

Ecuaciones, sistemas e inecuaciones

INDICE

Contenido

1	POLINOMIOS	2
2	OPERACIONES CON POLINOMIOS	2
2.1	SUMA O RESTA DE POLINOMIOS	2
2.2	MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS	2
2.3	DIVISIÓN DE POLINOMIOS	2
2.4	REGLA DE RUFFINI	6
2.5	TEOREMA DEL RESTO	7
2.6	RAÍCES DE UN POLINOMIO	10
3	FRACCIONES ALGEBRAICAS.....	14
3.1	FRACCIONES EQUIVALENTES	14
3.2	SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.....	14
3.3	OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS.....	16
4	ECUACIONES POLINOMICAS.....	21
5	ECUACIONES RACIONALES	23
6	ECUACIONES CON RADICALES.....	24
7	ECUACIONES LOGARÍTMICAS	25
8	ECUACIONES EXPONENCIALES.....	27
9	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	29
9.1	MÉTODO DE GAUSS.....	33
10	INECUACIONES.....	38
10.1	INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA.....	38
10.2	INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS.....	42

1 Polinomios

Un polinomio está formado por a suma de varios monomios

$$7x^4y^2 + 3x^2y - 7x^7y^1$$

El grado del polinomio es igual al del monomio de mayor grado.

En nuestro ejemplo es 8 (7+1) pues el monomio de mayor grado es $7x^7y^1$

El valor numérico de un polinomio para un determinado valor de la variable se halla sustituyendo la variable por dicho valor

El valor numérico del polinomio $x^3 + 3x^2 - 2x$ para un valor de $x=1$ será $1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1+3-1 = 3$

2 Operaciones con polinomios

2.1 Suma o resta de polinomios

Suma o resta de monomios. Solo se pueden sumar los monomios que sean semejantes (tiene la misma parte literal)

Para sumar o restar polinomios se suman los monomios equivalentes.

Ejemplo:

$$(8x^3y^2 + 3x^2y^2 - 4xy^2 + 8x) + (3x^3y^2 + 2x^2y^2 - 2xy^2 + 3y)$$

Agrupamos los monomios semejantes

$$(8x^3y^2 + 3x^3y^2) + (3x^2y^2 + 2x^2y^2) + (-4xy^2 - 2xy^2) + 8x + 3y;$$

$$(11x^3y^2 + 5x^2y^2 - 6xy^2 + 8x + 3y)$$

2.2 Multiplicación de polinomios

Para multiplicar monomios se multiplica la parte numérica y la parte literal

Para multiplicar dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, se multiplican cada uno de los monomios de $P(X)$ por todos los monomios de $Q(X)$ y se suman los monomios equivalentes

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} P(x) \quad 2x^3 + x^2 - 3x + 4 \\ Q(x) \quad \quad \quad 3x + 2 \\ \hline \quad \quad +4x^3 + 2x^2 \quad -6x + 8 \\ 6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \quad +12x \\ \hline 6x^4 + 7x^3 - 7x^2 \quad +6x \quad +8 \end{array}$$

2.3 División de polinomios

Para dividir polinomios ha de cumplirse que el grado del dividendo sea igual o mayor que el del divisor.

Ejemplo: Dividir el polinomio $P(x) \quad 2x^3 + x^2 - 3x + 4$ por $Q(x) \quad x^2 + 2$

$$\begin{array}{r}
 \text{D= dividendo} \swarrow \quad \quad \quad \searrow \text{d= divisor} \\
 2x^3 + x^2 - 3x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 2 \\ \hline 2x + 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \swarrow \\ \rightarrow \text{C=Cociente} \end{array} \\
 \hline
 -2x^3 \quad -4x \\
 \hline
 0 + x^2 - 7x + 4 \\
 \hline
 -x^2 \quad -2 \\
 \hline
 0 - 7x + 2 \rightarrow \text{R=Resto}
 \end{array}$$

1. Dividimos el termino de mayor grado del dividendo por el termino de mayor grado del divisor $2x^3 : x^2 = 2x$
2. El valor que hemos obtenido lo ponemos en el cociente. Lo multiplicamos por el divisor y lo ponemos debajo del dividendo cambiado de signo
3. Sumamos los dos polinomios
4. Repetimos el proceso anterior hasta que el grado del dividendo sea menos que el grado del divisor
5. El último polinomio es el resto
6. Con la propiedad de la división comprobamos que la división es correcta $D=d \cdot C + R$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2 \\
 2x + 1 \\
 \hline
 x^2 + 2 \\
 \hline
 2x^3 + 4x \\
 \hline
 2x^3 + x^2 + 4x + 2 \\
 \hline
 -7x + 2 \\
 \hline
 2x^3 + x^2 - 3x + 4
 \end{array}$$

1. Ejercicio polinomios

Dividir los siguientes polinomios $(6x^4 + 8x^2 + 4x + 20) : (2x^2 + 4x + 2)$

Solución

$$\begin{array}{r}
 6x^4 + 8x^2 + 4x + 20 \quad \left| \begin{array}{l} 2x^2 + 4x + 2 \\ \hline 3x^2 - 6x + 13 \end{array} \right. \\
 \hline
 -6x^4 - 12x^3 - 6x^2 \\
 \hline
 0 - 12x^3 + 2x^2 + 4x + 20 \\
 \hline
 + 12x^3 + 24x^2 + 12x \\
 \hline
 0 + 26x^2 + 16x + 20 \\
 \hline
 - 26x^2 - 52x - 26 \\
 \hline
 0 - 36x - 6 \text{ Resto}
 \end{array}$$

Prueba

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 4x + 2 \\
 3x^2 - 6x + 13 \\
 \hline
 26x^2 + 52x + 26 \\
 \hline
 -12x^3 - 24x^2 - 12x \\
 \hline
 + 6x^4 + 12x^3 + 6x^2 \\
 \hline
 + 6x^4 0 - 8x^2 + 40x + 26 \\
 \hline
 -36x - 6 \\
 \hline
 + 6x^4 + 8x^2 + 4x + 20
 \end{array}$$

2. Ejercicio polinomios

El dividendo de una división de polinomios es $P(x) = x^5 - 2x^3 - x^2$,

$P(x)$ el cociente $C(x) = x^2 - 2$ y el resto $R(x) = -2$. ¿Cuál será el divisor?

Solución

$$D = d * C + R; \quad d = \frac{D - R}{C}$$

$$D - R = x^5 - 2x^3 - x^2 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 2x^3 - x^2 + 2 & x^2 - 2 \\ \hline -x^5 + 2x^3 & \\ \hline 0 & 0 \quad -x^2 + 2 \\ & +x^2 - 2 \\ \hline 0 & 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^3 - 1 \text{ Divisor} \end{array}$$

Prueba

$$\begin{array}{r} x^5 - 2x^3 - x^2 \\ -x^5 \quad \quad + x^2 \\ \hline 0 - 2x^3 \quad 0 \\ +2x^3 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 1 & \\ \hline x^2 - 2 & \end{array}$$

3. Ejercicio polinomios

El divisor de una división de polinomio es $Q(x) = 2x^2 - 7$; el cociente $C(x) = x^3 - 2$;

y el resto $R(x) = x - 2$. ¿Cuál es el dividendo?

Solución

$$D = d * C + R$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7 \\ x^3 - 2x \\ \hline -4x^3 + 14x \\ 2x^5 - 7x^3 \\ \hline 2x^5 - 11x^3 + 14x \\ \hline \quad \quad +x - 2 \\ \hline 2x^5 - 11x^3 + 15x - 2 \text{ Dividendo} \end{array}$$

Prueba

$$\begin{array}{r} 2x^5 - 11x^3 + 15x - 2 \\ -2x^5 + 7x^3 \\ \hline 0 - 4x^3 + 15x \\ +4x^3 - 14x \\ \hline 0 + x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2x^2 - 7 & \\ \hline x^3 - 2x & \end{array}$$

4. Ejercicio polinomios

Ejecutar la siguiente división

$$(4x^5 + 20x^4 - 18x^3 - 28x^2 + 28x - 6) : (x^2 + 5x - 3)$$

Solución

|

$$\begin{array}{r}
 4x^5 + 20x^4 - 18x^3 - 28x^2 + 28x - 6 \\
 \hline
 -4x^5 - 20x^4 + 12x^3 \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad -6x^3 - 28x^2 + 28x - 6 \\
 \quad \quad \quad +6x^3 + 30x^2 - 18x \\
 \quad \quad \quad \hline
 0 \quad +2x^2 + 10x - 6 \\
 \quad \quad \quad -2x^2 - 10x + 6 \\
 \quad \quad \quad \hline
 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x^2 + 5x - 3 \\
 \hline
 4x^3 - 6x + 2
 \end{array}$$

Prueba

$$\begin{array}{r}
 4x^3 - 6x + 2 \\
 \hline
 x^2 + 5x - 3 \\
 \hline
 -12x^3 \qquad +18x - 6 \\
 +20x^4 \qquad -30x^2 + 10x \\
 +4x^5 \qquad -6x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 4x^5 + 20x^4 - 18x^3 - 28x^2 + 28x - 6
 \end{array}$$

5. Ejercicio polinomiosEjecutar la siguiente division $(6x^4 + 3x^3 - 2x) : (3x^2 + 2)$ *Solución*

$$\begin{array}{r}
 6x^4 + 3x^3 - 2x \quad \bigg| \quad 3x^2 + 2 \\
 \hline
 -6x^4 \qquad -4x^2 \\
 \hline
 0 \quad +3x^3 - 4x^2 - 2x \\
 \quad \quad -3x^3 \qquad -2x \\
 \quad \quad \hline
 0 \quad -4x^2 - 4x \\
 \qquad \quad +4x^2 \qquad +\frac{8}{3} \\
 \qquad \quad \hline
 0 \quad -4x + \frac{8}{3}
 \end{array}$$

Prueba

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + x - \frac{4}{3} \\
 \hline
 3x^2 + 2 \\
 \hline
 4x^2 + 2x - \frac{8}{3} \\
 6x^4 + 3x^3 - 4x^2 \\
 \hline
 6x^4 + 3x^3 \quad 0 \quad +2x - \frac{8}{3} \\
 \qquad \quad -4x + \frac{8}{3} \\
 \hline
 6x^4 + 3x^3 - 2x \quad 0
 \end{array}$$

2.4 Regla de ruffini

La regla de Ruffini facilita el cálculo rápido de la división de cualquier polinomio entre un binomio de la forma $(x-a)$ donde a es un numero entero

Ejemplo: $(6x^4 + 3x^3 - 2x): (x + 2)$

	6	3	0	2	0
- 2		- 12	18	-36	+ 68
	6	-9	+18	-34	+ 68 resto

El resultado del cociente será $6x^3 - 9x^2 + 18x - 34$

El valor del resto 68

- 1 Se colocan de mayor a menor grado los valores numéricos (coeficiente) de cada monomio, con su signo correspondiente; rellenando con ceros los lugares de los términos que falten.
- 2 A la izquierda de la cruz se pone el termino independiente del divisor cambiado de signo
- 3 En la fila de resultado bajamos el primer coeficiente
- 4 Multiplica el termino independiente del divisor en este caso (-2) por el primer coeficiente (6) y se pone debajo de segundo término.
- 5 Se suman los dos términos $(3-12)$ y se pone en la parte de resultado -9
- 6 Multiplicamos el siguiente $(-2 \cdot -9 = +18)$, y lo ponemos debajo del siguiente termino
- 7 Se suman los dos términos $(0+18)$ y se pone en la parte de resultado $+18$
- 8 Multiplicamos el siguiente $(-2 \cdot 18 = -36)$, y lo ponemos debajo del siguiente termino
- 9 Se suman los dos términos $(2-36)$ y se pone en la parte de resultado -34
- 10 Multiplicamos el siguiente $(-2 \cdot -34 = +68)$, y lo ponemos debajo del siguiente termino
- 11 Se suman los dos términos $(0+68)$ y se pone en la parte de resultado 68 este es el resto
- 12 El cociente tendrá un grado menos del que tenía el divisor

6. Ejercicio polinomios

Realizar la siguiente división $(x^3 - 3x^2 + x + 2): (x - 3)$

Solución

	+1	- 3	+ 1	+ 2
+3		+ 3	0	+ 3
	+1	0	+ 1	+ 5 resto

El cociente será $x^2 + 1$

7. Ejercicio polinomios

Realizar la siguiente división y haz la prueba $(3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2): (x + 2)$

Solución

	+3	+ 5	- 3	0	+ 2
-2		- 6	+ 2	+ 2	- 4
	+3	- 1	- 1	+ 2	- 2 resto

El cociente será $3x^3 - x^2 - x + 2$

Realizamos la prueba

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - x^2 - x + 2 \\
 \underline{x + 2} \\
 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 2x + 4 \\
 \underline{-x^3 - x^2 + 2x} \\
 3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 0 + 4 \\
 \underline{-2} \\
 3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2
 \end{array}$$

8. Ejercicio polinomios

Realizar la siguiente division $(x^4 - 3x^3 + 5):(x + 2)$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & 0 & 0 & 5 \\
 -2 & & -2 & +10 & -20 & +40 \\
 \hline
 & +1 & -5 & +10 & -20 & +45 \text{ resto}
 \end{array}$$

El cociente será $x^3 - 5x^2 + 10x - 20$

2.5 Teorema del resto

El valor numérico de un polinomio $P(x)$ para un valor de $x = a$ coincide con el resto de la division de $P(x):(x - a)$

Ejemplo:

El valor numérico del polinomio $x^4 - 3x^3 + 5$; para $x = -2$

se halla sustituyendo la x por su valor

$$(-2)^4 - 3(-2)^3 + 5 = 16 + 24 + 5 = 45$$

La división del polinomio $(x^4 - 3x^3 + 5):(x + 2)$ dará de resto 45

Aplicamos ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & 0 & 0 & 5 \\
 -2 & & -2 & +10 & -20 & +40 \\
 \hline
 & +1 & -5 & +10 & -20 & +45 \text{ resto}
 \end{array}$$

9. Ejercicio polinomios

Realizar la siguiente division y comprueba el teorema del resto

$(4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - x^2 - 8x + 1):(x + 2)$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 4 & +3 & -8 & -1 & -8 & +1 \\
 -2 & & -8 & +10 & -4 & +10 & -4 \\
 \hline
 & +4 & -5 & +2 & -5 & +2 & -3 \text{ resto}
 \end{array}$$

Cociente $4x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

Teorema del resto

$4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - x^2 - 8x + 1$ para $x = -2$

$$\begin{aligned}
 4(-2)^5 + 3(-2)^4 - 8(-2)^3 - (-2)^2 - 8(-2) + 1 = \\
 -128 + 48 + 64 - 4 + 16 + 1 = -3
 \end{aligned}$$

10. Ejercicio polinomios

Calcula el valor de m para que la division sea exacta ($x^5 - 2x^3 - 8x^2 + mx + 2$): $(x - 2)$

