x \, dx = dv; \quad v = \tan x \end{array} \right.$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du; \quad \int \sec x * \sec^2 x \, dx = \sec x * \tan x - \int \tan x \tan x \sec x \, dx =$$

$$\text{Identidades } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ y } \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \Rightarrow$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \, dx$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} * \frac{1}{\cos x} \, dx = \int \tan^2 x * \sec x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) * \sec x \, dx =$$

$$\int (\sec^3 x - \sec x) \, dx = \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x * \tan x - \left(\int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx \right) \Rightarrow 2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x * \tan x + \int \sec x \, dx;$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x * \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln(\sec x + \tan x) + C$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |(\sec x + \tan x)| + C$$

41. Ejercicio

Calcula $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}}$; realiza el cambio $\sqrt{x^2 - 2} - x = t$

Solución

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}}; \text{ hacemos cambio de variable } \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 - 2} - x = t; \\ dt = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} - 1 \right) dx; dt = \frac{x - \sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{x^2 - 2}} dx; \end{array} \right.$$

$$\sqrt{x^2 - 2} - x = t; \quad \sqrt{x^2 - 2} = t + x \text{ elevamos al cuadrado los dos terminos } x^2 - 2 = x^2 + t^2 + 2xt$$

$$t^2 + 2xt + 2 = 0; \text{ despejamos } x = \frac{-t^2 - 2}{2t}; \quad dx = -\frac{2t * 2t - 2(t^2 + 2)}{4t^2} = -\frac{2t^2 - 4}{4t^2};$$

$$dx = \frac{-t^2 + 2}{2t^2}$$

$$\text{sustituimos } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \int \frac{\frac{-t^2 + 2}{2t^2}}{\frac{-t^2 - 2}{2t}} dt = \int \frac{\frac{-t^2 + 2}{2t^2}}{\frac{-t^2 - 2}{2t}} dt = \int \frac{\frac{-t^2 + 2}{2t^2}}{\frac{-t^2 - 2}{2t}} dt = \int \frac{\frac{-t^2 + 2}{t^2 - 2}}{\frac{t}{1}} dt =$$

$$\int \frac{\frac{-t^2 + 2}{t^2 - 2}}{\frac{t}{1}} dt = \int -\frac{1}{t} dt = -\ln |t| + C \text{ sustituimos}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = -\ln |\sqrt{x^2 - 2} - x| + C$$

42. Ejercicio

Calcula $\int \sin^5 x * \cos^2 x \, dx$;

Solución

$\int \sin^5 x * \cos^2 x \, dx$ hacemos el cambio de variable $\cos x = t$; $-\sin x \, dx = dt$; $dx = -\frac{dt}{\sin x}$

$$\int \sin^5 x * \cos^2 x \, dx = \int \sin^4 x * t^2 * \left(-\frac{dt}{\sin x}\right) = \int -\sin^4 x * t^2 \, dt$$

aplicando la razon fundamenta $= \cos^2 x + \sin^2 x = 1$; sutituimos

$$-\int (1 - \cos^2 x)^2 * t^2 \, dt = -\int (1 - t^2)^2 * t^2 \, dt = -\int (t^4 + 1 - 2t^2) * t^2 \, dt = -\int (t^6 + t^2 - 2t^4) \, dt;$$

$$-\int t^6 \, dt - \int t^2 \, dt - \int 2t^4 \, dt = -\frac{t^7}{7} - \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + C$$

$$\text{deshacemos el cambio } \int \sin^5 x * \cos^2 x \, dx; = -\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^3 x}{3} - 2\frac{\cos^5 x}{5} + C$$

43. Ejercicio

Calcula $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} \, dx$;

Solución

Los cocientes de potencia entera de sen x y cos x, Si una de ellas es impar se utiliza la otra para el cambio de variable

