

CALCULO DE PROBABILIDADES

INDICE

Contenido

1	EXPERIMENTO Y ESPACIO MUESTRAL	2
1.1	EXPERIMENTO ALEATORIO	2
1.2	SUCESOS COMPATIBLES E INCOMPATIBLES	3
1.3	SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES	3
1.4	OPERACIONES CON SUCESOS	5
1.5	PROBABILIDADES DE UN SUCESO	7
2	FRECUENCIA Y PROBABILIDAD	8
3	PROPIEDADES DE LAS PROBABILIDADES	8
4	PROBABILIDAD CONDICIONADA	12
5	PROBABILIDAD DISTRIBUCIÓN BINOMIAL	17

1 EXPERIMENTO Y ESPACIO MUESTRAL

Experimento

Acción y efecto de probar y examinar prácticamente la virtud o propiedades de algo.

Ejemplo: Un experimento gravitatorio (fuerza de la gravedad) es comprobar la velocidad de caída de distintos objetos desde una altura determinada.

Espacio Muestral

Se llama espacio muestral de un experimento al conjunto de todos los resultados posibles

Experimento Aleatorio y determinista

El experimento aleatorio depende del azar, mientras que en el determinista antes de hacer el experimento ya sabemos el resultado

1.1 Experimento aleatorio

Experimento Aleatorio

Es el experimento en el que no podemos predecir el resultado, dado que este depende de la suerte o el azar.

Ejemplo: lanzar un dado, puede salir cualquier número del 1 al 6

Suceso aleatorio

Un suceso aleatorio es un subconjunto del espacio muestral, esto es, un conjunto de resultados posibles del experimento aleatorio.

Ejemplo: Al lanzar un dado podríamos elegir distintos sucesos:

1. *Sacar un numero par*
2. *Sacar un número menor que dos*
3. *Sacar un uno o un tres*
4. *Sacar un número menor de 7*
5. *Sacar un cero*
6. *Sacar un 4*

Suceso seguro

El suceso seguro es aquél que está formado por todos los resultados posibles, esto es, todo el espacio muestral

El suceso 4 Sacar un número menor de 7 (siempre que lancemos el dado aparecerán un número menor de 7)

Suceso imposible

El suceso imposible es aquél que está formado por ningún resultado, esto es, el conjunto vacío. Se expresa con el símbolo $\emptyset$. Se llama suceso imposible porque es el suceso que nunca ocurre.

El suceso 5 Sacar un número cero (Si lanzamos el dado nunca podrá aparecer un 0)

Suceso elemental

Un suceso se dice que es un suceso elemental si está formado por un único elemento del espacio muestral.

El suceso 6 Sacar un cuatro es un suceso elemental.

Suceso compuesto

Un suceso se dice que es un suceso compuesto si está formado por más de un suceso elemental del espacio muestral.

Los sucesos 1, 2, 3, 4 y 5 son sucesos compuestos

1. Ejercicios probabilidades

Indicar cuál de los siguientes eventos son aleatorios y cuales deterministas

- a) Medir la longitud de una barra de 20cm
- b) Lanzar un dado (ver el valor)
- c) Sacar una carta de la baraja española

Solución:

Experimentos aleatorios : b y c (no sabemos el valor que vamos a obtener)

Experimento determinista: a (sabemos de antemano lo que va a medir)

2. Ejercicios probabilidades

Definir el espacio muestral , dos sucesos elementales, dos compuestos, un suceso seguro y uno imposible al sacar una carta de la baraja española

Solución:

- 1. Espacio muestral son las 40 cartas de la baraja española
- 2. Sucesos elementales:
Sacar un as de oros. Sacar un cuatro de espadas...
- 3. Sucesos compuestos:
Sacar un Rey(pues hay 4 reyes) . Sacar un 5 (pues hay 4 cincos)
- 4. Suceso seguro:
Sacar una de las 40 cartas
- 5. Suceso imposible :
Sacar el 4 de corazones (pues esa carta no pertenece a la baraja española)

1.2 Sucesos compatibles e incompatibles

Sucesos compatibles son los que pueden ocurrir simultáneamente y sucesos Incompatibles son los que no pueden ocurrir simultáneamente.

Para calcular el espacio muestral de un experimento con sucesos compatibles se suele utilizar el diagrama de árbol

1.3 Sucesos dependientes e independientes

Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no está afectado porque haya sucedido o no B.

Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de que suceda A está afectado porque haya sucedido o no B

3. Ejercicios probabilidades

Determinar el espacio muestral al lanzar al aire una moneda y un dado

Solucion:

	Lanzar un dado						Lanzar una moneda	
	1	2	3	4	5	6	A	B
E=espacio Muestral	1A	2A	3A	4A	5A	6A	A= Cara	
	1B	2B	3B	4B	5B	6B	B= Cruz	

El espacio muestral será 1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B

4. Ejercicios probabilidades

Al sacar cartas de la baraja española, indicar si son compatibles o incompatibles los siguientes sucesos

1 A.- Sacar un as de bastos B.- Sacar un rey de bastos

2 A.- Sacar un rey B.- Sacar una espada

Solucion:

- 1) Son incompatibles pues si saca un as de bastos no puede sacar un rey de bastos
- 2) Son compatibles pues se puede sacar un rey y que sea espadas, es decir puede sacar el rey de espadas

5. Ejercicios probabilidades

Determinar el espacio muestral del experimento de lanzar dos dados y considerar la suma de los puntos de cada uno de ellos.

