

COMBINATORIA

INDICE

Contenido

1	MÉTODOS DE CONTEO	2
1.1	PRINCIPIOS BÁSICOS DEL CONTEO	2
1.2	DIAGRAMA DE ÁRBOL	3
2	NÚMEROS COMBINATORIOS	4
2.1	FACTORIAL DE UN NÚMERO	4
	COMO DISTINGUIR: PERMUTACIONES, VARIACIONES, COMBINACIONES	4
3	COMBINACIONES	5
3.1	NÚMERO COMBINATORIO	5
3.1.1	<i>Propiedades de los números combinatorios</i>	5
4	VARIACIONES Y VARIACIONES CON REPETICIÓN	8
4.1	VARIACIONES SIN REPETICIÓN	8
4.2	LAS VARIACIONES CON REPETICIÓN	9
5	BINOMIO DE NEWTON	16

1 METODOS DE CONTEO

Los métodos de conteo son estrategias que utilizamos para determinar el número de posibilidades diferentes que existen al realizar un experimento.

1.1 PRINCIPIOS BASICOS DEL CONTEO

Hay dos principios básicos de conteo

1. Principio de la adicción

Si un suceso o evento A ocurre de m formas y otro B puede ocurrir de n formas distintas y sabemos que ambos sucesos no pueden ocurrir de forma simultánea. *El numero de formas en que en que puede ocurrir el evento A o el evento B es igual a $n+m$*

1. Ejercicios Combinatoria

Juan va de su casa a la universidad y tiene la posibilidad de ir en metro (pasan por su calle 2 líneas) o en autobús (por la parada más próxima su casa 4 líneas). ¿De cuantas maneras diferentes puede realizar el viaje?

Solución:

Nº de posibilidades es $2+4 = 6$

2. Principio de la multiplicación

Si un suceso o evento A ocurre de m formas y otro B puede ocurrir de n formas distintas y sabemos que los sucesos ocurren uno a continuación del otro. *El numero de formas en que en que puede ocurrir el evento A y el evento B es igual a $n \times m$*

2. Ejercicios Combinatoria

Juan tiene en el armario 3 camisetitas, 4 pantalones y 2 pares de zapatos. ¿De cuantas maneras diferentes puede vestirse?

Solución:

Nº de posibilidades $3 \times 4 \times 2 = 24$

3. Ejercicios Combinatoria

Las placas de las matrículas de los coches de España están formadas por cuatro cifras y tres letras escogidas entre las 27 del alfabeto castellano, incluida la W, pero no las vocales ni la Ñ ni la Q Total de letras $(27-5 \text{ vocales} - \text{Ñ} - \text{Q}) = 20$ letras.

¿Cuántas placas de matrícula diferentes se podrán hacer?

Para formar las matrículas se utilizan las 10 cifras significativas y un total de 20 letras. Aplicando el principio de multiplicación, se pueden formar un total de

Solución:

Aplicando el principio de multiplicación, se pueden formar un total de

Placas de Matriculas españolas							
	Número	Número	Número	Número	Letra	Letra	Letra
Posibles números en cada posición	10	10	10	10	24	24	24

Nº de posibilidades (4 numeros) $10 * 10 * 10 * 10 = 10000$

Nº de posibilidades (3 letras) $20 * 20 * 20 = 8000$

Nº de matriculas posibles $10000 * 8000 = 80.000.000$

4. Ejercicios Combinatoria

Una habitación tiene seis puertas

¿De cuántas formas se puede entrar en ella por una puerta y salir por otra diferente?

Solución:

Para entrar se podrá hacer por 6 puertas y para salir por cinco pues no se puede salir por la puerta que se entro

Nº de posibilidades $6 * 5 = 30$

1.2 DIAGRAMA DE ÁRBOL

El diagrama de árbol es una representación gráfica de los posibles resultados del experimento

Juan tiene en el armario 2 camisetas, 4 pantalones y 2 pares de zapatillas. ¿De cuantas maneras diferentes puede vestirse?



Nº de posibilidades $2 * 4 * 2 = 16$ formas distintas;

5. Ejercicios Combinatoria

Un equipo de futbol tiene las siguientes equipaciones, pantalones (verde, azul y rojo), 2 camisetas (blanca y roja), y medias (verdes, blancas y azules). ¿De cuantas maneras diferentes puede vestirse?

