

Números Reales

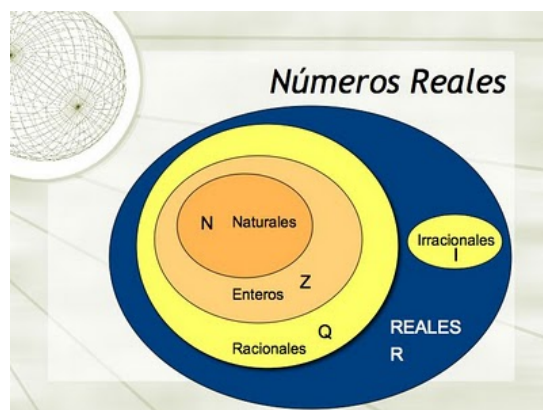
INDICE

Contenido

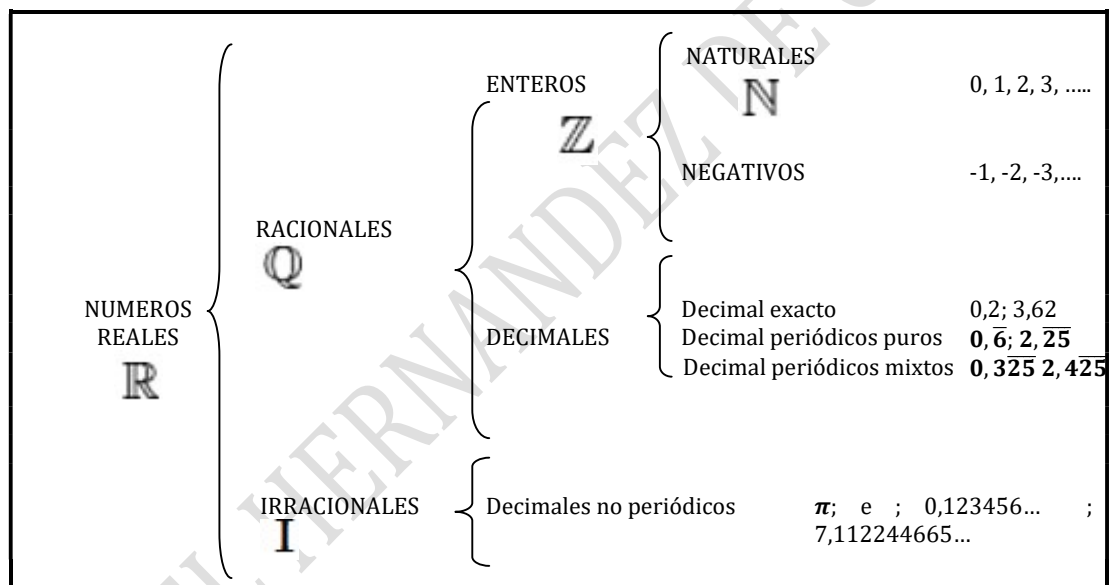
1	NUMEROS REALES.....	3
1.1	PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES	3
2	NÚMEROS RACIONALES	4
2.1	EXPRESIONES DECIMALES Y FRACCIONARIAS	5
2.1.1	<i>Paso de fracciones a decimal.....</i>	5
2.1.2	<i>Paso de decimal a fracción</i>	5
3	NÚMEROS IRRACIONALES.....	6
4	APROXIMACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES	6
4.1	ERRORES DE APROXIMACIÓN.....	7
5	REPRESENTACIÓN EN LA RECTA DE LOS NÚMEROS REALES	8
5.1	REPRESENTACIÓN NÚMEROS ENTEROS	8
5.2	REPRESENTACIÓN NÚMEROS RACIONALES.....	8
5.3	REPRESENTACIÓN NÚMEROS IRACIONALES	9
6	VALOR ABSOLUTO.....	10
6.1	PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO	10
6.2	DESIGUALDADES CON UN VALOR ABSOLUTO.....	12
7	INTERVALOS, ENTORNOS Y SEMIRRECTAS.....	13
7.1	OPERACIÓN DE DOS INTERVALOS.....	16
7.1.1	<i>Sumas y restas</i>	16
7.1.2	<i>Unión e intersección de intervalos.....</i>	17
8	NOTACIÓN CIENTÍFICA	18
8.1	OPERACIONES CON NOTACIONES CIENTÍFICAS	18
9	RADICALES	19
9.1	RELACIÓN ENTRE POTENCIAS Y RAÍCES	19

9.2	EXTRACCIÓN E INTRODUCCIÓN DE FACTORES EN UN RADICAL	21
10	RACIONALIZACIÓN	23
10.1	DENOMINADOR CON UN RADICAL.....	23
10.2	EL DENOMINADOR ES UN BINOMIO.....	24
11	NÚMEROS COMBINATORIOS (BINOMIO DE NEWTON)	35
11.1	FACTORIAL DE UN NÚMERO	35
	COMO DISTINGUIR: PERMUTACIONES, VARIACIONES, COMBINACIONES.....	35
12	COMBINACIONES.....	36
12.1	NUMERO COMBINATORIO	36
12.1.1	<i>Propiedades de los números combinatorios.....</i>	<i>36</i>
13	BINOMIO DE NEWTON	39
14	LOGARITMOS:	41
14.1	PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS.....	41
15	APLICACIONES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES.....	45
15.1	CRECIMIENTO EXPONENCIAL.....	45
15.2	INTERÉS COMPUESTO.....	45

1 NÚMEROS REALES



El conjunto de los **números reales** (denotado por $\mathbb{R}$) incluye tanto a los números racionales, (positivos, negativos y el cero) como a los números irracionales;



1.1 Propiedades de los números reales

Propiedades	Suma	Multipliación
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a * b) * c = a * (b * c)$
Elemento Neutro	Es el 0 $a + 0 = a$	Es el 1 $a * 1 = a$
Elemento opuesto o inverso	$a + (-a) = a - a = 0$	$a * \left(\frac{1}{a}\right) = \frac{a}{a} = 1$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a * b = b * a$
Distributiva	$a * (b + c) = a * b + a * c$	

Para sacar factor común nos basamos en la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

1. Números Reales

Sacar factor común y realizar las operaciones

$$\frac{1}{5} * \frac{4}{7} + \frac{1}{5} * \frac{3}{4}$$

Solución

$$\frac{1}{5} * \frac{4}{7} + \frac{1}{5} * \frac{3}{4} = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{7} + \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{16}{28} + \frac{21}{28} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{16+21}{28} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{37}{28} \right) = \frac{37}{140}$$

2. Números Reales

Sacar factor común y realiza las operaciones

$$\frac{2}{5} * \frac{1}{3} - \frac{1}{3} * 4 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{7} \right) - \frac{3}{4} * \frac{1}{3}$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} * \frac{1}{3} - \frac{1}{3} * 4 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{7} \right) - \frac{3}{4} * \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} - 4 + \frac{2}{7} - \frac{3}{4} \right) = \\ \frac{1}{3} \left(\frac{56}{5} - \frac{560}{7} + \frac{40}{7} - \frac{105}{4} \right) &= \frac{1}{3} \left(\frac{56 - 560 + 40 - 105}{140} \right) = -\frac{569}{140} = -\frac{569}{140} \end{aligned}$$

3. Números Reales

Sacar factor común y realiza las operaciones

Solución

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} * 5 - 5 * 4 + 5 * \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{6} * 5 - 5 * 4 + 5 * \frac{1}{3} &= 5 \left(\frac{1}{6} - 4 + \frac{1}{3} \right) = 5 \left(\frac{1}{6} - 4 + \frac{1}{3} \right) = \\ 5 \left(\frac{1 - 24 + 2}{6} \right) &= -\frac{21}{6} = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

2 Números racionales

Los números racionales se caracterizan porque pueden obtenerse como cociente de dos números enteros

Se denominan números racionales (designados por $\mathbb{Q}$) a todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros (fracción).

Fracción $\frac{a}{b}$; siendo b distinto de 0

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes o iguales si se cumple

$a * d = b * c$ y puede representarse como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

2.1 Expresiones decimales y fraccionarias

2.1.1 Paso de fracciones a decimal

Para pasar de fracción a decimal se divide el numerador entre el denominador

Numeros decimales	Ejemplo	Parte decimal	Criterios para ver el tipo de decimal que genera una fraccion
<i>Exacto</i>	0,23	Tiene un número ilimitado de cifras	Los únicos divisores del denominador son el 2 o el 5 4/5 ; 7/4,
<i>Periódico puro</i>	2,454545....	Una o varias cifras se repiten indefinidamente (periodo)	El 2 o el 5 no son divisores del denominador 5/3, 6/7
<i>Periódico mixto</i>	7,369999...	Una o varias no se repiten (anteperiodo) y están seguidas de un grupo de cifras que se repiten indefinidamente (periodo)	El denominador además de tener como divisores el 2 o el 5 tiene otros. 5/6 , 8/15

2.1.2 Paso de decimal a fracción

- Decimal exacto

Se pone en el denominador el número entero sin coma y en el denominador el 1 seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal

$$4,25 = \frac{420}{100} \text{ y simplificamos la fracción. Hallamos el m. c. d} = 20 \Rightarrow \frac{21}{5}$$

- Decimal periódico puro

$$3,777777 = 3,\overline{7}$$

$$4,252525 = 4,\overline{25}$$

numero completo sin coma – **numero formado por la parte entera**
tantos 9 como cifras tenga el periodo

$$3,7777 \Rightarrow \frac{37 - 3}{9} = \frac{34}{9}$$

$$4,252525 \Rightarrow \frac{425 - 4}{99} = \frac{421}{99}$$

- Decimal periódico mixto

$$4,1225252525 = 4,1\overline{225}$$

$$0,22578787878 = 0,\overline{225}787$$

numero completo sin coma – **numero formado por la parte entera y el anteperiodo**
tantos 9 como cifras tenga el periodo y tantos 0 como cifras tenga el anteperiodo

$$0,22578787878 \Rightarrow \frac{22578 - 225}{99000} = \frac{22353}{99000}$$

Fracción generatriz de un número decimal es la fracción irreducible tal que al dividir el numerador por el denominador nos da el número decimal

4. Números Reales (Racionales)

Halla la fracción generatriz de los siguientes números

a) $3,25$ b) $3,2\overline{5}$ c) $3,\overline{25}$

Solución

$$a) = \frac{325}{100} \quad b) \frac{325 - 32}{90} = \frac{293}{90} \quad c) \frac{325 - 3}{99} = \frac{322}{99}$$

5. Números Reales (Racionales)

Halla la fracción generatriz de los siguientes números

b) $0,025$ b) $0,2\overline{35}$ c) $0,00\overline{235}$

Solución

$$a) = \frac{25}{1000} \quad b) \frac{235 - 2}{990} = \frac{233}{990} \quad c) \frac{235}{99900} = \frac{47}{19980}$$

6. Números Reales (Racionales)

Opera utilizando las fracciones generatrices

a) $1,2 + 2,\overline{3}$ b) $3,\overline{45} + 4,2\overline{68}$

Solución

$$a) \frac{12}{10} + \frac{23 - 2}{9} = \frac{12}{10} + \frac{21}{9} = \frac{108 + 210}{90} = \frac{318}{90} = \frac{53}{15} = 3,53333$$

$$b) \frac{345 - 3}{99} + \frac{4268 - 42}{990} = \frac{3420 + 4226}{990} = \frac{7646}{990} = \frac{3823}{495} = 7,7232323$$

3 Números irracionales

Un número irracional es un número que no puede ser expresado como una fracción

$\frac{m}{n}$ donde m y n sean enteros y n sea distinto de cero.

Ejemplo de números irracionales: $\pi = 3,14\ 159...; e = 2,7182...; \sqrt{7} = 2,645751...$

4 Aproximación de los números reales

Dado que los números decimales pueden tener infinitas cifras con la aproximación lo que buscamos es reducirlo a un número decimal exacto cuyo valor sea muy cercano al valor real.

- Aproximación por defecto o truncamiento $\sqrt{5} = 2,23606797749979$**

2,2 2,23 2,236 2,236 2,23606 2,236067

- Aproximación por exceso $\sqrt{5} = 2,23606797749979$**

2,3 2,24 2,237 2,2361 2,23607 2,236068

- Aproximación por redondeo $\sqrt{5} = 2,23606797749979$**

Si la primera cifra suprimida es < 5 aplicamos la aproximación por defecto.

Si la primera cifra suprimida es ≥ 5 aplicamos la aproximación por exceso

2,2 2,24 2,236 2,2361 2,23607 2,236068

1. Números Reales (irracionales)

Resuelve las siguientes operaciones con aproximación a las milésimas por defecto, exceso y redondeo

a) $\sqrt{11} + \sqrt{3}$; b) $\sqrt{5} * \sqrt{12}$;

Solución

a)

	$\sqrt{11}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{11} + \sqrt{3}$
Aproximación	3,31662479	1,73205081	
Por defecto	3,316	1,732	5,048
Por exceso	3,317	1,733	5,050
Redondeo	3,317	1,732	5,049

b)

	$\sqrt{5}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{5} * \sqrt{12}$
Aproximación	2,23606798	3,46410162	
Por defecto	2,236	3,464	7,745504
Por exceso	2,237	3,465	7,751205
Redondeo	2,236	3,464	7,745504

4.1 Errores de aproximación

Siempre que hacemos una aproximación de un número cometemos un error

Error absoluto es la diferencia, en valor absoluto, entre el número y la aproximación elegida

El valor absoluto de un número es el número sin el signo y se expresa $|3|=3$ y $|-3|=3$

a) $\sqrt{5} = 2,23606797749979$ si elegimos 2,24 el error absoluto cometido es ;

$$|2,23606797749979 - 2,24| = 0,00393202250021$$

b) $\sqrt{5} = 2,23606797749979$ si elegimos 2,23 el error absoluto cometido es

$$|2,23606797749979 - 2,23| = 0,00606797749979$$

Error relativo es el cociente entre el error absoluto y el número real

a) $\frac{0,00393202250021}{2,23606797749979} = 0,00175845$

b) $\frac{0,00606797749979}{2,23606797749979} = 0,002713682$

7. Números Reales (errores)

Hallar el error absoluto y relativo que se produce cuando se toma 1,571 como aproximación de $\frac{11}{7}$.

$$\frac{11}{7} = 1,57142857142857$$

Error absoluto $|1,57142857142857 - 1,571| = 0,00042857142857$

Error relativo $\frac{0,00042857142857}{1,57142857142857} = 0,00027272727272$

8. Números Reales (errores)

Al medir una valla de un cercado de 20m hemos cometido un error de 20 cm y al medir otra de 50m hemos cometido un error de 24cm. ¿Cuál de los errores cometidos es mayor.