Solucion:

El espacio Muestral se halla sumando los datos obtenidos sin repetir los valores

$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

	Lanzar un dado					
	1	2	3	4	5	6
	Lanzar un dado					
	1	2	3	4	5	6
Datos Obtenidos	1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1
		2+2	3+2	4+2	5+2	6+2
			3+3	4+3	5+3	6+3
				4+4	5+4	6+4
					5+5	6+5
						6+6

1.4 Operaciones con sucesos

La unión de dos sucesos A y B, se escribe $A \cup B$ y es otro suceso formado por todos los sucesos elementales que hay en A o en B.

La intersección de dos sucesos A y B, se escribe $A \cap B$ y es otro suceso formado por todos los sucesos elementales que hay A y en B.

El suceso contrario o complementario de un suceso B es otro suceso $\bar{B}$ que contiene los sucesos elementos, del espacio muestral, que no están en el B

Leyes de Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$$

$$\bar{\bar{A}} = A;$$

6. Ejercicios probabilidades

En el experimento de sacar una carta de la baraja española consideramos los sucesos A= "Sacar un rey" y el suceso B=" sacar un basto".

Obtener

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $\bar{A}$

d) $\bar{B}$

Solucion:

Comprobamos el espacio muestral

El espacio Muestral $A = \{RO, RC, RE, RB\}$; R =rey, O=oros, B=bastos, C=copas B=bastos

El espacio Muestral $B = \{1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 7B, SB, CB, RB\}$; R =rey, S=Sota, C=Caballo, B=bastos

a) $A \cup B$

El espacio muestral $A \cup B = \{1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 7B, SB, CB, RB, RO, RC, RE\}$;

b) $A \cap B$ El espacio Muestral $A \cap B = \{RB\}$;

c) $\bar{A}$ El espacio Muestral $\bar{A} = \{36 \text{ cartas (Todas las cartas menos los reyes)}\}$;

d) $\bar{B}$ El espacio Muestral $\bar{B} = \{30 \text{ cartas (Todas las cartas menos los bastos)}\}$;

7. Ejercicios probabilidades

En el experimento de lanzar un dado al aire, consideramos los sucesos

A= "Sacar un numero par"= $\{2, 4, 6\}$ y

B=" obtener un 1,2,3,4" = $\{1, 2, 3, 4\}$.

Obtener

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $\bar{A}$; d) $\bar{B}$;

Solucion:

- a) $A \cup B$ El espacio Muestral $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$;
- b) $A \cap B$ El espacio Muestral $A \cap B = \{2, 4\}$;
- c) $\bar{A}$ El espacio Muestral $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$;
- d) $\bar{B}$ El espacio Muestral $\bar{B} = \{5, 6\}$;

8. Ejercicios probabilidades

En experimento de lanzar dos dados y considerar la suma de los puntos de cada uno de ellos.

$$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Considerar los sucesos

$$A = \text{"Sacar un multiplo de 5"} = \{5, 10\}.$$

$$B = \text{"Sacar un numero par"} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

Obtener a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $\bar{A}$; d) $\bar{B}$; e) $\overline{A \cap B}$; f) $\overline{A \cup B}$;

Solucion:

- a) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$;
- b) $A \cap B = \{10\}$
- c) $\bar{A} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$;
- d) $\bar{B} = \{3, 5, 7, 9, 11\}$;
- e) $\overline{A \cap B} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$;
- f) $\overline{A \cup B} = \{3, 7, 9, 11\}$;

9. Ejercicios probabilidades

Tenemos una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento, sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Consideramos los siguientes sucesos:

A = "sacar un número primo"

B = "sacar un número que sea 1, 4, 9":

- a) Calcula los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.
- b) Los sucesos A y B, ¿son compatibles o incompatibles?.
- c) Encuentra los sucesos contrarios de A y B.

Solución:

Los sucesos A y B están formados por los sucesos elementales:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 4, 9\}$$

- a) La unión e intersección de A y B son:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

$$A \cap B = \{\emptyset\}$$

- b) Al ser $A \cap B = \emptyset$, los sucesos A y B son incompatibles.

- c) El suceso contrario de A es $\bar{A} = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

$$\text{El suceso contrario de B es } \bar{B} = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

10. Ejercicios probabilidades

Consideramos el experimento de lanzar al aire tres monedas.