Solución: N° de posibilidades $3 * 2 * 3 = 18$

6. Ejercicios Combinatoria

Un restaurante tiene el siguiente menú del día, 6 platos de primero, 4 de segundo y 5 de postre. ¿Cuántos menús diferentes se pueden pedir?

Solución: N° de menús posibles $6 * 4 * 5 = 120$

2 NUMEROS COMBINATORIOS

2.1 FACTORIAL DE UN NÚMERO

El factorial de un numero n (entero positivo), se define en principio como el producto de todos los números enteros positivos desde 1 (es decir, los números naturales) hasta n .

El factorial de n representa el número de formas distintas de ordenar n objetos distintos (elementos sin repetición)

$$n! = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * 3 * 2 * 1$$

Por definición $0! = 1$

Ej. $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$

7. Ejercicios Combinatoria

Determinar cuántas y cuáles son las distintas combinaciones de números que podemos formar con los números 123.

Si Entran todos los elementos.

Si importa el orden (no es lo mismo 123 que 213 o 312).

No se repiten los elementos.

Solución:

$$3! = 3 * 2 * 1 = 6$$

123, 132, 213, 231, 312, 321;

Como distinguir: Permutaciones, Variaciones, Combinaciones

Para distinguir entre permutaciones, variaciones, variaciones con repetición y combinaciones hay que responder las siguientes preguntas

¿Influye el orden?	No	Combinaciones $Cn, m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$			
	SI	¿Intervienen todos los elementos?	SI	Permutaciones $Pn = n!$	
			No	Si	Variaciones con repetición $VRn, m = n^m$
				No	Variaciones $Vn, m = \frac{n!}{(n-m)!}$

3 COMBINACIONES

Las combinaciones son aquellas formas de agrupar los elementos de un conjunto teniendo en cuenta que en las combinaciones no influye el orden de colocación, **dos combinaciones son la misma si contienen los mismos elementos colocados en distinto orden y no puede haber ningún elemento repetido**

Un suceso cambia al cambiar los elementos

Un suceso es el mismo si cambiamos el orden de los elementos

En combinaciones con las 3 letras de la palabra DIA podre formar los siguientes grupos de dos letras:

DI, DA, IA.

No entran todos los elementos (solo entran 2 letra de las 3).

No importa el orden. (DI es el mismo grupo que ID; DA es el mismo grupo que AD)

No se repiten los elementos. (en cada grupo no se repiten las letras)

Cn,m se lee combinaciones de n elementos tomados en grupos de m

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! * (n - m)!}$$

3.1 NUMERO COMBINATORIO

El número combinatorio o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ es el número de subconjuntos de k elementos escogidos de un conjunto n de elementos. n y k son numeros naturales, $k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n - k)!}$$

3.1.1 Propiedades de los números combinatorios

- **Primera propiedad**

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Solo puedo formar un gupo si tomo todos los elementos del conjunto

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! (n - 0)!} = \frac{n!}{1 * n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! (n - n)!} = \frac{n!}{n! * 1} = 1$$

8. Ejercicios Combinatoria

Comprobar que se cumplen las siguientes igualdades

$$\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$$

Solución:

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0! (3 - 0)!} = \frac{3 * 2 * 1}{1 * 3!} = \frac{3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3! (3 - 3)!} = \frac{3!}{3! * 0!} = \frac{3 * 2 * 1}{(3 * 2 * 1) * 1} = \frac{6}{6} = 1$$

- **Segunda propiedad**

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!} =$$

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)! * m!}$$

9. Ejercicios Combinatoria

Comprobar que se cumplen las siguientes igualdades

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{5-3}$$

Solución:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! * 2!} = \frac{5 * 4 * 3 * 2 * 1}{(3 * 2 * 1)(2 * 1)} = \frac{120}{12} = 10$$

$$\binom{5}{5-3} = \frac{5!}{(5-3)!(5-(5-3))!} = \frac{5!}{2! * (5-5+3)!} = \frac{5!}{2! * 3!} = \frac{120}{12} = 10$$

- **Tercera propiedad**

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{m+1} = \frac{n!}{(m+1)!(n-(m+1))!} = \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}$$

