

Integrales “Definidas”

Contenido

1	LA REGLA DE BARROW	2
2	ÁREA BAJO UNA CURVA.....	5
3	INTEGRAL INDEFINIDA “ÁREA BAJO UNA CURVA”	6
4	TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO	8
4.1	TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.....	8
4.2	TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL.....	8
5	FUNCIÓN INTEGRAL: TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO	11
6	ÁREA DE RECINTOS.....	17
7	VOLÚMENES 27	
7.1	VOLÚMENES DE SOLIDOS DE REVOLUCIÓN	29
7.2	LONGITUDES DE ARCOS	31
8	OTRAS APLICACIONES DE LAS INTEGRALES.....	32

1 La regla de Barrow

La regla de Barrow también conocida como primer teorema fundamental del cálculo indica:

Si una función $f(x)$ es continua en $[a, b]$ se cumple que $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

donde F es cualquier primitiva de f

1. Ejercicio

Calcula a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + tg^2 t}{tg t} dt$; b) $\int_{-1}^1 x(x^2 - 1) dx$

Solución:

$$a) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + tg^2 t}{tg t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{tg t} dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg t dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{tg t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{\sin t}{\cos t}} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin t} dt \text{ hacemos cambio de variable } \begin{cases} \sin t = u \\ \cos t dt = du \end{cases} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{u} du = \ln u + C$$

$$[\ln u]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \text{deshacemos cambio de variable } [\ln \sin t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln \left(\sin \frac{\pi}{3} \right) - \ln \left(\sin \frac{\pi}{4} \right) = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{tg t} dt = \ln \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos t} dt \text{ deshacemos cambio de variable } \begin{cases} \cos t = u \\ -\sin t dt = du \end{cases} = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{u} =$$

$$- [\ln u]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \text{ Deshacemos cambio } = - [\ln \cos t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = - (\ln(\cos \frac{\pi}{3}) - (\ln(\cos \frac{\pi}{4}))) = \ln \cos \frac{\pi}{4} - \ln \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg t dt = \ln \cos \frac{\pi}{4} - \ln \cos \frac{\pi}{3} = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln \frac{1}{2} = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + tg^2 t}{tg t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} * 2 \right) = \frac{1}{2} \ln(3)$$

$$b) \int_{-1}^1 x(x^2 - 1) dx = \int_{-1}^1 x^3 dx - \int_{-1}^1 x dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

2. Ejercicio

Calcular a) $\int_0^{-4} \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$; b) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

Solución

$$a) \int_0^{-4} \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2+4x+5)]_0^{-4} = \frac{1}{2} ((\ln(0^2+4*(0)+5)) - \ln((-4)^2+4*(-4)+5))$$

$$\int_0^{-4} \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} (\ln(5) - \ln(5)) = 0;$$

$$b) \int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \text{hacemos un cambio de variable } \ln x = t; \frac{1}{x} dx = dt; \Rightarrow$$

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int_e^{e^2} \ln t \, dt \begin{cases} \text{cuando } x = e \Rightarrow t = \ln e = 1 \\ \text{cuando } x = e^2 \Rightarrow t = 2 \ln e = 2 \end{cases} \Rightarrow \int_e^{e^2} \ln t \, dt = \int_1^2 \ln t \, dt$$

$$\int_1^2 \ln t \, dt = \int_1^2 \ln t \, 1 dt; \text{ usamos integracion por partes } \begin{cases} u = \ln t; du = \frac{1}{t} dt \\ dt = dv; t = v \end{cases}$$

$$\int_1^2 \ln t \, 1 dt = \ln t * t - \int t * \frac{1}{t} dt = t$$

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = [t * \ln t - t]_1^2 = \text{deshacemos cambio de variable}$$

$$[x(\ln x) - x]_1^2 = (2(\ln 2) + 2) - (x(\ln 1) + 1) = 2 \ln 2 + 2 - 0 - 1 = 2 \ln 2 + 1$$

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = 2 \ln 2 + 1$$

3. Ejercicio

Calcular una aproximacion por exceso y otra por defecto de $\ln 2$ utilizando una participacion

de 5 subintervalos para calcular $\int_1^2 \frac{dx}{x}$;

Solución

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^2 = \ln 2;$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Longitud del intervalo $2 - 1 = 1$;

5 intervalos ancho de intervalo $= \frac{1}{5} 0,2$

Los puntos de la partición 1,1.2,1.4,1.6,1.8,2;

Aproximacion por exceso $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1;$$

$$f(1,2) = \frac{1}{1,2} = 0,83333$$

$$f(1,4) = \frac{1}{1,4} = 0,7143$$

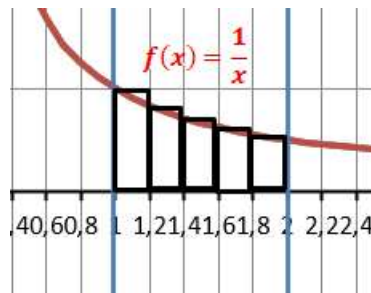
$$f(1,6) = \frac{1}{1,6} = 0,625$$

$$f(1,8) = \frac{1}{1,8} = 0,5555$$

Area de los rectangulos

$$A = 0,2 * 1 + 0,2 * 0,8333 + 0,2 * 0,7143 + 0,2 * 0,625 + 0,2 * 0,5555 = 0,2 * 3,728185 = 0,745637$$

$$\text{Area total} = 0,745637$$



Aproximacion por defecto $f(x) = \frac{1}{x}$

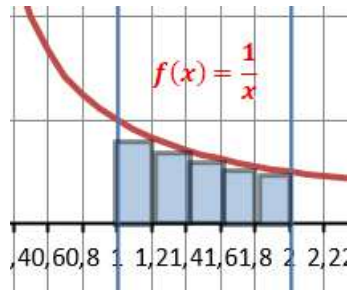
$$f(1,2) = \frac{1}{1,2} = 0,83333$$

$$f(1,4) = \frac{1}{1,4} = 0,7143$$

$$f(1,6) = \frac{1}{1,6} = 0,625$$

$$f(1,8) = \frac{1}{1,8} = 0,5555$$

$$f(2) = \frac{1}{2} = 0,5$$



Area de los rectangulos

$$A = 0,2 * 0,83333 + 0,2 * 0,7143 + 0,2 * 0,625 + 0,2 * 0,5555 + 0,2 * 0,5 = 0,2 * 3,22818 = 0,645636$$

$$\text{Area total} = 0,645636$$

$$0,645636 < \int_1^2 \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^2 = \ln 2 < 0,745637$$

4. Ejercicio

Sabiendo que $\sqrt[5]{2} = 1,1487$, puedes encontrar otra aproximacion de $\ln 2$, haciendo una participacion en 5 subintervalos,

para calcular $\int_0^1 2^x dx$.

Solución

Longitud del intervalo $1 - 0 = 1$;

5 intervalos ancho de intervalo $= \frac{1}{5} = 0,2$

Los puntos de la partición $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}$

$f = 2^x$;

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = 2^{\frac{1}{5}} = 1,1487; f\left(\frac{2}{5}\right) = 2^{\frac{2}{5}} = 1,3195; f\left(\frac{3}{5}\right) = 2^{\frac{3}{5}} = 1,51572; f\left(\frac{4}{5}\right) = 2^{\frac{4}{5}} = 1,741101$$

$$f\left(\frac{5}{5}\right) = 2^{\frac{5}{5}} = 2$$

Area de los rectangulos

$$\text{Area} = 0,2(1,1487 + 1,3195 + 1,51572 + 1,741101 + 2) = 0,2 * 7,725021 = 1,545$$

$$\text{Area total} = 1,545$$

$$\int_0^1 2^x dx = \text{segun la integral primitiva } \int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C \Rightarrow$$

$$\int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} = \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^1 = \frac{2^1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \text{ dado que el area calculada} = 1,545 \Rightarrow$$

$$\ln 2 = \frac{1}{1,545} = 0,647249 \text{ por defecto}$$

2 Área bajo una curva

Consiste en hallar el área delimitada por la curva, el eje X y dos líneas perpendiculares al eje X que definen un intervalo

Para hallar el área se divide esta en rectángulos infinitesimalmente pequeños y se suman sus áreas

5. Ejercicio

Obten el area del trapecio limitado por la recta $y = 2x + 1$, el eje X y las verticales $x = 0$ y $x = 4$

Comprueba el resultado calculando el area geometricamente

Solución

$$\int_0^4 (2x + 1)dx = \left[2 * \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^4 = [x^2 + x]_0^4$$

$$[x^2 + x]_0^4 = (4^2 + 4) - (0^2 + 0) = 20u^2$$

Area del Trapecio:

Semisuma de las bases por la altura dividido por dos

Punto donde corta $x = 0$ a la recta

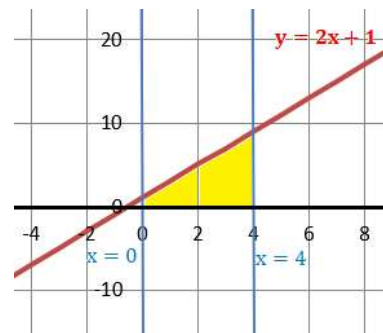
$$\Rightarrow (0,1) \text{ Area de la base menor} = 1;$$

Punto donde corta $x = 4$ a la recta

$$\Rightarrow (4,9) \text{ Area de la base mayor} = 9;$$

Altura del trapecio = 4;

$$\text{Area} = \frac{B + b}{2} * h = \frac{9 + 1}{2} * 4 = 20u^2$$



6. Ejercicio

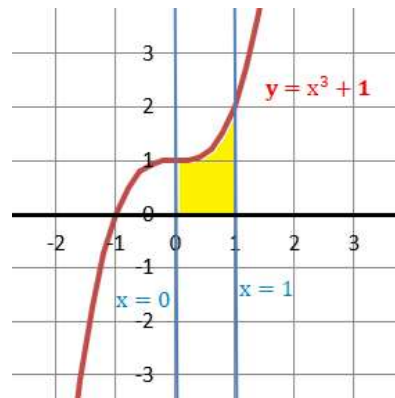
Calcula el area limitada por la curva $y = x^3 + 1$,

el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$:

Solución

$$\int_0^1 (x^3 + 1)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x \right]_0^1 = \left(\frac{1}{4}1^4 + 1 \right) - \left(\frac{1}{4}0^4 + 0 \right)$$

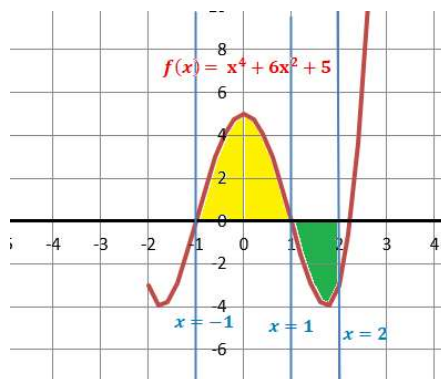
$$\text{Area} = \int_0^1 (x^3 + 1)dx = \frac{1}{4} + 1 = 1.25 u^2$$



3 Integral Indefinida “Área bajo una curva”

$$\text{Si } f(x) \geq 0 \Rightarrow \text{Area} = \int_{-1}^1 (x^4 + 6x^2 + 5) dx$$

$$\text{Si } f(x) \leq 0 \Rightarrow \text{Area} = - \int_1^2 (x^4 + 6x^2 + 5) dx$$



$$\text{Area} = \int_{-1}^2 (x^4 + 6x^2 + 5) dx = \int_{-1}^1 (x^4 + 6x^2 + 5) dx - \int_1^2 (x^4 + 6x^2 + 5) dx$$

7. Ejercicio

Sea f continua en $[-1, 4]$ y $g(x) = f(x) + 2$;

Si $\int_{-1}^4 f(x) dx = 5$. Calcula $\int_{-1}^4 g(t) dt$.