- a) Hallar el espacio muestral
- b) Considerar los siguientes sucesos
 $A = \text{"Obtener al menos una cara"}$
 $B = \text{"Obtener una sola cara"}$
Hallar
a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $\bar{A}$; d) $\bar{B}$

Solución

1. Espacio muestral $E = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XXX, XXC, XCX\}$
2. $A = \text{"Obtener al menos una cara"} A = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX\}$
 $B = \text{"Obtener una sola cara"} B = \{XXC, XCX, CXX\}$
a) $A \cup B = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX\}$;
b) $A \cap B = \{XXC, XCX, CXX\}$
c) $\bar{A} = \{XXX\}$;
d) $\bar{B} = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXX\}$;

1.5 Probabilidades de un suceso

Un experimento es regular cuando todos los sucesos elementales tienen la misma posibilidad

La probabilidad de que ocurra un suceso se calcula así:

Regla de la place

$$P(A) = \frac{N^{\circ} \text{ de casos favorables}}{n^{\circ} \text{ de casos posibles}};$$

La probabilidad de ocurrencia de un suceso **imposible es 0**.

La probabilidad de ocurrencia de un suceso **seguro es 1**, es decir, $P(A) = 1$.

11. Ejercicios probabilidades

Si en una bolsa tenemos 5 bolas de diferentes colores: verde, rojo, azul, blanco y amarillo.

- a) Probabilidad de sacar una bola verde;
b) Probabilidad de sacar una bola de cualquier color
c) Probabilidad de sacar una bola negra

Solución

- a) Probabilidad de sacar una bola verde $= 1/5$;
b) Probabilidad de sacar una bola de cualquier color $5/5 = 1$ suceso seguro
c) Probabilidad de sacar una bola negra $= 0/5 = 0$ Suceso imposible

12. Ejercicios probabilidades

Si en una bolsa tenemos 6 bolas de diferentes colores: 3 verde, 1 roja y 2 azul.

- a) Probabilidad de sacar una bola verde;
b) Probabilidad de sacar una bola roja
c) Probabilidad de sacar una bola azul

Solución

- a) Probabilidad de sacar una bola verde = $3/6$;
- b) Probabilidad de sacar una bola roja = $1/6$
- c) Probabilidad de sacar una bola azul = $2/6$

13. Ejercicios probabilidades

En un caja hay 4 bolas verdes 5 bolas rojas y 3 azules.

- a) Probabilidad de sacar una bola verde;
- b) Probabilidad de sacar una bola roja
- c) Probabilidad de sacar una bola azul

Solución

- a) Probabilidad de sacar una bola verde = $4/12$;
- b) Probabilidad de sacar una bola roja = $5/12$
- c) Probabilidad de sacar una bola azul = $3/12$;

2 Frecuencia y probabilidad

Frecuencia absoluta de un suceso es el numero de veces que aparece cuando se repite un experimento aleatorio.

Frecuencia relativa es la frecuencia absoluta dividido por el número de veces que se repite el experimento aleatorio.

Cuando el número de veces que repetimos el experimento es muy grande la frecuencia relativa tiende hacia un número. Este resultado, conocido como **ley de los grandes números**, nos lleva a definir **probabilidad de un suceso** como el número al que tiende la frecuencia relativa al repetir el experimento muchas veces.

14. Ejercicios probabilidades

Si lanzamos una moneda 100 veces y salen 45 caras. ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso? ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso sacar cruz

Solución

F. Relativa sacar cara = $45/100$

F. Relativa sacar cruz = $55/100$

3 Propiedades de las probabilidades

- ✓ La probabilidad de un suceso siempre está entre 0 y 1
- ✓ La probabilidad de un suceso seguro es 1
- ✓ La probabilidad de un suceso imposible es 0
- ✓ Cuando dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de la unión de los mismos es la suma de sus probabilidades $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- ✓ La probabilidad del suceso contrario de A " $\bar{A}$ " es $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- ✓ En los sucesos cualesquiera A y B siempre se cumple $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

15. Ejercicios probabilidades

Utilizando la baraja española .

- a) A=Probabilidad de sacar un rey;
- b) B=Probabilidad de sacar un oro;
- c) $P(A \cup B)$

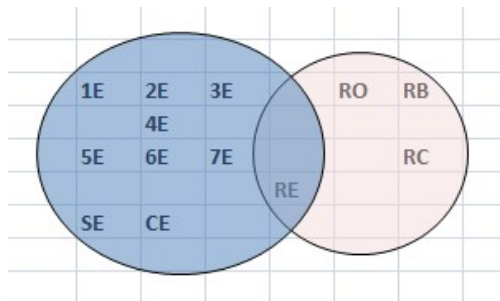
Solución

- a) Probabilidad de sacar un rey (hay 40 carta y 4 reyes) $4/40 = 1/10$;

- b) Probabilidad de sacar un oro (hay 40 cartas y 10 oros) $= 10/40 = 1/4$

- c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$



E=Espadas, O=Oros; C=Copas, B=Bastos

S=Sota; C=Caballo; R=Rey

16. Ejercicios probabilidades

Lanzamos un dado 6000 veces y obtenemos los siguientes resultados

Sale	1	2	3	4	5	6	
f1 (frecuencia Absoluta)	1200	900	1000	800	1100	1000	6000
h1(Frecuencia relativa)	0,20	0,15	0,17	0,13	0,18	0,17	1

Calculamos las frecuencias relativas para cada número

Ej para el 1, $h_1 = 1200/6000 = 0,2$

¿Se puede considerar el dado equilibrado?