Solución

Para ver cual error es mayor calculamos el error relativo en los dos casos

$$1 \text{ caso Error relativo} = \frac{\text{error absoluto}}{\text{valor exacto}} \Rightarrow \frac{20 \text{ cm}}{2000 \text{ cm}} = 0,01$$

$$1 \text{ caso Error relativo} = \frac{\text{error absoluto}}{\text{valor exacto}} \Rightarrow \frac{24 \text{ cm}}{5000 \text{ cm}} = 0,0048$$

El error es mayor en el primer caso

9. Números Reales

Tenemos cuatro ciudades A,B,C y D. La distancia entre A y B distan una distancia de 48 km con un error de 200 m. La distancia entre C y D son 500 m con un error de 2,5 m . ¿Qué medida es la más adecuada?.

Error absoluto A y B 200 m

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{error absoluto}}{\text{valor exacto}} \Rightarrow \frac{200 \text{ m}}{48000 \text{ m}} = 0,004166666$$

Error absoluto C y D 2,5m

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{error absoluto}}{\text{valor exacto}} \Rightarrow \frac{2,5 \text{ m}}{500 \text{ m}} = 0,005$$

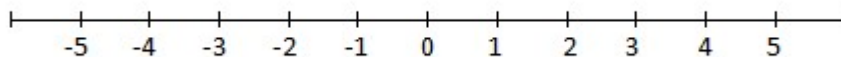
La precisión de la medida es mejor en la medida de la distancia de A y B

5 Representación en la recta de los números reales

A cada número real se le asocia un número en la recta y a cada punto de la recta se le asocia un número real

5.1 Representación números enteros

Sobre una recta que se divide en partes iguales se pueden representar todos los números reales Colocamos el 0 en el centro, a la derecha irán los números positivos y a la izquierda los negativos

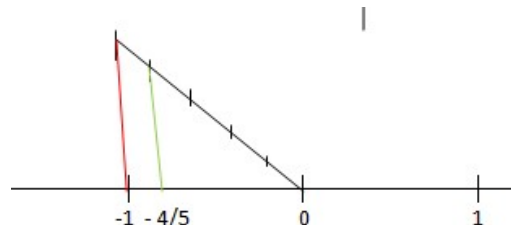


A cada número real le corresponde un punto de la recta por eso le llamamos recta real

5.2 Representación números racionales

Los números racionales van entre medias de dos números enteros. Para representar $(-4/5)$ está entre 0 y -1

Trazo un segmento con origen en 0 y lo divido en 5 partes iguales. Uno el extremo con el 1. Trazo una resta paralela desde el punto 4 y donde corta la recta es el punto $-4/5$.



5.3 Representación números irracionales

Numero e = 2,7182818284

Estará comprendido entre 3 y 4

Entre 3,1 y 3,2

Entre 3,14 y 3,15

Entre 3,141 y 3,142

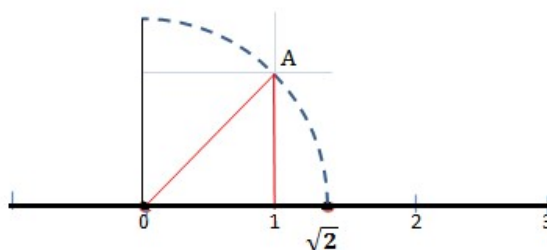


Numero Radicales $\sqrt{2} = 1,4142135$

Si aplicamos el teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de cada uno de los catetos.

Tomamos un cuadrado de lado la unidad y el tamaño de la diagonal o la hipotenusa (OA) que se forma es igual a $\sqrt{2}$. Con centro en 0 y radio OA trazamos un arco sobre la recta y nos da la posición de $\sqrt{2}$

La hipotenusa es igual a $a = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



10. Números Reales (Irracionales)

Representar en la recta $\sqrt{3}$

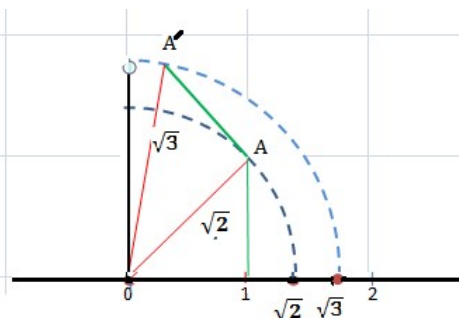
Solución

- Hallamos el valor de $\sqrt{2}$
- Formamos un triángulo rectángulo que tiene de base el valor de $\sqrt{2}$ y altura la unidad (1)
- Trazamos la hipotenusa (OA') cuya medida es igual a $\sqrt{3}$

La hipotenusa es igual

$$a = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$$

- Con centro en o y radio (OA') trazamos un arco sobre la recta y nos da el punto $\sqrt{3}$



11. Números Reales

Clasifica los siguientes números como naturales, enteros, racionales e irracionales

- 3,47 ; b) 2,03333 ... ; c) $\sqrt{16}$; d) $\sqrt[4]{5}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; f) $-\frac{4}{5}$; g) - 7;

Solución:

- 3,47 racional/real
- 2,03333 racional/real

- c) $\sqrt{16} = 4$ natural/entero/racional/real
 d) $\sqrt[4]{5}$ Irracional/real
 e) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ Irracional/real
 f) $-\frac{4}{5}$ racional/real
 g) -7 entero/racional/real

6 Valor absoluto

El valor absoluto de un número real es su valor numérico sin tener en cuenta su signo.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0; \\ x & \text{si } x \geq 0; \end{cases}$$

El valor absoluto de 3; $|3| = 3$; El valor absoluto de -3 ; $|-3| = 3$

Por definición, el valor absoluto de x siempre será mayor o igual que **cero** y nunca **negativo**.

6.1 Propiedades del valor absoluto

$|a| \geq 0$; para los numeros reales;

$|A * B| = |A| * |B|$; el valor absoluto de un producto de numeros reales es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

$|A + B| \leq |A| + |B|$; el valor absoluto de la suma de numeros reales es menor o igual que la suma de sus valores absolutos.

12. Números Reales (Valor Absoluto)

Calcular las siguientes operaciones

- a) $|-3|$; b) $|3|$; c) $|\sqrt{3}|$; d) $|\sqrt{3}|$; e) $|3| * |-3|$; f) $(4 * |-3|)$; g) $|2| + |-3|$
 h) $(4 + |-3|)$; i) $||2| - 4|$; j) $- ||2| - 4||$;

Solución

1. $|-3| = 3$;
2. $|3| = 3$;
3. $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$;
4. $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$;
5. $|3| * |-3| = 3 * 3 = 9$;
6. $(4 * |-3|) = 4 * 3 = 12$;
7. $|2| + |-3| = 2 + 3 = 5$;
8. $(4 + |-3|) = 4 + 3 = 7$;
9. $||2| - 4| = |2 - 4| = |-2| = 2$;
10. k) $- ||2| - 4|| = -|2 - 4| = -|-2| = -2$;

13. Números Reales (Valor absoluto)

Desarrolla y calcula la expresion $x + |x - 3|$ para vlores de $x = 0, x = -2, x = 3; x = 4$

Solución

$$x + |x - 3| = \begin{cases} x + (x - 3) & \text{si } (x - 3) \geq 0; \\ x - (x - 3) & \text{si } (x - 3) < 0; \end{cases} = \begin{cases} 2x - 3; & x \geq 3 \\ 3; & x < 3; \end{cases}$$

Para $x = 0$; x es $< 3 \Rightarrow x + |x - 3| = 3$; comprobacion $x + |x - 3| = 0 + |0 - 3| = 3$;
 Para $x = -2$; x es $< 3 \Rightarrow |x - 3| = 3$; comprobacion $x + |x - 3| = -2 + |-2 - 3| = 3$;

Para $x = 3$; $x \geq 3 \Rightarrow x + |x - 3| = 2x - 3 = 2 * 3 - 3 = 3$;
comprobacion $x + |x - 3| = 3 + |3 - 3| = 3$;

Para $x = 4$; $x \geq 3 \Rightarrow x + |x - 3| = 2x - 3 = 2 * 4 - 3 = 5$;
comprobacion $x + |x - 3| = 4 + |4 - 3| = 4 + 1 = 5$;

14. Números Reales (Valor Absoluto)

Desarrolla y calcula la expresion $|x + 2| = 5$;

$$|x + 2| = 5; \begin{cases} x + 2 = 5; & \text{si } x + 2 \geq 0; \\ -(x + 2) = 5; & \text{si } x + 2 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |x + 2| = 5; (x \geq -2) \quad x + 2 = 5, x = 3; \\ |x + 2| = 5; (x < -2) \quad -(x + 2) = 5; -x - 2 = 5; x = -7; \end{aligned}$$

15. Números Reales (valor Absoluto)

Desarrolla y calcula la expresion $2x - 3 + |x - 3|$ para viores de $x = 0, x = 4$;

$$2x - 3 + |x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 + (x - 3) & \text{si } (x - 3) \geq 0; \\ 2x - 3 - (x - 3) & \text{si } (x - 3) < 0; \end{cases} \begin{cases} 3x - 6; & x \geq 3 \\ x & x < 3 \end{cases}$$

Para $x = 0$; $x < 3 \Rightarrow 2x - 3 + |x - 3| = x = 0$; para $x = 0$;
comprobacion $2x - 3 + |x - 3| = 2 * 0 - 3 + |0 - 3| = 0 - 3 + 3 = 0$;

Para $x = 4$ $x \geq 3 \Rightarrow 2x - 3 + |x - 3| = 3x - 6 = 12 - 6 = 6$;
comprobacion $2x - 3 + |x - 3| = 2 * 4 - 3 + |4 - 3| = 8 - 3 + 1 = 6$;

16. Números Reales (Valor absoluto)

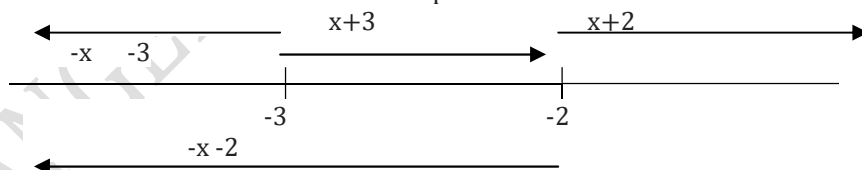
Desarrolla y calcula la expresion $|x + 2| + |x + 3|$

Se calculan por separado los dos valores absolutos que aparecen

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{si } (x + 2) \geq 0; \\ -(x + 2) & \text{si } (x + 2) < 0; \end{cases} \begin{cases} x + 2 & x \geq -2 \\ -x - 2 & x < -2 \end{cases}$$

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } (x + 3) \geq 0; \\ -(x + 3) & \text{si } (x + 3) < 0; \end{cases} \begin{cases} x + 3 & x \geq -3 \\ -x - 3 & x < -3 \end{cases}$$

Tendremos la recta dividida en tres partes



$$|x + 2| + |x + 3| = \begin{cases} -x - 2 - x - 3 & \text{si } x < -3; \\ x + 3 + x - 2 & \text{si } -3 < x < -2; \\ x + 3 + x + 2 & \text{si } x > -2; \end{cases} \begin{cases} -2x - 5; & \text{si } x < -3 \\ 1; & \text{si } -3 < x < -2 \\ 2x + 5; & \text{si } x > -2; \end{cases}$$

comprobacion para $x = -4$; $x < -3$

$$|x + 2| + |x + 3| = |-4 + 2| + |-4 + 3| = |-2| + |-1| = 2 + 1 = 3;$$

$$-2x - 5; -2(-4) - 5 = 3;$$

comprobacion para $x = -\frac{5}{2}$; $-3 < x < -2$

$$\begin{aligned} |x + 2| + |x + 3| &= \left| -\frac{5}{2} + 2 \right| + \left| -\frac{5}{2} + 3 \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1; \\ &= 1 \quad \text{si } -3 < x < -2 \end{aligned}$$

comprobación para $x = 1$; $x > -2$

$$|x + 2| + |x + 3| = |1 + 2| + |1 + 3| = |3| + |4| = 3 + 4 = 7;$$

$$2x + 5; 2 \cdot 1 + 5 = 2 + 5 = 7;$$

6.2 Desigualdades con un valor absoluto

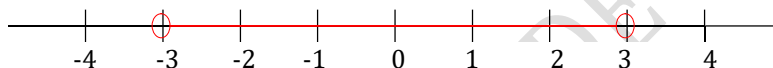
CASO	MODELO	SOLUCIÓN
1	$ a < b$	$-b < a < b$
2	$ a \leq b$	$-b \leq a \leq b$
3	$ a > b$	$a < -b \cup a > b$
4	$ a \geq b$	$a \leq -b \cup a \geq b$

1º caso

$|a| < b$; se ha de cumplir que $a < b$ y $-a < b \Rightarrow a > -b$; $-b < a < b$; $(-b, b)$

Ejemplo

$|x| < 3$; se ha de cumplir que $x < 3$; $-x < 3 \Rightarrow x > -3$; $-3 < x < 3$ $(-3, 3)$



2º caso

$|a| \leq b$; se ha de cumplir que $a \leq b$ y $-a \leq b \Rightarrow a \geq -b$; $-b \leq a \leq b$; $[-b, b]$

Ejemplo

$|x| \leq 3$; se ha de cumplir que $x \leq 3$; $-x \leq 3 \Rightarrow x \geq -3$; $-3 \leq x \leq 3$ $[-3, 3]$

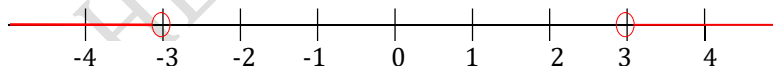


3º caso

$|a| > b$; se ha de cumplir que $a > b$ y $-a > b \Rightarrow a < -b$; $a < -b \cup a > b$;

Ejemplo

$|x| > 3$; se ha de cumplir que $x > 3$; $-x > 3 \Rightarrow x < -3$; $-3 > x \cup x > 3$

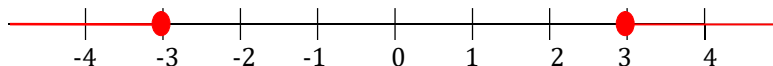


4º caso

$|a| \geq b$; se ha de cumplir que $a \geq b$ y $-a \geq b \Rightarrow a \leq -b$; $a \leq -b \cup a \geq b$;

Ejemplo

$|x| \geq 3$; se ha de cumplir que $x \geq 3$; $-x \geq 3 \Rightarrow x \leq -3$; $-3 \geq x \cup x \geq 3$



17. Números Reales (valor Absoluto)

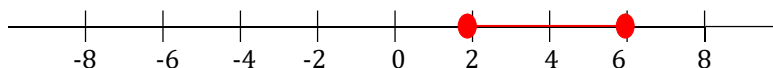
Determina y representa los valores de x que cumplen las siguiente relación

a) $|x - 4| \leq 2$; b) $|x - 4| > 2$

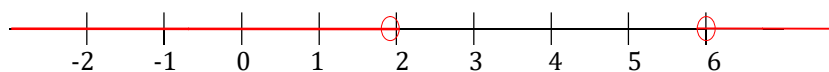
Solución

a) $|x - 4| \leq 2$; se ha de cumplir que $x - 4 \leq 2$; $x \leq 2 + 4$; $x \leq 6$;

$$y \quad -x + 4 \leq 2 \Rightarrow -x \leq 2 - 4; \quad -x \leq -2; \quad x \geq 2; \quad 2 \leq x \leq 6$$



b) $|x - 4| > 2$; se ha de cumplir $x - 4 > 2$; $x > 2 + 4$; $x > 6$;
 $-x + 4 > 2$; $-x > 2 - 4$; $-x > -2$; $x < 2$; $x < 2 \cup x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$



7 Intervalos, entornos y semirrectas.

Intervalos; Se llama intervalo al conjunto de números reales comprendidos entre otros dos dados, a y b que se llaman extremos del intervalo

Semirrectas: Es la parte de una recta conformada por todos los números mayores o menores que un número dado, dependiendo de que este incluido o no.