Solución

Según el teorema del resto el valor del polinomio para $x=2$ debe ser 0

$$2^5 - 2 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2 + m \cdot 2 + 2 = 0; \quad 32 - 16 - 32 + 2m + 2 = 0;$$

$$-16 + 2 + 2m = 0; \quad 2m = 14; \quad \mathbf{m = 7}$$

Prueba ($x^5 - 2x^3 - 8x^2 + 7x + 2$): $(x - 2)$

	1	0	-2	-8	+7	+2
+2		+2	+4	+4	-8	-2
	+1	+2	+2	-4	-1	0 resto

11. Ejercicio polinomios

Calcular el valor de a para que el valor numérico del polinomio $x^3 - 2x^2 + 2x + a$; sea 0 para $x = 02$;

Solución

Según el teorema del resto el valor del polinomio para $x=2$ sea 0 debe cumplirse

$$x^3 - 2x^2 + 2x + a; \quad 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + a = 0 \Rightarrow 8 - 8 + 4 + a = 0$$

$$4 + a = 0; \quad \mathbf{a = -4}$$

12. Ejercicio polinomios

Hallar un polinomio de segundo grado que sea divisible por $(X - 1)$ y que al dividirlo por $(X + 1)$ y $(X - 2)$ de de resto respectivamente 10 y 5

Solución

Aplicamos el teorema del resto

El polinomio sería $ax^2 + bx + c$

$$\text{Para } x = 1 \text{ el resto debería ser } 0 \Rightarrow a1^2 + b1 + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$\text{Para } x = -1 \text{ el resto será } 10 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1) + c = 10 \Rightarrow a - b + c = 10;$$

$$\text{Para } x = 2 \text{ el resto será } 5 \Rightarrow a2^2 + b2 + c = 5 \Rightarrow 4a + 2b + c = 5$$

Resolvemos las ecuaciones dos a dos

$$1^a \quad a + b + c = 0;$$

$$2^o \quad a - b + c = 10;$$

$$3^a \quad 4a + 2b + c = 5;$$

$$a + b + c = 0;$$

$$a - b + c = 10;$$

$$a - b + c = 10; \text{ multiplicamos por } 2 \Rightarrow 2a - 2b + 2c = 20;$$

$$4a + 2b + c = 5;$$

$$2a + 0 + 2c = 10;$$

$$2a + 2c = 10;$$

$$6a + 3c = 25;$$

$$6a + 0 + 3c = 25;$$

Multiplicamos $2a + 2c = 10$; por $-3 \Rightarrow$

$$-6a - 6c = -30;$$

$$6a + 3c = 25;$$

$$0 - 3c = -5; \Rightarrow c = -\frac{5}{-3}; \quad \mathbf{c = \frac{5}{3}}$$

Hallamos el resto de valores sustituyendo el valor de c en cualquiera de las ecuaciones ej.

$$2a + 2c = 10; 2a + 2 * \frac{5}{3} = 10; 2a = 10 - \frac{10}{3} =; 2a = \frac{20}{3}; a = \frac{10}{3}; a = \frac{10}{3};$$

Sustituyo los valores de a y c en cualquiera de las ecuaciones

iniciales $1^a, 2^a$ o 3^a ;

$$a + b + c = 0; \Rightarrow \frac{10}{3} + b + \frac{5}{3} = 0; b = -\frac{10}{3} - \frac{5}{3}; b = -\frac{15}{3}; b = -5$$

$$\text{El polinomio será } ax^2 + bx + c; \frac{10}{3}x^2 - 5x + \frac{5}{3};$$

Prueba

$$x = 1; \frac{10}{3} * 1^2 - 5 * 1 + \frac{5}{3}; \frac{10}{3} - 5 + \frac{5}{3} = \frac{10}{3} - \frac{15}{3} + \frac{5}{3} = 0;$$

$$x = -1; \frac{10}{3} * (-1)^2 - 5 * (-1) + \frac{5}{3}; \frac{10}{3} + 5 + \frac{5}{3} = \frac{10}{3} + \frac{15}{3} + \frac{5}{3} = \frac{30}{3} = 10;$$

$$x = 2; \frac{10}{3} * 2^2 - 5 * 2 + \frac{5}{3}; \frac{40}{3} - 10 + \frac{5}{3} = \frac{40}{3} - \frac{30}{3} + \frac{5}{3} = \frac{15}{3} = 5;$$

13. Ejercicio polinomios

Calcula el valor de a, b y c para que se cumpla la igualdad:

$$(ax - 7) * (5x + b) = cx^2 - 7x - 14$$

Solución

Hacemos la multiplicación del primer termino y lo dejamos con la misma estructura del segundo término:

$$5ax^2 - 35x + abx - 7b = 5ax^2 + x(-35 + ab) - 7b;$$

$$\text{Igualamos terminos; } 5ax^2 + x(-35 + ab) - 7b = cx^2 - 7x - 14;$$

Para que la igualdad se cumpla 5a a de ser igual a c; $-35 + ab = -7$; $-7b = -14$;

$$5a = c;$$

$$-35 + ab = -7;$$

$$-7b = -14; \Rightarrow b = 2;$$

$$\text{Sustituyo; } -35 + ab = -7; -35 + 2a = 7; 2a = -7 + 35; a = \frac{28}{2}; a = 14;$$

$$\text{Sustituyo; } 5a = c; 5 * 14 = c; c = 60;$$

14. Ejercicio polinomios

Si en una división de polinomios el grado del dividendo es 6 y el del divisor 3. ¿Cuál será el grado del cociente y del resto?.

Solución

El grado del cociente será 3 y el del resto puede ser 0,1,2 Ej.

Resto grado 0	Resto grado 1	Resto grado 2
$\begin{array}{r} x^6 \quad -2 \quad \quad x^3 \\ -x^6 \quad \quad \quad x^3 \\ \hline 0 \quad -2 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^6 + x - 2 \quad \quad x^3 \\ -x^6 \quad \quad \quad x^3 \\ \hline 0 \quad +x - 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^6 + x^2 + x - 2 \quad \quad x^3 \\ -x^6 \quad \quad \quad x^3 \\ \hline +0 + x^2 + x - 2 \end{array}$

15. Ejercicio polinomios

Hallar el valor de a y b para que el polinomio $x^4 - ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$

Solución

$$\begin{array}{r}
 x^4 \qquad \qquad - ax + b \quad \Big| \quad x^2 - 4 \\
 -x^4 \quad + 4x^2 \qquad \qquad \qquad x^2 + 4 \\
 \hline
 0 \quad + 4x^2 - ax + b \\
 -4x^2 \qquad \qquad -16 \\
 \hline
 0 \quad - ax + b - 16
 \end{array}$$

Para que sea divisible ha de cumplirse $-ax + b - 16 = 0$; $-ax + b = 16$;

Por otro lado $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ por lo que el valor numerico del polinomio

$x^4 - ax + b$ sera 0 para $x = 2$ y $x = -2$

$x = 2 \Rightarrow$ teorema del resto $x^4 - ax + b$; $16 - 2a + b = 0$

$x = -2 \Rightarrow$ teorema del resto $x^4 - ax + b$; $(-2)^4 - a(-2) + b = 0$; $16 + 2a + b = 0$;

Dos ecuaciones con dos incognitas

$$16 - 2a + b = 0$$

$$16 + 2a + b = 0$$

$$32 \quad 0 \quad + 2b = 0; \quad 2b = -32; b = -\frac{32}{2}; b = -16;$$

Sutituimos el valor en una ecuacion

$$16 - 2a + b = 0; 16 - 2a - 16 = 0; 16 - 16 = 2a; a = \frac{0}{2}; a = 0$$

16. Ejercicio polinomios

Halla el valor de m para que al dividir $2x^2 - mx + 2$ por $(x - 2)$ dé de resto 4;

Solución

Aplicamos el teorema del resto

Para $x = 2$; sustituyo en $2x^2 - mx + 2 \Rightarrow 2 * 2^2 - m * 2 + 2 = 4$;

$$8 - 2m + 2 = 4; 2m = 8 + 2 - 4; 2m = 6; m = 3;$$

17. Ejercicio polinomios

Hallar el valor de m para que el polinomio $3x^2 + mx + 8$ tenga a $x = 1$ como una raiz

Solución

Aplicamos el teorema del resto

Para $x = 1$; sustituyo en $3x^2 + mx + 8 \Rightarrow 3 * 1^2 + m * 1 + 8 = 0$;

$$3 + m + 8 = 0; m = -8 - 3; m = -11;$$

2.6 Raíces de un polinomio

Un numero a es una raiz del polinomio P(x) si se cumple que el valor numérico del polinomio P(x) para $x = a$ es 0;

Para que un numero a sea raíz de un polinomio ha de cumplirse que a sea divisor del termino independiente.

El numero de raíces de un polinomio es siempre menor o igual que el grado del polinomio

Ejemplo

Las raíces del polinomio $x^3 - 7x^2 + 5x + 13$ pueden ser los divisores de 13 (± 1) (± 13)

Comprobamos con el teorema del resto

Para $x = -1$; $(-1)^3 - 7 * (-1)^2 + 5 * (-1) + 13 = 0$; luego es divisible

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & +5 & +13 \\ -1 & & -1 & +8 & -13 \\ \hline & 1 & -8 & +13 & 0 \text{ resto} \end{array}$$

Cociente $x^2 - 8x + 13$

Una raíz es $x = -1$; hallamos las raíces del polinomio $x^2 - 8x + 13$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 * 1 * 13}}{2 * 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 52}}{2};$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{12}}{2}; \text{ las otras raíces son } x = \frac{8 + \sqrt{12}}{2} \text{ y } x = \frac{8 - \sqrt{12}}{2}$$

Las raíces del polinomio son $x = -1$; $x = \frac{8 + \sqrt{12}}{2}$ y $x = \frac{8 - \sqrt{12}}{2}$

18. Ejercicio polinomios

Calcular las raíces del siguiente polinomio $x^3 - 3x^2 + 2$

Solución

Las raíces del polinomio estarán comprendidas entre los divisores de 2 (± 1) (± 2)

Comprobamos con el teorema del resto

Para $x = 1$; $(1)^3 - 3 * (1)^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$; luego es divisible

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & +2 \\ 1 & & +1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \text{ resto} \end{array}$$

Cociente $x^2 - 2x - 2$

Una raíz es $x = 1$; hallamos las raíces del polinomio $x^2 - 2x - 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * 1 * (-2)}}{2 * 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2};$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}; \text{ las otras raíces son } x = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} \text{ y } x = \frac{2 - \sqrt{12}}{2};$$

Las raíces del polinomio son $x = 1$; $x = \frac{2 + \sqrt{12}}{2}$ y $x = \frac{2 - \sqrt{12}}{2}$

19. Ejercicio polinomios

Calcula las raíces del siguiente polinomio $x^2 + 2x + 1$

Solución

Calculamos las soluciones de la ecuación de 2º grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 * 1 * 1}}{2 * 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

La raíz es doble $x = -1$

20. Ejercicio polinomios

Calcular las raíces del siguiente polinomio $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$

Solución

Las raíces del polinomio pueden ser 2 o 3 y estarán comprendidas entre los divisores de 2, $(\pm 1) (\pm 2)$

Comprobamos con el teorema del resto

Probamos Para $x = -1$; $(-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) - 2 = -1 - 2 + 5 - 2 = 0$;

Como es igual a cero $\Rightarrow x = -1$ sera una raiz del polinomio

$x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ aplicamos rufini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & -2 \\ -1 & & -1 & +3 & +2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & 0 \end{array}$$

Cociente $x^2 - 3x - 2$

Buascamos las raíces del polinomio (cociente) $x^2 - 3x - 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \text{ y } x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$$

Las raíces del polinomio seran $x = -1$,

$$x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \text{ y } x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$$

21. Ejercicio polinomios

Hallar un polinomio de cuarto grado que sea divisible por $x^2 - 4$ y se anule para $x = 3$ y $x = 1$;

Solución

Al ser de 4 grado el número máximo de raíces que tendrá serán 4

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Si el polinomio es divisible por $x^2 - 4$; como $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$;

El polinomio será $= (x + 2)(x - 2)(x - 3)(x - 1)$

$$\begin{array}{r} x^2 \quad - 4 \\ x \quad - 3 \\ \hline -3x^2 \quad + 12 \\ +x^3 \quad - 4x \\ \hline +x^3 \quad -3x^2 - 4x + 12 \\ +x^3 \quad -3x^2 - 4x + 12 \\ \hline x \quad - 1 \\ \hline -x^3 + 3x^2 + 4x - 12 \\ +x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x \\ \hline +x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 \end{array}$$

El polinomio será $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$

Prueba :

Hacemos la prueba del resto para ver si cumple que son raíces

$$\text{Para } x = 2; 2^4 - 4 * 2^3 - 2^2 + 16 * 2 - 12 = 16 - 32 - 4 + 32 - 12 = 0$$

$$\text{Para } x = -2; (-2)^4 - 4 * (-2)^3 - (-2)^2 + 16 * (-2) - 12 =$$

$$16 + 32 - 4 - 32 - 12 = 0$$

$$\text{Para } x = 3; 3^4 - 4 * 3^3 - 3^2 + 16 * 3 - 12 = 81 - 108 - 9 + 48 - 12 = 0:$$

$$\text{Para } x = 1; 1^4 - 4 * 1^3 - 1^2 + 16 * 1 - 12 = 1 - 4 - 1 + 16 - 12 = 0$$

22. Ejercicio polinomios

Hallar el polinomio conociendo sus raíces y el coeficiente del monomio de mayor grado

$x = 1, x = -2$ y el coeficiente $= -4$

Solución:

$$(x - 1)(x + 2)(-4) = (x^2 - x + 2x - 2) * (-4)$$

$$(x^2 + x - 2)(-4) = -4x^2 - 4x + 8$$

Prueba

$$-4x^2 - 4x + 8 = 0;$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 * 8(-4)}}{(-4) * 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{-8} = \frac{4 \pm \sqrt{144}}{-8}$$

$$= \frac{4 \pm 12}{-8}; x = \frac{16}{-8} = -2; x = \frac{4 \pm 12}{-8} = \frac{-8}{-8} = 1;$$

Las raíces son $x = -2; x = 1;$

23. Ejercicio polinomios

Hallar el polinomio conociendo sus raíces y el coeficiente del monomio de mayor grado

$X=1$ (raíz doble) y coeficiente 2

Solución:

$$(x - 1)(x - 1)(x^2 - x - x + 1) * (2) = (2) * (x^2 - 2x + 1) = 2x^2 - 4x + 2$$

Prueba

$$2x^2 - 4x + 2; x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 * 2 * 2}}{2 * 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{4} = \frac{4 + 0}{4} = 1$$

La raíz es doble $x = 1;$

3 Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es un cociente de polinomios, en la que el denominador no es nulo

$$\text{Fracción algebraica } \frac{P(x)}{Q(x)}; \frac{-4x^2 - 4x + 8 = 0}{x + 2};$$

$$\text{No es fracción algebraica } = \frac{P(x)}{Q(x)}; \frac{-4x^2 - 4x + 8 = 0}{x}; \frac{2}{4x + 8}$$

3.1 Fracciones equivalentes

Dos fracciones algebraicas $\frac{A(x)}{B(x)}$ y $\frac{C(x)}{D(x)}$ son equivalentes si se cumple $A(x) * D(x) = C(x) * B(x)$

3.2 Simplificación de fracciones algebraicas

Simplificar una fracción es hallar otra equivalente más sencilla. Se puede realizar:

Factorizando numerador y denominador y quitando los factores comunes

Dividiendo numerador y denominador por sus mcd.