Hallar la probabilidad de que al lanzar el dado salga un numero par.

Solución

El dado no está equilibrado pues las h_1 son muy dispares

$$P(2 \cup 4 \cup 6) = 0,15 + 0,13 + 0,17 = 0,45; \quad P(2 \cup 4 \cup 6) = 0,45$$

$$\text{Otra forma de calcular la probabilidad que salga numero par} = \frac{900 + 800 + 1000}{6000} = 0,45;$$

17. Ejercicios probabilidades

Al lanzar dos dados hallar:

- a) A=Probabilidad de que la suma de los puntos sea 7;
- b) B=Probabilidad de sacar el mismo numero
- c) C= probabilidad de numero del primer dado sea mayor que el del segundo

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Solución

$$a) P(\text{suma se 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6};$$

$$b) P(\text{sacar el mismo numero}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6};$$

$$c) P(\text{numero 1er dado mayor que el del segundo}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12};$$

18. Ejercicios probabilidades

Experimento extraer una carta de una baraja española considerar los siguientes sucesos:

A = "extraer un as"

B = "extraer un espada"

C = "extraer un 5 o un 6"

Indica si hay alguna pareja de sucesos incompatibles.

$A \cap B$; $A \cap C$; $B \cap C$

Solución

A = Extraer un as {AO, AC, AE, AB}; AO = As oros; AC = as de copas

B = Extraer una espada {AE, 2E, 3E, 4E, 5E, 6E, 7E, SE, CE, RE} As, 2,3, sota, caballo rey;

C = Extraer un 5 o un 6; = {5o, 6o, 5C, 6C, 5E, 6E, 5B, 6B} oros, copa, espadas, bastos

$A \cap B = \{AE\}$ As de espadas

$A \cap C = \{\emptyset\}$ Incompatibles no hay elementos comunes

$B \cap C = \{5E, 6E\}$ 5 y 6 de espadas

19. Ejercicios probabilidades

El experimento aleatorio consiste en lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos.

Halla la probabilidad de los siguientes sucesos.

A Obtener suma igual a 3.

B Obtener suma menos que 9.

C Obtener suma menor o igual que 5.

Solución

A = La suma sea 3 = {11, 21}

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

B = La suma $< 9 = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 51, 52, 53, 61, 62\}$

$$P(A) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

C = "La suma menor o igual que 5" = {11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 31, 32, 41}

$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

20. Ejercicios probabilidades

Dos personas escriben en un papel una vocal. Calcular la probabilidad de que ambas escriban la misma vocal.

Solución

$$P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

aa	ae	ai	ao	au
ea	ee	ei	eo	eu
ia	ie	ii	io	iu
oa	oe	oi	oo	ou
ua	ue	ui	uo	uu

21. Ejercicios probabilidades

Tenemos 3 sucesos A, B y C que forman un sistema completo de sucesos y la

$$P(A) = 0,4; \quad P(\bar{C}) = 0,8 \quad \text{hallar } P(B)$$

Solución

A, B y C forman un sistema completo de sucesos $= A \cup B \cup C$;

$$\text{Dado que } P(\bar{C}) = 0,8 \Rightarrow P(C) = 0,2$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1;$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0,4 + P(B) + 0,2 = 1; \quad P(B) = 1 - 0,6; \quad PB = 0,4$$

22. Ejercicios probabilidades

En una bolsa tenemos 4 bolas verdes, 3 rojas y 2 blancas.

Hallar la probabilidad de:

- a) sacar una bola verde
- b) sacar una bola verde o roja
- c) sacar una bola que no sea blanca

Solución

Vemos las probabilidades de sacar cada una de los colores

$$A = \text{Probabilidad de sacar una bola verde; } P(A) = \frac{4}{9};$$

$$B = \text{Probabilidad de sacar una bola verde o roja; } P(A) = \frac{7}{9};$$

$$B = \text{Probabilidad de sacar una bola verde o roja; } P(A) = \frac{7}{9};$$

$$\text{Otra forma, Probabilidad de sacar una blanca} = P(B) = \frac{2}{9};$$

$$\Rightarrow \text{no sacar blanca } P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{9}{9} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

23. Ejercicios probabilidades

Al extraer dos cartas de una baraja cual de los siguientes sucesos es imposible:

- a) Sacar dos cartas de espadas
- b) Sacar dos figuras
- c) Sacar dos cartas de distinto palo
- d) Sacar dos figuras iguales del mismo palo.

Solución

Suceso incompatible sacar dos figuras iguales del mismo palo

4 Probabilidad condicionada

Es la probabilidad de que ocurra un evento A , sabiendo que también sucede otro evento B .

La probabilidad condicional se escribe $P(A/B)$, y se lee «la probabilidad de A dado B ».

No tiene por qué haber una relación causal o temporal entre A y B . A puede preceder en el tiempo a B , sucederlo o pueden ocurrir simultáneamente.