Solución

$$g(x) = f(x) + 2;$$

$$\int_{-1}^4 g(t) dt = \int_{-1}^4 (f(t) + 2) dt = \int_{-1}^4 f(t) dt + \int_{-1}^4 2 dt = 5 + [2x]_{-1}^4 = 5 + 8 - 2(-1) = 15;$$

8. Ejercicio

$$\text{Si } \int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{3}, \int_1^2 f(x) dx = \frac{8}{3}, \text{ y } \int_0^3 f(x) dx = \frac{11}{3}$$

Hallar a) $\int_0^2 f(x) dx$; b) $\int_1^3 f(x) dx$; c) $\int_2^3 f(x) dx$

Solución

$$\text{a) } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4;$$

$$\text{b) } \int_1^3 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = \frac{11}{3} - \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\text{c) } \int_2^3 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx = \frac{11}{3} - \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}$$

9. Ejercicio

Sin calcular las integrales, justifica cual de ellas es mayor $A = \int_0^1 x^2 \sin^2 x dx$ $B = \int_0^1 x \sin^2 x dx$

Solución

En el intervalo $[0, 1]$ se cumple $x^2 \sin^2 x < x \sin^2 x$ dado que $x^2 < x$;

Si tomamos cualquier numero entre 0 y 1 ejemplo $0,2 \Rightarrow 0,2^2 < 0,2$

Dado que el intervalo es el mismo en la dos expresiones $\Rightarrow \int_0^1 x^2 \sin^2 x dx < \int_0^1 x \sin^2 x dx$

10. Ejercicio

Contesta razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones

a) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

b) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x) dx * \int_a^b g(x) dx$

c) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ entonces $a = b$;

d) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ y $f(x) > 0$ para todo x entonces $a = b$;

e) Si $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

Solución

a) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$; es verdadero si $f(x) > 0$ en el intervalo $[a, c]$

Si $f(x) < 0$ e el intervalo $[b, c]$ sería -

b) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x) dx * \int_a^b g(x) dx$ Falsa

En general la integral de un producto no es igual al producto de las integrales

$$\int_0^1 x * x dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3};$$

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x * x dx \neq \int_0^1 x dx \int_0^1 x dx \text{ Pues } \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$$

c) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ entonces $a = b$;

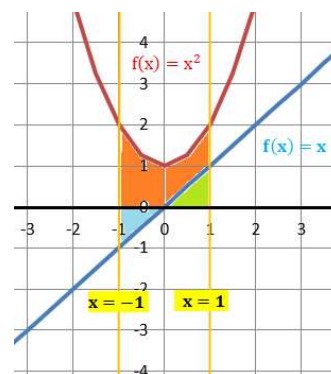
Esta afirmacion no se cumple siempre es falsa

$$\int_{-1}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0; y -1 \neq 1;$$

d) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ y $f(x) > 0$ para todo x entonces $a = b$;

Esta afirmacion es verdadera

e) Si $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ Esta afirmacion es verdadera



4 Teorema del valor medio del cálculo

4.1 Teorema del valor medio del cálculo diferencial

El teorema del valor medio para el calculo diferencial nos dice que si una funcion $f(x)$ es continua en

$[a, b]$ y derivable en (a, b) existe un punto medio C donde $f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$f'(C)$ es la tangente a la curva en el punto C

y $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la tangente de la recta que pasa

por A y B

Ejemplo:

Calcular el punto medio en el intervalo $[1, 4]$

$$f(x) = (x + 2)^2 + 1;$$

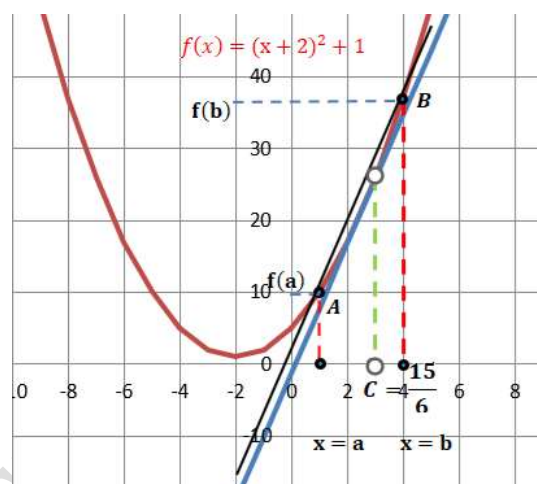
$$f'(x) = 2(x + 2) \text{ Para hallar el punto } C$$

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{37 - 10}{4 - 1} = \frac{27}{3}$$

$$\Rightarrow 2(C + 2) = \frac{27}{3}; C = \frac{15}{6};$$

$$C = \left(\frac{15}{6}, \frac{765}{36}\right) \text{ y Pendiente } \frac{27}{3}$$

$$\text{Recta tangente a la curva en el punto } C \left(\frac{15}{6}, \frac{765}{36}\right); y = \frac{324}{36}x - \frac{45}{36}$$



4.2 Teorema del valor medio del cálculo integral

El teorema del valor medio para el calculo integral nos dice que si una funcion $f(x)$ es continua en

$[a, b]$ existe un punto C en el intervalo $[a, b]$ donde $\int_a^b f(x)dx = f(C)(b - a)$

$f(C)$ es el valor medio de f en el intervalo $[a, b]$

Ejemplo:

Calcular el punto medio en el intervalo $[1, 4]$ $f(x) = (x + 2)^2 + 1;$

$$\int_1^4 ((x + 2)^2 + 1)dx = f(C)(4 - 1) = 3f(C) \Rightarrow$$

$$\int_1^4 ((x + 2)^2 + 1)dx = \int_1^4 ((x + 2)^2)dx + \int_1^4 1dx = \int_1^4 ((x + 2)^2)dx + \int_1^4 1dx$$

$$\int_1^4 1dx = [x]_1^4 = 4 - 1 = 3;$$

$$\int_1^4 ((x + 2)^2)dx = \int_1^4 x^2dx + \int_1^4 4xdx + \int_1^4 4dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 + \left[4\frac{x^2}{2}\right]_1^4 + [4x]_1^4 = \left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right) + (2 * 16 - 1) + (16 - 4)$$

$$\int_1^4 ((x + 2)^2)dx = \frac{63}{3} + \frac{15}{2} + 12 + 3$$

$$\int_1^4 ((x + 2)^2 + 1)dx = \frac{63}{3} + 31 + 12 + 3 = \frac{63}{3} + \frac{93}{3} + \frac{36}{3} + \frac{9}{3} = \frac{201}{3}$$

$$\int_1^4 ((x+2)^2 + 1) dx = 3f(C) \Rightarrow \frac{201}{3} = 3f(c);$$

$$f(C) = \frac{201}{9} = 14,5$$

El teorema del valor medio del calculo integral nos dice que el area encerrada por la curva y el eje X en

el intervalo $[1,4]$ es igual al area determinada por el rectangulo de base (A, B) y altura $F(c)$

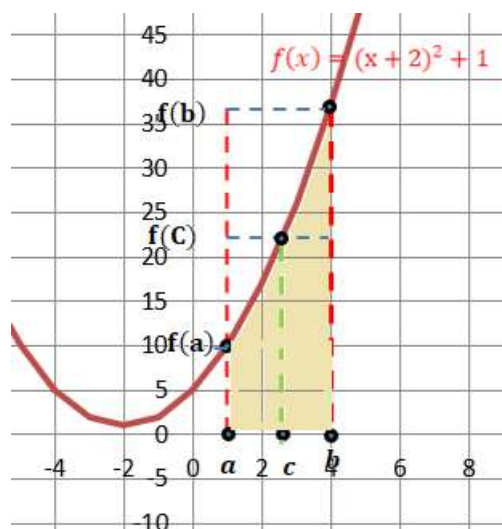
Ara encerrada por la curva el eje X y $(1,4)$

$$= \int_1^4 ((x+2)^2 + 1) dx = \frac{201}{3};$$

Area del rectangulo: Base = $4 - 1 = 3$;

$$\text{Altura} = \frac{201}{9};$$

$$\text{Area del rectangulo} = \frac{201}{9} * 3 = \frac{201}{3}$$



11. Ejercicio

Halla el valor medio de las funciones

Solución:

$$\int_a^b f(x) dx = f(C)(b - a);$$

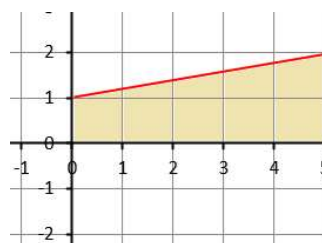
$$\int_a^b f(x) dx = \text{al area sombreada}$$

$$\text{area del triangulo} = \frac{5 * 1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{area del rectangulo} = 5 * 1 = 5$$

$$\text{Area total} = \frac{15}{2}$$

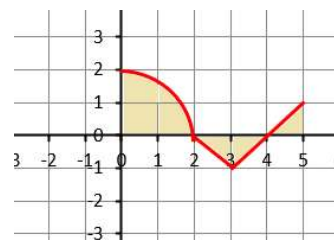
$$\int_a^b f(x) dx = f(C)(b - a) \Rightarrow \frac{15}{2} = f(C)(5 - 0); f(c) = \frac{3}{2}; f(c) = \frac{1}{5}$$



$$\int_a^b f(x) dx = \text{area sombreada} \begin{cases} \frac{1}{4} \text{ area del circulo de } r = 2 \\ \text{area del triangulo} - \frac{2 * 1}{2} \\ \text{area del triangulo} = \frac{1 * 1}{2} \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{4} \pi 2^2 - 1 + \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2};$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(C)(b - a) \Rightarrow \pi - \frac{1}{2} = f(C)(5 - 0); f(c) = \frac{2\pi - 1}{10};$$



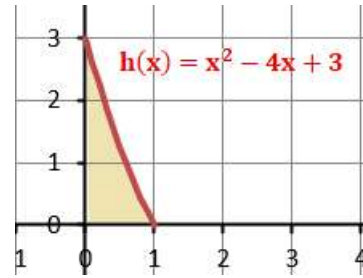
$\int_a^b (f(x))dx = \text{area sombreada};$

$$\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{4x^2}{2} \right]_0^1 + [3x]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{4}{2} + 3$$

$$\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = \frac{2 - 12 + 18}{6} = \frac{8}{6}$$

$$\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = f(C)(1 - 0) \Rightarrow$$

$$f(C) = \frac{8}{6};$$



12. Ejercicio

Calcula a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + tg^2 t}{tg t} dt$; b) $\int_{-1}^1 x(x^2 - 1)dx$

Solución:

$$a) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + tg^2 t}{tg t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{tg t} dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg t dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{tg t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{\sin t}{\cos t}} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin t} dt \text{ hacemos cambio de variable } \begin{cases} \sin t = u \\ \cos t dt = du \end{cases} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{u} du = \ln u + C$$

$$[\ln u]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \text{deshacemos cambio de variable } [\ln \sin t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln \left(\sin \frac{\pi}{3} \right) - \ln \left(\sin \frac{\pi}{4} \right) = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{tg t} dt = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos t} dt \text{ hacemos cambio de variable } \begin{cases} \cos t = u \\ -\sin t dt = du \end{cases} = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{u} =$$

$$-[\ln u]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \text{ Deshacemos cambio } = -[\ln \cos t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -(\ln(\cos \frac{\pi}{3}) - (\ln(\cos \frac{\pi}{4}))) = \ln \cos \frac{\pi}{4} - \ln \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg t dt = \ln \cos \frac{\pi}{4} - \ln \cos \frac{\pi}{3} = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln \frac{1}{2} = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + tg^2 t}{tg t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} * 2 \right) = \frac{1}{2} \ln(3)$$

$$b) \int_{-1}^1 x(x^2 - 1)dx = \int_{-1}^1 x^3 dx - \int_{-1}^1 x dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

5 Función Integral: Teorema fundamental del Cálculo

El teorema fundamental del cálculo, establece la relación inversa entre la derivación y la integración.