24. Ejercicio fracciones algebraicas

Simplificar la siguiente fracción

$$\frac{x - 2}{x^2 + x - 6};$$

Solución (factorizamos numerador y denominador)

$$\frac{x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{x - 2}{(x - 2) * (x + 3)} = \frac{1}{x + 3}$$

$$x^2 + x - 6; x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 * 1 * (-6)}}{2 * 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2};$$

$$x = \frac{-1 + 5}{2} = 2; x = \frac{-1 - 5}{2} = -3$$

25. Ejercicio fracciones algebraicas

Simplificar la siguiente fracción

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$$

Solución (factorizamos numerador y denominador)

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = \frac{(x - 1)(x - 3)(x + 2)}{(x - 1)(x + 3)(x + 2)} = \frac{(x - 3)}{(x + 3)}$$

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; las posibles soluciones seeran divisores de $6 \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$;

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; Aplicamos teorema del resto para $x = 1$;

$$1^3 - 2 * 1^2 - 5(1) + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0; \text{ una solución es } x = 1;$$

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ aplicamos rufini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & +6 \\ 1 & & +1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Cociente $x^2 - x - 6$;

$$x^2 - x - 6; x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 * 1 * (-6)}}{2 * 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2};$$

$$x = \frac{1 + 5}{2} = 3; x = 3; x = \frac{1 - 5}{2} = -2; x = -2; \text{factores } (x - 1)(x - 3)(x + 2)$$

Hacemos el mismo procedimiento para el denominador

$x^3 + 4x^2 + x - 6$; una raíz sera $x = 1$;

$x^3 + 4x^2 + x - 6$ aplicamos rufini

$$\begin{array}{r|rrrr} & +1 & +4 & +1 & -6 \\ 1 & & +1 & +5 & +6 \\ \hline & 1 & +5 & +6 & 0 \end{array}$$

Cociente $x^2 + 5x + 6$;

$$x^2 + 5x + 6; x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 * 1 * (6)}}{2 * 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2};$$

$$x = \frac{-5 + 1}{2} = -2; x = -2; x = \frac{-5 - 1}{2} = -3; x = -3; \text{factores } (x - 1)(x + 3)(x + 2)$$

26. Ejercicio fracciones algebraicas

Simplificar la siguiente fracción

$$\frac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3}$$

Solución (factorizamos numerador y denominador)

$$\frac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3} = \frac{(x - 1)(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)}{(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)} = x - 1$$

$2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3$; las posibles soluciones serán divisores de $-3 \pm 1; \pm 3$;

$2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3$ Aplicamos teorema del resto para $x = 1$;

$2 * 1^4 + 1^3 - 11 * 1^2 + 11 * 1 - 3$; $2 + 1 - 11 + 11 - 3 = 0$; una solución es $x = 1$;

$2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3$ aplicamos rufini

$$\begin{array}{r|rrrrr} & +2 & +1 & -11 & +11 & -3 \\ 1 & & +2 & +3 & -8 & +3 \\ \hline & +2 & +3 & -8 & +3 & 0 \end{array}$$

Cociente $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$; Aplicamos teorema del resto para $x = 1$

$2 * 1^3 + 3 * 1^2 - 8 * 1 + 3$; $2 + 3 - 8 + 3 = 0$; una solución es $x = 1$;

$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ aplicamos rufini

$$\begin{array}{r|rrrr} & +2 & +3 & -8 & +3 \\ 1 & & +2 & +5 & -3 \\ \hline & +2 & +5 & -3 & 0 \end{array}$$

Cociente $2x^2 + 5x - 3$;

$$2x^2 + 5x - 3; x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 * 2 * (-3)}}{2 * 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4};$$

$$x = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4}; x = \frac{1}{2}; x = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4}; x = -3;$$

$$\text{factores } (x - 1)(x - \frac{1}{2})(x + 3);$$

Hacemos el mismo procedimiento para el denominador

$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$; una raiz sera $x = 1$;

$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$; aplicamos rufini

$$\begin{array}{r|rrrr} & +2 & +3 & -8 & +3 \\ 1 & & +2 & +5 & -3 \\ \hline & 2 & +5 & -3 & 0 \end{array}$$

Cociente $2x^2 + 5x - 3$;

$$2x^2 + 5x - 3; x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 * 2 * (-3)}}{2 * 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4};$$

$$x = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4}; x = \frac{1}{2}; x = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4}; x = -3; \text{factores } (x - 1)(x - \frac{1}{2})(x + 3);$$

3.3 Operaciones con fracciones algebraicas

Las operaciones con fracciones algebraicas se ejecutan de la misma forma que ejecutábamos las operaciones con fracciones

- Suma y resta de fracciones algebraicas**

Para sumar y restar fracciones algebraicas han de tener el mismo denominador

$$\frac{4}{1+x} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x+1}{x-1} \text{ Hallamos el mcm del denominador}$$

$$\frac{4(1+x^2)(x-1)}{x^4-1} + \frac{x(x+1)(x-1)}{x^4-1} - \frac{(x+1)(1+x^2)(x+1)}{x^4-1} = \frac{4(-x^2-1+x^3+x)}{x^4-1} +$$

$$\frac{x(x^2-1)}{x^4-1} - \frac{(x^2+1+2x)(1+x^2)}{x^4-1} = \frac{-4x^2-4+4x^3+4x}{x^4-1} + \frac{x^3-x}{x^4-1} -$$

$$\frac{x(x^2-1)}{x^4-1} - \frac{(x^2+1+2x)(1+x^2)}{x^4-1} =$$

$$= \frac{4(1+x^2)(x-1) + x(x+1)(x-1) - (x+1)(1+x^2)(x+1)}{x^4-1} = \frac{-x^4+3x^3+2x^2+x-5}{x^4-1};$$

Hallamos el mcm del denominador.

Dado que no hay factores comunes $mcm = (1+x)(1+x^2)(x-1)$

$$(1+x)(x-1) = -x-1+x^2+x = x^2-1;$$

$$(x^2-1) * (x^2+1) = \text{es identidad notable} = x^4-1; \text{mcm} = x^4-1$$

$$4(1+x^2)(x-1) + x(x+1)(x-1) - (x+1)(1+x^2)(x+1) =$$

$$4x^3 + 4x^2 + 4x - 4 + x^3 - x - (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1) =$$

$$4x^3 + 4x^2 + 4x - 4 + x^3 - x - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1 =$$

$$-x^4 + 4x^3 + x^3 - 2x^3 + 4x^2 - 2x^2 + 4x - x - 2x - 4 - 1 = -x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x - 5;$$

• **Multiplicación de fracciones algebraicas**

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+3} : \frac{x^2+5x+4}{x^2+5x+6} = \text{descomponemos en factores y multiplicamos en cruz}$$

$$\frac{(x+1)(x+1)}{(x+3)(x+1)} : \frac{(x+4)(x+1)}{(x+3)(x+2)} = \frac{(x+1)(x+1)(x+3)(x+2)}{(x+3)(x+1)(x+4)(x+1)} = \text{simplificamos} = \frac{(x+2)}{(x+4)}$$

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+3} * \frac{x^2+5x+4}{x^2+5x+6} = \text{descomponemos y multiplicamos numeradores y denominadores}$$

$$\frac{(x+1)(x+1)}{(x+3)(x+1)} * \frac{(x+4)(x+1)}{(x+3)(x+2)} = \frac{(x+1)(x+1)(x+4)(x+1)}{(x+3)(x+1)(x+3)(x+2)} = \frac{(x+1)(x+4)(x+1)}{(x+3)(x+3)(x+2)};$$

27. Ejercicio fracciones algebraicas

Realizar la siguiente operación $\frac{x+a}{x^2-a^2} * \frac{x-a}{x+a}$

Solución

Descomponemos en factores (identidad notable)

$$\frac{x+a}{x^2-a^2} * \frac{x-a}{x+a} = \frac{x+a}{(x+a)(x-a)} * \frac{x-a}{x+a} = \frac{x-a}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{x+a}$$

28. Ejercicio fracciones algebraicas

Realizar la siguiente operación $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$

Solución

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{1+x}} = 1 + \frac{1}{\frac{x+1+x}{1+x}} = 1 + \frac{1+x}{1+2x};$$

$$= \frac{(1+2x) + (1+x)}{1+2x} = \frac{2+3x}{1+2x}$$

29. Ejercicio fracciones algebraicas

Realizar las siguientes operaciones

a) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{2x}{x-2}$; b) $\frac{2x+1}{x+1} - \frac{x+1}{x}$; c) $\frac{x}{x^2+2} * \frac{3x^2}{x-1}$; d) $\frac{x-1}{x^2-x-2} : \frac{x+1}{x^2-2x}$;

Solución:

a) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{2x}{x-2} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{2x(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2+4-4x+2x^2+2x}{(x+2)(x-2)} =$

$$\frac{x^2+4-4x+2x^2+2x}{(x+2)(x-2)} = \frac{3x^2+4}{(x+2)(x-2)}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{2x+1}{x+1} - \frac{x+1}{x} &= \frac{x(2x+1)}{(x+1)x} - \frac{(x+1)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{2x^2+x - (x^2+1+2x)}{(x+1)x} \\ &= \frac{2x^2+x - x^2 - 1 - 2x}{(x+1)x} = \frac{x^2 - x - 1}{(x+1)x} \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad \frac{x}{x^2+2} * \frac{3x^2}{(x-1)} = \frac{3x^3}{(x^2+2)(x-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \frac{x-1}{x^2-x-2} : \frac{x+1}{x^2-2x} &= \frac{(x-1)(x^2-2x)}{(x^2-x-2)(x+1)} = \frac{(x-1)x(x-2)}{(x-2)(x+1)(x+1)} \\ &= \frac{(x-1)x}{(x+1)(x+1)} \end{aligned}$$

$$(x^2 - x - 2); x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 * 1(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2};$$

Las raíces son $x = 2$, $y x = -1$;

30. Ejercicio fracciones algebraicas

Realiza las siguientes operaciones

$$\text{a)} \quad \frac{x}{3} * \frac{2x+1}{x-1}; \quad \text{b)} \quad \frac{2}{x+1} * \frac{x}{x-1}; \quad \text{c)} \quad \frac{2}{x-1} : \frac{x+1}{x}; \quad \text{d)} \quad \frac{x}{2x-1} : \frac{x+1}{2x+1}$$

Solución:

$$\text{a)} \quad \frac{x}{3} * \frac{2x+1}{x-1} = \frac{x(2x+1)}{3(x-1)} = \frac{2x^2+x}{3x-3};$$

$$\text{b)} \quad \frac{2}{x+1} * \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x^2-1};$$

$$\text{c)} \quad \frac{2}{x-1} : \frac{x+1}{x} = \frac{2 * x}{(x-1) * (x+1)} = \frac{2x}{x^2-1};$$

$$\text{d)} \quad \frac{x}{2x-1} : \frac{x+1}{2x+1} = \frac{x(2x+1)}{(2x-1)(x+1)}$$

31. Ejercicio fracciones algebraicas

¿Porqué fraccion algebraica hay que multiplicar $\frac{x^2-7}{x+2}$ para que de $\frac{-x^3+7x}{x^2+4x+4}$

Solución

$$\frac{x^2-7}{x+2} * d = \frac{-x^3+7x}{x^2+4x+4}; \quad d = \left(\frac{-x^3+7x}{x^2+4x+4} \right) : \left(\frac{x^2-7}{x+2} \right)$$

$$d = \frac{(-x^3+7x)(x+2)}{(x^2+4x+4)(x^2-7)} = \frac{-x(x^2-7)(x+2)}{(x+2)^2(x^2-7)} = \frac{-x}{x+2}$$

32. Ejercicio fracciones algebraicas

Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas

$$\text{a)} \quad \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1} \right) \frac{x}{2}; \quad \text{b)} \quad \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2} \right) : \frac{x-2}{x};$$

Solución:

$$a) \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1} \right) \frac{x}{2} = \left(\frac{1(x+1)}{x \cdot 1} \right) \frac{x}{2} = \left(\frac{(x+1)x}{x \cdot 2} \right) = \frac{(x+1)}{2};$$

$$b) \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2} \right) : \frac{x-2}{x} = \left(\frac{2(x+2)}{x(x+2)} - \frac{2x}{x(x+2)} \right) : \frac{x-2}{x} = \left(\frac{2x+4-2x}{x(x+2)} \right) : \left(\frac{x-2}{x} \right)$$

$$\left(\frac{4}{x(x+2)} \right) : \left(\frac{x-2}{x} \right) = \frac{4 \cdot x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{4}{x^2-2^2} = \frac{4}{x^2-4}$$

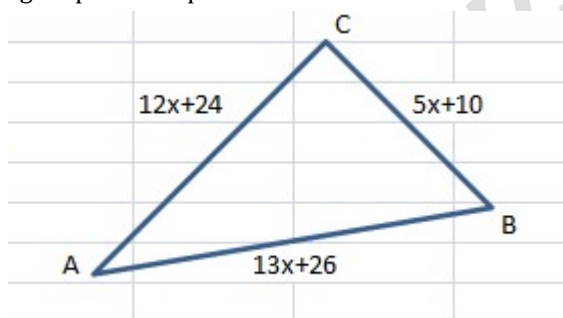
33. Ejercicio fracciones algebraicas

Demuestra que el triángulo ABC es rectángulo para cualquier valor de x

Solución:

Si es un triángulo rectángulo ha de cumplirse el teorema de pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2;$$



$$(13x+26)^2 = (12x+24)^2 + (5x+10)^2$$

$$169x^2 + 676 + 676x = 144x^2 + 576 + 576x + 25x^2 + 100 + 100x$$

$$169x^2 + 676 + 676x = 169x^2 + 676 + 676x, \text{ Se cumple para cualquier valor de } x$$

34. Ejercicio fracciones algebraicas

Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas

$$a) \frac{3a+3}{12a-12} : \frac{(a+1)^2}{a^2-1} \quad b) \frac{x^2-2x-3}{(x-2)^3} : \frac{(x-2)^2}{x^2-1};$$

Solución

$$a) \frac{3a+3}{12a-12} : \frac{(a+1)^2}{a^2-1} = \frac{3(a+1)}{12(a-1)} : \frac{(a+1)^2}{(a+1)(a-1)} = \frac{3(a+1)}{12(a+1)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4};$$

$$b) \frac{x^2-2x-3}{(x-2)^3} * \frac{(x-2)^2}{x^2-1} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)^3} * \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-3)(x+1) * (x-2)^2}{(x-2)^3 * (x+1)(x-1)} = \frac{(x-3)}{(x-2) * (x-1)} = \frac{(x-3)}{x^2-3x+2}$$