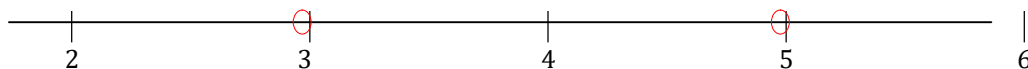
Intervalos y semirrectas		
Intervalo abierto (a, b)	$a < x < b$	
Intervalo cerrado $[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
Intervalo abierto por la izquierda $(a, b]$	$a < x \leq b$	
Intervalo abierto por la derecha $[a, b)$	$a \leq x < b$	
Semirrecta abierta positiva $(a, +\infty)$	$x > a$	
Semirrecta abierta negativa $(-\infty, b)$	$x < b$	
Semirrecta cerrada positiva $[a, +\infty)$	$x \geq a$	
Semirrecta cerrada negativa $(-\infty, b]$	$x \leq b$	

Entorno:

- **Entorno abierto** Es una forma de expresar los intervalos abiertos. Se define entorno de centro a y radio r, $E(a, r)$ al conjunto de números que están a una distancia de a menor que r
 $E(a, r) = (a - r, a + r)$

El entorno de centro 4 y radio 1 $E(4, 1)$ son el conjunto de números que están del centro 4

a una distancia menor de 1, serán los números $4-1$ (3) y $4+1$ (5) expresado en forma de intervalos $E(4, 1) = (3,5)$

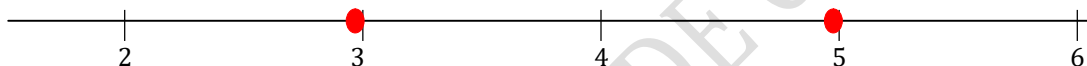


El intervalo (a, b) es el entorno $E\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$;

- **Entorno cerrado** Es una forma de expresar los intervalos cerrados. Se define entorno de centro a y radio r , $E[a, r]$ al conjunto de números que están a una distancia de a menor o igual que r

$$E[a, r] = [a - r, a + r]$$

El entorno de centro 4 y radio 1 $E[4, 1]$ son el conjunto de números que están del centro 4 a una distancia menor o igual que 1, serán los números $4-1$ (3) y $4+1$ (5) expresado en forma de intervalos $E[4, 1r] = [3,5]$



El intervalo $[a, b]$ es el entorno $E\left[\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$;

18. Números Reales (entornos e intervalos)

Expresa mediante intervalos el conjunto de números reales que cumplen:

- Son menores de $3/4$
- Son menores o iguales a -2
- Son mayores que 0
- Son mayores o iguales que $-2/5$

Solucion:

- $x < 3/4$; $(-\infty, 3/4)$
- $x \leq -2$; $(-\infty, -2]$
- $x > 0$; $(0, +\infty)$
- $x \geq -2/5$; $[-2/5, +\infty)$

19. Números Reales (entornos e intervalos)

Expresa como intervalo estos conjuntos

- $|x| < 3$
- $|x| < -3$
- $|x| \geq -3$

Solución:

- $(-3, 3)$
- Conjunto vacío
- Todo el conjunto de los números reales $\mathbb{R} (-\infty, +\infty)$

20. Números Reales (entornos e intervalos)

Escribe en forma de intervalo y representa sobre la recta real

- $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 3\}$; $\{x \in \mathbb{R}; x > 1\}$; $\{x \in \mathbb{R}; 4 \leq x < 7\}$; $\{x \in \mathbb{R}; 6 < x < 9\}$

Solución:

a) $(-\infty, 3]$ b) $(1, +\infty)$ c) $[4, 7)$ d) $(6, 9)$ **21. Números Reales**

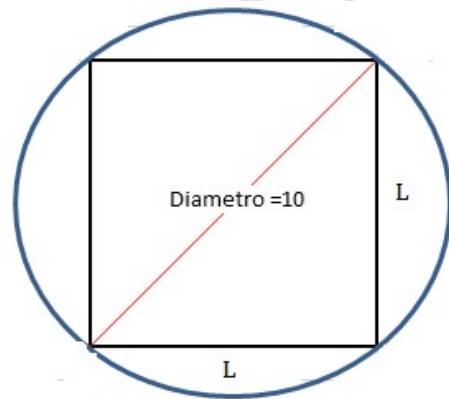
Calcula el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 5 cm. ¿El número obtenido es racional o irracional?

Solución:

Aplicando el teorema de Pitágoras

$$10^2 = L^2 + L^2 = 2L^2; L^2 = \frac{100}{2} = 50;$$

$$L = \sqrt{50} \text{ número irracional}$$

**22. Números Reales**

Halla la diagonal de un cuadrado de lado 8 cm.

Si construimos un cuadrado cuyo lado es esa diagonal ¿Cuál es el área del segundo cuadrado?

Solución

$$\text{Área del cuadrado del lado 8} \Rightarrow \text{área} = 8 * 8 = 64 \text{ cm}^2$$

$$\text{El valor de la diagonal es } d = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128};$$

Si hacemos un cuadrado que tiene como lado el valor de la diagonal.

$$\text{Área del nuevo cuadrado } \sqrt{128} * \sqrt{128} = 128 \text{ cm}^2$$

23. Números Reales

Tenemos cuatro ciudades A,B,C y D. La distancia entre A y B distan una distancia de 48 km con un error de 200 m. La distancia entre C y D son 500 m con un error de 2,5 m . ¿Qué medida es la más adecuada?.

Error absoluto A y B 200 m

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{error absoluto}}{\text{valor exacto}} \Rightarrow \frac{200 \text{ m}}{48000 \text{ m}} = 0,004166666$$

Error absoluto C y D 2,5m

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{error absoluto}}{\text{valor exacto}} \Rightarrow \frac{2,5 \text{ m}}{500 \text{ m}} = 0,005$$

La precisión de la medida es mejor en la medida de la distancia de A y B

7.1 Operación de dos intervalos

7.1.1 Sumas y restas

Si tenemos los intervalos $x \in$ al intervalo $(1, 2) \Rightarrow (1 < x < 2)$,

e $y \in$ al intervalo $(2, 4) \Rightarrow 2 < y < 4$.

Suma de intervalos

$$(1 < x < 2)$$

$$(2 < y < 4)$$

$$(2 + 1 < x + y < 2 + 4) \Rightarrow 3 < x + y < 6$$

Se toman los extremos de cada intervalo y se opera

Extremos inferiores $x + y \Rightarrow 1 + 2 = 3$

Extremos superiores $x + y \Rightarrow 4 + 2 = 6$

El intervalo será $(3, 6)$

Resta de intervalos (entornos e intervalos)

$$(1 < x < 2)$$

$(2 < y < 4)$ para restar multiplicamos la desigualdad por $(-1) \Rightarrow -4 < -y < -2$

$$(1 < x < 2)$$

$(-4 < -y < -2)$ y sumamos

$$(1 - 4 < x - y < +2 - 2) \Rightarrow -3 < x - y < 0$$

Se toman los extremos de cada intervalo y se opera

Extremos inferiores $x - y \Rightarrow 1 - 4 = -3$

Extremos superiores $x - y \Rightarrow 2 - 2 = 0$

El intervalo será $(-3, 0)$

24. Números Reales (entornos e intervalos)

Si $x \in$ al intervalo $[-4, -3]$, e $y \in$ al intervalo $(-1, 2]$.

Hallar el intervalo de las siguientes operaciones.

a) $x + y$; b) $x - y$;

Solución

a) $x + y$

Se toman los extremos de cada intervalo y se opera

Extremos inferiores $-4 + (-1) = -5$

Extremos superiores $-3 + 2 = -1$

intervalo $(-5, -1) \Rightarrow -5 < x + y < -1$

b) $x - y$

$$(-4 \leq x < -3)$$

$(-1 < y \leq 2)$ como es el sustraendo lo multiplicamos por $(-1) \Rightarrow -2 \leq -y < 1$;

Se toman los extremos de cada intervalo y se opera como si fuera una suma

Extremos inferiores $-4 + (-2) = -6$

Extremos superiores $-3 + 1 = -2$

Intervalo $[-6, -2) \Rightarrow -6 \leq x - y < -2$

25. Números Reales (entornos e intervalos)

Si $x \in$ al intervalo $(-1, 3)$, e $y \in$ al intervalo $[0, 2]$.

Hallar el intervalos de las siguientes operaciones a) $x + y$; b) $x - y$;

Solución

a) $x + y$; se toman los extremos de cada intervalo y se opera

Extremos inferiores $-1 + 0 = -1$

Extremos superiores $3 + 2 = 5$

intervalo $(-1, 5) \Rightarrow -1 < x + y < 5$

b) $x - y$

$-1 < x < 3$

$(0 \leq y \leq 2)$ como es el sustraendo lo multiplicamos por $(-1) \Rightarrow -2 \leq -y \leq 0$;

Se toman los extremos de cada intervalo y se opera como si fuera una suma

Extremos inferiores $-1 + (-2) = -3$

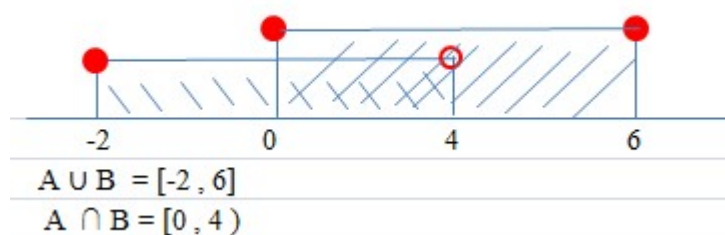
Extremos superiores $3 + 0 = 3$

Intervalo $(-3, 3) \Rightarrow -3 < x - y < 3$

7.1.2 Unión e intersección de intervalos

Un intervalo es el conjunto de valores que cumplen una condición por lo que la unión e intersección de intervalos es igual a la de cualquier conjunto.

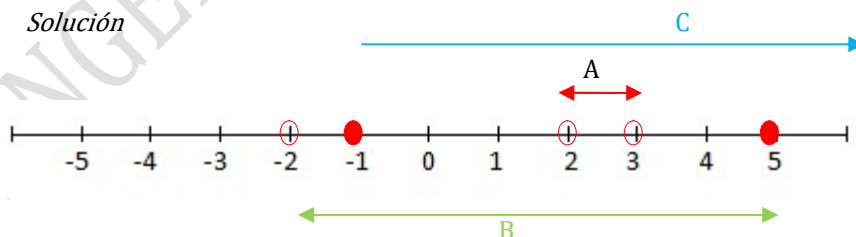
$A = [-2, 4)$ y $B = [0, 6]$

**26. Números Reales (entornos e intervalos)**

Dados los siguientes intervalos $A(2,3)$, $B(-2,5]$ y $C[-1, +\infty)$.

Hallar $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$; $A \cap B \cup C$;

Solución



$A \cup B \cup C$ Lo forman todos los elementos que pertenecen al menos a un conjunto;

$A \cup B \cup C = (-2, +\infty)$

$A \cap B \cap C$ Lo forman todos los elementos que pertenecen a todos los conjuntos;

$A \cap B \cap C = (2, +3)$

$A \cap B \cup C$; hacemos $A \cap B$ son elementos que pertenecen a A y a B; $A \cap B = (2, 3)$;

$A \cap B \cup C =$ elementos que pertenecen a $A \cap B$ y a C; $A \cap B \cup C = [-1, +\infty)$

8 Notación científica

La notación científica, es una forma de escribir más fácilmente los números demasiado grandes (100 000 000 000) o demasiado pequeños (0.000 000 000 01).