Si una función $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y F está definida en $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt ; \text{ entonces } F \text{ es derivable en } [a, b] \text{ y } F' = f(x)$$

$$G(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt \text{ entonces } G'(x) = f(u(x)) * u'(x)$$

13. Ejercicio

Calcular las derivadas de las funciones a) $f(x) = \int_0^x t g t dt$; b) $g(x) = \int_x^a a * e^a da$

Solución:

a) $f(x) = \int_0^x t g t dt$ según el teorema fundamental $f'(x) = t g t$

$$\int t g t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt \text{ hacemos cambio de variable } \begin{cases} \cos t = u; \\ -\sin t dt = du; \end{cases}$$

$$\int \frac{\sin t}{\cos t} dt = \int \frac{-du}{u} = -\ln u \text{ deshacemos cambio} = -\ln(\cos t) + C$$

$$f(x) = \int_0^x t g t dt = [-\ln(\cos t)]_0^x = -(\ln(\cos x) - (\ln(\cos 0))) = -\ln(\cos x) + 0 = -\ln(\cos x)$$

$$f(x) = -\ln(\cos x); \text{ Se cumple } f'(x) = -\frac{-\sin x}{\cos x} = t g x$$

b) $g(x) = \int_x^a a * e^a da = -\int_a^x a * e^a da$ según el teorema fundamental $g'(x) = -x e^x$

$$\int a * e^a da = \text{hacemos integración por partes } \begin{cases} a = u; da = du \\ e^a da = dv; v = e^a \end{cases}$$

$$\int a * e^a da = a * e^a - \int e^a da = a * e^a - \int e^a da = a * e^a - e^a = e^a(a - 1)$$

$$g(x) = -\int_a^x a * e^a da = -[a * e^a - e^a]_a^x = -((x * e^x - e^x) - (a * e^a - e^a)) =$$

$$g(x) = -x * e^x + e^x + a * e^a - e^a = a * e^a - x * e^x;$$

$$\text{Se cumple } g'(x) = -x * e^x;$$

14. Ejercicio

Calcular las derivadas de las funciones a) $f(x) = \int_{-x^2}^{x^3} \sin 2t dt$; b) $g(x) = \int_{3x-2}^{x^2+x} e^{-t^2} dt$

Solución:

a) $f(x) = \int_{-x^2}^{x^3} \sin 2t dt$;

$$\int \sin 2t dt = \text{hacemos cambio de variable } \begin{cases} 2t = u; \\ 2dt = du \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int \sin 2t dt = \int \sin u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} - (\cos u) = -\frac{1}{2} \cos u \text{ Deshacemos cambio} = -\frac{1}{2} \cos 2t$$

$$f(x) = \int_{-x^2}^{x^3} \sin 2t \, dt = - \left[\frac{1}{2} \cos 2t \right]_{-x^2}^{x^3} = -\frac{1}{2} \cos 2x^3 + \frac{1}{2} \cos 2(-x^2) = -\frac{1}{2} \cos 2x^3 + \frac{1}{2} \cos (-2x^2);$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(-6x^2 \sin 2x^3) + \frac{1}{2}(-4x(-\sin(-2x^2))) = 3x^2 \sin 2x^3 + 2x \sin (-2x^2)$$

$$f'(x) = 3x^2 \sin 2x^3 + 2x \sin (-2x^2)$$

b) $g(x) = \int_{3x-2}^{x^2+x} e^{-t^2} \, dt$; segun el teorema fundamental

si $F(t)$ es una primitiva de $f(t)$ entonces $F'(t) = f(t)$

$$\text{sutituimos } e^{-t^2} = f(t) \Rightarrow F'(t) = e^{-t^2};$$

$$g(x) = \int_{3x-2}^{x^2+x} e^{-t^2} \, dt = [F(t)]_{3x-2}^{x^2+x} = F(x^2+x) - F(3x-2)$$

$$g(x) = F(x^2+x) - F(3x-2) \text{ Derivando los dos terminos}$$

$$g'(x) = (2x+1)F'((x^2+x)) - 3F'(3x-2) = (2x+1)e^{-(x^2+x)^2} - 3e^{-(3x-2)^2}$$

15. Ejercicio

Dada la función $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt$ ¿Tiene $g(x)$ puntos de inflexion? razona la respuesta

Solución

$$g(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt = \text{Segun el teorema fundamental del calculo (ver ejercicio anterior b)}$$

$$e^{-t^2} = f(t) = F'(t) \Rightarrow \int_0^x e^{-t^2} \, dt = F(t); \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt = [F(t)]_0^x$$

$$= F(x) - F(0); \text{derivamos}$$

$$g'(x) = 1 F'(x) - 0 F'(0) = F'(x) = e^{-x^2}; g'(x) = e^{-x^2};$$

$$g''(x) = -2x * e^{-x^2} \text{ para } x = 0$$

Estudiamos $g''(x) = 0$ por la derecha e izquierda

{ si $x < 0$ izquierda $g''(x) > 0$ es concava
 { Si $x > 0$ derecha $g''(x) < 0$ es convexa al cambiar de signo hay un punto de inflexion

16. Ejercicio

Calcula la derivada de la siguiente funcion $f(x) = \int_0^x \cos t^2 \, dt$

Solución

$$f(x) = \int_0^x \cos t^2 \, dt = \text{Segun el teorema fundamental del calculo (ver ejercicio anterior b)}$$

$$\cos t^2 = g(t) = F'(t) \Rightarrow \int_0^x \cos t^2 \, dt = F(t); \quad f(x) = \int_0^x \cos t^2 \, dt = [F(t)]_0^x$$

$$= F(x) - F(0); \text{derivamos}$$

$$f'(x) = 1 F'(x) - 0 F'(0) = F'(x) = \cos t^2; f'(x) = \cos t^2;$$

17. Ejercicio

Sea $F(x) = \int_1^{x^2} \ln t \, dt$ con $x \geq 1$. a) Calcular $F'(x)$ y b) ¿Es una función constante? ¿justifica la respuesta

Solución

a) Calcular $F'(x)$

$$\int \ln t \, dt = \int \ln t \cdot 1 \, dt = \text{utilizamos integración por partes} \begin{cases} u = \ln t; \, du = \frac{1}{t} dt \\ dv = 1 dt; \, v = t \end{cases}$$

$$\int \ln t \, dt = t \ln t - \int t \cdot \frac{1}{t} dt = t \ln t - t;$$

$$F(x) = \int_1^{x^2} \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^{x^2} = (x^2 \ln x^2 - x^2) - (1 \ln 1 - 1) = x^2 \ln x^2 - x^2 + 1$$

$$F(x) = x^2 \ln x^2 - x^2 + 1$$

$$F'(x) = 2x \ln x^2 + \frac{2x}{x^2} x^2 - 2x = 2x \ln x^2 + 2x - 2x = 2x \ln x^2 = 4x \ln x$$

$$F'(e) = 4e \ln e = 4e$$

b) ¿Es una función constante? ¿justifica la respuesta

$$F(x) = x^2 \ln x^2 - x^2 + 1;$$

Una función es constante si su derivada es igual a 0 para todos los valores de su dominio

$$F'(x) = 4x \ln x; \text{ para } x > 1 \text{ la derivada no es } 0 \text{ No es constante}$$

18. Ejercicio

Sea $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$ definida para $x \geq 1$. Halla los valores de x que alcanzan sus

máximos y mínimos relativos

Solución

Según el teorema fundamental del cálculo

$$\frac{\sin t}{t} = f(t) \Rightarrow F(x) = \int_1^x f(t) dt; \, f'(x) \text{ es una primitiva} = F(t);$$

$$F'(x) = [f(t)]_1^x = f(x) - f(1); \text{ derivamos}$$

$$F'(x) = 1 \cdot f'(x) - 0 \cdot f'(0) = F'(x) = \frac{\sin x}{x};$$

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt; \, F'(x) = \frac{\sin x}{x};$$

$$\text{Para hallar los máximos y mínimos relativos hacemos } F'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0;$$

$$\text{Habrá máximos o mínimos en } \sin x = 0; \, x = 0 \text{ y } x = k\pi$$

19. Ejercicio

Dada la función Sea $F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)e^{-t^2} dt$

a) Calcula $F'(x)$. Estudia el crecimiento de $F(x)$ y halla los puntos de sus máximos y mínimos relativos

b) Calcula $F''(x)$. Estudia la concavidad y convexidad de $f(x)$ y halla puntos de inflexión

Solución

a) Calcula $F'(x)$. Estudia el crecimiento de $F(x)$ y halla los puntos de sus máximos y mínimos relativos

$F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)e^{-t^2} dt$; Aplicamos el teorema fundamental del cálculo

Definimos $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2} \Rightarrow F'(x) = f(x)$;

$F(x) = \int_0^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2}$;

Estudiamos los puntos en que $F'(x) = 0$; $(x^2 - 1)e^{-x^2} = 0$; se hace 0 en $x = \pm 1$

$(-\infty, -1)$ para $x = -2$	-1	0 Para $x = 0$	1	$(1, \infty)$ Para $x = 2$
+	0	-	0	+
creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

Hay un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$

b) Calcula $F''(x)$. Estudia la concavidad y convexidad de $f(x)$ y halla puntos de inflexión

$F'(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2} \Rightarrow F''(x) = 2xe^{-x^2} + (-2xe^{-x^2}(x^2 - 1)) = 2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2} + 2xe^{-x^2}$

$F''(x) = 4xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(2 - x^2)$

Estudiamos los puntos en que $F''(x) = 0$; $2xe^{-x^2}(2 - x^2) = 0$; se hace 0 en $x = 0$; $x = \pm\sqrt{2}$

Hallamos los valores que toma la segunda derivada de F y vemos la forma de la función $F(x)$

$(-\infty, -\sqrt{2})$ Para $x = -3$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, 0)$ para $x = -1$	0	$(0, \sqrt{2})$ para $x = 1$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, \infty)$ Para $x = 3$
+	0	-	0	+	0	-
Cóncava hacia arriba	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo

20. Ejercicio

Dada la función $F(x) = \int_1^{e^x - x - 1} e^{-t^2} dt$. Halla los puntos en que se anula F'

Solución

El teorema fundamental del cálculo establece que si $G(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$ entonces $G'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$

Definimos $f(x) = e^{-x^2}$; $u(x) = e^x - x - 1$; $u'(x) = e^x - 1$

Aplicamos el teorema $G'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$;

$$F(x) = \int_1^{e^x - x - 1} e^{-t^2} dt \Rightarrow F'(x) = e^{-(e^x - x - 1)^2} (e^x - 1);$$

Hallamos los puntos en que se anula $F' = e^{-(e^x - x - 1)^2} (e^x - 1) = 0$; Se anula en $e^x = 1$; $x = 0$;

21. Ejercicio

Dada la función $F(x) = \int_0^{2x} e^{t^2} dt$ Calcular $F'(0)$

Solución

$$F(x) = \int_0^{2x} e^{t^2} dt$$

Definimos $f(x) = e^{t^2} \Rightarrow F'(x) = f(x)$; Aplicamos el teorema fundamental del calculo

$$G(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt \text{ entonces } G'(x) = f(u(x)) * u'(x)$$

Definimos $f(x) = e^{t^2}$; $u(x) = 2x$; $u'(x) = 2$

$$F'(x) = e^{(2x)^2} * 2 = 2e^{4x^2}$$

$$\text{Calculamos } F'(0) = 2e^{4(0)^2} * 2; F'(0) = 2e^0 = 2;$$

22. Ejercicio

Halla el punto del intervalo $[0,2]$ en que la función $F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{1+t^2} dt$ alcanza su minimo