35. Ejercicio fracciones algebraicas

Comprobar si es cierta la siguiente igualdad $\left(\frac{1}{(1+x)} + \frac{2x}{(1-x^2)} \right) \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{x}$

Solución

$$\left(\frac{1}{(1+x)} + \frac{2x}{(1-x^2)} \right) \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{x}; \text{ operamos y hallamos mcm}$$

$$\left(\frac{1}{(1+x)} + \frac{2x}{(1-x)(1+x)} \right) \left(\frac{1-x}{x} \right) = \frac{1}{x}; = \left(\frac{1}{(1+x)} + \frac{2x}{(1-x)(1+x)} \right) \left(\frac{1-x}{x} \right) = \frac{1}{x};$$

$$\left(\frac{1 * (1-x)}{(1+x)(1-x)} + \frac{2x}{(1-x)(1+x)} \right) \left(\frac{1-x}{x} \right) = \frac{1}{x} ; \left(\frac{1-x+2x}{(1-x)(1+x)} \right) \left(\frac{1-x}{x} \right) = \frac{1}{x};$$

$$\frac{(1+x)(1-x)}{(1-x)(1+x) * x} = \frac{1}{x}; \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \text{ se cumple;}$$

36. Ejercicio fracciones algebraicas

Comprobar si es cierta la siguiente igualdad $\frac{a^2 - 1}{a^2 - 3a + 2} : \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - a - 2} = 1;$

Solución

$$\frac{a^2 - 1}{a^2 - 3a + 2} : \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - a - 2} = 1; \text{ factorizamos } \frac{(a-1)(a+1)}{(a-2)(a-1)} : \frac{(a+1)(a+1)}{(a-2)(a+1)} = 1;$$

$$\frac{(a+1)}{(a-2)} : \frac{(a+1)}{(a-2)} = 1; \frac{(a+1)(a-2)}{(a-2)(a+1)} = 1; 1 = 1 \text{ se cumple la igualdad;}$$

4 Ecuaciones Polinómicas

Las ecuaciones polinómicas son igualdades en la que al menos uno de los miembros es un polinomio. El grado de la ecuación es el grado del polinomio de mayor grado

Ecuaciones de primer grado

37. Ejercicio ecuaciones

Hallar la solución a las siguientes ecuaciones:

a) $4x - (3x - 4) = 6x - (3 - 8x) + (-2x + 29)$;

b) $6x - (4x - 7) = 5x - (4 - 9x) + (3x + 10)$;

c) $\frac{3x + 1}{2} = 3x - \frac{x - 3}{2}$;

d) $x + \frac{2x - 7}{4} = 2x - \frac{2x - 1}{2}$;

Solución

a) $4x - (3x - 4) = 6x - (3 - 8x) + (-2x + 29)$; eliminamos parentesis

$4x - 3x + 4 = 6x - 3 + 8x - 2x + 29$; pasamos la variable a un lado

$6x + 8x - 2x - 4x + 3x = 4 + 3 - 29$; $11x = -22$; $x = -\frac{22}{11} = -2$; $x = -2$

b) $6x - (4x - 7) = 5x - (4 - 9x) + (3x + 10)$; $6x - 4x + 7 = 5x - 4 + 9x + 3x + 10$

$5x + 9x + 3x - 6x + 4x = 7 + 4 - 10$; $7x = 1$; $x = \frac{1}{7}$;

c) $\frac{3x + 1}{2} = 3x - \frac{x - 3}{2}$; Común denominador $\frac{3x + 1}{2} = \frac{2(3x)}{2} - \frac{x - 3}{2} = \frac{6x - (x - 3)}{2}$

$\frac{3x + 1}{2} = \frac{6x - x + 3}{2}$; $3x + 1 = 5x + 3$; $5x - 3x = 1 - 3$; $2x = -2$; $x = -\frac{2}{2} = -1$;

d) $x + \frac{2x - 7}{4} = 2x - \frac{2x - 1}{2}$; $\frac{4 \cdot x}{4} + \frac{2x - 7}{4} = \frac{4(2x)}{4} - \frac{2(2x - 1)}{4}$;

$\frac{4x}{4} + \frac{2x - 7}{4} = \frac{8x}{4} - \frac{4x - 2}{4}$; $\frac{4x + 2x - 7}{4} = \frac{8x - (4x - 2)}{4}$; $6x - 7 = 4x + 2$;

$6x - 7 = 4x + 2$; $2x = 9$; $x = \frac{9}{2}$;

Ecuaciones de segundo grado

Son expresiones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$; el ser de segundo grado tendrán dos soluciones;

Las soluciones de las ecuaciones de 2º grado se hallan con la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

Formulas de Cardano - Vieta:

$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$; $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$;

$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$

$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$;

la ecuación será $x^2 - (\text{suma raíces})x + (\text{producto de raíces}) = 0$

Si tomo al ecuacion genaral $ax^2 + bx + c = 0$; y divido por a quedará $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$;

la ecuacion será $x^2 - (\text{suma raices})x + (\text{producto de raices}) = 0$

Ecuaciones de grado superior

Si son bicuadradas se resuelven haciendo un cambio de variable. $ax^4 + bx^2 + c = 0$; $t = x^2$

Si son de otro tipo se pueden resolver por ruffini;

38. Ejercicio ecuaciones

Hallar la ecuacion polinomica de tercer grado sabiendo que una solucion es 2, la suma y el producto de las otras dos valen (suma = -4 y producto = -5).

Solución

$$x_1 = 2; x_2 + x_3 = -4; x_2 * x_3 = -5;$$

La ecuacion de segundo grado será $x^2 - (-4)x + (-5) = 0$; $x^2 + 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 * 1 * (-5)}}{2 * 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}; x_2 = -5; x_3 = 1;$$

la ecuacion sería $(x - 2)(x + 5)(x - 1) = 0$;

Comprobación

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -4; & x_2 = -4 - x_3; \\ x_2 * x_3 = -5; \end{cases} \text{ sustituyo } (-4 - x_3) * x_3 = -5; -x_3^2 - 4x_3 + 5 = 0; \Rightarrow x_3^2 + 4x_3 - 5 = 0;$$

5 Ecuaciones racionales

Las ecuaciones racionales son igualdades en las que aparecen fracciones algebraicas.

39. Ejercicio ecuaciones Racionales

Resolver la siguiente ecuación $\frac{x+9}{x} - \frac{5+x}{x+2} = \frac{12x+12}{x^2+2x}$

Solución

$$\frac{x+9}{x} - \frac{5+x}{x+2} = \frac{12x+12}{x^2+2x}; \quad \frac{x+9}{x} - \frac{5+x}{x+2} = \frac{12x+12}{x(x+2)} \text{ hallamos comun denominador}$$

$$\frac{(x+2)(x+9)}{x(x+2)} - \frac{x(5+x)}{x(x+2)} = \frac{12x+12}{x(x+2)}; \quad \frac{(x+2)(x+9) - x(5+x)}{x(x+2)} = \frac{12x+12}{x(x+2)};$$

$$(x+2)(x+9) - x(5+x) = 12x+12; \quad x^2 + 11x + 18 - 5x - x^2 = 12x+12;$$

$$x^2 - x^2 + 11x - 5x - 12x + 18 - 12 = 0; \quad -6x + 6 = 0; \quad -6x = -6; \quad x = \frac{-6}{-6} = 1; \quad x = 1;$$

40. Ejercicio ecuaciones Racionales

Resolver la siguiente ecuación $\frac{x^2+1}{x} - \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{7}{6}$;

Solución

$$\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{7}{6}; \text{ hallamos comun denominador}$$

$$\frac{(x^2+1)(x^2-1) * 6}{x * (x^2-1) * 6} + \frac{x * x * 6}{x * (x^2-1) * 6} = \frac{(x * (x^2-1) * 6)x}{x * (x^2-1) * 6} + \frac{7(x * (x^2-1))}{x * (x^2-1) * 6};$$

$$\frac{(x^4-1) * 6}{x * (x^2-1) * 6} + \frac{x^2 * 6}{x * (x^2-1) * 6} = \frac{6x^4 - 6x^2}{x * (x^2-1) * 6} + \frac{7x^3 - 7x}{x * (x^2-1) * 6};$$

$$\frac{6x^4 - 6 + 6x^2}{x * (x^2-1) * 6} = \frac{6x^4 - 6x^2 + 7x^3 - 7x}{x * (x^2-1) * 6}; \text{ quitamos denominadores}$$

$$6x^4 - 6 + 6x^2 = 6x^4 - 6x^2 + 7x^3 - 7x; \quad 6x^4 - 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 6x^2 + 7x - 6 = 0;$$

$$-7x^3 + 12x^2 + 7x - 6 = 0; \text{ Una solución } x = 2 \text{ teorema del resto hace 0 la ecuación;}$$

por ruffini nos da de cociente $-7x^2 - 2x + 3 = 0$; resolvemos la ecuacion de 2º grado

$$\text{tenemos como soluciones } x = \frac{2 + \sqrt{88}}{-14} \text{ y } x = \frac{2 - \sqrt{88}}{-14};$$

41. Ejercicio ecuaciones Racionales

Resolver la siguiente ecuación $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2-a^2}$;

Solución

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2-a^2} \text{ Hallamos comun denominador } x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$$

$$\frac{x+a}{x^2-a^2} + \frac{x-a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}; \quad \frac{x+a+x-a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}; \text{ quitamos denominadores}$$

$$x+a+x-a = 1; \quad 2x = 1, \quad x = \frac{1}{2};$$

6 Ecuaciones con radicales

Las ecuaciones con radicales son igualdades en las que las variables aparecen en el signo de un radical.

Ecuaciones con un único radical

Si hay un solo radical se aísla en un término y se eleva al cuadrado toda la ecuación

42. Ejercicio ecuaciones con radicales

Resolver la siguiente ecuación $-\sqrt{2x-3} + 1 = x$;

Solución

$$\sqrt{2x-3} = 1-x; (\sqrt{2x-3})^2 = (1-x)^2; 2x-3 = 1+x^2-2x; x^2-2x-2x+3+1=0;$$

$$x^2-4x+4=0; \text{ Resolvemos ecuación de 2º grado } x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2} \text{ y nos dan}$$

$$\text{una solución doble } x = \frac{4}{2} = 2; x = 2, 2 \text{ (no tiene solución)}$$

Como hemos elevado al cuadrado comprobamos si es válida la solución

$$-\sqrt{2x-3} + 1 = x; -\sqrt{2 \cdot 2 - 3} + 1 = 2; -\sqrt{1} + 1 = 2; 0 = 2 \text{ la solución no es válida}$$

43. Ejercicio ecuaciones con radicales

Resolver la siguiente ecuación $x + \sqrt{2x^2 + 2x - 3} = -1$;

Solución

$$x + \sqrt{2x^2 + 2x - 3} = -1; \sqrt{2x^2 + 2x - 3} = -1 - x; (\sqrt{2x^2 + 2x - 3})^2 = (-1 - x)^2;$$

$$2x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1; 2x^2 - x^2 + 2x - 2x - 3 - 1 = 0; x^2 - 4 = 0;$$

$$x = \pm 2; x = 2; x = -2$$

Comprobamos soluciones

$$x = 2; 2 + \sqrt{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 3} = -1; 2 + \sqrt{8 + 4 - 3} = -1; 2 + \sqrt{9} = -1;$$

$$2 + 3 = -1 \text{ No es válida}$$

$$x = -2; -2 + \sqrt{2(-2)^2 + 2(-2) - 3} = -1; -2 + \sqrt{8 - 4 - 3} = -1; -2 + \sqrt{1} = -1;$$

$$-2 + 1 = -1 \text{ Solución válida}$$

Ecuaciones con más de un radical

Si hay más de un radical cuadrado se aísla en un término cada uno de ellos tantas veces como sea necesario y se eleva al cuadrado toda la ecuación

44. Ejercicio ecuaciones con radicales

Resolver la siguiente ecuación $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$;

Solución

$$\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0; \sqrt{3x} = \sqrt{x} + \sqrt{2}; (\sqrt{3x})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{2})^2; 3x = x + 2 + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{2};$$

$$3x - x - 2 = 2\sqrt{2x}; 2x - 2 = 2\sqrt{2x}$$

$$(2x - 2)^2 = (2\sqrt{2x})^2; 4x^2 + 4 - 4x = 4 \cdot 2x; 4x^2 + 4 - 4x = 8x; 4x^2 - 16x + 4 = 0$$

Simplificamos dividiendo por 4; $x^2 - 4x + 1 = 0$; Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$\text{Resolvemos la ecuación de segundo grado y nos las soluciones } x = 2 + \sqrt{3}; x = 2 - \sqrt{3}$$

Comprobamos las soluciones

para $x = 2 + \sqrt{3}$; $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$; $\sqrt{3(2 + \sqrt{3})} - \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2} = 0$; solución válida

para $x = 2 - \sqrt{3}$; $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$; $\sqrt{3(2 - \sqrt{3})} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2} = 0$; solución no válida

45. Ejercicio ecuaciones con radicales

Resolver la siguiente ecuación $\sqrt[3]{4x-1} = x-4$;

Solución

$\sqrt[3]{4x-1} = x-4$; elevamos al cubo cada termino, $(\sqrt[3]{4x-1})^3 = (x-4)^3$;

$4x-1 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$; $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 - 4x + 1 = 0$;

$x^3 - 12x^2 + 44x - 63 = 0$; buscamos valores de x que hagan o la ecuación teorema del resto

$x = 7$; $x^3 - 12x^2 + 44x - 63 = 0$; $7^3 - 12 \cdot 7^2 + 44 \cdot 7 - 63 = 0$; $343 - 588 + 308 - 63 = 0$

$x = 7$; Aplicamos ruffini para $x = 7$ y nos queda de cociente $x^2 - 5x + 9$;

Hallamos las raíces de $x^2 - 5x + 9 = 0$; $x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-9}}{2}$; no existe en $\mathbb{R}$

Comprobamos si es válida la solución $x=7$;

$\sqrt[3]{4x-1} = x-4$; $\sqrt[3]{4 \cdot 7 - 1} = 7 - 4$; $\sqrt[3]{27} = 3$; Esta solución es válida $x = 7$

46. Ejercicio ecuaciones con radicales

Resolver la siguiente ecuación $3\sqrt{3x-1} = 2\sqrt{3(2x-1)}$

Solución

$3\sqrt{3x-1} = 2\sqrt{3(2x-1)}$; $(3\sqrt{3x-1})^2 = (2\sqrt{3(2x-1)})^2$; $9(3x-1) = 4(3(2x-1))$

$27x-9 = 24x-12$; $27x-24x = -12+9$; $3x = -3$; $x = -1$;

Comprobamos si es válida la solución $x = -1$;

Para $x = -1$; $3\sqrt{3x-1} = 2\sqrt{3(2x-1)}$; $3\sqrt{3(-1)-1} = 2\sqrt{3(2(-1)-1)}$; $3\sqrt{-4} = 2\sqrt{-9}$;

Solución no válida

7 Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son igualdades en las que las variables aparecen como un logaritmo.