$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} \, dx =$ hacemos cambio de variable $t = \sin x$; $dt = \cos x \, dx$; $dx = \frac{dt}{\cos x}$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{t^4}{\cos^3 x} \frac{dt}{\cos x} = \int \frac{t^4}{\cos^4 x} \, dt = \int \frac{t^4}{(1 - \sin^2 x)^2} \, dt = \int \frac{t^4}{(1 - t^2)^2} \, dt;$$

$$\int \frac{t^4}{(1 - t^2)^2} \, dt = \int t^3 * \frac{t}{(1 - t^2)^2} \, dt \left\{ \begin{array}{l} t^3 = u; \quad d(u) = 3t^2 \, dt \\ \frac{t}{(1 - t^2)^2} \, dt = dv; \quad v = \frac{1}{2(1 - t^2)} + C \end{array} \right.$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du; \int \frac{t^4}{(1 - t^2)^2} \, dt = t^3 * \frac{1}{2(1 - t^2)} - \int \frac{1}{2(1 - t^2)} 3t^2 \, dt =$$

$$\frac{t^3}{2(1 - t^2)} - \int \frac{3t^2}{2(1 - t^2)} \, dt = \frac{t^3}{2(1 - t^2)} - \frac{3}{2} \int \frac{t^2}{(1 - t^2)} \, dt$$

$$\int \frac{t^2}{(1 - t^2)} \, dt; \text{ dividimos } = \int -1 + \frac{1}{(1 - t^2)} \, dt = \int -1 \, dt + \int \frac{1}{(1 - t^2)} \, dt = -t + \int \frac{1}{(1 - t^2)} \, dt$$

$$\int \frac{1}{(1 - t^2)} \, dt = \int \frac{1}{(1 + t)(1 - t)} \, dt \text{ usamos descomposicion de fracciones}$$

$$\frac{1}{(1 + t)(1 - t)} = \frac{A}{1 + t} + \frac{B}{1 - t} = \frac{A(1 - t)}{1 - t^2} + \frac{B(1 + t)}{1 - t^2} = \frac{A(1 - t) + B(1 + t)}{1 - t^2} \Rightarrow$$

$$1 = A(1 - t) + B(1 + t) \text{ para todo } t;$$

$$\text{Para } t = 1 \Rightarrow 1 = 2B; B = \frac{1}{2}$$

$$\text{Para } t = -1 \Rightarrow 1 = 2A; A = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{(1 + t)(1 - t)} \, dt = \int \frac{\frac{1}{2}}{(1 + t)} \, dt + \int \frac{\frac{1}{2}}{(1 - t)} \, dt = \frac{1}{2} \ln|1 + t| - \frac{1}{2} \ln|1 - t| + C;$$

$$\frac{t^3}{2(1-t^2)} - \frac{3}{2} \int \frac{t^2}{(1-t^2)} dt = \frac{t^3}{2(1-t^2)} - \frac{3}{2}((-t) + \frac{1}{2} \ln|1+t| + \frac{1}{2} \ln|1-t|) + C =$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^3 x} dx = +\frac{3t}{2} - \frac{3}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C; \text{ deshacemos variables}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^3 x} dx = +\frac{3 \operatorname{sen} x}{2} - \frac{3}{4} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \right| + C;$$

44. Ejercicio

Calcula $\int \operatorname{sen}^4 x * \cos^2 x dx$;

Solución

$\int \operatorname{sen}^4 x * \cos^2 x dx$; como las dos potencias son pares utilizamos la formulas de angulo mitad

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x; \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x;$$

$$\operatorname{sen}^4 x * \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x * \operatorname{sen}^2 x * \cos^2 x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x\right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 2x\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos^2 2x + \frac{1}{8} \cos^3 2x;$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x * \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos^2 2x + \frac{1}{8} \cos^3 2x\right) dx =$$

$$\int \frac{1}{8} dx - \int \frac{1}{8} \cos 2x dx - \int \frac{1}{8} \cos^2 2x dx + \int \frac{1}{8} \cos^3 2x dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 2x dx - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \cos^3 2x dx$$

$$\frac{1}{8} \int dx = \frac{1}{8} x$$

$$-\frac{1}{8} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{8} * \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = -\frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x$$

$$-\frac{1}{8} \int \cos^2 2x dx = -\frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x\right) dx = -\frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \operatorname{sen} 4x$$

$$\frac{1}{8} \int \cos^2 2x * \cos 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x) * \cos 2x dx = \frac{1}{8} \int \cos 2x dx - \frac{1}{8} \int (\operatorname{sen}^2 2x) * \cos 2x dx;$$