Regla del producto:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) = P(B) * P(A/B)$$

Si dos sucesos son independientes se cumple $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B); P(B/A) = P(A \cap B)/P(A);$$

24. Ejercicios probabilidades

En una clase hay 13 Chicas y 7 chicos. 5 chicas y 2 chicos han elegido alemán como optativa. Si escogemos un alumno al azar calcular la probabilidad de que:

- Sea chico y haya elegido alemán.
- Haya elegido alemán o sea chica.
- Sea Chica sabiendo que ha elegido alemán
- Haya elegido alemán sabiendo que es chico

A = ser chico; B = ser chica; C = haya elegido alemán; D = no haya elegido alemán

Solución

	C= elegir alemán	D=no elige alemán	
A= Chico	2	5	7
B= Chica	5	8	13
	7	13	20

- Sea chico y haya elegido alemán.

$$P(A \cap C) = P(A) * P(C/A); P(A \cap C) = \frac{7}{20} * \left(\frac{2}{7}\right) = \frac{7}{20} * 1 = \frac{2}{20} = 0,1$$

- Haya elegido alemán o (el o es una cosa u otra) Unión sea chica.

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{13}{20} + \frac{7}{20} - \frac{5}{20} = \frac{15}{20} = 0,75$$

- Sea Chica sabiendo que ha elegido alemán

$$P(B/C) = \frac{5}{7} = 0,71$$

$$P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{5/20}{7/20} = \frac{5}{7} = 0,71$$

- Haya elegido alemán sabiendo que es chico

$$P(C/A) = \frac{2}{7} = 0,286$$

$$P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{2/20}{7/20} = \frac{2}{7} = 0,286$$

25. Ejercicios probabilidades

En un pueblo se someta a votación el arreglo del polideportivo, dando el siguiente resultado.

	A=Hombres	B= Mujeres	
C=Si	210	350	560
D=No	320	270	590
	530	620	1150

Si llamamos por teléfono a un vecino ver la posibilidad de que sea hombre sabiendo que ha votado SI.

Solución

$$P(A/C) = \frac{210}{560} = 0,368$$

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{210/1150}{560/1150} = \frac{210}{560} = 0,368$$

26. Ejercicios probabilidades

En un experimento con dos sucesos A y B se conoce que $P(A)=0,3$, $P(B)=0,5$ y $P(A \cup B)=0,7$

Calcular:

a) $P(A \cap B)$; b) $P(B/A)$; c) $P(A/B)$

Solución

$$a) P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,3 + 0,5 - 0,7 = 0,1$$

$$b) P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,3} = 0,33$$

$$c) P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

27. Ejercicios probabilidades

En una caja hay 12 bolas rojas y 8 blancas. Si extraemos dos bolas. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos.

- a) Sacar dos bolas blancas
- b) Sacar una bola blanca y otra roja
- c) Sacar al menos una bola roja
- d) No sacar ninguna bola roja.

Solución

- a) Sacar dos bolas blancas

A sacar la primera blanca $P(A) = 8/20 = 0,4$

B sacar la segunda blanca $P(B/A) = 7/19 = 0,37$

$$P(A \cap B) = P(B/A) * P(A) = 0,4 * 0,37 = 0,15$$

- b) Sacar una bola blanca y otra roja

A sacar la primera blanca $P(A) = 8/20 = 0,4$

C sacar la segunda roja $P(C/A) = 12/19 = 0,63$

$$P(A \cap C) = P(C/A) * P(A) = 0,4 * 0,63 = 0,25$$

- c) Sacar al menos una bola roja

D Alguna bola es roja

$\bar{D}$ No sacar ninguna roja

$$P(\bar{D}) = \frac{8}{20} * \frac{7}{19} = 0,37 * 0,15 = 0,054$$

$$P(D) = 1 - 0,054 = 0,95$$

- d) No sacar ninguna bola roja

$\bar{D}$ No sacar ninguna roja (todas blancas)

$$P(\bar{D}) = \frac{8}{20} * \frac{7}{19} = 0,37 * 0,15 = 0,054$$

28. Ejercicios probabilidades

En una caja hay 4 bolas blancas, 16 negras. Si 2 de las bolas blancas y 6 de las negras tiene un fallo de fabricación. Si cogemos una bola al azar calcular la probabilidad de los siguientes sucesos.

A Sea una bola negra con defecto

B No tenga defecto o sea blanca.

C Sea con defecto sabiendo que es blanca.

Solución

Hallamos

$$D = \text{tenga defecto } P(D) = \frac{8}{20} = 0,4; \Rightarrow \text{No tengan defecto } P(\bar{D}) = 0,6;$$

$$E = \text{sea blanca } P(E) = \frac{4}{20} = 0,2;$$

A = Sea una bola negra con defecto

$$P(A) = \frac{6}{20} = 0,3;$$

B No tenga defecto o sea blanca.

$$P(\bar{D} \cup E) = P(\bar{D}) + P(E) - P(\bar{D} \cap E);$$

$$P(\bar{D} \cup E) = 0,6 + 0,2 - \frac{2}{20} = 0,6 + 0,2 - 0,1 = 0,7$$

C Sea con defecto sabiendo que es blanca.

$$P(D \cap E) = P(D/E) * P(E); P(D/E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)};$$

$$P(D/E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{2/20}{0,2} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5$$

29. Ejercicios probabilidades

En una caja hay 14 bolas blancas y 6 negra. Sacamos la primera bola anotamos su color, la devolvemos a la urna y extraemos la segunda y anotamos el color.
Probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra.