Dados dos números reales positivos donde $a \neq 1$, el logaritmo en base a de b , es el exponente al que hay que elevar a para que nos de b . $\log_a b = c$; $\Rightarrow a^c = b$;

El cálculo se ejecuta siempre basándonos en las propiedades de los logaritmos.

$\log a \cdot b = \log a + \log b$; $\log a/b = \log a - \log b$; $\log a^n = n \log a$; $\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$;

Comprobación: Una solución de la ecuación no es válida si al sustituirla en la ecuación se obtiene valores de logaritmos de un número negativo o 0

47. Ejercicio ecuaciones con logaritmos

Resolver la siguiente ecuación $2 \log x - \log(x + 6) = \log 8$;

Solución

$2 \log x - \log(x + 6) = \log 8$; $\log \frac{x^2}{x+6} = \log 8$; quito logaritmos de los dos terminos

$$\frac{x^2}{x+6} = 8; x^2 = 8x + 48; x^2 - 8x - 48 = 0; ; x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1(-48)}}{2}; x = \frac{8 \pm 16}{2};$$

$$x = 12; x = -4;$$

Comprobación:

Para $x = 12$; $2 \log 12 - \log(12 + 6) = \log 8$; $\log 12^2/18 = \log 8$; solución valida

Para $x = -4$; $2 \log(-4) - \log((-4) + 6) = \log 8$; $\log(-4)$ no existe, solución no valida

48. Ejercicio ecuaciones con radicales

Resolver la siguiente ecuación $\log(2x + 3) - \log(x - 2) = 2 \log 2 + 2 \log 3$;

Solución

$$\log(2x + 3) - \log(x - 2) = 2 \log 2 + 2 \log 3; \log \frac{(2x + 3)}{x - 2} = \log 2^2 + \log 3^2;$$

$$\log \frac{(2x + 3)}{x - 2} = \log(2^2 * 3^2); \text{quito logaritmos en los dos terminos } \frac{2x + 3}{x - 2} = 2^2 * 3^2;$$

$$\frac{2x + 3}{x - 2} = 36; 2x + 3 = 36x - 72; 36x - 2x = 72 + 3; 34x = 75; x = \frac{75}{34};$$

49. Ejercicio ecuaciones con logaritmos

Resolver la siguiente ecuación $2 \log(2x - 2) - \log(x - 1) = 1$;

Solución

$$2 \log(2x - 2) - \log(x - 1) = 1; \log(2x - 2)^2 - \log(x - 1) = 1; \log \frac{(2x - 2)^2}{(x - 1)} = 1;$$

$$\log \frac{(2(x - 1))^2}{(x - 1)} = 1; \log \frac{4(x - 1)^2}{(x - 1)} = 1; \log(4(x - 1)) = 1; \log(4x - 4) = 1;$$

1 es el log 10; $\log(4x - 4) = \log 10$; quito logaritmos en los dos terminos

$$4x - 4 = 10; x = \frac{14}{4}; x = \frac{7}{2};$$

50. Ejercicio ecuaciones con logaritmos

Resolver la siguiente ecuación $\log x = \log 6 + 2 \log \frac{x}{3}$;

Solución

$$\log x = \log 6 + 2 \log \frac{x}{3}; \log x = \log 6 + 2(\log x - \log 3); \log x = \log 6 + 2 \log x - 2 \log 3;$$

$$2 \log x - \log x = 2 \log 3 - \log 6; \log x = \log 3^2 - \log 6; \log x = \log \frac{9}{6}; x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

51. Ejercicio ecuaciones con logaritmos

Resolver la siguiente ecuación $\log(x^2 - 4x + 3) = \log(3 - 2x)$

Solución:

$$\log(x^2 - 4x + 3) = \log(3 - 2x); x^2 - 4x + 3 = 3 - 2x; x^2 - 2x = 0; x(x - 2) = 0;$$

$$\text{Soluciones } x = 0; x = 2;$$

Comprobación:

Para $x = 0$; $\log(0^2 - 4 * 0 + 3) = \log(3 - 2 * 0)$; $\log 3 = \log 3$; solución válida

Para $x = 2$; $\log(2^2 - 4 * 2 + 3) = \log(3 - 2 * 2)$; $\log(-1) = \log(-1)$; solución no válida

52. Ejercicio ecuaciones con logaritmos

Resolver la siguiente ecuación $3\log_x 2 + \log_x 4 = -5$;

Solución

$$3\log_x 2 + \log_x 4 = -5; \log_x 2^3 + \log_x 4 = -5; \log_x(8 * 4) = -5;$$

$$\log_x 32 = -5; \text{ aplicanco definicion de logaritmos } x^{-5} = 32 = 2^5; x^{-5} = 2^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5};$$

$$x^{-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}; x = \frac{1}{2};$$

8 Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones exponenciales son igualdades en las que las variables aparecen en el exponente.

Para resolverlas hay distintos métodos

53. Ejercicio ecuaciones exponenciales

Resolver la siguiente ecuación $3^{2x} - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 1$;

Solución

$$3^{2x} - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 1; (3^x)^2 - \frac{3^x}{3} - 3^x * 3 = -1; (3^x)^2 - \frac{3^x}{3} - 3 * 3^x + 1 = 0;$$

$$\text{hacemos un cambio de variable } t = 3^x; t^2 - \frac{t}{3} - 3t + 1 = 0; 3t^2 - t - 9t + 3 = 0;$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0; t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 * 3 * 3}}{2 * 3} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6}; t = \frac{10 \pm 8}{6};$$

$$t = \frac{10 + 8}{6} = 3; t = \frac{10 - 8}{6} = 1/3; \text{volvemos el cambio de variable;}$$

$$\text{para } t = 3; x = 1; \text{Para } t = \frac{1}{3}; x = -1; \text{Soluciones } x = 1 \text{ y } x = -1;$$

54. Ejercicio ecuaciones exponenciales

Resolver la siguiente ecuación $5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0$;

Solución

$$5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0; 5^x * 5^3 - 5^x * 5^{-1} = 3120; 5^x \left(5^3 - \frac{1}{5}\right) = 3120;$$

$$5^x \left(\frac{5^4 - 1}{5}\right) = 3120; 5^x = \frac{3120 * 5}{5^4 - 1}; 5^x = \frac{15600}{624}; 5^x = 25; 5^x = 5^2; x = 2;$$

55. Ejercicio ecuaciones exponenciales

Resolver la siguiente ecuación $\frac{4^{x+1}}{2^{x+2}} = 186$;

Solución

$$\frac{4^x * 4^1}{2^x * 2^2} = 186; \frac{2^{2x} * 2^2}{2^x * 2^2} = 186; 2^x = 186; 186 \text{ no es divisible por 2 luego aplico logaritmos}$$

$$\log 2^x = \log 186; x \log 2 = \log 186; x = \frac{\log 186}{\log 2}; x = 7,539159;$$

56. Ejercicio ecuaciones exponenciales

Resolver la siguiente ecuación $3^{2x} + 3^{2x-1} + 3^{x-1} = 111$;

Solución

$$3^{2x} + 3^{2x} * 3^{-1} + 3^x * 3^{-1} = 111; 3^{2x} + \frac{3^{2x}}{3} + \frac{3^x}{3} = 111; \text{comun denominador}$$

$$\frac{3 * 3^{2x}}{3} + \frac{3^{2x}}{3} + \frac{3^x}{3} = \frac{111 * 3}{3}; 3 * 3^{2x} + 3^{2x} + 3^x = 333; \text{hago cambio de variables } 3^x = t;$$

$$3 * t^2 + t^2 + t - 333 = 0; 4t^2 + t - 333 = 0; t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 * 4 * (-333)}}{2 * 4};$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 5328}}{8}; t = \frac{-1 \pm \sqrt{5329}}{8} \quad t = \frac{-1 \pm 73}{8}; t = 9; t = \frac{-74}{8};$$

Para $t = 9$; volvemos a la variable $3^x = t$; $3^x = 9$; $3^x = 3^2$; **$x = 2$**

Para $t = \frac{-74}{8}$; volvemos a la variable $3^x = t$; $3^x = -\frac{74}{8}$; solución no válida;

ningún número positivo elevado a otro puede dar negativo;

9 Sistemas de ecuaciones lineales

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado con una o varias incógnitas

El sistema puede ser:

Compatible determinado: tiene una única solución

Compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones

Incompatible: no tiene solución

57. Ejercicio sistema de ecuaciones

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0; \\ x^2 - 7 = y + 2; \end{cases}$

Solución

Aplico metodo de sustitución $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2; \end{cases}$ 1ºdespejo $y = 2x - 1$
2ºsustituyo $x^2 - 7 = (2x - 1) + 2$

$$x^2 - 7 = (2x - 1) + 2; x^2 - 2x - 7 + 1 - 2 = 0; x^2 - 2x - 8 = 0; x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 * 1 * (-8)}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2}; x = 4; x = -2;$$

Para $x = 4$; $y = 2x - 1$; $y = 8 - 1$; $y = 7$; Para $x = -2$; $y = 2x - 1$; $y = -4 - 1$; $y = -5$;

Soluciones $x = 4, y = 7$; $x = -2, y = -5$;

58. Ejercicio sistema de ecuaciones

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + \frac{y}{2} = 15; \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1; \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} 3x + \frac{y}{2} = 15; \text{ hallo mcm } \frac{2 * 3x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{30}{2}; 6x + y = 30 \text{ 1º despejo } y = 30 - 6x; \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1; \text{ hallo mcm } \frac{2y}{yx} + \frac{3x}{yx} = \frac{yx}{yx}; 2y + 3x = yx; \text{ 2º sustituyo } 2(30 - 6x) + 3x = x(30 - 6x) \end{cases}$$

$$2(30 - 6x) + 3x = x(30 - 6x); 60 - 12x + 3x = 30x - 6x^2; 6x^2 - 39x + 60 = 0;$$

$$x = \frac{39 \pm \sqrt{(-39)^2 - 4 * 6 * 60}}{2 * 6} = \frac{39 \pm \sqrt{81}}{12}; x = \frac{39 + 9}{12} = 4; x = \frac{39 - 9}{12} = \frac{5}{2};$$

Para $x = 4$; $y = 30 - 6x$; $y = 30 - 24 = 6$; Para $x = \frac{5}{2}$; $y = 30 - 6x$; $y = 30 - 15$; $y = 15$;

Soluciones $x = 4, y = 6$; $x = \frac{5}{2}, y = 15$;

59. Ejercicio sistema de ecuaciones

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{y+1} = 8; \\ 5 \cdot 2^{x-1} + 9^y = 6; \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{y+1} = 8; & 2^x + 2 \cdot 3^y \cdot 3^1 = 8; & 2^x + 6 \cdot 3^y = 8; & u + 6v = 8; & 1^\circ \text{ despejo } u = 8 - 6v; \\ 5 \cdot 2^{x-1} + 9^y = 6; & \frac{5 \cdot 2^x}{2} + 3^{2y} = 6; & \frac{5}{2}u + v^2 = 6; & 2^\circ \text{ sustituyo } \frac{5}{2}(8 - 6v) + v^2 = 6; \end{cases}$$

Hacemos cambio de variables $2^x = u$; $3^y = v$;

$$20 - 15v + v^2 = 6; v^2 - 15v + 14 = 0; v = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1} = \frac{15 \pm 13}{2};$$

$$v = \frac{15 + 13}{2} = 14; v = 14; 3^y = v; 3^y = 14 \text{ no valido}; u = 8 - 6v; u = 8 - 84; u = -76;$$

$$v = \frac{15 - 13}{2} = 1; v = 1; 3^y = v; 3^y = 1; y = 0; u = 8 - 6v; u = 2; 2^x = u; 2^x = 2; x = 1;$$

las Soluciones son $x = 1, y = 0$;

60. Ejercicio sistema de ecuaciones

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 3^x + 3^{y+1} = 18; \\ x - 3y = -1; \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 3^x + 3^{y+1} = 18; & 3^x + 3^y \cdot 3^1 = 18; & 3^x + 3 \cdot 3^y = 18; & 2^\circ \text{ sustituyo } x; & 3^{(-1+3y)} + 3 \cdot 3^y = 18 \\ x - 3y = -1; & 1^\circ \text{ despejamos } x = -1 + 3y \end{cases}$$

$$3^{(-1+3y)} + 3 \cdot 3^y = 18; 3^{-1} \cdot 3^{3y} + 3 \cdot 3^y = 18; \text{ hacemos cambio de variables } 3^y = u;$$

$$3^{-1} \cdot u^3 + 3u = 18; \frac{u^3}{3} + 3u = 18; u^3 + 9u = 54; u^3 + 9u - 54 = 0; \text{ aplicando el teorema}$$

del resto, nos da que $u = 3$ hace cero la ecuacion por lo que una raiz es $u = 3$; aplico

ruffini y tengo que $u^3 + 9u - 54 = (x - 3)(u^2 + 3 + 18)$; $u^2 + 3 + 18 = 0$; no tiene solucion;

para $u = 3$; $3^y = u$; $3^y = 3$; $y = 1$; sustituyo $x = -1 + 3y$; $x = -1 + 3 \cdot 1$; $x = 2$;

las Soluciones son $y = 1, x = 2$;

61. Ejercicio sistema de ecuaciones

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x - y = 27; \\ \log x - 1 = \log y; \end{cases}$$

Solución:

$$\text{aplico igualación} \begin{cases} x - y = 27 \text{ despejo } x = 27 + y; \\ \log x - 1 = \log y; & \log x - \log y = 1 \log \frac{x}{y} = \log 10; & \frac{x}{y} = 10; & x = 10y; \end{cases}$$

$$x = 27 + y; x = 10y; 27 + y = 10y; 9y = 27; y = \frac{27}{9}; y = 3; x = 27 + y; x = 30$$

las Soluciones son $y = 3, x = 30$;

62. Ejercicio sistema de ecuaciones

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1; \\ 5^{x+1} = 25^{y+1}; \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1; \log \frac{x^2 + y}{x - 2y} = \log 10; \frac{x^2 + y}{x - 2y} = 10; x^2 + y = 10(x - 2y) \\ 5^{x+1} = 25^{y+1}; 5^{x+1} = 5^{2(y+1)}; x + 1 = 2(y + 1); x + 1 = 2y + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + y + 20y = 0; x^2 - 10x + 21y = 0; 2^\circ \text{ sustituyo } x^2 - 10x + 21\left(\frac{x-1}{2}\right) = 0; \\ x + 1 = 2y + 2; 1^\circ \text{ despejo } y = \frac{x-1}{2} \end{cases}$$

$$x^2 - 10x + \frac{21x - 21}{2} = 0; 2x^2 - 20x + 21x - 21 = 0; 2x^2 + x - 21 = 0;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-21)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{169}}{4}; x = \frac{1 + 13}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}; x = \frac{1 - 14}{4} = -\frac{13}{4};$$

para $x = \frac{7}{2}; y = \frac{x-1}{2} = \frac{5}{4};$ para $x = -\frac{13}{4}; y = \frac{x-1}{2} = -\frac{9}{8};$

las Soluciones son $x = \frac{7}{2}, y = \frac{5}{4}; x = -\frac{13}{4}, y = -\frac{9}{8};$