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}$$

$$\binom{n+1}{m+1} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-(m+1))!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m-1)!}$$

10. Ejercicios Combinatoria

Comprobar que se cumplen las siguientes igualdades

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{7}{3}$$

Solución:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! * 4!} = \frac{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{2 * 1 * (4 * 3 * 2 * 1)} = \frac{720}{48} = 15$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! * 3!} = \frac{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1 * (3 * 2 * 1)} = \frac{720}{36} = 20$$

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 15 + 20 = 35$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! * 4!} = \frac{7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1 * (4 * 3 * 2 * 1)} = \frac{5040}{144} = 35$$

11. Ejercicios Combinatoria

Realizar las siguientes operaciones

$$\binom{3}{2} + \binom{6}{3} - \binom{4}{2}$$

Solución:

$$\binom{3}{2} + \binom{6}{3} - \binom{4}{2}$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! * (3-2)!} = \frac{3 * 2 * 1}{2 * 1 * 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! * (6-3)!} = \frac{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1 * (3 * 2 * 1)} = \frac{720}{36} = 20$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = \frac{4 * 3 * 2 * 1}{2 * 1 * (2 * 1)} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\binom{3}{2} + \binom{6}{3} - \binom{4}{2} = 3 + 20 - 6 = 17$$

12. Ejercicios Combinatoria

Determinar cuántas y cuáles son las distintas combinaciones de letras que podemos formar con las 3 letras de la palabra DIA formando grupos de 2, sabiendo que no pueden repetirse las letras

No entran todos los elementos.

No importa el orden.

No se repiten los elementos.

Solución: Da igual el orden y no deben repetirse luego debo hallar las combinaciones

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! * (3-2)!} = \frac{3 * 2 * 1}{2 * 1 * (1)} = 3$$

DI, DA, IA

13. Ejercicios Combinatoria

Determinar cuántas combinaciones de 3 letras podemos formar con las letras de la palabra PADRE

Solución:

No entran todos los elementos.

No importa el orden.

No se repiten los elementos

Da igual el orden y no deben repetirse luego debo hallar las combinaciones

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! * (5-3)!} = \frac{5!}{3! * 2!} = \frac{120}{12} = 10$$

14. Ejercicios Combinatoria

Cuántas columnas de la primitiva tendría que rellenar para conseguir el premio. Sabiendo que de 49 números que componen cada columna he de marcar seis.

Solución:

No entran todos los elementos.

No importa el orden.

No se repiten los elementos

Da igual el orden y no deben repetirse luego debo hallar las combinaciones

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! * (49-6)!} = \frac{49!}{6! * 43!} = \frac{49 * 48 * 47 * 46 * 45 * 44 *}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}$$

$$C_{49,6} = \frac{10068347520}{720} = 13.983.816$$

15. Ejercicios Combinatoria

En un partido de futbol sala se han presentado 8 futbolistas como solo pueden estar cinco jugadores al mismo tiempo en el campo, de cuantas formas distintas podrán formar el equipo.

No entran todos los elementos.

No importa el orden.

No se repiten los elementos

Solución:

$$C_{8,5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5! * (8-5)!} = \frac{8!}{5! * 3!} = \frac{(8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1)}{(5 * 4 * 3 * 2 * 1) * (3 * 2 * 1)} = \frac{8 * 7 * 6}{3 * 2 * 1} = 56;$$

4 VARIACIONES Y VARIACIONES CON REPETICIÓN

4.1 VARIACIONES SIN REPETICIÓN

Las Variaciones es la forma de agrupar los elementos de un conjunto teniendo en cuenta que dos variaciones son distintas si los elementos están colocados en distinto orden (influye el orden de colocación) y los elementos NO pueden repetirse.

Un suceso cambia al cambiar los elementos

Un suceso cambia al cambiar el orden de los elementos

En Variaciones sin con las 3 letras de la palabra DIA podre formar los siguientes grupos de dos letras:

DI, ID, DA, AD, IA, AI.

No entran todos los elementos.