Solución

Demostración del teorema fundamental del calculo

$$\int \frac{t-1}{1+t^2} dt = \int \frac{t}{1+t^2} dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$$

$$\int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg t$$

$$\int_0^x \frac{t-1}{1+t^2} dt = - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt + \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^x - [\arctg(t)]_0^x = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \arctg x$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \arctg x; F'(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x-1}{1+x^2}$$

Para que haya un maximo o minimo $F'(x) = 0$; $\frac{x-1}{1+x^2} = 0$; habra un maximo o minimo en $x = 1$

$(-\infty, 1)$ para $x = 0$	1 Para $x = 1$	$(1, \infty)$ para $x = 2$
- decreciente	0	+ creciente

Al ser decreciente a la izquierda y creciente a la derecha en $x = 1$ habra un mínimo

23. Ejercicio

a) Halla los extremos relativos y absolutos de la función en el intervalo $[-7, 1]$ $f(x) = x^3 + 6x^2 + 49$

b) sea B el punto en el que la función alcanza su máximo absoluto. Calcular $\int_{-7}^B f(x) dx$

Solución

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 49; f'(x) = 3x^2 + 12x$$

habrá máximo o mínimo en $f'(x) = 0$;

$$f'(x) = 3x^2 + 12x = 0;$$

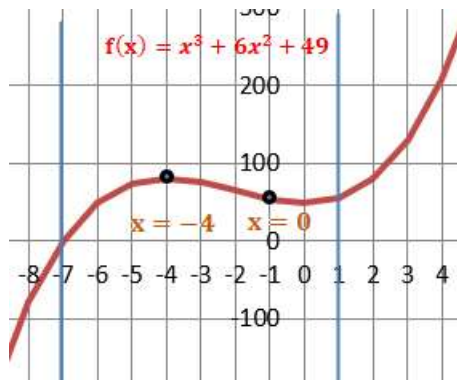
$$3x(x + 4) = 0; \text{Máximo o mínimo en}$$

$$x = 0 \text{ y } x = -4;$$

Para ver si es máximo o mínimo damos

valores próximos a $x = 0$ y $x = -4$

Máximo $x = -4$ y mínimo $x = 0$;



b) sea B el punto en el que la función alcanza su máximo absoluto. Calcular $\int_{-7}^B f(x) dx$

$$B = (-4, 81) \Rightarrow \int_{-7}^B f(x) dx; \text{sustituimos } \int_{-7}^{-4} (x^3 + 6x^2 + 49) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} + 49x \right]_{-7}^{-4} =$$

$$\left(\frac{(-4)^4}{4} + \frac{6(-4)^3}{3} + 49(-4) \right) - \left(\frac{(-7)^4}{4} + \frac{6(-7)^3}{3} + 49(-7) \right) = \frac{675}{4}$$

24. Ejercicio

a) Si f es una función continua, obten $F'(x)$ siendo $F(x) = \int_0^x (f(t) + t^3 + t^2) dt$

b) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 (f(t) + t^3 + t^2) dt = 1$; halla la recta tangente a la gráfica en $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$

Solución

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^3 + t^2) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^3 dt$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo

$$F'(x) = f(x) + x^2 + x^3$$

b) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 (f(t) + t^3 + t^2) dt = 1$; halla la recta tangente a la gráfica en $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$

La ecuación de la recta tangente en $(1, F(1))$ será; $y - F(1) = F'(x)(x - 1)$

$$y = F'(x)(x - 1) + F(1)$$

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^3 + t^2) dt \text{ para hallar } F(1) \Rightarrow$$

$$F(1) = \int_0^1 (f(t) + t^3 + t^2) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 t^3 dt = \int_0^1 1 dt + \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 t^3 dt =$$

$$\left[t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12 + 4 + 3}{12} = \frac{19}{12}; F(1) = \frac{19}{12}$$

$$F'(x) = f(x) + x^2 + x^3 \text{ en } x = 1 \Rightarrow F'(x) = 1 + 1 + 1 = 3;$$

$$\text{La recta tangente } y = F'(x)(x - 1) + F(1) \text{ será } y = 3(x - 1) + \frac{19}{12}; y = 3x - \frac{17}{12}$$

25. Ejercicio

Sea la función $F(x) = \int_1^x \sqrt{5 + e^{t^2}} dt$ y $g(x) = x^2$ Calcular la derivada $(F(g(x)))'$

Solución

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{5 + e^{t^2}} dt \text{ Aplicando el teorema fundamental del calculo; } f(t) = \sqrt{5 + e^{x^2}} \Rightarrow$$

$$F'(x) = \sqrt{5 + e^{x^2}};$$

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) * g'(x) = \sqrt{5 + e^{x^{2^2}}} * 2x = \sqrt{5 + e^4} * 2x$$

$$(F(g(x)))' = 2x\sqrt{5 + e^4}$$

6 Área de recintos

Consiste en hallar el area comprendida entre curvas y rectas con unos limites especificos

26. Ejercicio

Calcula el area de la region limitada por la curva $y = \frac{x}{1+x^2}$ el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 2$;

Solución

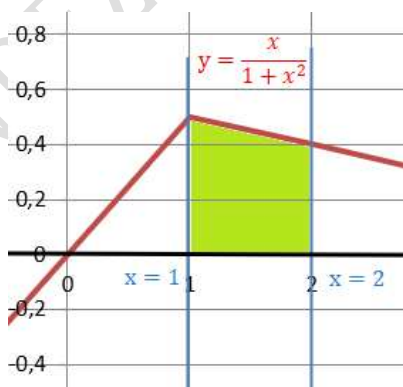
$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\text{Área} = \int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_1^2$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} (\ln(1+2^2)) - \frac{1}{2} (\ln(1+1^2)) =$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} (\ln(5)) - \frac{1}{2} (\ln(2)) = \ln \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\text{Área} = 0,458145 u^2$$



27. Ejercicio

Calcula el area de la region limitada por el eje horizontal y la grafica $y = x^2 - 2x - 3$;

Solución

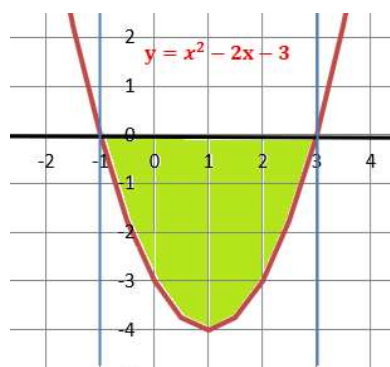
$y = x^2 - 2x - 3$ la grafica es una parabola que corta al eje x en $y = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}; x = -1 \text{ y } x = 3$$

$$\text{Área} = - \int_{-1}^3 x^2 - 2x - 3 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 3x \right]_{-1}^3$$

$$\text{Area} = - \left(-\frac{27}{3} - \frac{5}{3} \right) = - \left(-\frac{32}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

$$\text{Area} = \frac{32}{3} u^2$$



28. Ejercicio

Calcula el area de la region encerrada entre la graficas $f(x) = x - x^2$ y $g(x) = x^2 - \frac{3}{2}$

Solución

Hallamos los puntos de corte de

$$f(x) = x - x^2 \text{ y } g(x) = x^2 - \frac{3}{2}$$

$$x - x^2 = x^2 - \frac{3}{2}; 2x^2 - x - \frac{3}{2} = 0;$$

$$4x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 48}}{8}; x = \frac{2 + \sqrt{52}}{8} \text{ y } x = \frac{2 - \sqrt{52}}{8}$$

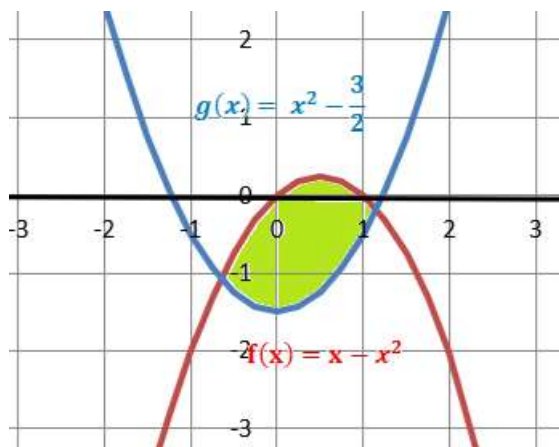
$$\text{Área} = \int_{\frac{2-\sqrt{52}}{8}}^{\frac{2+\sqrt{52}}{8}} (f(x) - g(x)) dx:$$

$$\int_{\frac{2-\sqrt{52}}{8}}^{\frac{2+\sqrt{52}}{8}} \left((x - x^2) - \left(x^2 - \frac{3}{2} \right) \right) dx:$$

$$\int_{\frac{2-\sqrt{52}}{8}}^{\frac{2+\sqrt{52}}{8}} \left(x - 2x^2 + \frac{3}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x}{2} \right]_{\frac{2-\sqrt{52}}{8}=-0,651}^{\frac{2+\sqrt{52}}{8}=1,183}$$

$$= \left(\frac{(1,183)^2}{2} - \frac{2(1,183)^3}{3} + \frac{3(1,183)}{2} \right) - \left(\frac{(-0,651)^2}{2} - \frac{2(-0,651)^3}{3} + \frac{3(-0,651)}{2} \right) = 1,2736 + 1,1339$$

$$\text{Área} = 2,4075 u^2$$



29. Ejercicio

Calcular el area limitada por las funciones $y = x + 5$;

$$y = 2; y = -1; y = \pm \sqrt{x};$$

Solución

Calculamos el area por partes

$$\text{area amarilla} = \text{Area del trapecio} = A + \frac{A+B}{2} * h$$

$$\text{Area} = \frac{6+3}{2} * 3 = \frac{27}{2} u^2$$

$$\text{area verde positiva : } [0,4] y = 2; y = +\sqrt{x}$$

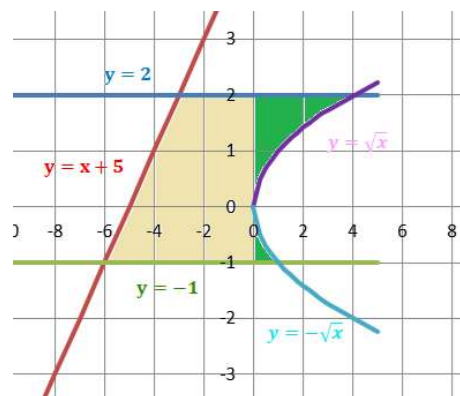
$$\text{Area} = \int_0^4 ((y = 2) - (y = +\sqrt{x})) dx:$$

$$\text{Area} = \int_0^4 (2 - \sqrt{x}) dx = \left[2x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \left[2x - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^4 = \left(8 - \frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}} \right) - (0 - 0) =$$

$$\text{Area} = \frac{24}{3} - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} u^2$$

$$\text{area verde negativa : } [0,1] y = \sqrt{x}; y = -1;$$

$$\text{Area} = - \int_0^1 ((y = \sqrt{x}) - (y = -1)) dx = - \int_0^1 (\sqrt{x} + 1) dx = - \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + (x) \right]_0^1 = - \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + x \right]_0^1$$



$$Area = -\left(\frac{2 * 1^{\frac{3}{2}}}{3} - 1\right) = \frac{1}{3}u^2;$$

$$Area Total = \frac{27}{2} + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{33}{2}u^2$$

30. Ejercicio

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$ Se pide:

a) Calcula a y b para que la función sea continua y derivable en R

b) Para los valores de a y b obtenidos calcula el área acotada por la función el eje X y

las rectas $x = 1$ y $x = 3$

Solución

Condiciones de continuidad:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases} \quad \text{los puntos donde } f(x) \text{ puede perder la continuidad es el } x = 2 \text{ y } x = -2$$