63. Ejercicio sistema de ecuaciones

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + 1; \\ 3^{x-1} = 27^{y+3}; \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + 1; \log(2x - y^2) - \log(2 - y) = 1; \log \frac{2x - y^2}{2 - y} = \log 10; \\ 3^{x-1} = 27^{y+3}; 3^{x-1} = 3^{3(y+3)}; x - 1 = 3(y + 3); x = 3y + 9 + 1; x = 3y + 10; \end{cases}$$

igualación $\begin{cases} \frac{2x - y^2}{2 - y} = 10; 2x - y^2 = 20 - 10y; y^2 - 10y + 20 = 2x; x = \frac{y^2 - 10y + 20}{2} \\ x = 3y + 10; \end{cases}$

$$\frac{y^2 - 10y + 20}{2} = 3y + 10; y^2 - 10y + 20 = 6y + 20; y^2 - 16y = 0; y(y - 16) = 0;$$

Soluciones $y = 0, y = 16;$

Para $y = 0;$ sustituyo $x = 3y + 10; x = 10;$ Para $y = 16;$ sustituyo $x = 3y + 10; x = 58;$

Soluciones $y = 0, x = 10$ $y = 16, x = 58$

$y = 16$ No es valida pues al comprobar la $\log(2x - y^2) = \log(2 - y) + 1$ quedaría

$\log(2 \cdot 58 - 16^2) = \log(2 - 16) + 1; \log(-140) = \log(-14) + 1; \log \text{ numero negativo}$

64. Ejercicio sistema de ecuaciones

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} \log x^2 - \log y^2 = 1; \\ x^2 + y^2 = 29; \end{cases}$$

Solución

$$\text{sustitucion} \begin{cases} \log x^2 - \log y^2 = 1; \log \frac{x^2}{y^2} = \log 10; \frac{x^2}{y^2} = 10; 1^\circ \text{ despejo } x^2 = 10y^2 \\ x^2 + y^2 = 29; 2^\circ \text{ sustituyo } 10y^2 + y^2 = 29; 11y^2 = 29; \end{cases}$$

$$11y^2 = 29; y^2 = \frac{29}{11}; y = \pm \sqrt{\frac{29}{11}};$$

$$\text{Sustituyo en la ecuación } x^2 = 10y^2; x^2 = 10 \frac{29}{11} = \frac{290}{11}; x = \pm \sqrt{\frac{290}{11}}$$

$$\text{Soluciones } x = \pm \sqrt{\frac{290}{11}}; y = \pm \sqrt{\frac{29}{11}};$$

65. Ejercicio sistema de ecuaciones

$$\text{Resolver el siguiente sistema de ecuaciones} \begin{cases} 2 \log(x-2) + 3 \log(y+2) = 2; \\ 4 \log(x-2) + 5 \log(y+2) = -1; \end{cases}$$

Solución (aplico método Reducción)

$$\begin{cases} 2 \log(x-2) + 3 \log(y+2) = 2; \text{ multiplico } * (-2); -4 \log(x-2) - 6 \log(y+2) = -4 \\ 4 \log(x-2) + 5 \log(y+2) = -1; \\ \hline 0 \quad -\log(y+2) = -5 \end{cases}$$

$$\log(y+2) = 5; \log(y+2) = \log 10^5; y+2 = 10^5; y = 10^5 - 2;$$

$$\text{sustituyo } 2 \log(x-2) + 3 \log(y+2) = 2; 2 \log(x-2) + 3 \log(10^5 - 2 + 2) = 2;$$

$$2 \log(x-2) + 3 \log(10^5) = 2; \log(x-2)^2 + \log 10^{3 \cdot 5} = \log 100;$$

$$\log((x-2)^2 * 10^{15}) = \log 10^2; (x-2)^2 * 10^{15} = 10^2; (x-2)^2 = 10^{-13}$$

$$x-2 = \pm \sqrt{10^{-13}}; x = \pm \sqrt{10^{-13}} + 2;$$

66. Ejercicio sistema de ecuaciones

$$\text{Resolver el siguiente sistema de ecuaciones} \begin{cases} x - y - z = -10; \\ x + 2y + z = 11; \\ x - y + z = 8; \end{cases}$$

Solución (aplico método Reducción dos a dos ecuaciones)

$$\begin{cases} x - y - z = -10; \\ x + 2y + z = 11; \\ x - y + z = 8; \end{cases}$$

$$1^\circ \text{ y } 2^\circ \text{ sumo } \begin{cases} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ \hline 2x + y \quad 0 = 1 \end{cases} \quad 1^\circ \text{ y } 3^\circ \text{ sumo } \begin{cases} x - y - z = -10 \\ x - y + z = 8 \\ \hline 2x - 2y \quad 0 = -2 \end{cases}$$

$$\text{los dos resultados} \begin{cases} 2x + y = 1; \text{ multiplico por } (-1); -2x - y = -1 \\ 2x - 2y = -2 \\ \hline 0 - 3y = -3; \end{cases}$$

$$-3y = -3; y = 1;$$

$$\text{Sustituyo en uno de los resultado } 2x + y = 1; 2x + 1 = 1; x = 0;$$

$$\text{Sustituyo en uno de las ecuaciones } x - y - z = -10; 0 - 1 - z = -10; z = 9;$$

$$\text{Las soluciones son: } x = 0; y = 1; z = 9;$$

Comprobación: Estos valores se cumplen en todas las ecuaciones

67. Ejercicio sistema de ecuaciones

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + z = 18; \\ x - z = 6; \\ x - 2y + z = 0; \end{cases}$$

Solución (aplico método Reducción dos a dos ecuaciones)

$$\begin{cases} x + y + z = 18; \\ x - z = 6; \\ x - 2y + z = 0; \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} 1^a \text{ y } 2^a \text{ resto} & \begin{cases} x + y + z = 18; \\ x - y & = 6 \end{cases} & \\ \hline & 0 + 2y + z = 12; & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2^a \text{ y } 3^a \text{ resto} & \begin{cases} x - y & = 6; \\ x - 2y + z = 0; \end{cases} & \\ \hline & 0 + y - z = 6; & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{sumo los dos resultados} & \begin{cases} 2y + z = 12; \\ y - z & = 6; \end{cases} & \\ \hline & 3y & = 18; \end{array}$$

$$-3y = -18; ; y = 6;$$

Sustituyo en uno de los resultado $2y + z = 12; 2(6) + z = 12; z = 0;$

Sustituyo en uno de las ecuaciones $x - 2y + z = 0; x - 2(6) + 0 = 0; x = 12$

Las soluciones son: $x = 12; y = 6; z = 0;$

Comprobación: Estos valores se cumplen en todas las ecuaciones

9.1 Método de Gauss

Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss cuando se obtienen sus soluciones mediante la reducción del sistema dado a otro equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior, para obtener un sistema triangular con una estructura como esta:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d; \\ b'y + c'z &= d' \\ c''z &= d''; \end{aligned}$$

$$\text{Ejemplo} \begin{cases} x - y - z = -10; & E_1 \\ x + 2y + z = 11; & E_2 = E_2 - E_1 \\ x - y + z = 8; & E_3 = E_3 - E_1 \end{cases} \begin{cases} x - y - z = -10; \\ 0 + 3y + 2z = 21; \\ +2z = 18 \end{cases}$$

$$E_2 - E_1 \text{ para quitar } x \begin{cases} x + 2y + z = 11 \\ x - y - z = -10 \end{cases}$$

$$\hline 0 + 3y + 2z = 21;$$

$$E_3 - E_1 \text{ para quitar } x \begin{cases} x - y + z = 8 \\ x - y - z = -10 \end{cases}$$

$$\hline 0 \quad 0 + 2z = 18;$$

$$2z = 18; z = 9;$$

Sustituyo en E_2 $3y + 2z = 21; 3y + 2(9) = 21; 3y = 3; y = 1;$

Sustituyo en E_1 ; $x - y - z = -10; x - 1 - 9 = -10; x = 0;$

Las soluciones son: $x = 0; y = 1; z = 9;$

Comprobación: Estos valores se cumplen en todas las ecuaciones

68. Ejercicio sistema de ecuaciones Gauss

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y - 2z = 9; \\ 2x - y + 4z = 4; \\ 2x - y + 6z = -1; \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 & E_1 \\ 2x - y + 4z = 4; & E_2 = E_2 - 2E_1 \\ 2x - y + 6z = -1; & E_3 = E_3 - 2E_1 \end{cases} \begin{cases} x + y - 2z = 9 & E_1 \\ 0 - 3y + 8z = -4; & E_2 \\ 0 - 3y + 10z = -9; & E_3 = E_3 - E_2 \end{cases} \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 0 - 3y + 8z = -14; \\ 0 \quad 0 + 2z = -5 \end{cases}$$

$$E_2 = E_2 - 2E_1 \text{ para quitar } x \begin{cases} 2x - y + 4z = 4 \\ 2x + 2y - 4z = 18 \\ \hline 0 - 3y + 8z = -14; \end{cases}$$

$$E_3 = E_3 - 2E_1 \text{ para quitar } x \begin{cases} 2x - y + 6z = -1 \\ 2x + 2y - 4z = 18 \\ \hline 0 - 3y + 10z = -19; \end{cases}$$

$$E_3 = E_3 - E_2 \text{ para quitar } y \begin{cases} -3y + 10z = -19 \\ -3y + 8z = -14 \\ \hline 0 + 2z = -5; \end{cases}$$

$$2z = -5; z = -\frac{5}{2};$$

$$\text{Sustituyo } E_2; -3y + 8z = -14; -3y + 8\left(-\frac{5}{2}\right) = -14; -3y = 6; y = -\frac{16}{3} = -2; y = -2;$$

$$\text{Sustituyo en } E_1; x + y - 2z = 9; x - 2 - 2\left(-\frac{5}{2}\right) = 9; x = 6;$$

$$\text{Las soluciones son: } x = 6; y = -2; z = -\frac{5}{2};$$

Comprobación: Estos valores se cumplen en todas las ecuaciones

69. Ejercicio sistema de ecuaciones Gauss

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + z = 18; \\ x - z = 6; \\ x - 2y + z = 0; \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} y + x + z = 18 & E_1 \\ x - z = 4; & E_2 \\ -2y + x + z = 0; & E_3 = E_3 + 2E_1 \end{cases} \begin{cases} y + x + z = 18; & E_1 \\ 0 + x - z = 4; & E_2 \\ 0 + 3x + 3z = 36; & E_3 = E_3 - 3E_2 \end{cases} \begin{cases} y + x + z = 18 \\ 0 + x - z = 4; \\ 0 \quad 0 - 6z = -6 \end{cases}$$

$$E_3 = E_3 + 2E_1 \text{ para quitar } y \begin{cases} -2y + x + z = 0 \\ 2y + 2x + 2z = 36 \\ \hline 0 + 3x + 3z = 36 \end{cases}$$

$$E_3 = E_3 - 3E_2 \text{ para quitar } x \begin{cases} 3x + 3z = 36; \\ 3x - 3z = 12; \\ \hline 0 + 6z = 24; \end{cases}$$

$$6z = 24; z = 4;$$

$$\text{Sustituyo } E_2; x - z = 4; x - 4 = 4; x = 8;$$

$$\text{Sustituyo en } E_1; y + x + z = 18; y + 8 + 4 = 18; y = 6;$$

$$\text{Las soluciones son: } x = 8; y = 6; z = 4;$$

Comprobación: Estos valores se cumplen en todas las ecuaciones

70. Ejercicio sistema de ecuaciones Gauss

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0; \\ 3x + 6y - 2z = 0; \\ 4x + y - z = 0; \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0; & E_1 \\ 3x + 6y - 2z = 0; & E_2 = E_2 - 3E_1 \\ 4x + y - z = 0; & E_3 = E_3 - 2E_1 \end{cases} \begin{cases} 2x - 3y + z = 0; & E_1 \\ 0 + 21y - 7z = 0; & E_2 \\ 0 + 7y - 3z = 0; & E_3 = E_3 - E_2 \end{cases} \begin{cases} 2x - 3y + z = 0; \\ 0 + 21y - 7z = 0; \\ 0 \quad 0 \quad -2z = 0; \end{cases}$$

$$E_2 = 2E_2 - 3E_1 \text{ para quitar } x \begin{cases} 6x + 12y - 4z = 0; \\ 6x - 9y + 3z = 0 \\ \hline 0 + 21y - 7z = 0; \end{cases}$$

$$E_3 = E_3 - 2E_1 \text{ para quitar } x \begin{cases} 4x + y - z = 0; \\ 4x - 6y + 2z = 0 \\ \hline 0 + 7y - 3z = 0; \end{cases}$$

$$E_3 = E_2 - 3E_3 \text{ para quitar } y \begin{cases} 0 + 21y - 7z = 0; \\ 0 + 21y - 9z = 0; \\ \hline 0 \quad -2z = 0; \end{cases}$$

$$-2z = 0; \underline{z = 0};$$

$$\text{Sustituyo } E_2; 0 + 21y - 7 * 0 = 0; y = 0;$$

$$\text{Sustituyo en } E_1; 2x - 3y + z = 0; 2x - 3 * 0 + 0 = 0; \underline{x = 0};$$

Las soluciones son: $x = 0; y = 0; z = 0$;

Comprobación: Estos valores se cumplen en todas las ecuaciones

71. Ejercicio sistema de ecuaciones Gauss

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x - y = 1; \\ 2x - 6y - 5z = -4; \\ x + y + z = 0; \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} x - y = 1; & E_1 \\ -5z + 2x - 6y = -4; & E_2 = E_2 + 5E_3 \\ z + x + y = 0; & E_3 \end{cases} \begin{cases} 0 \quad x - y = 1; & E_1 = E_2 - E_1 \\ 0 + 7x - y = -4; & E_2 \\ z + x + y = 0; & E_3 \end{cases} \begin{cases} 0 \quad 0 + 6y = -11; \\ 0 \quad 0 + 7x - y = -4; \\ z + x + y = 0; \end{cases}$$

$$E_2 = E_2 + 5E_3 \text{ para quitar } z \begin{cases} -5z + 2x - 6y = -4; \\ 5z + 5x + 5y = 0; \\ \hline 0 + 7x - y = -4; \end{cases}$$

$$E_1 = E_2 - 7E_3 \text{ para quitar } x \begin{cases} 0 + 7x - y = -4; \\ 0 + 7x - 7y = 7; \\ \hline 0 \quad 0 + 6y = -11; \end{cases}$$

$$6y = -11; \underline{y = -\frac{11}{6}};$$

$$\text{Sustituyo } E_2; 0 + 7x - \left(-\frac{11}{6}\right) = -4; 7x + \frac{11}{6} = -4; 42x + 11 = -24; x = -\frac{35}{42}; \underline{x = -\frac{5}{6}};$$

$$\text{Sustituyo en } E_3; x + y + z = 0; -\frac{5}{6} - \frac{11}{6} + z = 0; \underline{z = \frac{16}{6}};$$