Si importa el orden. (DI es distinto grupo que ID; DA es distinto grupo que AD)

No se repiten los elementos. (en cada grupo no se repiten las letras)

V_{n,m} se lee Variaciones de n elementos tomados de m en m

$$V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

16. Ejercicios Combinatoria

Determinar cuántas y cuáles son las distintas combinaciones de números que podemos formar con los números 2,3,4 formando grupos de 2 números, sabiendo que NO pueden repetirse las y si importa el orden.

No entran todos los elementos.

SI importa el orden.

No se repiten los elementos.

Solución:

$$V_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 * 2 * 1}{1} = 6$$

23, 24, 32, 34, 42, 43

17. Ejercicios Combinatoria

En una competición participan 12 personas, de cuantas formas distintas podrían repartirse las medallas de oro, plata y bronce.

No entran todos los elementos.

Si importa el orden.

No se repiten los elementos

Solución:

$$V_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 * 11 * 10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1} = 12 * 11 * 10 = 1320$$

18. Ejercicios Combinatoria

En un partido de futbol sala se han presentado 8 futbolistas como solo pueden estar cinco jugadores al mismo tiempo en el campo, de cuantas formas distintas podrán formar el equipo.

No entran todos los elementos.

No importa el orden.

No se repiten los elementos

Solución:

$$V_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1} = 8 * 7 * 6 * 5 * 4 = 6720$$

4.2 Las Variaciones con repetición

En las variaciones con repetición de n elementos tomados de m en m.

n y m pueden tomar cualquier valor.

En cada grupo habrá m elementos repetidos o no

Dos grupos son diferentes si difieren en algún elemento o en el orden de colocación.

$$VR_{n,m} = n^m$$

19. Ejercicios Combinatoria

Determinar cuántos grupos de 3 números y cuáles puedo formar con los números 1,2 y cuales serán impares

En cada grupo entran mas números de los que tengo.

Si importa el orden.

Si se repiten los elementos

Solución:

Son variaciones con repeticion

$$VR_{2,3} = 2^3 = 8;$$

111, 112, 121, 122, 222, 221, 212, 211;

Serán impares

Si terminan en 1 luego solo tengo dos posicion libre x x 1

$$VR_{2,2} = 2^2 = 4; \text{tendre 4 numeros impares } 8 - 4 = 4 \text{ pares}$$

Impares 111, 121, 221, 211

20. Ejercicios Combinatoria

En una quiniela de futbol donde hay 14 grupos y en cada uno puede haber un 1 una X o un 2. Cuantas posibilidades distintas pueden darse?

Solución: $VR_{3,14} = 3^{14} = 47829$

21. Ejercicios Combinatoria

En una competición participan 10 personas y hay tres premios. Determinar de cuantos modos Se pueden distribuir los premios considerando:

- Cada participante solo puede recibir un premio
 - a) Los premios son diferentes en valor
 - b) Los premios son iguales
- Cada participante puede recibir mas de un premio

Solución

- Cada participante solo puede recibir un premio
 - .- Los premios son diferentes en valor

No entran todos los elementos.

Si importa el orden (los premios son diferentes).

No se repiten los elementos (cada concursante solo puede recibir un premio)

$$V_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1} = 10 * 9 * 8 = 720$$

- .- Los premios son iguales en valor

No entran todos los elementos.

No importa el orden (los premios son iguales, da igual ser el 1º, 2º o 3º).

No se repiten los elementos (cada concursante solo puede recibir un premio)

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{(3 * 2 * 1)(7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1)} = \frac{10 * 9 * 8}{3 * 2 * 1} = \frac{720}{6} = 120;$$

- Cada participante puede recibir más de un premio y los premios son distintos

No entran todos los elementos.

Si importa el orden (los premios son diferentes, no es lo mismo ser el 1º, 2º o 3º).

Si se repiten los elementos (cada concursante puede recibir más de un premio)

$$VR_{10,3} = 10^3 = 1000 \text{ maneras de distribuir los premios}$$

22. Ejercicios Combinatoria

¿De cuantas formas se pueden sentar 5 personas en un sofá de dos plazas?

Solución

No entran todos los elementos.

Si importa el orden.

No se repiten los elementos

Solución:

$$V_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1} = 20;$$

23. Ejercicios Combinatoria

Escribe todas la palabras de 3 letras, con o sin sentido que se pueden formar con las letras de la palabra HOLA

Solución

No entran todos los elementos.