Solución

$$A = \text{sea blanca } P(A) = \frac{14}{20} = 0,7$$

$$B = \text{sea negra } P(B) = \frac{6}{20} = 0,3$$

$$P(A \cap B) = P(B/A) * P(A)$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{20} * \frac{14}{20} = \frac{84}{400} = 0,21$$

30. Ejercicios probabilidades

En una caja hay 14 bolas blancas y 6 negra. Sacamos la primera bola anotamos su color, no la devolvemos a la urna y extraemos la segunda y anotamos el color.

Probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra.

Solución

$$A = \text{sea blanca } P(A) = \frac{14}{20} = 0,7$$

$$B = \text{sea negra } P(B) = \frac{6}{19} = 0,32$$

$$P(A \cap B) = P(B/A) * P(A)$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{19} * \frac{14}{20} = \frac{84}{380} = 0,22$$

31. Ejercicios probabilidades

En una excursión a la montaña hay 12 hombres y 8 mujeres. En el grupo hay 8 hombres y 5 mujeres que llevan botas de montaña y el resto zapatos. Si elijo una persona al azar:

- Hallar la posibilidad de que sea mujer y lleve botas.
- Hallar la posibilidad de que sea hombre y lleve botas.

Solución

$$M = \text{Ser mujer; } P(M) = \frac{8}{20} = 0,4$$

$$H = \text{ser hombre} = P(H) = 0,6$$

$$M/B = \text{ser mujer y llevar botas; } P(M/B) = \frac{5}{8} = 0,6$$

$$H/B = \text{ser hombre y llevar botas; } P(H/B) = \frac{8}{12} = 0,67$$

- Hallar la posibilidad de que sea mujer y lleve botas.

$$P(M \cap B) = P(B/M) * P(M)$$

$$P(A \cap B) = 0,4 * 0,6 = 0,24$$

- b) Hallar la posibilidad de que sea hombre y lleve botas.

$$P(H \cap B) = P(B/H) * P(H)$$

$$P(H \cap B) = 0,7 * 0,6 = 0,42$$

32. Ejercicios probabilidades

En un dado truco, de 6 caras, tenemos

$$P(1) = P(2) = P(4) = P(5) = P(6) = 0,12;$$

Hallar la probabilidad de que salga un 3

Solución

$$P(1) + P(2) + P(4) + P(5) + P(6) + P(3) = 0,12 + 0,12 + P(3) + 0,12 + 0,12 + 0,12 = 1;$$

$$0,12 + 0,12 + P(3) + 0,12 + 0,12 + 0,12 = 1; 0,6 + P(3) = 1; P(3) = 1 - 0,6;$$

$$\text{La probabilidad de que salga un 3 es } P(3) = 0,4;$$

33. Ejercicios probabilidades

En un dado truco, de 6 caras, tenemos

$$P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=0,13. \text{ La } P(5)=3P(6)$$

Hallar la probabilidad de que salga un 5 y un 6

Solución

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1; 0,13 + 0,13 + 0,13 + 0,13 + 3X + X = 1$$

$$0,52 + 3x + x = 1; 0,52 + 4x = 1; 4x = 1 - 0,52; 4x = 0,48; x = \frac{0,48}{4} = 0,12;$$

$$\text{La probabilidad de que salga un 6, } P(6)=0,12 \text{ y un 5, } P(5)=0,36$$

34. Ejercicios probabilidades

En una clase hay 10 niños y 12 niñas, 6 de los niños saben andar y 5 niñas no.

Calcular la probabilidad de que eligiendo uno al azar sea niño y no sepa andar.

	Niño	Niña	
Sepa andar	6	7	13
No sepa andar	4	5	9
	10	12	22

Solución

$$A = \text{sea niño y no sepa andar; } P(A) = \frac{4}{22} = 0,18$$

Otra forma de calcularlo “Probabilidad condicionada”

Hallar la posibilidad de que sea niño y no sepa andar.

$$N = \text{Ser niño; } P(N) = \frac{10}{22} = 0,4545$$

$$N/A = \text{ser niño y no saber andar } P(A/N) = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$P(N \cap A) = P(A/N) * P(N)$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{10} * \frac{10}{22} = 0,4 * 0,4545 = 0,18$$

35. Ejercicios probabilidades

En una clase hay 10 niños y 12 niñas.
La mitad de las niñas y un cuarto de los niños son rubios, el resto son morenos.