Las soluciones son: $x = -\frac{5}{6}; y = -\frac{11}{6}; z = \frac{16}{6}$;

Comprobación: Estos valores se cumplen en todas las ecuaciones

72. Ejercicio sistema de ecuaciones Gauss

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + 3z = 2; \\ 2x + 3y + 4z = 1; \\ -2x - y - 8z = -7; \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2; E_1 \\ 2x + 3y + 4z = 1; E_2 = E_2 - 2E_1 \\ -2x - y - 8z = -7; E_3 = E_3 + 2E_1 \end{cases} \begin{cases} x + y + 3z = 2; E_1 \\ 0 + y - 2z = -3; E_2 \\ 0 + y - 2z = -3 E_3 = E_3 - E_2 \end{cases} \begin{cases} x + y + 3z = 2; \\ 0 + y - 2z = -3 \\ 0 \quad 0 \quad 0 = 0; \end{cases}$$

$$E_2 = E_2 - 2E_1 \text{ para quitar } x \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1; \\ 2x + 2y + 6z = 4; \\ \hline 0 + y - 2z = -3; \end{cases}$$

$$E_3 = E_3 + 2E_1 \text{ para quitar } x \begin{cases} -2x - y - 8z = -7; \\ 2x + 2y + 6z = 4; \\ \hline 0 + y - 2z = -3; \end{cases}$$

$$E_3 = E_2 - E_3 \text{ para quitar } y \begin{cases} 0 + y - 2z = -3; \\ 0 + y - 2z = -3; \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 = 0; \end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones $0 = 0$; El sistema es compatible e indeterminado

damos valor a una de las variables ejemplo t ; $t = z$

Despejo de E_2 ; $y - 2t = -3$; $y = -3 + 2t$

Sustituyo y en E_1 y despejo x ; $x + y + 3z = 2$; $x + (-3 + 2t) + 3t = 2$; $x = -5t + 5$;

Las soluciones son: $z = t$; $x = -5t + 5$; $y = -3 + 2t$;

73. Ejercicio sistema de ecuaciones Gauss

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y - 2z = 9; \\ 2x - y + 4z = 4; \\ 2x - y + 4z = -1; \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9; E_1 \\ 2x - y + 4z = 4; E_2 = E_2 - 2E_1 \\ 2x - y + 4z = -1; E_3 = E_3 + 2E_1 \end{cases} \begin{cases} x + y - 2z = 9; E_1 \\ 0 - 3y + 8z = 22; E_2 \\ 0 - 3y + 8z = -19; E_3 = E_3 - E_2 \end{cases} \begin{cases} x + y - 2z = 9; \\ 0 - 3y + 8z = 22; \\ 0 \quad 0 \quad 0z = 41; \end{cases}$$

$$E_2 = E_2 - 2E_1 \text{ para quitar } x \begin{cases} 2x - y + 4z = 4; \\ 2x + 2y - 4z = 18; \\ \hline 0 - 3y + 8z = 22; \end{cases}$$

$$E_3 = E_3 - 2E_1 \text{ para quitar } x \begin{cases} 2x - y + 4z = -1; \\ 2x + 2y - 4z = 18; \\ \hline 0 - 3y + 8z = -19; \end{cases}$$

$$E_3 = E_2 - E_3 \text{ para quitar } y \begin{cases} 0 - 3y + 8z = 22; \\ 0 - 3y + 8z = -19; \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0z = 41; \end{cases}$$

Nunca se cumple z ; $0 = 41$; por lo que el sistema es incompatible y no tiene solución

74. Ejercicio sistema de ecuaciones Gauss

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} -2x + y + z = 1; \\ 3x + 2y - z = 0; \\ -x + 4y + z = 2; \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1; E_1 \\ 3x + 2y - z = 0 & E_2 = E_2 + E_1 \\ -x + 4y + z = 2; & E_3 = E_3 - E_1 \end{cases} \begin{cases} z + y - 2x = 1; & E_1 \\ 0 + 6y + 2x = 2; & E_2 \\ 0 + 3y + x = 1; & E_3 = E_2 - 2E_1 \end{cases} \begin{cases} z + y - 2x = 1; \\ 0 + 6y + 2x = 2; \\ 0 \quad 0 \quad 0 = 0; \end{cases}$$

$$E_2 = E_2 + E_1 \text{ para quitar } z \begin{cases} -z + 2y + 3x = 0; \\ \underline{z + 4y - x = 2;} \end{cases}$$

$$0 + 6y + 2x = 2;$$

$$E_3 = E_3 - E_1 \text{ para quitar } z \begin{cases} z + 4y - x = 2; \\ \underline{z + y - 2x = 1;} \\ 0 + 3y + x = 1; \end{cases}$$

$$E_3 = E_2 - 2E_3 \text{ para quitar } y \begin{cases} 0 + 6y + 2x = 2; \\ \underline{0 + 6y + 2x = 2} \\ 0 \quad 0 \quad 0 = 0; \end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones ; $0 = 0$; El sistema es compatible e indeterminado

Le damos un valor a una de las variables ejemplo t ; $t = x$

$$\text{Despejo de } E_2; 0 + 6y + 2x = 2; 0 + 6y + 2t = 2; y = \frac{2 - 2t}{6}; y = \frac{1 - t}{3}$$

$$\text{Sustituyo } y \text{ en } E_1 \text{ y despejo } z; z + y - 2x = 1; z + \frac{1 - t}{3} - 2t = 1;$$

$$\frac{3z}{3} + \frac{1 - t}{3} - \frac{6t}{3} = \frac{3}{3}; 3z + 1 - t - 6t = 3; 3z = -7t + 2; z = \frac{-7t + 2}{3}$$

$$\text{Las soluciones son: } x = t; y = \frac{1 - t}{3}; z = \frac{-7t + 2}{3}$$

10 Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas.
Se resuelven convirtiendo la inecuación en una ecuación

10.1 Inecuaciones con una incógnita

Resolver una desigualdad es encontrar todos los valores de la variable que cumplen la desigualdad.

Un sistema de inecuaciones es un conjunto de inecuaciones del que se quiere encontrar una solución común a todas ellas.

Para resolver un sistema de inecuaciones se resuelve cada inecuación de forma separada y se toman las soluciones comunes a todas las ella

Ejemplo resolución de inecuaciones

Resolver el siguiente inecuacion $2x^3 - x^2 - 2x \leq -1$

Solución

$$2x^3 - x^2 - 2x \leq -1$$

1º Pasamos todos los valores a un termino $2x^3 - x^2 - 2x + 1 \leq 0$;

2º Hallamos las raices del polinomio Ruffiny $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; $x = 1$; $x = -1$; $x = \frac{1}{2}$;

3º Factorizamos $(x - 1)(x + 1)(x - \frac{1}{2}) \leq 0$;

4º Estudiamos cada factor;

$(x - 1)$ para valores menores de 1 siempre será < 0 (negativo)

$(x - 1/2)$ para valores menores de $\frac{1}{2}$ siempre será < 0 (negativo)

$(x + 1)$ para valores menores de -1 siempre será < 0 (negativo)

$2x^3 - x^2 - 2x + 1$ aplicando la regla de los signos nos da en que margen < 0 ;

	I	II	III	IV
	-1	$+\frac{1}{2}$	+1	
$(x - 1)$	-	-	-	+
$(x - 1/2)$	-	-	+	+
$x+1$	-	+	+	+
$2x^3 - x^2 - 2x + 1$	-	+	-	+

La inecuacion $2x^3 - x^2 - 2x \leq -1$ se cumple para valores de $x \in (-\infty, -1) \cup \left(+\frac{1}{2}, +1\right)$

Ejemplo resolución de fracciones polonómicas de inecuaciones

Resolver el siguiente inecuacion $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \leq 0$;

Solución

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \leq 0$$

1º Factorizamos numerador y denominador (en este caso son identidades notales)

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x + 2)} \leq 0$$

2º Estudiamos cada factor del numerador y del denominador

$(x - 1)$ valores menores de 1 hacen negativo el factor

$(x + 1)$ valores menores de -1 hacen negativo el factor

$(x - 2)$ valores menores de 2 hacen negativo el factor

$(x + 2)$ valores menores de -2 hacen negativo el factor

Resuelvo numerador y denominador por separado viendo valores que lo hacen negativo

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \leq 0; \text{ para que la desigualdad se cumpla } x \neq 2; x \neq -2$$

pues el denominador no puede ser 0;

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \leq 0 \text{ se cumple para valores de } x \in (-2, -1] \cup [+1, +2);$$

	I	II	III	III	IV
	-2	-1	+1	+2	
$(x-1)$	-	-	-	+	+
$(x+1)$	-	-	+	+	+
$x^2 - 1^2$	+	+	-	+	+
$(x-2)$	-	-	-	-	+
$(x+2)$	-	+	+	+	+
$x^2 - 2^2$	+	-	-	-	+
$\frac{x^2 - 1^2}{x^2 - 2^2}$	+	-	+	-	+

75. Ejercicio sistema de inecuaciones de primer grado

Resolver el siguiente sistema

$$x - 3 \leq 1;$$

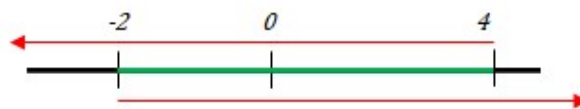
$$x + 4 > 2;$$

Solución

$$x - 3 \leq 1; x \leq 1 + 3; x \leq 4;$$

$$x + 4 > 2; x > 2 - 4; x > -2;$$

La solución es $(-2, 4]$



76. Ejercicio sistema de inecuaciones de primer grado

Resolver el siguiente sistema

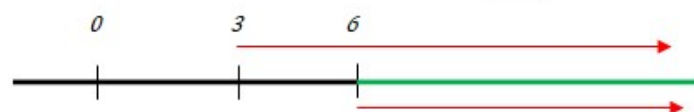
$$x + 8 \leq 3x + 2;$$

$$\frac{x+2}{2} \leq x - 2;$$

Solución

$$x + 8 \leq 3x + 2; x - 3x \leq 2 - 8; -2x \leq -6; -x \leq -3; x \geq 3;$$

$$\frac{x+2}{2} \leq x - 2; x + 2 \leq 2x - 4; x - 2x \leq -4 - 2; -x \leq -6; x \geq 6$$



La solución es $[6, +\infty)$

77. Ejercicio sistema de inecuaciones de primer grado

Resolver el siguiente sistema

$$5x - 10 \leq 0;$$

$$2x + 4 > 0;$$

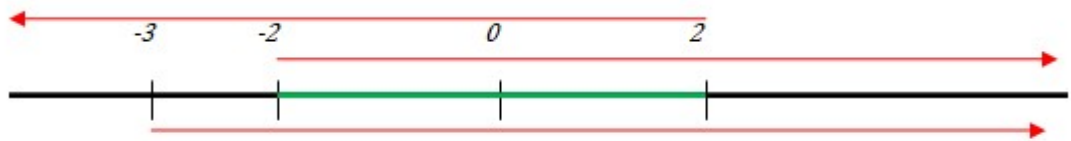
$$\frac{x+9}{2} \geq 3;$$

Solución

$$5x - 10 \leq 0; 5x \leq 10; x \leq 2;$$

$$2x + 4 > 0; 2x > -4; x > -2;$$

$$\frac{x+9}{2} \geq 3; x+9 \geq 6; x \geq -3;$$



La solución es $(-2, 2]$

78. Ejercicio inecuaciones polinómicas

El producto de un número entero por otro, dos unidades mayor, es menor que 8. ¿Cual puede ser el número?

Solución

El número es x ;

$$x(x+2) < 8; x^2 + 2x - 8 < 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 6}{2} = 2; x = \frac{-2 - 6}{2} = -4; x = 2 \text{ y } x = -4$$

$$x^2 + 2x - 8 < 0; (x-2)(x+4) < 0;$$

	I	II	III
	-4		2
$x-2$	-	-	+
$x+4$	-	+	+
$x^2 + 2x - 8$	+	-	+

Como el producto de los factores ha de ser < 0 tomaremos los valores negativos;

La solución serán los números enteros de este intervalo $(-4, 2)$; $-3, -2, -1, 0, 1$;

79. Ejercicio sistema de inecuaciones polinómicas

Si al cuadrado de un número le restamos su triple obtenemos un número mayor de 4.

¿Cual puede ser el número?

Solución

El numero es x;

$$x^2 - 3x > 4; x^2 - 3x - 4 > 0;$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{3+5}{2} = 4; x = \frac{3-5}{2} = -1; x = 4 \vee x = -1$$

$$x^2 - 3x - 4 > 0; (x - 4)(x + 1) > 0;$$

	I	II	III
	-1	4	
$x - 4$	-	-	+
$x + 1$	-	+	+
$x^2 - 3x - 4$	+	-	+

Como el producto de los factores ha de ser > 0 tomaremos los valores positivos;

La solución serán los números enteros de este intervalo $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$

80. Ejemplo resolución de sistemas de inecuaciones

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} |1 - 2x| < 4; \\ x(1 - x) \leq -2; \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} |1 - 2x| < 4; \\ x(1 - x) \leq -2; \end{cases} \begin{cases} (1 - 2x) < 4; -3 - 2x < 0; & 3 + 2x > 0; & x > -\frac{3}{2} \\ -(1 - 2x) < 4; -1 + 2x - 4 < 0; & 2x - 5 < 0; & x < \frac{5}{2}; \end{cases}$$

$x(1 - x) \leq -2; x - x^2 + 2 \leq 0; x^2 - x - 2 \geq 0$; resolvemos la ecuación de 2º

$$x = 2; x = -1; (x - 2)(x + 1)$$

	I	II	III	III	IV
	-3/2	-1	+2	+5/2	
$x > -3/2$	-	+	+	+	+
$x < 5/2$	-	-	-	-	+
$ 1 - 2x - 4 < 0;$	+	-	-	-	+
$(x - 2)$	-	-	-	+	+
$(x + 1)$	-	-	+	+	+
$x^2 - x - 2 \geq 0$	+	+	-	+	+
	+	Se cumple	+	Se cumple	+

$$|1 - 2x| < 4 \text{ se cumple para } x > -\frac{3}{2} \text{ y } x < \frac{5}{2}$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \text{ se cumple para valores } x \in (-1, +2)$$

La solución del sistema es para valores $x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right] \cup \left[+2, +\frac{5}{2}\right)$;

10.2 Inecuaciones con dos incógnitas

Una inecuación con dos incógnitas se resuelve de forma gráfica y su solución es un semiplano limitado por la recta que resulta al convertir la inecuación a ecuación.

En un sistema de inecuaciones con dos incógnitas, la solución estará formada por la intersección de los semiplanos de cada una de las inecuaciones, es decir, será el recinto que tengan en común todas las inecuaciones.

Las rectas pueden pertenecer o no a la solución en función de si llevan el signo igual en la desigualdad.