Si importa el orden.

No se repiten los elementos

$$V_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4 * 3 * 2 * 1}{1} = 24;$$

24. Ejercicios Combinatoria

Cuántas banderas tricolor se pueden formar con los siete colores del arco iris.

Solución

¿Influye en orden? si (puede estar los mismos colores en distinta posiciones)

¿Intervienen todos los colores? No

¿Se pueden repetir los colores? No => Variaciones sin repetición

$$V_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{4 * 3 * 2 * 1} = 7 * 6 * 5 = 210 \text{ banderas}$$

25. Ejercicios Combinatoria

Para aprobar un examen de 5 preguntas hay que contestar correctamente dos de ellas. ¿De cuántas formas diferentes se pueden elegir las dos preguntas?

Solución

¿Influye en orden? no => Combinaciones (son el mismo grupo la pregunta 2-3 que la 3-2)

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! * (5-2)!} = \frac{5 * 4 * 3 * 2 * 1}{2 * 1 * (3 * 2 * 1)} = 10 \text{ formas distintas}$$

26. Ejercicios Combinatoria

Un artesano hace pulseras con 3 hilos de distintos colores. Si dispone de 12 colores diferentes, ¿cuántos tipos de pulseras puede hacer?

Solución

¿Influye en orden? si (pueden estar los mismos colores en distintas posiciones)

¿Intervienen todos los colores? No

¿Se pueden repetir los colores? No => Variaciones

$$V_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 * 11 * 10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1} = 1320 \text{ Tipos}$$

27. Ejercicios Combinatoria

Un entrenador quiere hacer una alineación con 1 portero, 4 defensas, 3 centrocampistas y 3 delanteros. Si dispones de 3 porteros, 7 defensas, 6 centrales y 7 delanteros cada jugador solo puede jugar en su demarcación ¿Cuántas posibilidades tiene para hacer el equipo?

Solución ¿Influye en orden? No => Combinaciones

Porteros

$$C_{3,1} = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1! * (3-1)!} = \frac{3 * 2 * 1}{1 * (2 * 1)} = 3 \text{ formas distintas}$$

Defensas

$$C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4! * (7-4)!} = \frac{7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{4 * 3 * 2 * 1 (3 * 2 * 1)} = 35 \text{ formas distintas}$$

Centrales

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! * (6-3)!} = \frac{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1 (3 * 2 * 1)} = 20 \text{ formas distintas}$$

Delanteros

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! * (7-3)!} = \frac{7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1 (4 * 3 * 2 * 1)} = 35 \text{ formas distintas}$$

Aplicando el método del producto

$$N^{\circ} \text{ total de posibilidades} = 3 * 35 * 20 * 35 = 73.500$$

28. Ejercicios Combinatoria

Cuántos números de 4 cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7

Solución

¿Influye en orden? si (pueden estar los mismos dígitos en distintas posiciones)

¿Intervienen todos los dígitos? No

¿Se pueden repetir los dígitos? No => Variaciones sin repetición

$$V_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1} = 840 \text{ numeros distintos}$$

29. Ejercicios Combinatoria

Cuántos números de 4 cifras pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 sin repetir números.

Solución

¿Influye en orden? si (pueden estar los mismos dígitos en distintas posiciones)

¿Intervienen todos los dígitos? No

¿Se pueden repetir los dígitos? No => Variaciones sin repetición

El 0 no puede estar en la primera posición pues el número resultante sería de solo 3 cifras (0 a la izquierda no cuenta ej 0123)

$$V_{7,4} - V_{6,3} = \frac{7!}{(7-4)!} - \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{7!}{3!} - \frac{6!}{3!} = 840 - 120 = 720 \text{ numeros distintos}$$

30. Ejercicios Combinatoria

Cuántos equipos de fútbol sala (5 jugadores) se pueden formar con 12 alumnos?

Solución

¿Influye en orden? No => Combinaciones

$$C_{12,5} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5! * (12-5)!} = \frac{12!}{5! * 7!} = 792 \text{ equipos}$$

31. Ejercicios Combinatoria

De cuántas formas distintas pueden ponerse 4 amigos en la cola del cine

Solución

¿Influye en orden? si

¿Intervienen todos los elementos? Si => permutaciones

$$P_4 = 4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24 \text{ formas}$$

32. Ejercicios Combinatoria

En una clase de 15 alumnos queremos formar grupos de 4 para hacer un trabajo ¿Cuántos grupos se pueden formar?