Para ver si hay continuidad calculamos límites por la derecha e izquierda de $x = 2$ y $x = -2$

$$\text{estudio para } x = -2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow -2^-} (ax^2 + b) = 4a + b \\ \lim_{n \rightarrow -2^+} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = -2$ los límites tienen que coincidir $4a + b = \frac{1}{4}$;

$$\text{estudio para } x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow 2^-} (ax^2 + b) = 4a + b \\ \lim_{n \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 2$ los límites tienen que coincidir $4a + b = \frac{1}{4}$

Como las dos ecuaciones son iguales tendrá infinitas soluciones siempre que se cumpla $4a + b = \frac{1}{4}$

Condiciones de derivabilidad:

Para que una función sea derivable en un punto las derivadas laterales han de ser iguales

$$\text{estudio para } x = -2; f'(-2) = \begin{cases} f'(-2^-) = 2a(-2) = -4a; \\ f'(-2^+) = -\frac{2}{(-2)^3} = -\frac{2}{-8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Para que sea derivable $-4a = \frac{1}{4}$; $a = -\frac{1}{16}$; sustituimos en $4a + b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{4} - 4 * \left(-\frac{1}{16}\right)$;

$b = \frac{2}{4}$; $b = \frac{1}{2}$; La función es derivable en $x = -2$ para $a = -\frac{1}{16}$ y $b = \frac{1}{2}$

$$\text{estudio para } x = 2; f'(2) = \begin{cases} f'(2^-) = 2a(2) = 4a; \\ f'(2^+) = -\frac{2}{(2)^3} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Para que sea derivable $4a = -\frac{1}{4}$; $a = -\frac{1}{16}$ La función es derivable en $x = 2$ para $a = -\frac{1}{16}$ y $b = \frac{1}{2}$

La función es continua y derivable para $a = -\frac{1}{16}$ y $b = \frac{1}{2}$;

b) Para los valores de a y b obtenidos calcula el area acotada por la funcion el eje X y

las rectas $x = 1$ y $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2} & \text{si } |x| < 2 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2} \text{ si } |x| < 2;$$

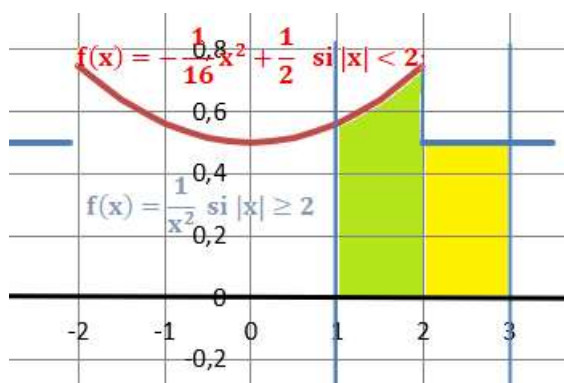
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ si } |x| \geq 2;$$

$$\int_1^2 \left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \left[-\frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{2}x \right]_1^2$$

$$\left(-\frac{1}{48} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right) - \left(-\frac{1}{48} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{5}{6} - \frac{22}{48} = \frac{17}{48}$$

$$\int_2^3 \left(\frac{1}{x^2} \right) dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_2^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Area total} = \frac{17}{48} + \frac{1}{6} = \frac{25}{48} u^2$$



31. Ejercicio

Calcular el area limitada por las parabolas funciones $y = x^2$; $y = -2x^2 + 3$;

Solución

Comprobamos puntos de corte $x^2 = -2x^2 + 3$;

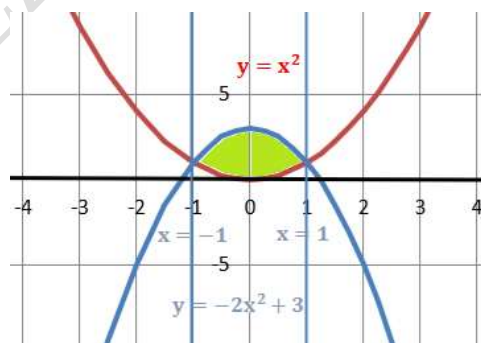
$$3x^2 = 3; x^2 = 1; x = \pm 1$$

$$\int_{-1}^1 ((-2x^2 + 3) - x^2) dx = \int_{-1}^1 (-2x^2 + 3 - x^2) dx$$

$$A = \int_{-1}^1 (-3x^2 + 3) dx = \left[-x^3 + 3x \right]_{-1}^1 = [-x^3 + 3x]_{-1}^1$$

$$= (-1^3 + 3 \cdot 1) - ((-(-1))^3 + 3 \cdot (-1)) = 2 + 2 = 4$$

$$A = 4 u^2$$



32. Ejercicio

Calcular el area limitada por la grafica de la función $f(x) = \ln x$; el eje X y la recta tangente

a dicha curva en el punto $x = e$;

Solución

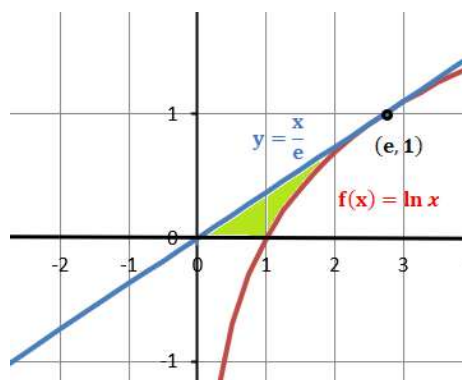
El punto de tangencia a la curva será $x = e$;

$$y = \ln e = 1; (e, 1)$$

La tangente a la curva será $f'(x) = \frac{1}{x}$;

la tangente en el punto e $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{e}$

La recta tangente $(y - 1) = (x - e) \frac{1}{e}$; $y = \frac{x}{e}$



Area se puede calcular = Area del triangulo de base $(e - 0)$ - area de la funcion entre $(1 - 3)$;

$$\text{Area del triangulo} = \frac{b * a}{2} = \frac{(e - 0) * 1}{2} = \frac{e}{2} u^2$$

Area limitada por la curva $y = \ln x$; eje X y rectas: $y = 1, y = e$

$$\text{Area} = \int_1^e (\ln x) dx = [(\ln x * x - x)]_1^e = (\ln e * e - e) - (\ln 1 * 1 - 1) = (1 * e - e) - (0 * 1 - 1) = +1$$

$$\text{Area pedida} = \frac{e}{2} - (1) = \left(\frac{e}{2} - 1\right) u^2$$

33. Ejercicio

Dada la funcion $y = \frac{x}{x^2 + 2}$ Calcular el area limitada por la curva el eje X y las rectas perpendiculares al eje X que pasan por los puntos máximos y mínimos de la funcion

Solución

Para hallar maximos y minimos hallamos la derivada e igualmos a 0 =>

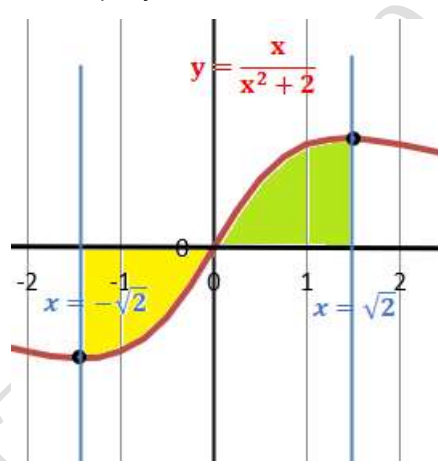
$$y' = \frac{1(x^2 + 2) - 2x * x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2 - x^2}{(x^2 + 2)^2} = 0;$$

$$2 - x^2 = 0; x = \pm \sqrt{2}; \text{máximo y mínimo}$$

Dado que la funcion es simetrica bastaría con calcular una de las partes.

$$\begin{aligned} \text{Area de una parte} &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{x^2 + 2} dx = \frac{1}{2} [(\ln x^2 + 2)]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left((\ln \sqrt{2}^2 + 2) - (\ln 0^2 + 2) \right) = \frac{1}{2} \ln 2 + 2 - 2 = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{Area total} = 2 * \frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2 \text{ u}^2$$



34. Ejercicio

Hallar el area del recinto limitado por la grafica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a dicha grafica por el máximo relativo.

Representa la grafica, puntos de corte, maximos y minimos relativos ...

Solución

Representa la grafica, puntos de corte, maximos y minimos relativos

a) Puntos de corte de la funcion con los ejes

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x = 0; x(x^2 - 2x + 1) = 0; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}; x = 1;$$

Puntos de corte con el eje x: $x = 0$ y $x = 1$; corta al eje Y (0,0) y (1,0)

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$; para $x = 0$; $y = 0$ corta a los eje y en (0,0)

b) Máximos y mínimos

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = m$; pendiente de la tangente a la curva

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0; f'(x) = x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6}; x = 1 \text{ y } x = \frac{1}{3}$$

En estos puntos (1,0) y $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ habra un máximo o mínimo

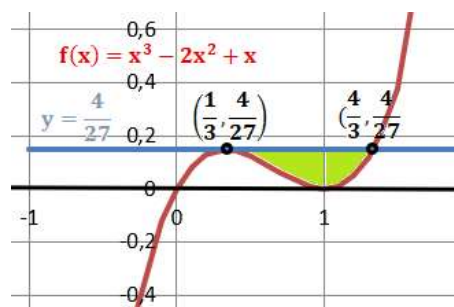
(1,0) habrá un mínimo y en $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ habrá un máximo

x	f(x)
0,1	0,081
0,2	0,128
0,333333	0,148
0,4	0,144
0,5	0,125
0,7	0,063
0,9	0,009
1	0
1,1	0,011
1,2	0,048
1,3	0,117

c) Tangente en el punto maximo $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ y pendiente

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$$

$$y - \frac{4}{27} = 0\left(x - \frac{1}{3}\right); y = \frac{4}{27}$$



d) puntos de corte de la tangente $y = \frac{4}{27}$ y la funcion

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x;$$

$$\frac{4}{27} = x^3 - 2x^2 + x; x^3 - 2x^2 + x - \frac{4}{27} = 0;$$

sabemos que una solucion es $x = \frac{1}{3}$;

$$\text{Dividimos } \frac{(x^3 - 2x^2 + x - \frac{4}{27})}{x - \frac{1}{3}} = x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{9} = 0; x = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{16}{9}}; x = \frac{1}{3} \text{ y } x = \frac{4}{3}$$

puntos de corte de la funcion y la tangente $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ y $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{27}\right)$

$$\text{Area} = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \left(\frac{4}{27}\right) - (x^3 - 2x^2 + x) dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \left(-x^3 + 2x^2 - x + \frac{4}{27}\right) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{4}{27}x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{12}u^2$$

35. Ejercicio

a) Dibuja el recinto limitado por las curvas de ecuación $y = \sin x$; $y = \cos x$ $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$;

b) Calcula el area del recinto determinado en el punto anterior

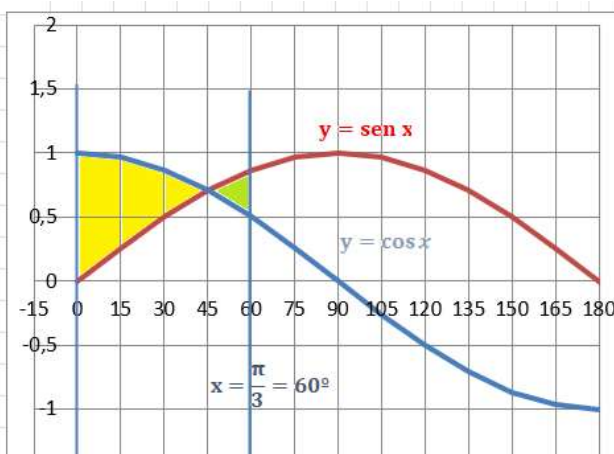
Solución

Las ecuaciones $y = \sin x$, $y = \cos x$ son funciones senoidales;

Comprobamos donde se cruzan en el intervalo $\sin x = \cos x$; son iguales en $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$

Damos valores a las funciones y las representamos

Grados	sen x	cos x
0	0	1
15	0,259	0,9659
30	0,5	0,866
45	0,707	0,7071
60	0,866	0,5
75	0,966	0,2588
90	1	6E-17
105	0,966	-0,259
120	0,866	-0,5
135	0,707	-0,707
150	0,5	-0,866
165	0,259	-0,966
180	1E-16	-1



b) Calcula el area del recinto determinado en el punto anterior

$$Area = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((\cos x) - (\sin x)) dx = [\sin x - (-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right) - (\sin 0 + \cos 0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 = 0,4142$$

$$Area = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x) - (\sin x) dx = 0,4142 u^2$$

$$Area = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x - (\cos x)) dx = [-\cos x - (\sin x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$-\cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} - \left(-\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}\right) = -0,5 - 0,866 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1,366 + \sqrt{2} = 0,048 u^2$$

$$Area = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x - (\cos x)) dx = 0,048 u^2$$

$$Area total = 0,4142 u^2 + 0,048 u^2 = 0,4622 u^2$$

36. Ejercicio

a) Representa las curvas de ecuacion $y = x^2 - 3x + 3$; $y = x$; calcula donde se cortan.