$$\frac{1}{8} \int \cos 2x dx = \frac{1}{8} * \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x;$$

$$-\frac{1}{8} \int (\operatorname{sen}^2 2x) * \cos 2x dx; \text{ hacemos cambio de variable } \begin{cases} t = \operatorname{sen} 2x \\ \frac{dt}{2} = \cos 2x dx; \end{cases} = -\frac{1}{8} \int t^2 * \frac{1}{2} dt$$

$$= -\frac{1}{16} * \frac{1}{3} t^3; \text{ deshacemos variables } = -\frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x * \cos^2 x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C$$

45. Ejercicio

Al aplicar integración por partes para calcular $\int f(x) \operatorname{sen} x \, dx$ donde $f(x)$ es una función derivable se

obtiene $\int f(x) \operatorname{sen} x \, dx = -f(x)\cos x + \int 3x^2 \cos x \, dx$. Sabiendo que $f(1) = 2$

encuentra la función $f(x)$;

Solución

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du; \begin{cases} -f(x) = u; du = -f'(x) \, dx \\ \operatorname{sen} x \, dx = dv; \cos x = v \end{cases}$$

$$\int f(x) \operatorname{sen} x \, dx = -f(x)\cos x - \int \cos x(-f'(x)) \, dx = -f(x)\cos x - \int -3x^2 \cos x \, dx \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -f(x) \cos x = -f(x) \cos x \\ \cos x(-f'(x)) = -3x^2 \cos x; f'(x) = 3x^2; \int f'(x) \, dx = \int 3x^2 \, dx \Rightarrow f(x) = 3\frac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 + C;$$

$$\text{Si se cumple que } f(1) = 2 \Rightarrow 2 = 1^3 + C; C = 1$$

$$f(x) = x^3 + 1;$$

46. Ejercicio

Un punto se mueve en línea recta con una velocidad de $v(t) = 12t - 5 \frac{m}{s}$.

Calcula el espacio recorrido en cada instante t sabiendo que $e(0) = 10m$.

¿Cuál es la velocidad media entre $t = 0s$ y $t = 2s$?

Recuerda que la velocidad es la derivada del espacio respecto al tiempo

Solución

$$e(t) = \int v(t) \, dt \Rightarrow e(t) = \int (12t - 5) \, dt; e(t) = \int 12t \, dt - \int 5 \, dt;$$

$$e(t) = 12 * \frac{1}{2} t^2 - 5t + C; e(t) = 6t^2 - 5t + C; \text{ dado que } t = 0; e(t) = 10$$

$$e(t) = 6t^2 - 5t + 10$$

$$v_m = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \Rightarrow v_m = \frac{(12 * 2 - 5) - (12 * 0 - 5)}{2 - 0} = \frac{19 - 5}{2} = \frac{14}{2} = 7 \frac{m}{s}$$

47. Ejercicio

En un examen se ha pedido a los estudiantes que resuelvan $\int 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx$;

Juan lo resolvió mediante cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$

Pedro con el cambio de variable $t = \cos x$

Pilar usando la fórmula del ángulo doble $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$

El profesor aun siendo respuestas distintas las dio todas por válidas.

Halla las distintas respuestas y explica porque son correctas

Solución

$$\text{Juan } \int 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx; \text{ cambio de variable } t = \operatorname{sen} x, dt = \cos x \, dx$$

$$\int 2t \, dt = t^2 \text{ deshacemos variables }; \int 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \operatorname{sen}^2 x + C$$

Pedro $\int 2\operatorname{sen} x \cos x \, dx$; cambio de variable $t = \cos x, dt = -\operatorname{sen} x \, dx$;

$$\int 2t(-dt) = -t^2 ; \text{ deshacemos variables } ; \int 2\operatorname{sen} x \cos x \, dt = -\cos^2 x + C$$

Pilar $\int 2\operatorname{sen} x \cos x \, dx$; ecuación del ángulo doble **$2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$** ;

$$\int 2\operatorname{sen} x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

ANGEL HERNANDEZ DE CASTRO