$a * 10^x$; a es un número decimal con una única cifra entera y un número finito de cifras decimales. seguido de una potencia de 10. 10^x

100 000 000 000 en forma de notación científica $1 * 10^{11}$

0.000 000 000 01 en forma de notación científica $1 * 10^{-11}$

0.000 000 52 en forma de notación científica $5,2 * 10^{-7}$

0,0289 en forma de notación científica $2,89 * 10^{-2}$

8.1 Operaciones con notaciones científicas

Para operar con números en forma de notación científica se realiza como con potencias de la misma base

Multiplicar : Se multiplican las partes decimales y las potencias

$$(3,2 * 10^{-2}) * (1,8 * 10^6) = (3,2 * 1,8) * (10^{-2} * 10^6) = 5,76 * 10^{-2+6} = 5,7 * 10^4$$

Dividir : Se dividen las partes decimales y las potencias

$$(3,2 * 10^{-2}) / (1,8 * 10^6) = \left(\frac{3,2}{1,8}\right) * (10^{-2}/10^6) = 1,78 * 10^{-2-6} = 1,78 * 10^{-8};$$

Suma y resta

Para poder sumar o restar números en notación científica tienen que tener la misma potencia

$$(3,2 * 10^{-2}) \pm (1,8 * 10^3); \text{ por ejemplo paso la potencia } 1,8 * 10^3 = 180000 * 10^{-2}$$

$$\text{y sumo o resto } 3,2 * 10^{-2} + 180000 * 10^{-2} = 180003,2 * 10^{-2} = 1,800032 * 10^3$$

$$\text{otra forma } 3,2 * 10^{-2} = 0,00032 * 10^3 + 1,8 * 10^3 = 1,800032 * 10^3;$$

27. Números Reales (Notaciones Científicas)

Realizar la siguiente operación

$$\frac{0,00016 * (8 * 10^3 + 1000)}{0,0025}$$

Solución

$$\text{Pongo todo en forma de notacion cientifica: } \frac{0,00016 * (30 * 10^3 + 1000)}{0,0025} =$$

$$= \frac{1,6 * 10^{-4} (3 * 10^4 + 0,1 * 10^4)}{2,5 * 10^3} = \frac{1,6 * 10^{-4} (3,1 * 10^4)}{2,5 * 10^3} = \frac{1,6 * 3,1}{2,5} * \frac{10^{-4} * 10^4}{10^3}$$

$$= 1,984 * 10^{-4+4-3} = 1,984 * 10^{-3};$$

Si no lo hiciera en notacion científica se haria con numeros muy grandes o pequeños

$$\frac{0,00016 * (30 * 10^3 + 1000)}{0,0025} = \frac{0,00016 * (30000 + 1000)}{0,0025} = \frac{0,00016 * 31000}{0,0025} =$$

$$\frac{0,00016 * 31000}{0,0025} = 1984 = 1,984 * 10^{-3}$$

28. Números Reales (Notaciones Científicas)

Realizar la siguiente operación $0,00051 + 0.000058$

Solución

$$0,00051 + 0.000058 = 5,1 * 10^{-4} + 0,58 * 10^{-4} = 5,68 + 10^{-4}$$

$$0,00051 + 0.000058 = 0,000568 = 5,68 + 10^{-4}$$

9 Radicales

Se llama raíz a una expresión del tipo $\sqrt[n]{a} = b$ donde se cumple que $a = b^n$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ pues } 2^3 = 8$$

Enunciado	operaciones
Suma y resta de radicales (solo si los radicales son iguales)	$2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} = (2+1)\sqrt[3]{3}$
Producto de raíces que tienen el mismo índice	$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a * b}$
División de raíces que tienen el mismo índice	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
Potencia de una raíz	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
Raíz de una raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n*m]{a}$

9.1 Relación entre potencias y raíces

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}; (\sqrt[n]{a^n})^m = \left(a^{\frac{n}{n}}\right)^m = a^{\frac{n*m}{n}} = a^m$$

Ejemplo

$$\sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt{125} = \sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{2}{2}} * 5^{\frac{1}{2}} = 5 * 5^{\frac{1}{2}}$$

29. Números Reales (radicales)

Cambio de raíces a potencias y biceversa

a) $\sqrt[3]{7}$; b) $\sqrt[5]{2^3}$; c) $\sqrt[6]{5^{12}}$; d) $3^{\frac{2}{5}}$; e) $2^{\frac{10}{15}}$; f) $2^{\frac{7}{45}}$

Solución

a) $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$; b) $\sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$; c) $\sqrt[6]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{6}} = 5^2$; d) $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$;

e) $2^{\frac{10}{15}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$; f) $2^{\frac{7}{45}} = \sqrt[45]{2^7}$;

30. Números Reales (radicales)

Expresa en forma exponencial

$$a) \sqrt[5]{x^2}; \quad b) (\sqrt[5]{x^2})^3; \quad c) \sqrt{\frac{x^{10}}{x^5}}; \quad d) \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}; \quad e) \sqrt{\sqrt[4]{2^2}};$$

Solución:

$$a) \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}; \quad b) (\sqrt[5]{x^2})^3 = (x^{\frac{2}{5}})^3 = x^{\frac{6}{5}}; \quad c) \sqrt{\frac{x^{10}}{x^5}} = \sqrt{x^2} = x^{\frac{2}{2}} = x;$$

$$d) \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a} = a^{\frac{1}{12}}; \quad e) \sqrt{\sqrt[4]{2^2}} = \sqrt[8]{2^2} = 2^{\frac{2}{8}} = 2^{\frac{1}{4}};$$

31. Números Reales (radicales)

Expresa en forma exponencial

$$a) \sqrt{2} * \sqrt[3]{4}; \quad b) \sqrt{3} * \sqrt[4]{9}; \quad c) 3\sqrt[3]{9}; \quad d) \sqrt[3]{12} * \sqrt[3]{6}; \quad e) \sqrt[3]{25} : \sqrt[3]{5};$$

Solución:

$$a) \sqrt{2} * \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{1}{2}} * 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{3+4}{6}} = 2^{\frac{7}{6}};$$

$$b) \sqrt{3} * \sqrt[4]{9} = 3^{\frac{1}{2}} * 9^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} * 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} * 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1+1}{2}} = 3;$$

$$c) 3\sqrt[3]{9} = 3\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^2 * 3^3} = \sqrt[3]{3^5} = 3^{\frac{5}{3}};$$

$$d) \sqrt[3]{12} * \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2^2 * 3} * \sqrt[3]{2 * 3} = \sqrt[3]{2^2 * 3 * 2 * 3} = \sqrt[3]{2^3 * 3^2} = 2\sqrt[3]{3^2} = 2 * 3^{\frac{2}{3}};$$

$$e) \sqrt[3]{25} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^2} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^2 : 5} = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}};$$

32. Números Reales (radicales)Opera y simplifica las siguientes expresiones a) $\sqrt[3]{2} * \sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt[3]{9} * \sqrt[6]{3}$

$$c) \sqrt[4]{2} * \sqrt[8]{2} * \sqrt{2} \quad d) \sqrt[4]{8} * \sqrt[3]{4}$$

Solución

$$a) \sqrt[3]{2} * \sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{3}} * 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = 2^{\frac{5+3}{15}} = 2^{\frac{8}{15}} = \sqrt[15]{2^8};$$

$$b) \sqrt[3]{9} * \sqrt[6]{3} = \sqrt[3]{3^2} * \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{2}{3}} * 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = 3^{\frac{4+1}{6}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5};$$

$$c) \sqrt[4]{2} * \sqrt[8]{2} * \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{4}} * 2^{\frac{1}{8}} * 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}} = 2^{\frac{2+1+4}{8}} = 2^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{2^7};$$

$$d) \sqrt[4]{8} * \sqrt[3]{4} = \sqrt[4]{2^3} * \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{3}{4}} * 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{9}{12} + \frac{8}{12}} = 2^{\frac{17}{12}} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2 * \sqrt[12]{2^5};$$

33. Números Reales (radicales)Simplificar las siguientes expresiones a) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$; b) $\sqrt[5]{(\sqrt[3]{x^{10}})^3}$;

$$a) \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}} = \sqrt[15]{x^{10}}; \text{ simplificamos } \sqrt[3]{x^2}$$

$$b) \sqrt[5]{(\sqrt[3]{x^2})^6} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{(x^2)^6}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{12}}} = \sqrt[15]{x^{12}} \text{ Simplificamos } = \sqrt[5]{x^4}$$

9.2 Extracción e introducción de factores en un radical

Al introducir un factor en un radical $a^{\frac{n}{m}}\sqrt[n]{b^m}$ queda elevado al índice de la raíz $\sqrt[n]{b^m a^n}$

$$3^4\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{2^3 * 3^4}; \quad 3^4\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3^3 * 3^4} = \sqrt[4]{3^7}$$

Para sacar un factor en un radical $\sqrt[n]{b^m}$ (si m es mayor que n) se hace a la inversa

$$\sqrt[4]{3^7} = \sqrt[4]{3^3 * 3^4} = \sqrt[4]{3^4} * \sqrt[4]{3^3} = 3 * \sqrt[4]{3^3};$$

34. Números Reales (radicales)

Introducir los factores en el radical $2a^4\sqrt[4]{8 * a^3}$

Solución

$$2a^4\sqrt[4]{8 * a^3} = \sqrt[4]{2^3 * 2^4 * a^4} = \sqrt[4]{2^7 * a^4};$$

35. Números Reales (radicales)

Introducir los factores en el radical $x^2\sqrt[7]{x^2 * x^3}$

Solución

$$x^2\sqrt[7]{x^2 * x^3} = \sqrt[7]{x^2 * x^3 * (x^2)^4} = \sqrt[7]{x^2 * x^3 * x^8} = \sqrt[7]{2^{13}}$$

36. Números Reales (radicales)

Simplificar los siguientes radica

$$a) \sqrt[6]{27} \quad b) \sqrt[3]{108}; \quad c) \sqrt[12]{64x^3} \quad d) \sqrt[4]{\frac{81}{64}}$$

Solución

$$a) \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3}; \text{ simplificamos dividiendo por 3 radical y exponente} = \sqrt[3]{3};$$

$$b) \sqrt[3]{108} = \text{descomponemos en factores } \sqrt[3]{2^2 * 3^3} = 3\sqrt[3]{2^2}$$

$$c) \sqrt[12]{64x^3} = \sqrt[12]{2^6x^3} = \sqrt[4]{2^2x}$$

$$d) \sqrt[4]{\frac{81}{64}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{64}} = \text{simplificamos } \frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{2^6}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \text{racionalizamos } \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2} * \sqrt{2}} =$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2 * 2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2^2};$$

37. Números Reales (radicales)

Simplificar los siguientes radica

$$a) \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}; \quad b) \sqrt{4a^2 + 4} \quad c) \sqrt{\frac{a}{9} + \frac{a}{16}}$$

Solución

$$a) \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9}{36} + \frac{4}{36}} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \sqrt{\frac{13}{2^2 * 3^2}} = \frac{\sqrt{13}}{2 * 3} = \frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$b) \sqrt{4a^2 + 4} = \text{sacamos factor comun } \sqrt{4(a^2 + 1)} = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$c) \sqrt{\frac{a}{9} + \frac{a}{16}} = \sqrt{\frac{16a}{16 * 9} + \frac{9a}{16 * 9}} = \sqrt{\frac{25a}{2^4 * 3^2}} = \frac{5\sqrt{a}}{2^2 * 3} = \frac{5\sqrt{a}}{12}$$

38. Números Reales (radicales)

Opera y simplificar los siguientes expresiones

$$a) 4\sqrt{27} * 5\sqrt{6} \quad b) \sqrt{\frac{4}{3}} * \sqrt{\frac{27}{8}} \quad c) \sqrt[4]{3\sqrt{4}} \quad d) \sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}} \quad e) \sqrt[4]{a^3} * \sqrt[3]{a^4} : \sqrt{a}$$

Solución

$$a) 4\sqrt{27} * 5\sqrt{6} = 20\sqrt{3^3 * 2 * 3} = 20\sqrt{3^4 * 2} = 20 * 3^2\sqrt{2} = 180\sqrt{2};$$

$$b) \sqrt{\frac{4}{3}} * \sqrt{\frac{27}{8}} = \sqrt{\frac{2^2 * 3^3}{3 * 2^3}} = \sqrt{\frac{3^2}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$c) \sqrt[4]{3\sqrt{4}} = \sqrt[12]{4} = \sqrt[12]{2^2} = \sqrt[6]{2};$$

$$d) \sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}} = \text{metemos el 2 en la raiz} = \sqrt[3]{2\sqrt[4]{2^3 * 8}} = \sqrt[3]{2\sqrt[4]{2^4 * 2^3}} = \sqrt[12]{2^{27}}$$

$$e) \sqrt[4]{a^3} * \sqrt[3]{a^4} : \sqrt{a} = \text{ponemos en mismo índice comun mcm 12} = \sqrt[12]{a^9} * \sqrt[12]{a^{16}} : \sqrt[12]{a^6} = \\ = \sqrt[12]{\frac{a^9 * a^{16}}{a^6}} = \sqrt[12]{\frac{a^{25}}{a^6}} = \sqrt[12]{a^{19}}; \sqrt[12]{a^{12} * a^7} = a \sqrt[12]{a^7};$$

39. Números Reales (radicales)

Opera y simplificar los siguientes expresiones

$$a) 3\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{250} + 5\sqrt[3]{54}; \quad b) \sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}};$$

Solución

$$a) 3\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{250} + 5\sqrt[3]{54} = \text{descomponemos en factores} =$$

$$3\sqrt[3]{2^4} + 2\sqrt[3]{2 * 5^3} + 5\sqrt[3]{2 * 3^3} = \text{metemos factores en la raiz} =$$

$$\sqrt[3]{2^4 * 3^3} + \sqrt[3]{2 * 5^3 * 2^3} + \sqrt[3]{2 * 3^3 * 5^3} = \sqrt[3]{2^4 * 3^3} + \sqrt[3]{2^4 * 5^3} + \sqrt[3]{2^4 * 5^3} =$$

$$2 * 3\sqrt[3]{2} + 2 * 5\sqrt[3]{2} + 2 * 5\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2} + 10\sqrt[3]{2} + 10\sqrt[3]{2} = 26\sqrt[3]{2}$$

$$b) \sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}}; \text{descomponemos} = \sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2 * 3^2}{5^3}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2^3}{3^2 * 5}} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{5}} - 4 * \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{1}{3} * \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} = \left(1 - \frac{12}{5} + \frac{2}{9}\right)\sqrt{\frac{2}{5}} = \left(\frac{45}{45} - \frac{108}{45} + \frac{10}{45}\right)\sqrt{\frac{2}{5}} = -\frac{53}{45}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

10 Racionalización

Racionalizar consiste en transformar fracciones que tengan radicales en el denominador en otras equivalentes que no los tengan

10.1 Denominador con un radical

$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ para poder quitar el radical del denominador, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a * \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m} * \sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a * \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m * b^{n-m}}} = \frac{a * \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{m+n-m}}} = \frac{a * \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a * \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

40. Números Reales (radicales)

Racionaliza y simplifica si es posible

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; c) $\frac{3}{\sqrt{15}}$; d) $\frac{3}{2\sqrt{9}}$; e) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$;

Solución

a) $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 * \sqrt{3}}{\sqrt{3} * \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$;

b) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3 * \sqrt{3} * \sqrt{2}}{\sqrt{2} * \sqrt{2}} = \frac{3 * \sqrt{3 * 2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$;

c) $\frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{15} * \sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}$;

d) $\frac{3}{2\sqrt{9}} = \frac{3\sqrt{9}}{2\sqrt{9} * \sqrt{9}} = \frac{3\sqrt{9}}{2\sqrt{9^2}} = \frac{3\sqrt{9}}{2 * 9} = \frac{\sqrt{9}}{2 * 3} = \frac{\sqrt{9}}{6}$;

e) $\frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5 * \sqrt{5}}{2\sqrt{5} * \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{5^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{2 * 5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