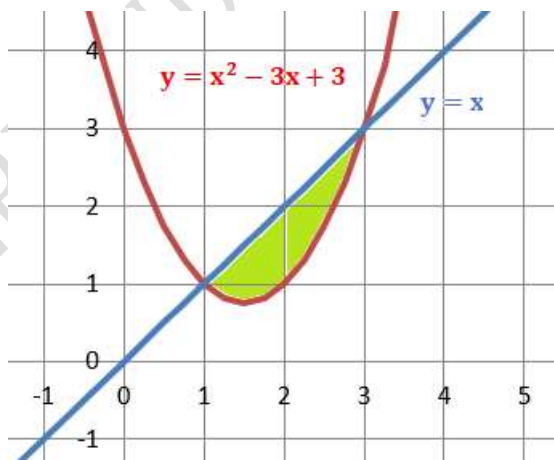
b) Halla el area imitada por dicha curvas

Solución

Puntos de corte; igualamos $\Rightarrow x^2 - 3x + 3 = x$; $x^2 - 4x + 3 = 0$;

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}; x = 3 \text{ y } x = 1; \text{ puntos de corte } (3,3) \text{ y } (1,1)$$

x	f(x)	g(x)
0,25	2,3125	0,25
0,5	1,75	0,5
0,75	1,3125	0,75
1	1	1
1,25	0,8125	1,25
1,5	0,75	1,5
1,75	0,8125	1,75
2	1	2
2,25	1,3125	2,25
2,5	1,75	2,5
2,75	2,3125	2,75
3	3	3
5	13	5



b) Halla el area imitada por dicha curvas

$$Area = \int_1^3 (x - (x^2 - 3x + 3)) dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x\right]_1^3 =$$

$$-\frac{3^3}{3} + \frac{4 \cdot 3^2}{2} - 3 \cdot 3 - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{4 \cdot 1^2}{2} - 3 \cdot 1\right) = -9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = 1 + \frac{1}{3}$$

$$Area = \frac{4}{3} u^2$$

37. Ejercicio

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4}$.

a) Dibuja el recinto limitado por la función f y sus tangentes en los puntos $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$

b) Prueba que el eje de ordenadas divide el recinto anterior en dos zonas de igual área

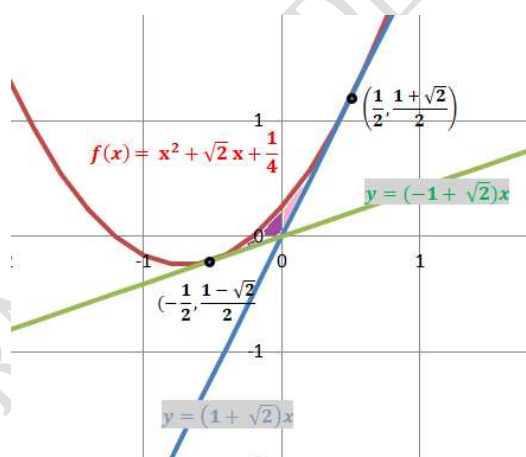
Solución

Pendiente de la tangente a la curva $m = f'(x) = 2x + \sqrt{2} \begin{cases} \text{en } x = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 1 + \sqrt{2} \\ \text{en } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$

Punto de tangencia en $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}; \left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}; \left(-\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$

tangentes $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(y - \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) = (1 + \sqrt{2})\left(x - \frac{1}{2}\right); y = (1 + \sqrt{2})x \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(y - \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) = (-1 + \sqrt{2})\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right); y = (-1 + \sqrt{2})x \end{cases}$

x	f(x)	T(1)	T(2)
-1,2	-0,01	-2,9	-0,5
-1	-0,16	-2,4	-0,41
-0,8	-0,24	-1,9	-0,33
-0,6	-0,24	-1,4	-0,25
-0,4	-0,16	-1	-0,17
-0,2	0,007	-0,5	-0,08
0	0,25	0	0
0,2	0,573	0,48	0,083
0,4	0,976	0,97	0,166
0,6	1,459	1,45	0,249
0,8	2,021	1,93	0,331
1	2,664	2,41	0,414



b) Prueba que el eje de ordenadas divide el recinto anterior en dos zonas de igual área

$$\text{Area} \left(0, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left((x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4}) - (1 + \sqrt{2})x \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left((x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4} - x - \sqrt{2}x) \right) dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24} u^2$$

$$\text{Area} \left(0, -\frac{1}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left((x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4}) - (-1 + \sqrt{2})x \right) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left((x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4} + x - \sqrt{2}x) \right) dx =$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(x^2 + x + \frac{1}{4} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = -\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24} u^2$$

$$\text{Area Total} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} u^2$$

38. Ejercicio

a) Hallar el area del triangulo formado por el eje X y las rectas tangente y normales a la curva

$y = e^{-x}$ en el punto de abscisas $x = -1$

b) Halla el area de la region limitada por la curva $y = e^{-x}$ y el eje X para valores $-1 \leq x \leq 0$.

Solución

$y = e^{-x}$ Hallamos la derivada = m (pendiente de la tangente a la curva)

$y' = -e^{-x}$; m en el punto $x = -1 \Rightarrow m' = -e^1$;

Punto de tangencia en $x = -1$; $y = e^1$; $(-1, e)$

recta tangente $y - e = -e(x - (-1))$; $y = -ex$

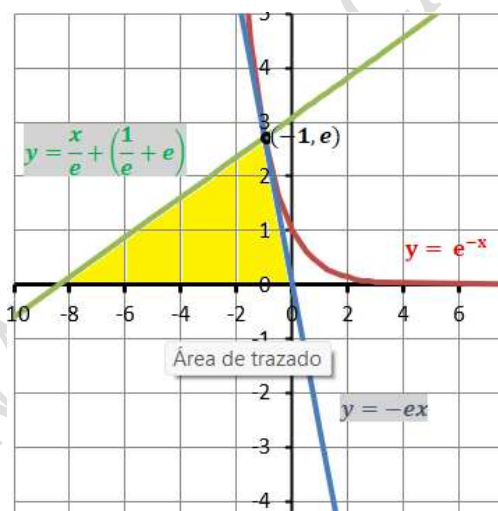
Punto donde corta la recta $y = -ex$ al eje X $\Rightarrow 0 = -ex$; $(0,0)$

recta normal a la funcion en $(-1, e) \Rightarrow y - e = \frac{1}{e}(x - (-1))$; $y = \frac{x}{e} + (\frac{1}{e} + e)$

Punto donde corta la recta $y = \frac{x}{e} + (\frac{1}{e} + e)$ al eje X $\Rightarrow 0 = \frac{x}{e} + (\frac{1}{e} + e)$

$x = -1 - e^2 = -8,389$; $(-8,389,0)$

x	Y	Tag	Nor
-1,5	4,482	4,077	2,534
-1	2,718	2,718	2,718
-0,5	1,649	1,359	2,902
0	1	0	3,086
0,5	0,607	-1,36	3,27
0,75	0,472	-2,04	3,362
1	0,368	-2,72	3,454
1,25	0,287	-3,4	3,546
1,5	0,223	-4,08	3,638
1,75	0,174	-4,76	3,73
2	0,135	-5,44	3,822



$$\text{Area del triangulo} = \frac{|(-1 - e^2) * e|}{2} = 11,4019 \text{ u}^2$$

b) Halla el area de la region limitada por la curva $y = e^{-x}$ y el eje X para valores $-1 \leq x \leq 0$.

$$\text{Area} = \int_{-1}^0 e^{-x} dx = \left[-\frac{1}{e^x} \right]_{-1}^0 = \left(-\frac{1}{e^0} - \left(-\frac{1}{e^{-1}} \right) \right) = (-1 + e) \text{ u}^2$$

39. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ calcula el área acotada por la función $f(x)$ y el eje X

Solución

Comprobamos donde corta la función al eje X; $0 = \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{12}; x = -2\sqrt{3}$ y $x = 2\sqrt{3}$,

Calculamos valores de la función entre $(-4$ y $4)$

Como la gráfica es simétrica

Calculamos el área de

desde $(-2\sqrt{3}$ a $0)$

$$\text{Area} = - \int_{-2\sqrt{3}}^0 \left(\frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} \right) dx$$

dividimos

$$- \int_{-2\sqrt{3}}^0 \left(1 + \frac{-16}{x^2 + 4} \right) dx =$$

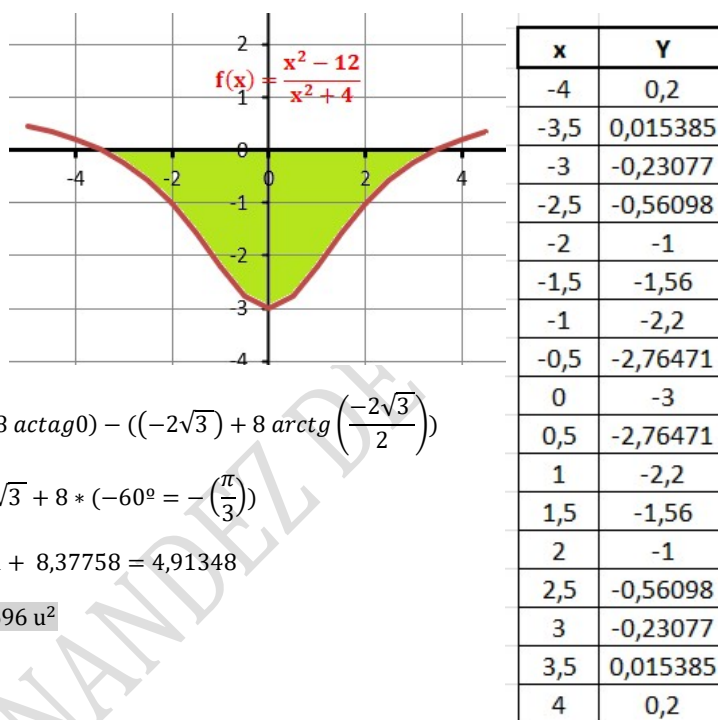
$$- \int_{-2\sqrt{3}}^0 \left(1 + \frac{16}{x^2 + 4} \right) dx =$$

$$- \left[x + 8 \arctg \left(\frac{x}{2} \right) \right]_{-2\sqrt{3}}^0 = -((0 - 8 \arctg 0) - ((-2\sqrt{3}) + 8 \arctg \left(\frac{-2\sqrt{3}}{2} \right)))$$

$$= -(2\sqrt{3} + 8 * \arctg(-\sqrt{3})) = 2\sqrt{3} + 8 * (-60^\circ = -(\frac{\pi}{3}))$$

$$\text{Area} = -(2\sqrt{3} - 8 \frac{\pi}{3}) = -3,4641 + 8,37758 = 4,91348$$

$$\text{Area Total} = 2 * 4,91348 = 9,82696 \text{ u}^2$$



40. Ejercicio

a) Halla la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto $x = -1$.