Solución ¿Influye en orden? No => Combinaciones

$$C_{15,4} = \binom{15}{4} = \frac{15!}{4! * (15 - 4)!} = \frac{15!}{4! * 11!} = 1365 \text{ grupos}$$

33. Ejercicios Combinatoria

¿Cuántos productos distintos se pueden formar con los dígitos 1, 3, 4, 5 y 7, de forma que cada producto conste de 3 factores?

Solución ¿Influye en orden? No (el orden de los factores no afecta al producto, el valor de $1*2*3$ es igual a $3*2*1$) => Combinaciones

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! * (5 - 3)!} = \frac{5!}{3! * 2!} = 10 \text{ productos distintos}$$

34. Ejercicios Combinatoria

¿En un taxi que pueden ir seis pasajeros subimos 4 amigos . ¿de cuantas formas distintas podemos sentarnos?

Solución

¿Influye en orden? si (no es lo mismo ir adelante, que en el centro o en los lados)

¿Intervienen todos los dígitos ? No

¿Se pueden repetir los dígitos? No => Variaciones sin repetición

$$V_{6,4} = \frac{6!}{(6 - 4)!} = \frac{6!}{2!} = 360 \text{ formas distintas}$$

35. Ejercicios Combinatoria

¿En un taxi que pueden ir seis pasajeros subimos 6 amigos . ¿De cuantas formas distintas podemos sentarnos?

Solución: ¿Intervienen todos los dígitos ? Si permutaciones

$P_6 = 6! = 720 \text{ formas distintas}$

36. Ejercicios Combinatoria

Con 4 botes de pintura: amarilla, azul, roja y blanca, ¿cuántas mezclas de dos colores puedes realizar?

Solución:

¿Intervienen todos ? No

¿Influye en orden? No => combinaciones

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4 - 2)!} = \frac{4!}{2! * 2!} = 6 \text{ colores distintos}$$

37. Ejercicios Combinatoria

En una clase de 15 alumnos se tiene que elegir delegado y subdelegado. ¿Cuántas parejas se pueden formar para desempeñar estos cargos?

Solución

¿Influye en orden? si

¿Intervienen todos los dígitos ? No

¿Se pueden repetir los dígitos? No => Variaciones sin repetición

$$V_{15,2} = \frac{15!}{(15 - 2)!} = \frac{15!}{13!} = 210 \text{ parejas}$$

38. Ejercicios Combinatoria

Tenemos 4 pesas de 1, 2, 4, 6 kg. ¿Cuántas grupos de pesas diferentes podemos hacer?

Solución

¿Influye en orden? No => Combinaciones

Podemos hacer grupos de 1 de 2 de 3 de 4

$$C_{4,1} = \binom{4}{1} = \frac{4!}{1! * (4-1)!} = \frac{4_i}{1_i * 3_i} = 4 \text{ grupos}$$

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = \frac{4_i}{2_i * 2_i} = 6 \text{ grupos}$$

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! * (4-3)!} = \frac{4_i}{3_i * 1_i} = 4 \text{ grupos}$$

$$C_{4,4} = \binom{4}{4} = \frac{4!}{4! * (4-4)!} = \frac{4_i}{4_i} = 1 \text{ grupos}$$

Total de grupos 4+6+4+1=15 grupos

39. Ejercicios Combinatoria

Con las cifras 3, 2, 6 y 7, ¿cuántos números distintos de 3 cifras se pueden formar que sean mayores que 600?

Solución

¿Influye en orden? si

¿Intervienen todos los dígitos? No

¿Se pueden repetir los dígitos? No => Variaciones sin repetición

Para que el número sea mayor de 600 el primer dígito tiene que ser el 6 o el 7

Si el primero es el 6 los otros podrán ser el 2 el 3 o el 7

$$V_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3_i}{1_i} = 6 \text{ numeros}$$

Si el primero es el 7 los otros podrán ser el 2 el 3 o el 6

$$V_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3_i}{1_i} = 6 \text{ numeros}$$

Habrán 12 números mayores de 600

40. Ejercicios Combinatoria

Considera los dígitos 1, 2, 4, 6, 8 y 0.

a) ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar?

b) ¿Cuántos de estos números empiezan por 2?