41. Números Reales (radicales)

Racionaliza y simplifica si es posible

a) $\frac{7}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{3}{5\sqrt{2}}$; c) $\frac{3}{\sqrt[5]{2^2}}$; d) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}}$;

Solución

a) $\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$;

b) $\frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5 * \sqrt{2^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5 * 2} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$;

c) $\frac{3}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{3 * \sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2} * \sqrt[5]{2^3}} = \frac{3 * \sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{3 * \sqrt[5]{2^3}}{2}$;

10.2 El denominador es un binomio

Si el denominador es un binomio, para resolverlo nos apoyamos en una identidad notable

$$(a + b) * (a - b) = a^2 - b^2$$

42. Números Reales (radicales)

$$a) \frac{2}{3 - \sqrt{5}}; \quad b) \frac{\sqrt[3]{2}}{3 + \sqrt{6}}; \quad c) \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}; \quad d) \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}};$$

Solución:

$$a) \frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{2 * (3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5}) * (3 + \sqrt{5})} = \frac{2 * (3 + \sqrt{5})}{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{2 * (3 + \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{2 * (3 + \sqrt{5})}{4} = \frac{(3 + \sqrt{5})}{2};$$

$$b) \frac{\sqrt[3]{2}}{3 + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt[3]{2} * (3 - \sqrt{6})}{(3 + \sqrt{6}) * (3 - \sqrt{6})} = \frac{\sqrt[3]{2} * (3 - \sqrt{6})}{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{\sqrt[3]{2} * (3 - \sqrt{6})}{9 - 6} = \frac{\sqrt[3]{2} * (3 - \sqrt{6})}{3};$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2} * (3 - \sqrt{6})}{3}$$

$$c) \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{4 * (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5}) * (\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \frac{4 * (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{4 * (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{3 - 5} = \frac{4 * (\sqrt{3} - \sqrt{5})}{-2} = -2 * (\sqrt{3} - \sqrt{5});$$

$$d) \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{2 * (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) * (\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{2 * (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2 * (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 2 * (\sqrt{3} + \sqrt{2});$$

43. Números Reales (radicales)

Racionalizar y simplificar

$$\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}};$$

Solución

$$\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) * (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) * (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})} = \frac{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} =$$

$$\frac{(3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 + 2(3\sqrt{2}) * (2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{9 * 2 + 4 * 3 + 12\sqrt{6}}{9 * 2 - 4 * 3} =$$

$$\frac{18 + 12 + 12\sqrt{6}}{18 - 12} = \frac{30 + 12\sqrt{6}}{6} = 5 + 2\sqrt{6};$$

44. Números Reales (radicales)

Racionalizar y simplificar

$$a) \frac{1 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}; \quad b) \frac{2}{1 + \sqrt{2}}; \quad c) \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}; \quad d) \frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}};$$

Solución

$$\text{a) } \frac{1 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3}) * (2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3}) * (2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + 2\sqrt{3} + 1\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{(2^2 - 3)} = \frac{2 + 2\sqrt{3} + 1\sqrt{3} + 3}{4 - 3} =$$

$$\frac{5 + 3\sqrt{3}}{1} = 5 + 3\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = \frac{2 * (1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2}) * (1 - \sqrt{2})} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{(1 - 2)} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{-1} = -2 + 2\sqrt{2};$$

$$\text{c) } \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3}) * (1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3}) * (1 + \sqrt{3})} = \frac{(1^2 + \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3})}{(1 - 3)} = \frac{1 + 3 + 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} =$$

$$= -2 - \sqrt{3};$$

$$\text{d) } \frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} - \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{3(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 3(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{-1} = \frac{6\sqrt{3}}{-1} = -6\sqrt{3}$$

45. Números Reales (radicales)

Racionalizar y simplificar

$$\text{a) } \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}; \quad \text{b) } \frac{1}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}} \quad \text{c) } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \quad \text{d) } \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Solución

$$\text{a) } \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} * \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} = \frac{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + 2(\sqrt{x}) * (\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}$$

$$\frac{x + y + 2(\sqrt{x}) * (\sqrt{y})}{x - y} = \frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{x - y}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}} * \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{4 * 3 - 5} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{7}$$

$$\text{c) } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}; \text{ sacamos factor comun}$$

$$= \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} =$$

$$\frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} =$$

$$\frac{(\sqrt{2})^2 - (1)^2 + (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}((\sqrt{2})^2 - (1)^2)} = \frac{2 - 1 + 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}(2 - 1)} = \frac{5}{\sqrt{2}} =$$

racionalizamos $\frac{5}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2};$

$$d) \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} =$$

$$\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} = \frac{2\sqrt{x}}{x - y}$$

46. Números Reales (potencias)

Simplifica y expresa el resultado en forma de potencia

$$\frac{3^6 * 2^5 * 5^2}{9^3 * 4^3 * 5}$$

Solución

$$\frac{3^6 * 2^5 * 5^2}{9^3 * 4^3 * 5} = \frac{3^6 * 2^5 * 5^2}{(3 * 3)^3 * (2 * 2)^3 * 5} = \frac{3^6 * 2^5 * 5^2}{3^6 * 2^6 * 5} = \frac{3^6}{3^6} * \frac{2^5}{2^6} * \frac{5^2}{5} = 1 * \frac{1}{2} * 5 = \frac{5}{2}$$

47. Números Reales (potencias)

Simplifica y expresa el resultado en forma de potencia

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 * \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}{2^8 * 3^{-6}};$$

Solución

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 * \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}{2^8 * 3^{-6}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 * \left(\frac{2}{3}\right)^3}{2^8 * 3^{-6}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{4+3}}{2^8 * 3^{-6}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^7 * 3^6}{2^8} = \frac{\frac{2^7}{3^7} * 3^6}{2^8} = \frac{2^7 * 3^6}{3^7 * 2^8}$$

$$= 2^{7-8} * 3^{6-7} = 2^{-1} * 3^{-1} = \frac{1}{2 * 3} = \frac{1}{6};$$

48. Números Reales (radicales)

Calcula y simplifica

$$5\sqrt{2} + 3\sqrt{7} + 11\sqrt{2}$$

Solución

$$5\sqrt{2} + 3\sqrt{7} + 11\sqrt{2} = (5 + 11)\sqrt{2} + 3\sqrt{7} = 16\sqrt{2} + 3\sqrt{7}$$

49. Números Reales (radicales)

Calcula y simplifica

$$\sqrt{20} + \sqrt{196} - \sqrt{25} - \sqrt{36} + \sqrt{45}$$

Solución

$$\sqrt{20} + \sqrt{196} - \sqrt{25} - \sqrt{36} + \sqrt{45} = \sqrt{5 * 4} + 14 - 5 - 6 + \sqrt{9 * 5}$$

$$2\sqrt{5} + 3 + 3\sqrt{5} = 3 + (2 + 3)\sqrt{5} = 3 + 5\sqrt{5}$$

50. Números Reales (radicales)

Calcula el valor de los siguientes radicales

$$a) \sqrt[3]{-27}; b) \sqrt[3]{64}; c) \sqrt[3]{343} \quad d) \sqrt[4]{14641};$$

Solución

$$a) \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{-3^3} = -3$$

$$b) \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4;$$

$$c) \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7;$$

$$e) \sqrt[4]{14641} = \sqrt[4]{11^4} = 11$$

51. Números Reales (radicales)

Calcula y simplifica :

$$a) \sqrt[4]{2^8}; \quad b) \sqrt[3]{1000} ;$$

Solución

$$a) \sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4]{2^4 * 2^4} = 2 * 2 = 4$$

Otra forma es pasarlo a forma de potencia

$$\sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4;$$

$$b) \sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10;$$

52. Números Reales (radicales)

Pasa las siguientes potencias a radicales y simplifica :

$$a) 8^{\frac{2}{3}}; b) 625^{\frac{3}{4}}; c) 64^{\frac{5}{6}} d) 16^{\frac{3}{2}};$$

Solución:

$$a) 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{2^{3^2}} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4;$$

$$b) 625^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{625^3} = \sqrt[4]{(5^4)^3} = \sqrt[4]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{4}} = 5^3 = 125;$$

$$c) 64^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{64^5} = \sqrt[6]{(2^6)^5} = \sqrt[6]{2^{30}} = 2^{\frac{30}{6}} = 2^5 = 32;$$

$$d) 16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = \sqrt{(2^4)^3} = \sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6 = 64;$$

53. Números Reales (radicales)

Simplifica los siguientes radicales

$$a) \sqrt[4]{3^2} \quad b) \sqrt[12]{x^8} ; \quad c) \sqrt[5]{3^{15}}; \quad d) \sqrt[8]{a^2b^4}; \quad e) \sqrt[4]{a^6}; \quad f) \sqrt[3]{a^6b^9};$$

Solución

$$a) \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3};$$

$$b) \sqrt[12]{x^8} = x^{\frac{8}{12}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2};$$

$$c) \sqrt[5]{3^{15}} = 3^{\frac{15}{5}} = 3^3$$

$$d) \sqrt[8]{a^2b^4} = a^{\frac{2}{8}} * b^{\frac{4}{8}} = a^{\frac{1}{4}} * b^{\frac{1}{2}} \text{ (ponemos común) } a^{\frac{1}{4}} * b^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{a * b^2};$$

$$e) \sqrt[4]{a^6} = \sqrt[8]{a^6} = \sqrt[4]{a^3};$$

$$\sqrt[3]{a^6b^9} = \sqrt[3]{(a^2b^3)^3} = a^2b^3;$$

54. Números Reales (radicales)

Extraer del radical todos los factores posibles

a) $\sqrt{27}$; b) $\sqrt{50}$; c) $\sqrt{12}$; d) $\sqrt[3]{72}$; e) $\sqrt[4]{255}$; f) $\sqrt[3]{135}$;

Solución

a) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 2^2} = 2\sqrt{3}$;

d) $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{3^2}$;

e) $\sqrt[4]{3750} = \sqrt[4]{3^2 \cdot 5^4} = 5\sqrt[4]{3^2}$

f) $\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = 3\sqrt[3]{5}$;

55. Números Reales (radicales)

Extraer del radical todos los factores posibles

a) $\sqrt[3]{8a^4}$; b) $\sqrt[3]{9a^4b^2}$; c) $\sqrt{\frac{12}{b^2}}$; d) $\sqrt[3]{\frac{162}{75}}$; e) $\sqrt[4]{16a^5}$; f) $\sqrt[4]{\frac{64}{b^2}}$;

Solución

a) $\sqrt[3]{8a^4} = \sqrt[3]{2^3 a^4} = 2a\sqrt[3]{a}$

b) $\sqrt[3]{9a^4b^2} = \sqrt[3]{3^2 a^4 b^2} = a\sqrt[3]{3^2 ab^2}$;

c) $\sqrt{\frac{12}{b^2}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 3}{b^2}} = 2 \cdot \frac{1}{b} \sqrt{3} = \frac{2}{b} \sqrt{3}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{162}{75}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3^4}{5^3}} = \frac{3}{5} \sqrt[3]{2 \cdot 3}$;

e) $\sqrt[4]{16a^5} = \sqrt[4]{2^4 a^5} = 2 \cdot a \cdot \sqrt[4]{a} = 2a\sqrt[4]{a}$;

f) $\sqrt[4]{\frac{64}{b^2}} = \sqrt[4]{\frac{2^6}{b^2}} = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{2^2}{b^2}}$;

56. Números Reales (radicales)

Extraer del radical todos los factores posibles $\sqrt[3]{\frac{8a^2b^4}{16x^5}}$;

Solución : $\sqrt[3]{\frac{8a^2b^4}{16x^5}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 a^2 b^4}{2^4 x^5}} = \frac{2b}{2x} \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{2x^2}} = \frac{b}{x} \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{2x^2}}$;

57. Números Reales (radicales)

Reduce a un índice común y simplifica

a) $\sqrt{6} * \sqrt[3]{3}$; b) $\sqrt[4]{9} : \sqrt{3}$; c) $\sqrt[4]{7} * \sqrt[6]{3}$; d) $\sqrt{6} * \sqrt[5]{2}$;

Solución:

$$a) \sqrt{6} * \sqrt[3]{3} = 6^{\frac{1}{2}} * 3^{\frac{1}{3}} = (2 * 3)^{\frac{1}{2}} * 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} * 3^{\frac{1}{2}} * 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} * 3^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} * 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^3 * 3^5};$$

$$b) \sqrt[4]{9} * \sqrt{3} = 9^{\frac{1}{4}} * 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{2}{4}} * 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{2}{4}} * 3^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{1} = 1;$$

$$c) \sqrt[4]{7} * \sqrt[6]{3} = 7^{\frac{1}{4}} * 3^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{3}{12}} * 3^{\frac{2}{12}} = \sqrt[12]{7^3} * \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{7^3 * 3^2};$$

$$d) \sqrt{6} * \sqrt[5]{2} = 6^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{5}} = 6^{\frac{5}{10}} * 2^{\frac{2}{10}} = (2 * 3)^{\frac{5}{10}} * 2^{\frac{2}{10}} = (2^{\frac{5}{10}} * 3^{\frac{5}{10}}) * 2^{\frac{2}{10}} =$$

$$2^{\frac{7}{10}} * 3^{\frac{5}{10}} = \sqrt[10]{2^7} * \sqrt[10]{3^5} = \sqrt[10]{2^7 * 3^5};$$

58. Números Reales (radicales)

Introduce dentro de la raíz y simplifica

a) $5 * \sqrt{\frac{3}{5}}$; b) $3 * \sqrt{\frac{11}{3}}$; c) $2 * \sqrt[4]{\frac{5}{6}}$; d) $\frac{1}{3} * \sqrt{\frac{18}{5}}$; e) $\frac{2}{3} * \sqrt{\frac{18}{8}}$;