b) Dibuja en recinto delimitado por la tangente y la curva y halla el área

Solución

Hallamos puntos de corte con los ejes;

$$\begin{cases} y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 - 3x = x(x^2 - 3); x = 0; x = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3} \\ x = 0; y = 0; \end{cases}$$

Puntos de corte $(0,0); (\sqrt{3},0); (-\sqrt{3},0)$

Hallamos pendiente de la tangente a $y = x^3 - 3x \Rightarrow$

$$3x^2 - 3 = m;$$

Habrà un máximo o mínimo en $m = 0$; $3x^2 - 3 = 0$; $x = 1$ y $x = -1$;

Damos valores próximos a $x = 1$ y $x = -1$

Puntos $(1, -2)$ mínimo y $(-1, 2)$ máximo

Hallamos recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto $x = -1$

$$y - 2 = (x - (-1))m \Rightarrow -2 = (x + 1)(3(-1)^2 - 3); y - 2 = (x + 1)(3 - 3); \text{Tangente } y = 2$$

x	Y	
-1,5	1,125	
-1,25	1,79688	
-1	2	Maximo
-0,75	1,82813	
-0,5	1,375	
-0,25	0,73438	
0	0	
0,25	-0,7344	
0,5	-1,375	
0,75	-1,8281	
1	-2	Minimo
1,25	-1,7969	
1,5	-1,125	

b) Dibuja en recinto delimitado por la tangente y la curva y halla el área

Puntos donde corta la curva a la tangente:

$$y = x^3 - 3x = y = 2; x^3 - 3x = 2; \text{conocemos un punto}$$

pues es tangente a la curva en $x(-1,2)$

$$x^3 - 3x - 2 = 0;$$

$$\text{dividimos } \Rightarrow \frac{(x^3 - 3x - 2)}{(x + 1)} = (x^2 - x - 2);$$

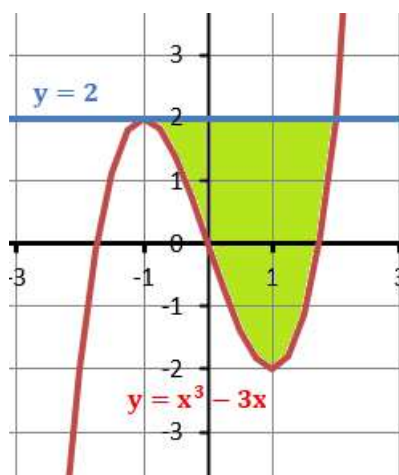
$$x^2 - x - 2 = 0; x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}; x = 2; x = -1$$

$$\text{Area} = \int_{-1}^2 (2 - (x^3 - 3x)) dx =$$

$$\int_{-1}^2 (2 - x^3 + 3x) dx = \left[2x - \frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{3} \right]_{-1}^2 = \left[2x - \frac{x^3}{4} + x^2 \right]_{-1}^2$$

$$\left(2 * 2 - \frac{2^3}{4} + 2^2 \right) - \left(2(-1) - \frac{(-1)^3}{4} + (-1)^2 \right) = \left(4 - \frac{8}{4} + 4 \right) - \left(-2 - \frac{-1}{4} + 1 \right)$$

$$\text{Area} = \int_{-1}^2 (2 - (x^3 - 3x)) dx = 6 + \frac{3}{4} = \frac{27}{4} u^2$$



7 Volúmenes

La integral definida puede utilizarse para calcular volúmenes de sólidos, siempre que tengamos una sección transversal conocida

$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x) dx; \text{siendo } A(x) \text{ una sección transversal del cuerpo}$$

41. Ejercicio

Calcula el volumen de un sólido cuya base es un círculo de radio 1 y las secciones transversales perpendiculares a la base son triángulos equiláteros

Solución

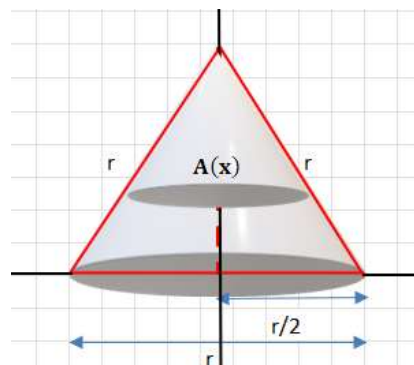
Si el corte transversal es un triángulo equilátero, todos los lados del triángulo mediran $r = 1$;

$$\text{altura del triángulo: } h^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2; h = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

$$\text{Area del triángulo equilátero} = \frac{r * \frac{\sqrt{3}}{2} r}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

La ecuación del círculo $y^2 + x^2 = r^2 = 1^2$; centrado en el origen $y = \sqrt{1 - x^2}$;

la longitud del lado del triángulo equilátero $= 2y = 2\sqrt{1 - x^2}$



El Area de la seccion transversal (superficie menor)

Area del triangulo equilatero $\frac{\sqrt{3}}{4} r^2$ sustituimos $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{1-x^2})^2 = \sqrt{3}(1-x^2)$

$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x)dx = \int_{-1}^1 \sqrt{3}(1-x^2)dx = \int_{-1}^1 \sqrt{3}dx - \int_{-1}^1 \sqrt{3}(x^2)dx = \left[\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}(x^3)}{3} \right]_{-1}^1$$

$$\sqrt{3} * 1 - \frac{\sqrt{3} * 1^3}{3} - \left(\sqrt{3} * (-1) - \frac{\sqrt{3}(-1)^3}{3} \right) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2,3094$$

Volumen del solido = 2,3094 u³

42. Ejercicio

Demostrar mediante integrales que el volumen de una piramide de base cuadrada de lado L y altura h

es igual area de la base * altura dividido por 3 = $\frac{l^2 * h}{3}$

Solucion

Si cortamos el prisma transversalmente por el punto

x, nos daría una superficie cuadrada de lado l(x) y $A(x) = (l(x))^2$

Si dibujamos el triangulo en rojo por el metodo de semejanza de triangulos podremos determinar

$$\frac{h}{h(x)} = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{l(x)}{2}} \Rightarrow \frac{h}{h(x)} = \frac{L}{l(x)}; l(x) = \frac{L * h(x)}{h}; \text{ con lo que ya}$$

tenemos el lado del area transversal en funcion de h(x) y los datos que nos han dado

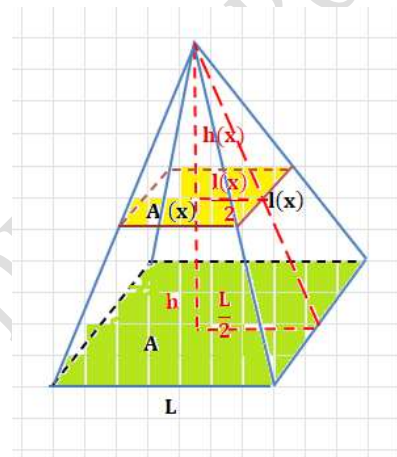
$$\text{El Area de la base transversal} = (l(x))^2; \text{ sustituimos } \Rightarrow A(x) = \left(\frac{L * h(x)}{h} \right)^2 = \frac{L^2 * h(x)^2}{h^2}$$

$\text{Volumen} = \int_a^b A(x)dx$ = los limites de integracion serán los distintos cortes transversales que podriamos hacer e irian desde 0 (vertice) hasta h (la base)

$$\text{Volumen} = \int_0^h \frac{L^2 * h(x)^2}{h^2} L y h \text{ son valores numericos } \Rightarrow \frac{L^2}{h^2} \int_0^h h(x)^2 dx = \frac{L^2}{h^2} \left[\frac{h(x)^3}{3} \right]_0^h =$$

$$\text{Volumen} = \frac{L^2}{3h^2} h^3 - \frac{L^2}{3h^2} * 0 = \frac{L^2}{3} h = \frac{L^2 * h}{3}$$

$$\text{Volumen de la piramide de base cuadrada} = \frac{L^2 * h}{3} u^3$$



7.1 Volúmenes de solidos de revolución

Los solidos de revolucion son solidos que se generan al girar una region plana alrededor de una recta eje de revolucion. Con lo que cada seccion transversal es un círculo de area $= \pi r^2$

$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx;$$

43. Ejercicio

Halla el volumen del cuerpo que se forma al girar la region bajo la grafica $y = 1 + \cos x$ entre $[0, 2\pi]$

Solución

$$\text{Volumen} = \int_a^b \pi \int_0^{2\pi} A(x) dx = \pi \int_0^{2\pi} (1 + \cos x)^2 dx;$$

$$\pi \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos x + (\cos x)^2) dx =;$$

$$\pi [x + 2(-\sin x)]_0^{2\pi} + \pi \int_0^{2\pi} (\cos x)^2 dx;$$

Aplicamos razon trigonometrica

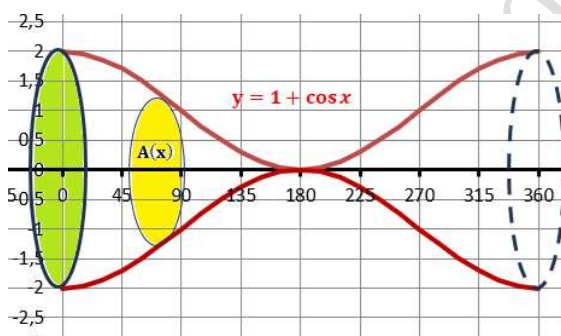
$$(\cos x)^2 = \frac{1 + \cos 2x}{2} \Rightarrow$$

$$\int (\cos x)^2 dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\pi \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos x + (\cos x)^2) dx = \pi \left[x + 2(\sin x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{2\pi} = \pi \left[\frac{3}{2}x + 2\sin x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{2\pi}$$

$$\pi \left(\frac{3}{2} 2\pi + 2\sin(2\pi) + \frac{1}{4} \sin 2(2\pi) \right) = \pi(3\pi + 0 + 0) = 3\pi^2$$

$$\pi \int_0^{2\pi} (1 + \cos x)^2 dx = 3\pi^2$$



44. Ejercicio

Halla el volumen del cuerpo S de base la region (x, y) tal que $x^2 \leq y \leq 1$; cuyas secciones transversales perpendiculares a la base son cuadradas

Solución

Los valores de y que cumplen esa comndicion son los sombreados. Los limites serán $x = -1$ y $x = 1$;

Los limites serán $y = 0$ e $y = 1$;

El valor máximo sera en $y = 1$ y el minimo en $y = 0$

Para un valor cualquiera de $y \Rightarrow x = \sqrt{y}$;

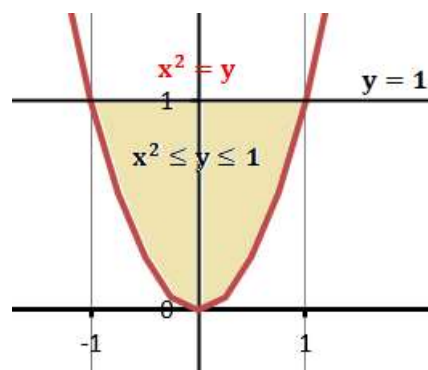
El lado de la seccion transversal estara entre $x = \pm\sqrt{y}$