Calcular la probabilidad de que eligiendo uno al azar

- a) A = sea niño y rubio.
b) B = sea rubio sin importar el sexo

Solución

a) A = sea niño y rubio $P(A) = \frac{8}{22} = 0,36$

b) B = sea rubio $P(B) = \frac{14}{22} = 0,64$

	Niño	Niña	
Rubios	8	6	14
Morenos	2	6	8
	10	12	22

5 Probabilidad distribución binomial

La función de probabilidad de la distribución binomial probabilidad de aciertos

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

n es el número de pruebas.

x es el número de éxitos.

p es la probabilidad de éxito.

q es la probabilidad de fracaso.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Consideramos que $0! = 1$

Como repaso

Combinatoria de n elementos tomados en grupos de K elementos (no importa el orden de los elementos y no se pueden repetir)

ej. ¿Cuántas apuestas de una columna de lotería primitiva han de rellenarse para conseguir acertar los seis números?

En cada columna se ponen 6 números distintos de las 50 (0 – 49) casillas que componen el boleto.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \binom{50}{6} = \frac{50!}{6!(50-6)!} = \frac{50!}{6! \cdot 44!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44!}{6! \cdot 44!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15.890.700$$

36. Ejercicios probabilidades

Una examen tipo test, consta de 10 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro respuestas, siendo solo una de ellas correcta. Si no se ha preparado el examen y se contesta al azar. Hallar la probabilidad de.

- a) Acertar todas la preguntas
- b) Probabilidad de acertar al menos 8.

Solución

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

X la variable aleatoria discreta que expresa el número de respuestas contestadas correctamente; $n=10$, $p=0,25$, $q=0,75$

- a) Acertar todas la preguntas

$$P(x = 10) = \binom{10}{10} 0,25^{10} 0,75^{10-10} = \left(\frac{10!}{10! (10-10)!} \right) 0,25^{10} 0,75^0$$

$$P(x = 10) = 9,54 \cdot 10^{-7}$$

- b) Probabilidad de acertar al menos 8 (podría acertar 10,9 o 8 preguntas).

$$P(x \geq 8) = \binom{10}{8} 0,25^8 * 0,75^{10-8} + \binom{10}{9} 0,25^9 * 0,75^{10-9}$$

$$+ \binom{10}{10} 0,25^{10} * 0,75^{10-10} = \left(\frac{10 * 9}{2 * 1} \right) 0,25^8 * 0,75^2 +$$

$$\left(\frac{10}{1} \right) 0,25^9 * 0,75^1 + \left(\frac{1}{1} \right) 0,25^{10} * 0,75^0 = 4,2 * 10^{-4}$$

37. Ejercicios probabilidades

Una examen tipo test, consta de 5 preguntas y cada una de ellas tiene 3 posibles respuestas. Si lo contestamos al azar.

Hallar la probabilidad de.

- a) Acertar 4 preguntas
- b) Probabilidad de acertar al menos 3.

Solución

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

x la variable aleatoria discreta que expresa el número de respuestas contestadas correctamente; $n=5$; $p=0,33$, $q=0,66$

- a) Acertar 4 preguntas

$$P(x = 4) = \binom{5}{4} (0,33)^4 * (0,66)^{5-4} = \left(\frac{5}{1} \right) (0,33)^4 * (0,66)^1 = 4,115 \cdot 10^{-2}$$

$$P(x = 4) = 4,115 \cdot 10^{-2}$$

- b) Probabilidad de acertar al menos 3

$$P(x \geq 3) = \binom{5}{3} * (0,33)^3 * (0,66)^{5-3} + \binom{5}{4} * (0,33)^4 * (0,66)^{5-4} +$$

$$\binom{5}{5} * (0,33)^5 * (0,66)^{5-5} = \left(\frac{5 * 4}{2 * 1} \right) * (0,33)^3 * (0,66)^2 + \left(\frac{5}{1} \right) * (0,33)^4 * (0,66)^1 +$$

$$(1) * (0,33)^5 * (0,66)^0 = 2,1 \cdot 10^{-1}$$

$$P(x \geq 3) = 2,1 \cdot 10^{-1}$$

38. Ejercicios probabilidades

Un carcelero que le gustaban los juegos, le propone a un preso lo siguiente, te voy a entregar 100 bolas verdes, 100 bolas rojas y dos saquitos. Tienes que distribuir las bolas, como tu quieras, en dos saquitos. Después te daré la oportunidad de elegir un saco y sacar una bola, si la bola que sacas el verde te doy la libertad.

Si tú fueras el preso como distribuirías las bolas para que la probabilidad de salvarte fuera la mayor posible.

Solución

Hacemos el supuesto de varias posibilidades y vemos que esta es la más favorable

$$P(V) = P(V \cap U1) + P(V2 \cap U2) = P(U1) * P(V/U1) + P(U2) * P(V2/U2)$$

$$P(V) = 1 * \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} * \left(\frac{99}{199}\right) = 0,5 + 0,25 = 0,75$$

Probabilidad de elegir un saco		Bolas verdes	Bolas rojas	probabilidad sacar verde	
1/2	Saco 1	25	75	25/100= 0,25	0,5*0,25=0,125
1/2	saco 2	75	25	75/100=0,75	0,5*0,75=0,37
					0,495
Probabilidad de elegir un saco		Bolas verdes	Bolas rojas	probabilidad sacar verde	
1/2	Saco 1	1	0	1/1= 1	0,5*1=0,5
1/2	saco 2	99	100	99/199= 0,497	0,5*0,497=0,25
					0,75
Probabilidad de elegir un saco		Bolas verdes	Bolas rojas	probabilidad sacar verde	
1/2	Saco 1	50	50	50/100= 0,5	0,25
1/2	saco 2	50	50	50/100= 0,5	0,25
					0,50

39. Ejercicios probabilidades

Tengo tres llaves que abren las 3 cerraduras de tres puertas, pero no se la llave que abre cada puerta.

a) ¿Cual es la probabilidad de que acierte a la primera?