Solución:

$$a) 5 * \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3 * 5^2}{5}} = \sqrt{3 * 5} = \sqrt{15};$$

$$b) 3 * \sqrt{\frac{11}{3}} = \sqrt{\frac{11 * 3^2}{3}} = \sqrt{11 * 3}$$

$$c) 2 * \sqrt[4]{\frac{5}{6}} = \sqrt[4]{\frac{2^4 * 5}{6}} = \sqrt[4]{\frac{2^4 * 5}{2 * 3}} = \sqrt[4]{\frac{2^3 * 5}{3}};$$

$$d) \frac{1}{3} * \sqrt{\frac{18}{5}} = \sqrt{\frac{18}{5 * 3^2}} = \sqrt{\frac{2 * 3^2}{5 * 3^2}} = \sqrt{\frac{2}{5}};$$

$$e) \frac{2}{3} * \sqrt{\frac{18}{8}} = \sqrt{\frac{2^2 * 18}{3^2 * 8}} = \sqrt{\frac{2^2 * 2 * 3^2}{3^2 * 2^3}} = \sqrt{\frac{2^3 * 3^2}{3^2 * 2^3}} = \sqrt{1} = 1;$$

59. Números Reales (radicales)

Ejecuta las siguientes operaciones y simplifica

a) $\sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{3}$; b) $\sqrt{27} - \sqrt{12}$; c) $\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{63}$ d) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$;

Solución

$$a) \sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{3} = \sqrt{2^4 * 3} - \sqrt{2^2 * 3} + \sqrt{3} = 2^2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} =$$

$$\sqrt{3} * (2^2 - 2 + 1) = \sqrt{3} * (3) = 3\sqrt{3};$$

$$\text{b) } \sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{3^3} - \sqrt{2^2 * 3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

c) $\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{63} = \sqrt{2^2 * 7} - \sqrt{7} + \sqrt{3^2 * 7} = 2\sqrt{7} - \sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$;

$$\text{d) } \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{2^3 * 3} = 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$$

60. Números Reales (radicales)

Ejecuta las siguientes operaciones y simplifica

a) $\sqrt[4]{7}$; $\sqrt{\frac{14}{5}}$; b) $\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$; $\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$; c) $\sqrt[3]{\frac{16}{5}}$; $\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$

Solución

$$\text{a) } \sqrt{7}: \sqrt{\frac{14}{5}} = \sqrt{\frac{7}{\frac{14}{5}}} = \sqrt{\frac{35}{14}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 5}{7 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{5}{2}};$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{\frac{2}{5}} : \sqrt[4]{\frac{5}{2}} = \sqrt[4]{\frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{2}}} = \sqrt[4]{\frac{4}{25}} = \sqrt[4]{\frac{2^2}{5^2}} = \sqrt[4]{\frac{2}{5}};$$

$$\text{a) } \sqrt[3]{\frac{16}{5}} : \sqrt[3]{\frac{4}{25}} = \sqrt[3]{\frac{16}{5} \cdot \frac{25}{4}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 25}{4 \cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{2^4 \cdot 5^2}{5 \cdot 2^2}} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 5}$$

61. Números Reales (radicales)

Ejecuta como potencia y da el resultado como radical

$$\sqrt{x} * \sqrt[3]{\frac{2}{x^4}}$$

Solución:

$$\sqrt{x} * \sqrt[3]{\frac{2}{x^4}} = x^{\frac{1}{2}} * \frac{2^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} = x^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{3}} * x^{-\frac{4}{3}} = x^{\frac{3}{6}} * 2^{\frac{2}{6}} * x^{-\frac{8}{6}} = 2^{\frac{2}{6}} * x^{-\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{\frac{2^2}{x^5}};$$

62. Números Reales (radicales)

Ejecuta y simplifica ; $\frac{(2\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2}{2}$

Solución:

$$\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}{2} = \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{+3}{2};$$

63. Números Reales (radicales)

Averigua el valor de x para que las siguientes raíces pertenezcan a los números reales

a) $\sqrt{x-5}$; b) $\sqrt{7-x}$; c) $\sqrt{-x}$; d) $\sqrt{x^2-2}$;

Solución

a) $\sqrt{x-5}$; se ha de cumplir que $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow [5, +\infty)$;

b) $\sqrt{7-x}$; se ha de cumplir que $7-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 7 \Rightarrow (-\infty, 7]$;

c) $\sqrt{-x}$; se ha de cumplir que $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow (-\infty, 0]$;

d) $\sqrt{x^2-2}$; se ha de cumplir que $x^2-2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2$; $x \geq \pm\sqrt{2}$;

$$(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$$

64. Números Reales (radicales)

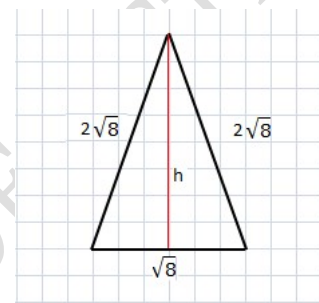
Halla el área de un triángulo isósceles en que los lados iguales miden el doble que la base cuya longitud es $\sqrt{8}$; expresar el resultado en forma de radical

Solución:

$$h^2 = (2\sqrt{8})^2 - (\sqrt{8})^2 = 4 \cdot 8 - 8 = 24$$

$$h = \sqrt{24}$$

$$\text{Area} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{24}}{2} = \frac{\sqrt{192}}{2} = \frac{\sqrt{2^6 \cdot 3}}{2} = \frac{2^3 \sqrt{3}}{2} = 2^2 \sqrt{3}$$



65. Números Reales (radicales)

Halla el área de un tetraedro regular de 4cm de arista. Expresar el resultado en forma de radical. (El tetraedro regular está formado por cuatro triángulos equiláteros).

Solución:

Area total del tetraedro = área lateral + área de la base (área del triángulo)

Atotal = rea total del tetraedro = área lateral + área de la base (área del triángulo)

$$\text{Atotal} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} + \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2};$$

Area Lateral

Perímetro = 12 cm

$$\text{Apotema} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$$

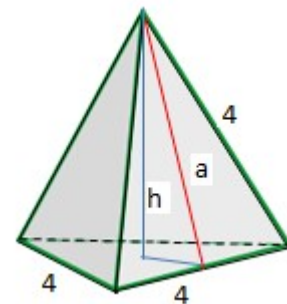
$$\text{Alateral} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$\text{Area de la base} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3};$$

$$\text{Area TOTAL} = 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Tambien el área total es igual al área de un triángulo por los 4 lados

$$\text{Area TOTAL} = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



66. Números Reales (radicales)

Halla el área total y el volumen de un cilindro de 5cm de radio y 12 de altura.

Da su valor exacto en función de π .

Solución:

Área del cilindro = área lateral + área de las bases (superficie del círculo)

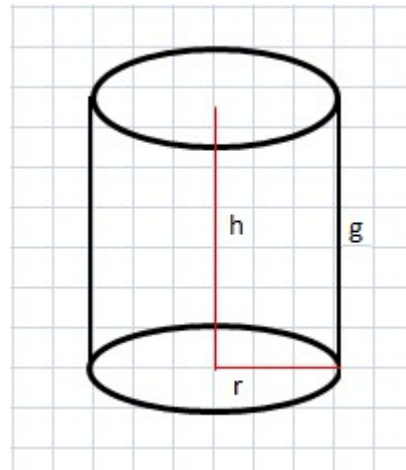
Área lateral = Perímetro (longitud de la circunferencia) * apotema (generatriz o altura)

$$A_{\text{lateral}} = 2\pi r * g = 2\pi 5 * 12 = 120\pi \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{base}} = \pi r^2 = \pi 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área Total} = 120\pi + 2 * 25\pi = 170\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Volumen} = \text{área de la base} * \text{altura} = \pi r^2 * h = 5^2 \pi * 12 = 300\pi \text{ cm}^3$$

**67. Números Reales (radicales)**

Halla el área total y el volumen de un cono de 5cm de radio y 10 de generatriz. Indicando el valor exacto.

Solución:

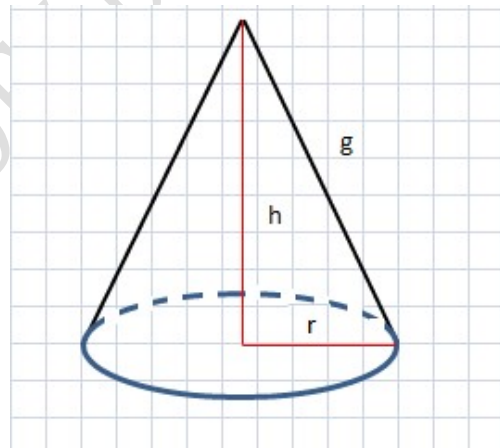
Área total del cono = área lateral + área de la base (superficie del círculo)

$$A_{\text{lateral}} = \frac{\text{Perímetro} * \text{generatriz}}{2};$$

$$A_{\text{lateral}} = \frac{2\pi r * g}{2} = \frac{2\pi 5 * 10}{2} = 50\pi \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{base}} = \pi r^2 = \pi 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área Total} = 50\pi + 25\pi = 75\pi \text{ cm}^2$$



$$\text{Volumen del cono} = \frac{\text{Área de la base} * \text{altura}}{3};$$

$$g^2 - r^2 = h^2; h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3};$$

$$\text{Volumen} = \frac{25\pi * 5\sqrt{3}}{3} = \frac{125\pi * \sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3;$$

68. Números Reales (radicales)

Los puntos A y B dividen la diagonal del cuadrado en tres partes iguales. Si el área del cuadrado es 36cm^2 ¿Cuánto medirá el lado del rombo marcado en rojo. Dar el valor exacto.

Área del cuadrado $= l^2 = 36; l = 6\text{cm};$

Valor de la diagonal teorema de Pitágoras
 $d^2 = l^2 + l^2;$

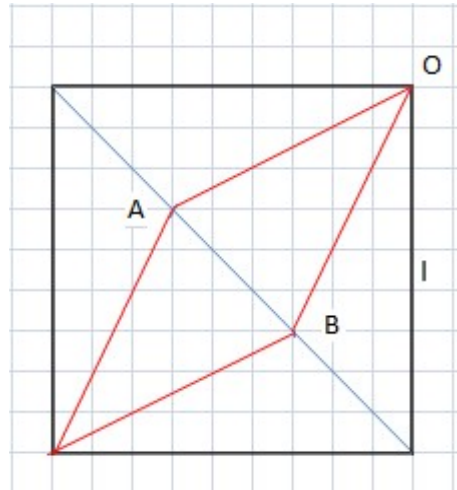
$$d = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = \sqrt{2^3 * 3^2} = 6\sqrt{2}$$

Tenemos el triángulo OAB cuya altura es la

$$\text{mitad de la diagonal } \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{y la base AB es } \frac{1}{3} \text{ de la diagonal } \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2} \text{ cm};$$

$$\text{El lado del rombo BO} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{18 + 8} = \sqrt{26}\text{cm};$$

**69. Números Reales (radicales)**

Halla la diagonal (D) de un cubo cuyo volumen es 5 dm^3 . Expresa la medida como un radical.

Solución:

$$\text{Volumen del cubo} = L * L * L = L^3$$

$$L^3 = 5; L = \sqrt[3]{5} \text{ dm}$$

Diagonal de una cara:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(\sqrt[3]{5})^2 + (\sqrt[3]{5})^2} = \sqrt{2 * (\sqrt[3]{5})^2} \\ &= \sqrt{2} * \sqrt{(\sqrt[3]{5})^2} = \sqrt{2} * \sqrt[3]{5} = 2^{\frac{1}{2}} * 5^{\frac{1}{3}} = \\ &2^{\frac{3}{6}} * 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{2^3 * 5^2} \text{ dm}; \end{aligned}$$

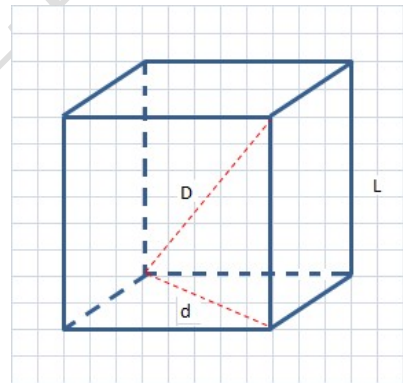
Diagonal del cubo D:

$$D^2 = d^2 + l^2;$$

$$\begin{aligned} D^2 &= (\sqrt[3]{5})^2 + (\sqrt[6]{2^3 * 5^2})^2 = 5^{\frac{2}{3}} + (2^3 * 5^2)^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{4}{6}} + (2^3 * 5^2)^{\frac{2}{6}} = \\ &5^{\frac{4}{6}} + 2^{\frac{6}{6}} * 5^{\frac{4}{6}} = 5^{\frac{4}{6}} + 2 * 5^{\frac{4}{6}} = 3 * 5^{\frac{4}{6}} = 3 * 5^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{5^2} \text{ dm}; \end{aligned}$$

$$D = \sqrt{3\sqrt[3]{5^2}} = \sqrt[12]{6\sqrt[3]{5^2}} = \sqrt[12]{5^2 * 3^3} = \sqrt[12]{5^2 * 3^3} = 5^{\frac{2}{12}} * 3^{\frac{3}{12}} = 5^{\frac{1}{6}} * 3^{\frac{1}{4}}$$

$$D = \sqrt[6]{5^2 * 3^3} \text{ dm}$$



70. Números Reales (radicales)

En un cuadrado de 10cm de lado, quitamos las esquinas de forma que la figura resultante es un octógono regular. Halla la medida exacta del lado del octógono y su área.