Solución

¿Influye en orden? si

¿Intervienen todos los dígitos? No

¿Se pueden repetir los dígitos? No => Variaciones sin repetición

a) El 0 no puede estar en la primera posición pues el numero resultante sería de solo 2 cifras (0 a la izquierda no cuenta ej 012)

$$V_{6,3} - V_{5,2} = \frac{6!}{(6-3)!} - \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{6_i}{3_i} - \frac{5_i}{3_i} = 120 - 20 = 100 \text{ numeros distintos}$$

$$b) \text{ Que empicen por 2 } \Rightarrow V_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = 36$$

41. Ejercicios Combinatoria

- a) ¿Cuántos números capicúas de 5 cifras se pueden formar?
 b) ¿Y de 6 cifras

Solución:

Los números que tengo son 10 (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)

- a) Los números capicúas de 5 cifras serán de la forma $xyzyx$ luego es como si formáramos grupos de 3 cifras.

¿Influye en orden? si
 ¿Intervienen todos los dígitos? No
 ¿Se pueden repetir los dígitos? Si => Variaciones con repetición

$$VR_{10,3} = 10^3 = 1000 \text{ números}$$

Pero habrá que restar los que empiecen por 0 ya que no serán números de 3 cifras sino de dos

$$VR_{10,2} = 10^2 = 100 \text{ números}$$

$$\text{Números capicúas de 5 cifras serán } 1000 - 100 = 900$$

- Otra forma de calcularlo: la primera cifra pueden ser cualquier número menos el 0 luego tendré 9 números y en las otras dos cifras usaré los 10 números
 $9 * VR_{10,2} = 9 * 10^2 = 900$

- b) Los números capicúas de 6 cifras serán de la forma $abccba$ luego es como si formáramos grupos de 3 cifras.

¿Influye en orden? si
 ¿Intervienen todos los dígitos? No
 ¿Se pueden repetir los dígitos? Si => Variaciones con repetición
 Números capicúas de 6 cifras serán $1000 - 100 = 900$

42. Ejercicios Combinatoria

Con las letras a, b, c, d y e

- a) ¿Cuántas palabras distintas de 3 letras, tengan sentido o no, se pueden formar?
 b) ¿Cuántas de ellas empiezan por vocal?

Solución:

¿Influye en orden? si
 ¿Intervienen todos los dígitos? No
 ¿Se pueden repetir los dígitos? Si => Variaciones con repetición

a) $VR_{5,3} = 5^3 = 125 \text{ palabras distintas}$

b) Por vocal empiezan $2 * VR_{5,2} = 2 * 5^2 = 50 \text{ palabras distintas}$

43. Ejercicios Combinatoria

Cuántos números de la lotería nacional hay que no contengan el 0?

Solución:

¿Influye en orden? si
 ¿Intervienen todos los dígitos? No
 ¿Se pueden repetir los dígitos? Si => Variaciones con repetición

$$VR_{9,5} = 9^5 = 59049 \text{ números distintos}$$

44. Ejercicios Combinatoria

Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9

- a) ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar?
 b) ¿Cuántos números serán múltiplo de 5?
 c) ¿Cuántos números serán múltiplo de 10?

Solución:

¿Influye en orden? si

¿Intervienen todos los dígitos? No

¿Se pueden repetir los dígitos? Si => Variaciones con repetición

a) El numero no puede empezar por 0 => $9 * VR_{10,3} = 9 * 10^3 = 9.000$ numeros distintos

b) Seran multiplos de 5 los que terminen en 0 ó en 5

=> *no puede empezar por 0 y la ultima cifra debe ser 0 ó 5*

$9 * (VR_{10,2}) * 2 = 9 * 10^2 * 2 = 1.800$ multiplos de 5

c) Seran multiplos de 10 los que terminen en 0

=> *no puede empezar por 0 y la ultima cifra debe ser 0*

$9 * (VR_{10,2}) * 1 = 9 * 10^2 * 1 = 900$ multiplos de 10

5 Binomio de Newton

Para calcular las potencias de un binomio hemos utilizado el triangulo de Tartaglia o de Pascal.