Solución

Supongamos que la llave 1 abre la puerta A, la 2 abre la B y la 3 la C

Probabilidad de que con la llave 1 acierte a la primera

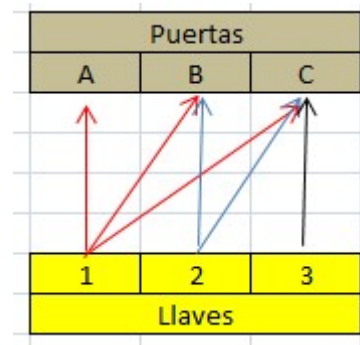
$$P = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad de que con la llave 2 acierte a la primera

$$P = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{2}$$

Probabilidad de que con la llave 3 acierte a la primera

$$P = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{1}$$



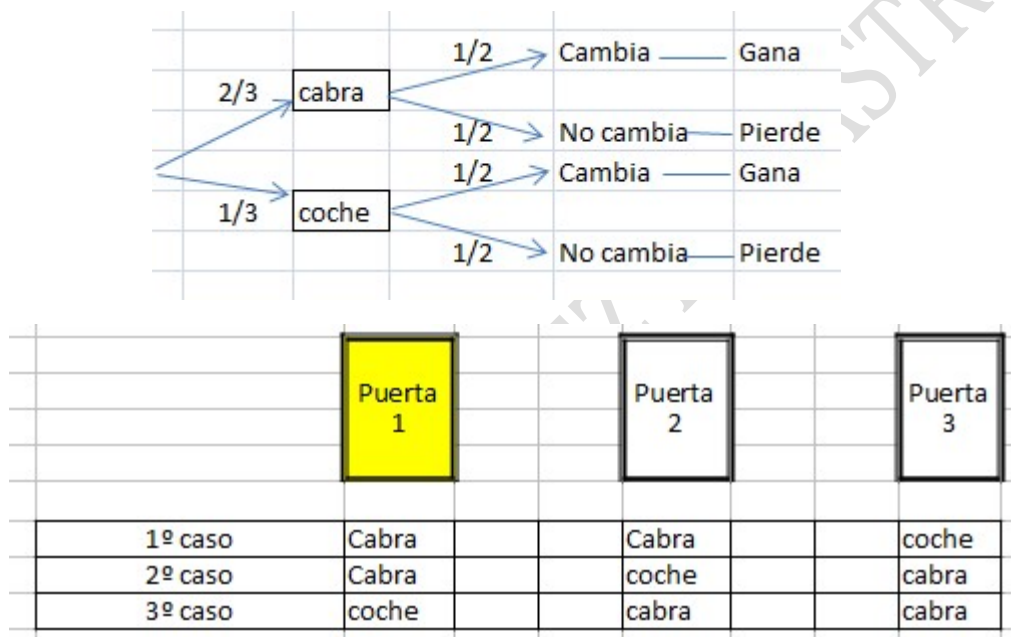
$$\text{Probabilidad de acertar con las tres llaves a la primera } P = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} * \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$$

40. Ejercicios probabilidades

En un concurso televisivo, el presentador muestra al concursante tres puertas cerradas, y le indica que su premio es el que hay detrás de la puerta que elija. Una de las puertas tiene un coche y cada una de las otras una cabra. El concursante elige una puerta y el presentador, que sabe donde está el coche abre la puerta detrás de la cual esta una cabra. El presentador ofrece al concursante la posibilidad de cambiar de puerta.

¿Qué debería hacer el concursante?

Solución



Probabilidad de elegir puerta con cabra $\frac{2}{3}$

Probabilidad de elegir puerta con coche $\frac{1}{3}$;

Si elijo la puerta 1, el presentador como sabe donde está el coche abrirá la 2.

Si elijo la puerta 2, el presentador como sabe donde está el coche abrirá la 1 o la 3.

Si elijo la puerta 3, el presentador como sabe donde está el coche abrirá la 1 o la 2

Si inicialmente había fallado y eso ocurriera 2 de cada 3 veces al cambiar se lleva el coche

Si había acertado y eso ocurriera 1 de cada 3 veces al cambiar perdería el coche.

Si cambio	Si no cambio
probabilidad de conseguir el coche $\frac{2}{3} = 66,6\%$	conseguir coche $\frac{1}{3} = 33,3\%$
Probabilidad de no conseguir el coche $\frac{1}{3} = 33,3\%$;	no conseguir el coche $\frac{2}{3} = 66,6\%$

Como $\frac{2}{3} = 66\% > \frac{1}{3} = 33\%$ si cambiamos tendremos mas probabilidad sacar el coche