Solución

Calculamos el valor del lado del octógono (L) en función de los lados del triángulo isósceles (X)

$$L^2 = X^2 + X^2 = 2X^2; L = X\sqrt{2} \text{ cm.}$$

$$\text{El lado del cuadrado (l)} = X + X + X\sqrt{2} = 10 \text{ cm}$$

$$X(1 + 1 + \sqrt{2}) = 10 \Rightarrow 1 = X(2 + \sqrt{2}) = 10;$$

$$x = \frac{10}{(2 + \sqrt{2})} = \frac{10(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{10(2 - \sqrt{2})}{(4 - 2)};$$

$$x = 5(2 - \sqrt{2}) \text{ cm};$$

Área del Octógono:

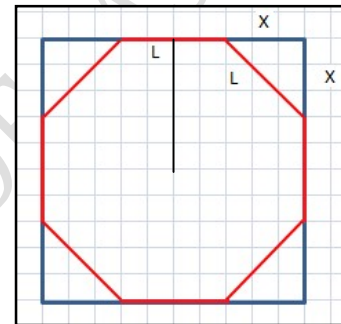
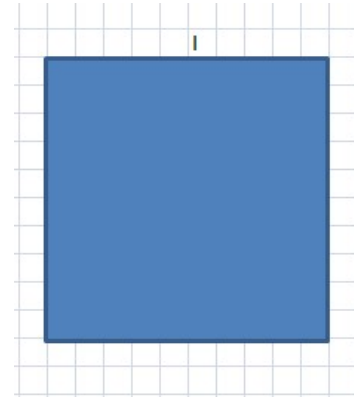
$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

$$L(\text{lado del octógono}) = X\sqrt{2} = (5(2 - \sqrt{2}))\sqrt{2} = 5(2\sqrt{2} - 2) \text{ cm};$$

$$\text{Perímetro} = 8 \cdot 5(2\sqrt{2} - 2) = 40(2\sqrt{2} - 2) \text{ cm};$$

Apotema es igual la mitad del lado del cuadrado 5

$$A = \frac{40(2\sqrt{2} - 2) \cdot 5}{2} = 100(2\sqrt{2} - 2) = 200(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2$$



Área del Octógono en base al cuadrado original quitando los triángulos:

$$\text{Área del cuadrado} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del triángulo} = A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{X \cdot X}{2} = \frac{5(2 - \sqrt{2}) \cdot 5(2 - \sqrt{2})}{2}$$

$$\text{Área de los 4 triángulos} = 4 \cdot \frac{5(2 - \sqrt{2}) \cdot 5(2 - \sqrt{2})}{2} = 50(2 - \sqrt{2})^2$$

$$50(4 + 2 - 4\sqrt{2}) = 50(6 - 4\sqrt{2}) = 100(3 - 2\sqrt{2});$$

$$\text{Área del octógono} = 100 - 100(3 - 2\sqrt{2}) = 100 - 300 + 200\sqrt{2} = -200 + 200\sqrt{2};$$

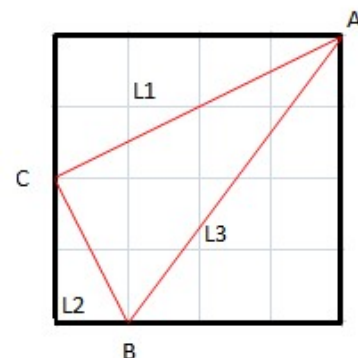
$$\text{Área del octógono} = 200(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2$$

71. Números Reales (radicales)

Calcula el perímetro del triángulo ABC. La medida del lado del cuadrado es de 4cm

Solución:

Usando el teorema de pitágoras hallamos los lados del triángulo ABC



$$L1^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20\text{cm}; L1 = \sqrt{20}\text{cm};$$

$$L2^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5; L2 = \sqrt{5}\text{cm};$$

$$L3^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25; L3 = \sqrt{25} = 5\text{cm};$$

$$\text{Perimetro} = \sqrt{20} + \sqrt{5} + 5 = \sqrt{5}(2 + 1) + 5 = 3\sqrt{5} + 5;$$

72. Números Reales (radicales)

Halla el área de la corona circular comprendida entre dos circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrado de lado 4 cm

Solución:

$$\text{Radio menor; } r = \frac{L}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm};$$

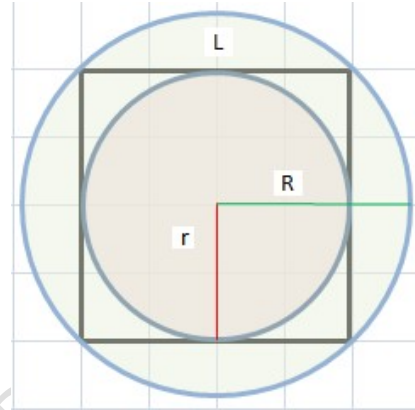
$$\text{Radio mayor } R = \frac{\text{diagonal del cuadrado}}{2};$$

$$D^2 = L^2 + L^2 = 2L^2; D^2 = 2 * 4^2 = 2 * 16 = 32\text{cm};$$

$$D = \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 2^2 * \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{Radio mayor; } R = \frac{2^2 * \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm};$$

$$\text{Area de la corona} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(2\sqrt{2})^2 -$$



11 Números combinatorios (binomio de Newton)

11.1 FACTORIAL DE UN NÚMERO

El factorial de un número n (entero positivo), se define en principio como el producto de todos los números enteros positivos desde 1 (es decir, los números naturales) hasta n.

El factorial de n representa el número de formas distintas de ordenar n objetos distintos (elementos sin repetición)

$$n! = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * 3 * 2 * 1$$

Por definición $0! = 1$

$$\text{Ej. } 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$$

Como distinguir: Permutaciones, Variaciones, Combinaciones

Para distinguir entre permutaciones, variaciones, variaciones con repetición y combinaciones hay que responder las siguientes preguntas

¿Influye el orden?	No	Combinaciones $Cn, m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$			
	Si	¿Intervienen todos los elementos?	Si	Permutaciones $Pn = n!$	
			No	Si	Variaciones con repetición $VRn, m = n^m$
				No	Variaciones $Vn, m = \frac{n!}{(n-m)!}$

12 COMBINACIONES

Las combinaciones son aquellas formas de agrupar los elementos de un conjunto teniendo en cuenta que en las combinaciones no influye el orden de colocación, **dos combinaciones son la misma si contienen los mismos elementos colocados en distinto orden y no puede haber ningún elemento repetido**

Un suceso cambia al cambiar los elementos

Un suceso es el mismo si cambiamos el orden de los elementos

En combinaciones con las 3 letras de la palabra DIA podre formar los siguientes grupos de dos letras:

DI, DA, IA.

No entran todos los elementos (solo entran 2 letra de las 3).

No importa el orden. (DI es el mismo grupo que ID; DA es el mismo grupo que AD)

No se repiten los elementos. (en cada grupo no se repiten las letras)

Cn,m se lee combinaciones de n elementos tomados en grupos de m

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! * (n - m)!}$$

12.1 NUMERO COMBINATORIO

El número combinatorio o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ es el número de subconjuntos de k elementos escogidos de un conjunto n de elementos. n y k son numeros naturales, $k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n - k)!}$$

12.1.1 Propiedades de los números combinatorios

- **Primera propiedad**

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Solo puedo formar un gupo si tomo todos los elementos del conjunto

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! (n - 0)!} = \frac{n!}{1 * n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! (n - n)!} = \frac{n!}{n! * 1} = 1$$

73. Números Reales (Combinatoria)

Comprobar que se cumplen las siguientes igualdades

$$\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$$

Solución:

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0! (3 - 0)!} = \frac{3 * 2 * 1}{1 * 3!} = \frac{3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3! (3 - 3)!} = \frac{3!}{3! * 0!} = \frac{3 * 2 * 1}{(3 * 2 * 1) * 1} = \frac{6}{6} = 1$$

- **Segunda propiedad**

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!} =$$

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)! * m!}$$

74. Números Reales (Combinatoria)

Comprobar que se cumplen las siguientes igualdades

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{5-3}$$

Solución:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! * 2!} = \frac{5 * 4 * 3 * 2 * 1}{(3 * 2 * 1)(2 * 1)} = \frac{120}{12} = 10$$

$$\binom{5}{5-3} = \frac{5!}{(5-3)!(5-(5-3))!} = \frac{5!}{2! * (5-5+3)!} = \frac{5!}{2! * 3!} = \frac{120}{12} = 10$$

- **Tercera propiedad**

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{m+1} = \frac{n!}{(m+1)!(n-(m+1))!} = \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}$$

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}$$

$$\binom{n+1}{m+1} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-(m+1))!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m-1)!}$$

75. Números Reales (Combinatoria)

Comprobar que se cumplen las siguientes igualdades

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{7}{3}$$

Solución:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! * 4!} = \frac{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{2 * 1 * (4 * 3 * 2 * 1)} = \frac{720}{48} = 15$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! * 3!} = \frac{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1 * (3 * 2 * 1)} = \frac{720}{36} = 20$$

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 15 + 20 = 35$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! * 4!} = \frac{7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1 * (4 * 3 * 2 * 1)} = \frac{5040}{144} = 35$$

76. Números Reales (Combinatoria)

Realizar las siguientes operaciones

$$\binom{3}{2} + \binom{6}{3} - \binom{4}{2}$$

Solución:

$$\binom{3}{2} + \binom{6}{3} - \binom{4}{2}$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! * (3-2)!} = \frac{3 * 2 * 1}{2 * 1 * 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! * (6-3)!} = \frac{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{3 * 2 * 1 * (3 * 2 * 1)} = \frac{720}{36} = 20$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = \frac{4 * 3 * 2 * 1}{2 * 1 * (2 * 1)} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\binom{3}{2} + \binom{6}{3} - \binom{4}{2} = 3 + 20 - 6 = 17$$

77. Números Reales (Combinatoria)

Determinar cuántas y cuáles son las distintas combinaciones de letras que podemos formar con las 3 letras de la palabra DIA formando grupos de 2, sabiendo que no pueden repetirse las letras

No entran todos los elementos.

No importa el orden.

No se repiten los elementos.

Solución: Da igual el orden y no deben repetirse luego debo hallar las combinaciones

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! * (3-2)!} = \frac{3 * 2 * 1}{2 * 1 * (1)} = 3$$

DI, DA, IA

78. Números Reales (Combinatoria)

Cuántas columnas de la primitiva tendría que rellenar para conseguir el premio. Sabiendo que de 49 números que componen cada columna he de marcar seis.

Solución:

No entran todos los elementos.

No importa el orden.

No se repiten los elementos

Da igual el orden y no deben repetirse luego debo hallar las combinaciones

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! * (49-6)!} = \frac{49!}{6! * 43!} = \frac{49 * 48 * 47 * 46 * 45 * 44 *}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}$$

$$C_{49,6} = \frac{10068347520}{720} = 13.983.816$$

79. Números Reales (Combinatoria)

En un partido de futbol sala se han presentado 8 futbolistas como solo pueden estar cinco jugadores al mismo tiempo en el campo, de cuántas formas distintas podrán formar el equipo.

No entran todos los elementos.

No importa el orden.

No se repiten los elementos

Solución:

$$C_{8,5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5! * (8-5)!} = \frac{8!}{5! * 3!} = \frac{(8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1)}{(5 * 4 * 3 * 2 * 1) * (3 * 2 * 1)} = \frac{8 * 7 * 6}{3 * 2 * 1} = 56;$$

13 Binomio de Newton

Para calcular las potencias de un binomio hemos utilizado el triángulo de Tartaglia o de Pascal.

Ejemplo : $(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$

El cálculo de las potencias de un Binomio $(a + b)^n$ Binomio de Newton es:

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{(n-k)} a^k$$

Triángulo de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^{(n-0)} b^0 + \binom{n}{1} a^{(n-1)} b^1 + \binom{n}{2} a^{(n-2)} b^2 \dots \binom{n}{n-1} a^{(n-(n-1))} b^{n-1} + \binom{n}{n} a^{(n-n)} b^n$$

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{(n-1)} b^1 + \binom{n}{2} a^{(n-2)} b^2 \dots \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$(a - b)^n = \binom{n}{0} a^{(n-0)} (-b)^0 + \binom{n}{1} a^{(n-1)} (-b)^1 + \binom{n}{2} a^{(n-2)} (-b)^2 + \dots +$$

$$\binom{n}{n-1} a^{(n-(n-1))} (-b)^{n-1} + \binom{n}{n} a^{(n-n)} (-b)^n$$

$$(a - b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{(n-1)} b^1 + \binom{n}{2} a^{(n-2)} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} - \binom{n}{n} b^n$$

80. Números Reales (Combinatoria)

Calcular $(a + b)^4$

Solución:

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0} a^{(4-0)} b^0 + \binom{4}{1} a^{(4-1)} b^1 + \binom{4}{2} a^{(4-2)} b^2 + \binom{4}{3} a^{(4-3)} b^3 + \binom{4}{4} a^{(4-4)} b^4$$

dado que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$; $\binom{4}{0} = \frac{4!}{0! * (4-0)!} = \frac{4!}{0! * 4!} = 1; \dots \dots \dots$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

81. Números Reales (Combinatoria)

Calcular $(a + 3)^4$

Solución:

$$(a + 3)^4 = \binom{4}{0} a^{(4-0)} 3^0 + \binom{4}{1} a^{(4-1)} 3^1 + \binom{4}{2} a^{(4-2)} 3^2 + \binom{4}{3} a^{(4-3)} 3^3$$

$$+ \binom{4}{4} a^{(4-4)} 3^4$$

$$(a + 3)^4 = 1a^4 + 4a^33^1 + 6a^23^2 + 4a^13^3 + 1 * 3^4;$$

$$(a + 3)^4 = a^4 + 4a^33 + 6a^29 + 4a27 + 81 = a^4 + 12a^3 + 54a^2 + 108a + 81$$

82. Números Reales (Combinatoria)Calcular $(a - 3)^4$ *Solución:*Al ser el binomio $(a - 3)$ en la formula el segundo miembro será (-3)

$$\begin{aligned}
 (a - 3)^4 &= \binom{4}{0} a^{(4-0)} (-3)^0 + \binom{4}{1} a^{(4-1)} (-3)^1 + \binom{4}{2} a^{(4-2)} (-3)^2 + \\
 &\binom{4}{3} a^{(4-3)} (-3)^3 + \binom{4}{4} a^{(4-4)} (-3)^4 \\
 (a - 3)^4 &= 1a^4 + 4a^3(-3)^1 + 6a^2(-3)^2 + 4a^1(-3)^3 + 1 * (-3)^4; \\
 (a - 3)^4 &= a^4 + 4a^3(-3) + 6a^2(+9) + 4a(-27) + 81 \\
 (a - 3)^4 &= a^4 - 12a^3 + 54a^2 - 108a + 81
 \end{aligned}$$

83. Números Reales (Combinatoria)Calcular $\left(\frac{1}{2} + x\right)^3$ *Solución:*

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{2} + x\right)^3 &= \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-0)} (x)^0 + \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-1)} (x)^1 + \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-2)} (x)^2 \\
 &+ \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-3)} (x)^3 \\
 \left(\frac{1}{2} + x\right)^3 &= 1 \left(\frac{1}{2}\right)^{(3)} + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{(2)} (x)^1 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{(1)} (x)^2 + 1 \left(\frac{1}{2}\right)^{(0)} (x)^3 \\
 \left(\frac{1}{2} + x\right)^3 &= 1 \left(\frac{1}{8}\right) + 3 \left(\frac{1}{4}\right) x + 3 \left(\frac{1}{2}\right) x^2 + 1x^3 \\
 \left(\frac{1}{2} + x\right)^3 &= \left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{4}\right) x + \left(\frac{3}{2}\right) x^2 + x^3
 \end{aligned}$$