Triángulo de Pascal

Ejemplo : $(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$

El cálculo de las potencias de un Binomio $(a + b)^n$ Binomio de Newton es:

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{(n-k)} a^k$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

45. Ejercicios Combinatoria

Calcular $(a + b)^4$

Solución:

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0} a^{(4-0)} b^0 + \binom{4}{1} a^{(4-1)} b^1 + \binom{4}{2} a^{(4-2)} b^2 + \binom{4}{3} a^{(4-3)} b^3 + \binom{4}{4} a^{(4-4)} b^4$$

$$\text{dado que } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n - k)!}; \binom{4}{0} = \frac{4!}{0! * (4 - 0)!} = \frac{4!}{0! * 4!} = 1; \dots \dots$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

46. Ejercicios Combinatoria

Calcular $(a + 3)^4$

Solución:

$$\begin{aligned}(a+3)^4 &= \binom{4}{0} a^{(4-0)} 3^0 + \binom{4}{1} a^{(4-1)} 3^1 + \binom{4}{2} a^{(4-2)} 3^2 + \binom{4}{3} a^{(4-3)} 3^3 \\ &+ \binom{4}{4} a^{(4-4)} 3^4 \\ (a+3)^4 &= 1a^4 + 4a^3 3^1 + 6a^2 3^2 + 4a^1 3^3 + 1 * 3^4; \\ (a+3)^4 &= a^4 + 4a^3 3 + 6a^2 9 + 4a 27 + 81 = a^4 + 12a^3 + 54a^2 + 108a + 81\end{aligned}$$

47. Ejercicios Combinatoria

Calcular $(a-3)^4$

Solución:

Al ser el binomio $(a-3)$ en la formula el segundo miembro será (-3)

$$\begin{aligned}(a-3)^4 &= \binom{4}{0} a^{(4-0)} (-3)^0 + \binom{4}{1} a^{(4-1)} (-3)^1 + \binom{4}{2} a^{(4-2)} (-3)^2 + \\ &\binom{4}{3} a^{(4-3)} (-3)^3 + \binom{4}{4} a^{(4-4)} (-3)^4 \\ (a-3)^4 &= 1a^4 + 4a^3 (-3)^1 + 6a^2 (-3)^2 + 4a^1 (-3)^3 + 1 * (-3)^4; \\ (a-3)^4 &= a^4 + 4a^3 (-3) + 6a^2 (+9) + 4a (-27) + 81 \\ (a-3)^4 &= a^4 - 12a^3 + 54a^2 - 108a + 81\end{aligned}$$

48. Ejercicios Combinatoria

Calcular $\left(\frac{1}{2} + x\right)^3$

Solución:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} + x\right)^3 &= \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-0)} (x)^0 + \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-1)} (x)^1 + \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-2)} (x)^2 \\ &+ \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-3)} (x)^3 \\ \left(\frac{1}{2} + x\right)^3 &= 1 \left(\frac{1}{2}\right)^{(3)} + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{(2)} (x)^1 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{(1)} (x)^2 + 1 \left(\frac{1}{2}\right)^{(0)} (x)^3 \\ \left(\frac{1}{2} + x\right)^3 &= 1 \left(\frac{1}{8}\right) + 3 \left(\frac{1}{4}\right) x + 3 \left(\frac{1}{2}\right) x^2 + 1x^3 \\ \left(\frac{1}{2} + x\right)^3 &= \left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{4}\right) x + \left(\frac{3}{2}\right) x^2 + x^3\end{aligned}$$

49. Ejercicios Combinatoria

Calcular $(a+b)^5$

Solución:

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \binom{5}{0} a^{(5-0)} b^0 + \binom{5}{1} a^{(5-1)} b^1 + \binom{5}{2} a^{(5-2)} b^2 + \binom{5}{3} a^{(5-3)} b^3 \\ &+ \binom{5}{4} a^{(5-4)} b^4 + \binom{5}{5} a^{(5-5)} b^5 \\ (a+b)^5 &= 1a^5 + 5a^4 b^1 + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5a^1 b^4 + 1b^5\end{aligned}$$