Lado del cuadrado de $A(x) = \sqrt{y} - (-\sqrt{y}) = 2\sqrt{y}$;

El area $A(x) = 2\sqrt{y} * 2\sqrt{y} = 4y$

$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x) dx; \int_0^1 4y = \left[\frac{4y^2}{2} \right]_0^1 = [2y^2]_0^1 = 2 u^3$$

$$\text{Volumen del cuerpo S} = 2 u^3$$



45. Ejercicio

Halla el volumen engendrado por la region plana definida por el eje X, la curva $y = e^{-x}$; el eje Y y la recta $x = 3$, al girar alrededor del eje X

Solución

Los limites estan definidos por eje X y $x = 3$;

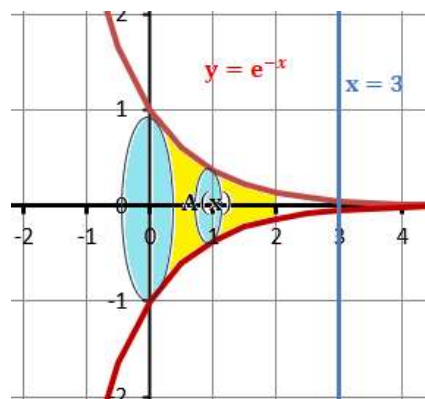
Los limites son (0,3)

$$\text{Volumen} = \pi \int_0^3 (e^{-x})^2 dx = \pi \int_0^3 e^{-2x} dx =$$

$$\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^3 = -\frac{1}{2} \pi (e^{-2 \cdot 3} - e^{-0}) = -\frac{1}{2} \pi (e^{-6} - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \pi (1 - e^{-6})$$

$$\text{Volumen del cuerpo } S = \frac{1}{2} \pi (1 - e^{-6}) u^3$$



46. Ejercicio

Determina el volumen generado al girar respecto al eje de abscisas la region acotada por las funciones

$f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$;

Solución

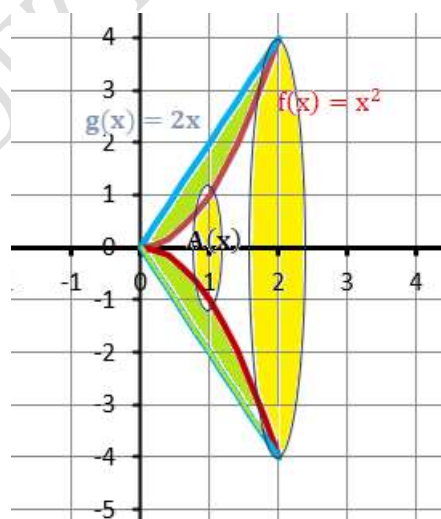
Los limites lo determinan los puntos de corte de las funciones; $x^2 = 2x$; $x = 2$; $y = 0$;

$$\text{Volumen} = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx =$$

$$\pi \int_0^2 (x^4 + 4x^2 - 4x^3) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} - \frac{4x^4}{4} \right]_0^2 =$$

$$\pi \left(\frac{2^5}{5} + \frac{4 \cdot 2^3}{3} - 2^4 \right) = \pi \left(\frac{32}{5} + \frac{32}{3} - 16 \right) = \pi \left(\frac{16}{15} \right)$$

$$\text{Volumen} = \pi \left(\frac{16}{15} \right) u^3$$



7.2 Longitudes de arcos

La longitud del arco formado por una grafica $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ viene de finida por:

$$\text{Longitud del arco} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

47. Ejercicio

Halla la longitud de la catenaria

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ entre } x = 0 \text{ y } x = 1;$$

Solución

$$\text{Longitud del arco} = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\text{Longitud del arco} = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}\right)^2} \, dx$$

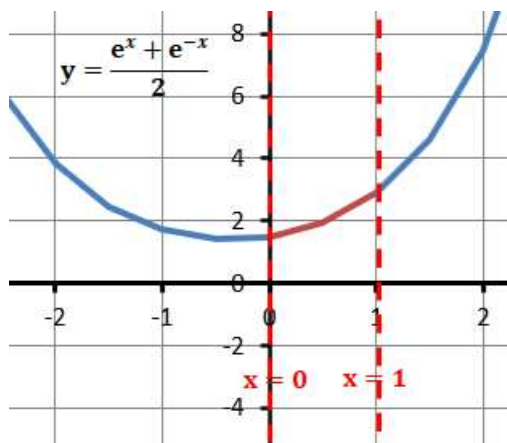
$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x * e^{-x})} = \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4 + (e^{2x} + e^{-2x} - 2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(e^{2x} + e^{-2x} + 2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}\right)^2} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \, dx = \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{2}((e^1 - e^{-1}) - (e^0 - e^{-0})) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(e - \frac{1}{e}\right) - (1 - 1)\right) = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

$$\text{Longitud del arco} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$



48. Ejercicio

Dibuja la grafica de la funcion $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 9$;

y halla la longitud de la curva entre

$$x = 1 \text{ y } x = 27$$

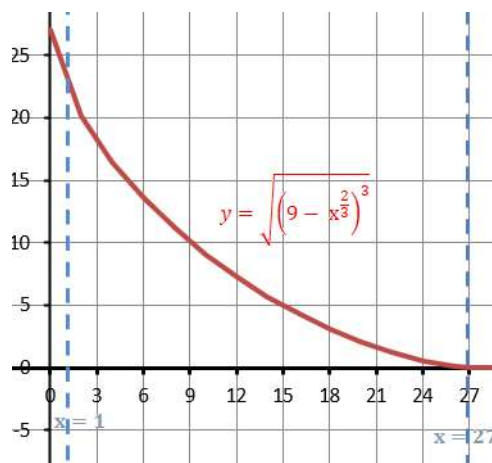
Solución

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 9; y^{\frac{2}{3}} = 9 - x^{\frac{2}{3}}; y = \sqrt[3]{\left(9 - x^{\frac{2}{3}}\right)^3} =$$

$$y = \sqrt{\left(9 - x^{\frac{2}{3}}\right)^3} = \left(9 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = \frac{3}{2}\left(9 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$y' = -\left(9 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{1/2}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)$$



$$y'(x)^2 = \left(9 - x^{\frac{2}{3}}\right) \left(x^{-\frac{2}{3}}\right) = 9x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} * x^{-\frac{2}{3}} = 9x^{-\frac{2}{3}} - 1$$

$$\text{Longitud del arco} = \int_1^{27} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \text{ sustituimos} = \int_1^{27} \sqrt{1 + 9x^{-\frac{2}{3}} - 1} dx = \int_1^{27} \sqrt{9x^{-\frac{2}{3}}} dx =$$

$$\int_1^{27} 3x^{-\frac{1}{3}} dx = 3 \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_1^{27} = \int_1^{27} 3x^{-\frac{1}{3}} dx = 3 \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_1^{27} = \left[\frac{9}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_1^{27} = \frac{9}{2} 27^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{2} 1^{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2} * 9 - \frac{9}{2} = \frac{72}{2} = 36u$$

$$\text{Longitud del arco} = \int_1^{27} \sqrt{1 + \left(-9x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\right)^2} dx = 36u$$

8 Otras aplicaciones de las integrales

49. Ejercicio

La desidad de coches $p(x)$ (coches por Km) en los primeros 20 km de autovia de salida de una gran ciudad viene dada por la funcion $p(x) = 300(2 + \text{sen } 4\sqrt{x+0,15})$, siendo x la distancia en km al comienzo de la autovía.

a) Calcula el numero total de coches en los 20km .

Solución

$$\int_0^{20} (300(2 + \text{sen } 4\sqrt{x+0,15}) dx) = \int_0^{20} (600 + 300\text{sen } 4\sqrt{x+0,15}) dx =$$

$$\int_0^{20} 600 dx + \int_0^{20} 300\text{sen } 4\sqrt{x+0,15} dx = \int_0^{20} 600 dx + 300 \int_0^{20} \text{sen } 4\sqrt{x+0,15} dx;$$

$$[600x]_0^{20} + 300 \int_0^{20} \text{sen } 4\sqrt{x+0,15} dx = 12000 + 300 \int_0^{20} \text{sen } 4\sqrt{x+0,15} dx =$$

$$\text{hacemos un cambio de variable para calcular } \int_0^{20} \text{sen } 4\sqrt{x+0,15} dx; \begin{cases} \sqrt{x+0,15} = t \\ dx = 2tdt \end{cases}$$

$$\int \text{sen } 4t * 2tdt = \int 2t \text{sen } 4t dt = \text{hacemos integracion por partes}$$

$$\begin{cases} 2t = u; 2dt = du; \\ \text{sen } 4t dt = dv; -\frac{\cos 4t}{4} = v \end{cases};$$

$$\int 2t \text{sen } 4t dt = 2t * -\frac{\cos 4t}{4} - \int -\frac{\cos 4t}{4} * 2 dt = -\frac{t \cos 4t}{2} + \int \frac{\cos 4t}{2} dt = -\frac{t \cos 4t}{2} + \frac{1}{2} \frac{\text{sen } 4t}{4}$$

$$= -\frac{t \cos 4t}{2} + \frac{\text{sen } 4t}{8} = \text{deshacemos el cambio de variable} \Rightarrow$$

$$-\frac{\sqrt{x+0,15} \cos 4\sqrt{x+0,15}}{2} + \frac{\text{sen } 4\sqrt{x+0,15}}{8} \Rightarrow$$

$$300 \int_0^{20} \text{sen } 4\sqrt{x+0,15} dx = 12000 + 300 \left[-\frac{\sqrt{x+0,15} \cos 4\sqrt{x+0,15}}{2} + \frac{\text{sen } 4\sqrt{x+0,15}}{8} \right]_0^{20}$$

$$300 \left(-\frac{\sqrt{20+0,15} \cos 4\sqrt{20+0,15}}{2} + \frac{\text{sen } 4\sqrt{20+0,15}}{8} - \left(-\frac{\sqrt{0+0,15} \cos 4\sqrt{0+0,15}}{2} + \frac{\text{sen } 4\sqrt{0+0,15}}{8} \right) \right) =$$

$$\text{Numero de coches} = 12000 + 372 = 12372 \text{ coches}$$

50. Ejercicio

Una típica ciudad, está muy poblada cerca del centro, pero su población decrece cuando nos alejamos de él. En efecto su densidad de población es $10000(3-r) \cdot \frac{\text{habitantes}}{\text{km}^2}$.

Siendo r la distancia al centro en km

a) Si la densidad de población en los confines de la ciudad es 0. ¿Cual es el radio de la zona en la que viven?

b) Cual es la población de la ciudad

Solución

a) Como la densidad de población en los confines es 0 $\Rightarrow 10000(3-r) = 0$; $r = 3$ Km

b) El area de cada corona será $= \pi((r+dr)^2 - r^2) =$

$$\pi(r^2 + dr^2 + 2rdr - r^2) = \pi(dr^2 + 2rdr) = \pi(dr)^2 + 2\pi * r * dr$$

Dado que $\pi(dr)^2$ es muy pequeño respecto al otro termino

El area de cada corona $= 2\pi * r * dr$

$$\text{La población de la ciudad} = \int_0^3 2\pi r (10000(3-r)) dr =$$

$$\int_0^3 20000\pi(3r - r^2) dr = 20000\pi \int_0^3 (3r - r^2) dr = 20000\pi \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^3$$

$$= 20000\pi \left(\frac{3 * 3^2}{2} - \frac{3^3}{3} \right) - 20000\pi \left(\frac{3 * 0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right) = 20000\pi \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3} \right) = 20000\pi \frac{27}{6};$$

$$\text{Población de la ciudad} = 282.743,3388 \text{ habitantes} = 282.743$$