84. Números Reales (Combinatoria)Calcular el tercer y cuarto termino del desarrollo de la potencia $(a + b)^5$ *Solución:*El 3º termino será $\binom{5}{3-1}$;

$$(a + b)^5; \binom{5}{3-1} a^{(5-(3-1))} b^{(3-1)} = \binom{5}{2} a^3 b^2 = ;$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n - k)!}; \quad \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! * (5 - 2)!} = \frac{5!}{2! * 3!} = \frac{5 * 4 * 3 * 2 * 1}{(2 * 1) * (3 * 2 * 1)} = 10;$$

$$\text{el 3º termino será } \binom{5}{2} a^3 b^2 = 10a^3 b^2$$

El 4º termino será $\binom{5}{4-1}$;

$$\text{el 4º termino será } \binom{5}{3} a^2 b^3 = 10a^2 b^3$$

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4 b^1 + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5a^1 b^4 + 1b^5$$

85. Números Reales (Combinatoria)

Calcular el sexto termino del desarrollo de la potencia $(\sqrt{2} - 2\sqrt{8})^{10}$

Solución:

El 6º termino será $\binom{10}{6-1}$;

$$-\binom{10}{6-1}\sqrt{2}^{(10-(6-1))}(2\sqrt{8})^{(6-1)} = -\binom{10}{5}\sqrt{2}^5(2\sqrt{8})^5; \text{ negativo pues 2º miembro es impar}$$

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5! * (10-5)!} = \frac{5!}{5! * 5!} = \frac{10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{(5 * 4 * 3 * 2 * 1)(5 * 4 * 3 * 2 * 1)} = 252$$

$$\text{El 6º termino será } -\binom{10}{5}\sqrt{2}^5(2\sqrt{8})^5 = -252\sqrt{2}^5(2\sqrt{8})^5 = -(252 * \sqrt{2}^5)(2^5\sqrt{8}^5) =$$

$$-(252 * 2^2\sqrt{2})(2^5\sqrt{2^{3^5}}) = -(252 * 2^2\sqrt{2})(2^5\sqrt{2^{15}}) = -252 * 2^2\sqrt{2} * (2^5 * 2^7\sqrt{2}) =$$

$$-252 * 2^{14}\sqrt{2} * \sqrt{2} = -252 * 2^{14} * 2 = -252 * 2^{15} = -8.257.536$$

14 Logaritmos:

Dados dos números reales positivos donde $a \neq 1$, el logaritmo en base a de b, es el exponente al que hay que elevar a para que nos de b.

$$\log_a b = c \Rightarrow a^c = b$$

Cuando la base es 10 se llaman logaritmos decimales (se escribe log b)

Cuando la base es el número e los logaritmos se llaman Neperianos (se escribe ln b)

Ejemplo:

$$\log_2 8 = 3; 2^3 = 8$$

$$\log 100 = 2 \text{ pues } 10^2 = 100;$$

$$\ln e = 1 \text{ pues } e^1 = e;$$

14.1 Propiedades de los logaritmos

- El logaritmo en cualquier base de 1 es 0 pues cualquier número elevado a 0 da 1

$$\log_2 1 = 0; 2^0 = 1$$

- El logaritmo de la base es 1 pues cualquier número elevado a 1 da ese mismo número.

$$\log_a a = 1; a^1 = a$$

- El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de cada uno de los factores.

$$\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c;$$

- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c;$$

- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la potencia.

$$\log_a b^n = n * \log_a b;$$

- Cambio de base:

Ejemplo: Si se quiere cambiar la base de un logaritmo de base a a otro de base 10

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a};$$

86. Números Reales (Logaritmos)

Hallar el valor de los siguientes logaritmos, aplicando sus propiedades y dejando indicado el resultado final

$$\log_8 32; \log_2 32; \log_3 1000; \log_5 32; \log_{32} 16; \log_2 200; \log_8 1; \log_8 8;$$

Solución:

$$\log_8 32 = x; 8^x = 32; 2^{3x} = 2^5; 3x = 5; x = \frac{5}{3};$$

$$\log_2 32 = x; 2^x = 32; 2^x = 2^5; x = 5;$$

$$\log_3 1000 = x; 3^x = 1000;$$

$$\log_5 32 = x; 5^x = 32; 5^x = 2^5;$$

$$\log_{32} 16 = x; 32^x = 16; 2^{5x} = 2^4; 5x = 4; x = \frac{4}{5};$$

$$\log_2 200 = x; 2^x = 200; 2^x = 2^3 \cdot 5^2;$$

$$\log_8 1 = x; 8^x = 1; x = 0;$$

$$\log_8 8 = x; 8^x = 8; x = 1;$$

87. Números Reales (Logaritmos)

Hallar el valor de los siguientes logaritmos, aplicando sus propiedades

$$\log_2 16; \log_3 81; \log_5 625; \log_7 343; \log_6 36; \log 1000;$$

Solución:

$$\log_2 16; \log_2 16 = x; 2^x = 16; 2^x = 2^4; x = 4;$$

$$\log_3 81; \log_3 81 = x; 3^x = 81; 3^x = 3^4; x = 4;$$

$$\log_5 625; \log_5 625 = x; 5^x = 625; 5^x = 5^4; x = 4;$$

$$\log_7 343; \log_7 343 = x; 7^x = 343; 7^x = 7^3; x = 3;$$

$$\log_6 36; \log_6 36 = x; 6^x = 36; 6^x = 6^2; x = 2;$$

$$\log 1000; \log 1000 = x; 10^x = 1000; 10^x = 10^3; x = 3;$$

88. Números Reales (Logaritmos)

Hallar el valor de los siguientes logaritmos, aplicando sus propiedades.

$$\log_{1/2} 32; \log_{\sqrt{5}} 625; \log_2 1/16$$

Solución:

$$\log_{1/2} 32; \log_{1/2} 32 = x; (1/2)^x = 32; (1/2)^x = 2^5; 2^{-x} = 2^5; x = -5;$$

$$\log_{\sqrt{5}} 625; \log_{\sqrt{5}} 625 = x; \sqrt{5}^x = 625; (5^{1/2})^x = 5^4; 5^{x/2} = 5^4; \frac{x}{2} = 4; x = 8;$$

$$\log_2 \frac{1}{16}; \log_2 \frac{1}{16} = x; 2^x = \frac{1}{16}; 2^x = \frac{1}{2^4}; 2^x = 2^{-4}; x = -4;$$

89. Números Reales (Logaritmos)

Hallar el valor de los siguientes logaritmos, aplicando sus propiedades

$$\log_2(2x - 3) = 3;$$

Solución:

$\log_2(2x - 3) = 3$; por definición $2x - 3$ ha de ser un número positivo

$$\log_2(2x - 3) = 3; 2^3 = 2x - 3; 8 = 2x - 3; 2x = 8 + 3; 2x = 11; x = \frac{11}{2};$$

Comprobación

Comprobamos si $(2x - 3)$ es positivo para este valor

$$2\left(\frac{11}{2}\right) - 3 = \frac{22}{2} - 3 = 11 - 3 = 8; \text{ que es positivo luego está bien resuelto}$$

90. Números Reales (Logaritmos)

Hallar el valor de los siguientes logaritmos, aplicando sus propiedades

$$\log_2(x - 1,5) = -1;$$

Solución:

$\log_2(x - 1,5) = -1$; $x - 1,5$ ha de ser positivo

$$\log_2(x - 1,5) = -1; 2^{-1} = x - 1,5; \frac{1}{2} = x - 1,5; x = \frac{1}{2} + 1,5; x = 0,5 + 1,5; x = 2;$$

Comprobación

Comprobamos si $x - 1,5$ es positivo para este valor

$$2 - 1,5 = 0,5; \text{ es positivo luego está bien resuelto.}$$

91. Números Reales (Logaritmos)

Hallar el valor de los siguientes logaritmos, aplicando sus propiedades

$$\log_2 4x = 2;$$

Solución:

$\log_2 4x = 2$; por definición de logaritmo $4x$ ha de ser un número positivo

$$\log_2 4x = 2; 2^2 = 4x; 2^2 = 2^2 x; x = 1$$

Comprobación

Comprobamos si $4x$ es positivo para este valor de x ;

$$4 * 1 = 4; \text{ es positivo luego está bien resuelto;}$$

92. Números Reales (Logaritmos)

Hallar el valor de los siguientes logaritmos, aplicando sus propiedades

$$\log_2(x^2 - 8) = 0;$$

Solución:

$$\log_2(x^2 - 8) = 0; 2^0 = x^2 - 8 \text{ y } 2^0 = 1 \Rightarrow x^2 - 8 = 1; x^2 = 9; x = \pm 3;$$

Comprobación

Comprobamos si $x^2 - 8$ es positivo para estos valores de x ;

Comprobamos si $x^2 - 8$ es positivo para estos valores.

Para $x = 3$, $3^2 - 8 = 1$ positivo esta bien resuelto;

Para $x = -3$, $(-3)^2 - 8; 9 - 8 = 1$ positivo esta bien resuelto;

93. Números Reales (Logaritmos)

Calcular el $\log_3 4$, sabiendo que $\log_2 3 = 1,5850$;

Solución:

Hacemos un cambio de base $\log_3 4 = \log_2 4 / \log_2 3$

$\log_3 4 = \log_2 4 / \log_2 3$; dado que $\log_2 4 = 2$ y $\log_2 3 = 1,5850$

$$\log_3 4 = \frac{2}{1,5850} = 1,2618; \log_3 4 = 1,2618$$

94. Números Reales (Logaritmos)

Si $\log e = 0,4343$. ¿ Cuanto vale $\ln 10$?

Solución:

Hacemos un cambio de base $\ln 10 = \log 10 / \log e$; dado que $\log 10 = 1$ y $\log e = 0,4343$;

$$\ln 10 = \frac{1}{0,4343} = 2,3025; \ln 10 = 2,3025$$

95. Números Reales (Logaritmos)

Si $\log 2 = 0,3010$. Hallar el valor de los siguientes logaritmos

$\log 20$; $\log 0,125$; $\log 1,250$; $\log 0,04$;

Solución:

$\log 20 = \log 2 * 10$; $\log 20 = \log 2 + \log 10 = \log 2 + 1$; $\log 20 = 0,3010 + 1$;

$$\log 20 = 1,3010;$$

$\log 0,125 = \log \frac{1}{8}$; $\log 0,125 = \log 1 - \log 8$; $\log 0,125 = 0 - 3 * \log 2$;

$$\log 0,125 = 3 * 0,3010 = 0,903; \log 0,125 = 0,903;$$

$\log 1,250 = \log \frac{10}{8} = \log 10 - \log 8 = 1 - \log 2^3 = 1 - 3\log 2$;

$$\log 1,250 = 1 - 3 * 0,3010 = 1 - 0,903; \log 1,250 = 0,097;$$

$\log 0,04 = \log \frac{4}{100} = \log 4 - \log 100 = \log 2^2 - \log 100 = 2 \log 2 - \log 100$;

$$\log 0,04 = 2 * 0,3010 - 2 = 0,602 - 2; \log 0,04 = -1,398;$$

15 Aplicaciones de las funciones exponenciales

15.1 Crecimiento exponencial

El crecimiento de una población inicial P_0 ; P población después de un periodo determinado

K = constante de crecimiento; t = periodo

$$P = P_0 * K^t;$$

15.2 Interés compuesto

La función de interés compuesto $C_f = C_i * \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$ es una función exponencial

donde C_f = Capital final; C_i = Capital inicial (capital que se invierte);

r el rédito (% al que se invierte el capital); t es el tiempo que está invertido el capital

96. Números Reales (Interés compuesto)

Un banco ofrece pagar un interés del 5% si se depositan 3000 € durante 10 años.

- a) ¿Qué dinero obtendré al cumplir el periodo?
 b) ¿Cuánto tiempo debía tener el dinero para conseguir la misma cantidad si el interés fuera del 6%?

Solución:

$$a) C_f = C_i * \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t; C_f = 3000 * \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10}; C_f = 3000 * \left(\frac{105}{100}\right)^{10}$$

$$C_f = 3000 * 1,05^{10} = 3000 * 1,6 = 4.886,68 \text{ €}; C_f = 4.886,68 \text{ €}$$

$$b) C_f = C_i * \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t; 4886,68 = 3000 * \left(1 + \frac{6}{100}\right)^x; \frac{4886,68}{3000} = (1,06)^x$$

$1,63 = (1,06)^x$; para resolverlo aplicamos logaritmos

$$\log 1,63 = \log (1,06)^x; \log 1,63 = x \log 1,06; 0,2122 = x * 0,0253; x = \frac{0,2122}{0,0253} = 8,39 \text{ años}$$

97. Números Reales

Comprobar que el número áureo verifica las siguientes igualdades

$$a) \phi^2 = \phi + 1; \quad b) \phi - 1 = \frac{1}{\phi}; \quad c) \phi^3 = \frac{\phi + 1}{\phi - 1};$$

Solución:

$$\text{Número áureo } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033988749894;$$

$$a) \phi^2 = \phi + 1; \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1;$$

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}{4} = \frac{1^2 + \sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 + 5 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{5}}{2};$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{1 + \sqrt{5} + 2}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ Se cumple}$$

$$b) \phi - 1 = \frac{1}{\phi}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}};$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1 + \sqrt{5} - 2}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \text{racionalizamos} \frac{2(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{1^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{1 - 5} =$$

$$\frac{2 - 2\sqrt{5}}{-4} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ se cumple}$$

$$c) \phi^3 = \frac{\phi + 1}{\phi - 1} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^3 = \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1} =$$

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^3 = \frac{16 + 8\sqrt{5}}{8} = 2 + \sqrt{5};$$

$$\frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{5} + 2}{2}}{\frac{1 + \sqrt{5} - 2}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5} + 2}{1 + \sqrt{5} - 2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{4\sqrt{5} + 8}{5 - 1} = \frac{4\sqrt{5} + 8}{4} = 2 + \sqrt{5}$$

98. Números Reales

Se quiere enlosar una plaza cuadrada sabiendo que el lado está comprendido entre 20 y 21m. El coste de la losa y la instalación es de 70 € el metro cuadrado. Si se cuenta con un presupuesto de 30000€. Calcular el coste máximo y mínimo. ¿Se podrá realizar la obra?

Solucion:

Si mide 20m de lado tendremos una superficie de 400 m²; Si el m² sale a 70€.

La obra costaría 28000€;

Si mide 21m de lado tendremos una superficie de 441 m²; Si el m² sale a 70€.

La obra costaría 30870€;

No se podría empezar la obra pues es posible que faltara dinero.