Ejemplo resolución de inecuaciones con dos variables

Resolver el siguiente inecuación $y + x \leq 4$;

Solución

$$y + x \leq 4;$$

$$1^\circ \text{ Despejamos } y; y \leq 4 - x;$$

$$2^\circ \text{ Convertimos la inecuación en una ecuación } y = 4 - x;$$

3º Representamos la recta; damos valores a x y obtenemos los puntos (x, y) en el plano

x	y
0	4
4	0

Obtenemos los puntos $(0, 4)$ y $(4, 0)$; con estos dos puntos tenemos definida la recta

3º Comprobamos el semiplano que cumple con la inecuación.

Tomamos un punto que quede en la parte de las flechas ejemplo $(0, 0)$

$$y \leq 4 - x; 0 \leq 4 - 0; 0 \leq 4$$

Se cumple para todos los puntos de ese semiplano.

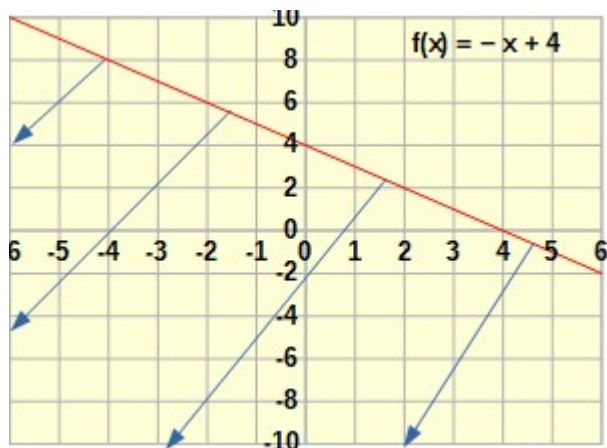
Tomamos un punto que quede en la parte superior ejemplo $(2, 4)$

$$y \leq 4 - x; 4 \leq 4 - 2; 4 \leq 2$$

No se cumple.

4º Las soluciones son todos los puntos de la zona rayada incluidos los puntos de la recta

Comprobación: tomo un punto de la recta $(0, 4)$ $y \leq 4 - x; 4 \leq 4 - 0; 4 \leq 4$; se cumple



Ejemplo resolución de un sistema de inecuaciones con dos variables

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones
$$\begin{cases} 2x - y \geq 3 \\ x + y \leq 3 \\ y + 2 > 0 \end{cases}$$

Solución

1º Despejamos y; en todas las ecuaciones
$$\begin{cases} 2x - y \geq 3; -y \geq 3 - 2x; y \leq 2x - 3; \\ x + y \leq 3; y \leq 3 - x; \\ y + 2 > 0; y > -2; \end{cases}$$

2º Convertimos la inecuación en una ecuación
$$\begin{cases} y \leq 2x - 3; y = 2x - 3 \\ y \leq 3 - x; y = 3 - x \\ y > -2; y = -2 \end{cases}$$

3º Representamos la recta; damos valores a x y obtenemos los puntos (x,y) en el plano

$$y = 2x - 3$$

x	y
0	-3
4	5

$$y = 3 - x$$

x	y
0	3
3	0

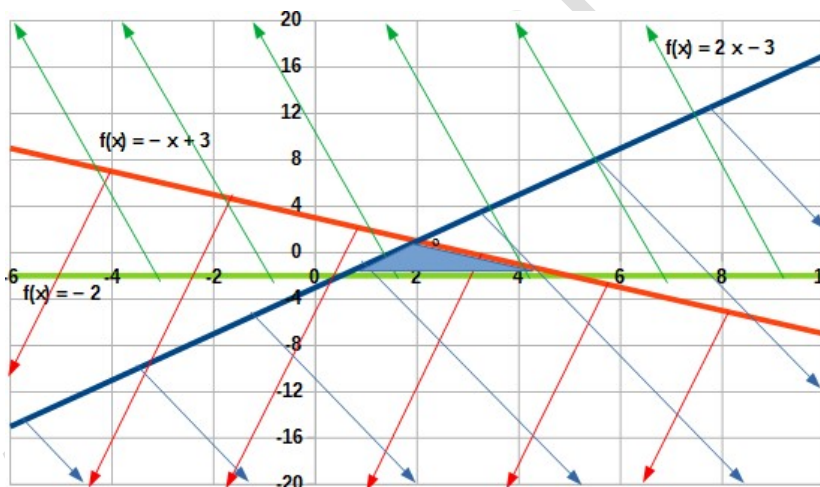
$$y = -2$$

x	y
	-2

Representamos las rectas

3º Comprobamos el semiplano que cumple con la inecuación. Tomamos el punto (2,-8)

$$\begin{cases} 2x - y \geq 3; 2 \cdot 2 - (-8) \geq 3; 4 + 8 \geq 3; 12 \geq 3 \text{ se cumple (incluye puntos de la línea)} \\ x + y \leq 3; 2 + (-8) \leq 3; -6 \leq 3 \text{ se cumple (incluye puntos de la línea)} \\ y + 2 > 0; -8 + 2 \text{ no es } > 0; -6 \text{ no es } > 0 \text{ No se cumple (no incluye puntos de la línea)} \end{cases}$$



El sistema se cumple para los puntos de la zona sombreada. Comprobamos con el punto (2,0)

$$\begin{cases} 2x - y \geq 3; 4 - 0 \geq 3; \text{se cumple} \\ x + y \leq 3; 2 + 0 \leq 3 \text{ se cumple} \\ y + 2 > 0; 0 + 2 > 0 \text{ se cumple} \end{cases}$$

81. Ejercicio de sistemas de inecuaciones con dos incógnitas

Hallar el numero de dos cifras tal que, el doble de las cifras de las decenas restado a las cifras de las unidades es mayor que 5 y la diferencia entre 14 veces la cifra de las unidades y la cifra de las decenas es menor que 112. ¿Cuál es el número?

Solución

El numero es xy ;

$$y - 2 * x > 5; y > 5 + 2x;$$

$$14y - x < 112; 14y < 112 + x; y < \frac{112 + x}{14};$$

Representamos las dos ecuaciones y definimos

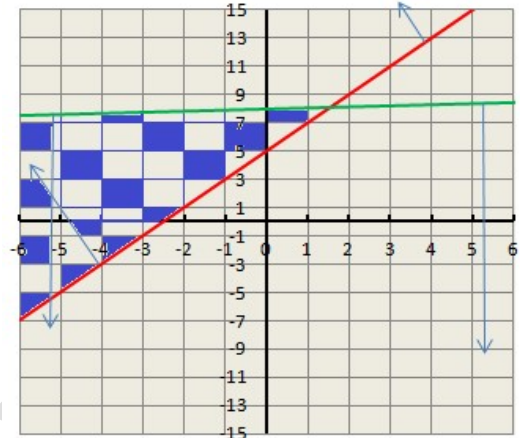
la parte del espacio que cumple las dos condiciones.

$$y = 5 + 2x$$

$$y = (112 + x)/14$$

x	y
0	5
-2	1

x	y
1	8
7	8,5



Tomo un punto por debajo (0,0)

$$y < \frac{112 + x}{14}; 0 < \frac{112 + 0}{14}; 0 < \frac{112}{14} \text{ Se cumple lo que está por abajo}$$

$$y > 5 + 2x; 0 > 5 + 2 * 0; 0 > 5 \text{ No se cumple. Se cumplirá lo que este encima}$$

Prueba, tomo números que estén en el área marcada

$$(-2,5) y < \frac{112 + x}{14}; 5 < \frac{112 + (-2)}{14}; -5 < \frac{110}{14} \text{ Se cumple}$$

$$(-2,5) y > 5 + 2x; 5 > 5 + 2 * (-2); 5 > 5 - 4; 5 > 1 \text{ Se cumple}$$

$$(0,7) y < \frac{112 + x}{14}; 7 < \frac{112 + 0}{14}; 7 < \frac{112}{14} \text{ Se cumple}$$

$$(0,7) y > 5 + 2x; 7 > 5 + 2 * 0; 7 > 5 \text{ Se cumple}$$

82. Ejercicio de sistemas de inecuaciones con dos incógnitas

$$\text{Resolver el siguiente sistema de inecuaciones } \begin{cases} y - 2x - 8 < 0; \\ y - x^2 - x + 10 \geq 0; \end{cases}$$

Solución

La resolución ha de hacerse gráficamente

Resolvemos cada sistema por separado

$$\begin{cases} y - 2x - 8 < 0; & y < 2x + 8 \\ y - x^2 - x + 10 \geq 0; & y \geq x^2 + x - 10; \end{cases}$$

1º $y < 2x + 8$ damos dos valores a x y obtenemos y con estos dos puntos dibujamos la recta.

Comprobamos el semiplano que cumple la inecuación sustituyendo los valores ej (0,0);

$$y < 2x + 8 \quad (0,0) \Rightarrow 0 < 2 * 0 + 8; 0$$

< 8 se cumple. Los puntos de la recta no están incluidos;

Zona de las flechas

$$2^o \ y \geq x^2 + x - 10.$$

hallo el vertice de la parabola, puntos de corte a los ejes y puntos de la parabola dando valores a x y viendo el valor que toma y ; cuantos mas puntos halle mejor será el dibujo.

Comprobamos el area que cumple

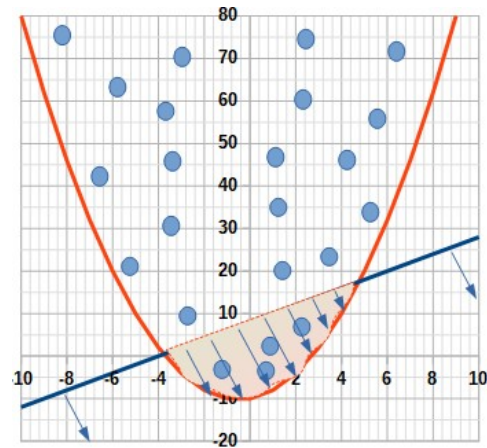
$$\text{la inecuacion } y \geq x^2 + x - 10$$

$$\text{ej } (0,0); 0 \geq 0 + 0 - 10$$

Se cumple. **para toda la zona de puntos**

Tomo un punto fuera ej $(-8,30); 30 \geq (-8)^2 + (-8) - 10; 30 \text{ no es } \geq 46;$

La solución del sistema son todos los puntos de la zona rayada, no incluidos los de la recta y sí incluidos los de la parábola.



83. Ejercicio de ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Se divide un número por 5 y por 13 y se suman los cocientes, el resultado es 72. Hallar el número

Solución

El número es x pues no lo conocemos. Ha de cumplirse

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{13} = 72; \text{ comun denominador } \frac{13x}{65} + \frac{5x}{65} = \frac{4650}{65}; \Rightarrow 13x + 5x = 4650; 18x = 4650;$$

$$x = 260;$$

84. Ejercicio de ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Para ser seleccionado en una competición han de pasarse dos pruebas. En la primera se eliminan el 60% de los participantes y en la segunda a los $\frac{2}{3}$ de los que quedaban. ¿Cuántos participantes se apuntaron si al terminar las pruebas solo hay 10 participantes seleccionados?

Solución

El número de participantes será x pues no lo conocemos. Ha de cumplirse

$$\text{Si en la primera prueba se eliminan el 60\% quedarán el 40\%} \Rightarrow \text{quedaran } \frac{40x}{100};$$

$$\text{En la segunda prueba se eliminan } \frac{2}{3} \text{ de los que quedaban. Quedaran } \frac{1}{3} \text{ de } \frac{40x}{100};$$

$$\frac{1}{3} * \frac{40x}{100} = 10; 40x = 3000; x = \frac{3000}{4} = 75; \text{ 75 es el número de participantes que se apuntaron}$$

85. Ejercicio de ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Se sabe que una población de bacterias se incrementa 90% cada día. ¿Calcular el tiempo que ha de pasar para que la población se multiplique por 100?

Solución

$$P_t = P_0 * K^t; P_t \text{ sera } = P_0 * 100; \text{ en un día tendremos } 1,9P_0 \text{ bacterias en } t \text{ días tendremos } P_0 * (1,9)^t$$

$$P_0 * 100 = P_0 * (1,9)^t; 100 = (1,9)^t \text{ aplicamos logaritmos } \log 100 = \log(1,9)^t;$$

$$\log 100 = t * \log(1,9); t = \frac{\log 100}{\log(1,9)}; t = \frac{2}{0,279} = 7,175 \text{ días; } t = \text{numero de días } 7,175;$$

86. Ejercicio de ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Calcular la expresion $P(x)$, sabiendo que $P(2x + 1) = 8x^2 + 14x$;

Solución

$P(x)$ es un polinomio de 2º grado del tipo $ax^2 + bx + c$;

$$P(2x + 1) = a(2x + 1)^2 + b(2x + 1) + c = 8x^2 + 14x;$$

$$a(4x^2 + 4x + 1) + b(2x + 1) + c = 8x^2 + 14x; 4ax^2 + 4ax + a + 2bx + b + c = 8x^2 + 14x;$$

$$\begin{cases} 4ax^2 = 8x^2; & a = 2 \\ 4ax + 2bx = 14x; & 2x(2a + b) = 14x; 2a + b = 7; 2 \cdot 2 + b = 7; b = 3; \\ a + b + c = 0; 2 + 3 + c = 0; & c = -5; \end{cases}$$

$$P(x) = 2x^2 + 3x - 5;$$

87. Ejercicio de ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Un comerciante trabaja con tres tipos de productos. El primer tipo cuesta 180€; el segundo 90€ y el tercero 30€. Si tiene un pedido de 105 unidades por un importe de 9600 € .

Hallar el numero de productos de cada tipo que incluye el pedido sabiendo que el número productos del segundo tipo es el doble de los del primero y tercero juntos.

Solución

x número de productos del primer tipo. y número de productos del tercer tipo.

Numero de productos del segundo tipo son $2(x + y)$

$$\begin{cases} x + 2(x + y) + y = 105; & x + 2x + 2y + y = 105; & 3x + 3y = 105 \\ x \cdot 180 + 90 \cdot 2(x + y) + 30y = 9600; & 180x + 180x + 180y + 30y = 9600; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 105; & \text{despejo } y = \frac{105 - 3x}{3}; & y = 35 - x \\ \text{Sustituyo } 360x + 210y = 9600; & 360x + 210(35 - x) = 9600; & 360x + 7350 - 210x = 9600; \end{cases}$$

$$360x - 210x = 9600 - 7350; 150x = 2250; x = \frac{2250}{150} = 15; x = 15 \text{ productos de } 180€$$

Sustituyo en la ecuacion $y = 35 - x$; $y = 35 - 15$; $y = 20$ productos de 30€;

$$2(x + y) = 2(15 + 20) = 70 \text{ productos de } 90€;$$

88. Ejercicio de ecuaciones, inecuaciones y sistemas

El área de un rectángulo mide 12 cm^2 . Si se forma un nuevo rectángulo cuyas dimensiones miden, respectivamente, 4 cm y 2 cm más que las del inicial, la nueva área resulta ser de 40 cm^2 . Calcula las dimensiones de los dos rectángulos, así como sus perímetros.

Solución

Dimensiones del rectangulo nicial x cm de largo e y cm de ancho. Area = $12 \text{ cm}^2 = x \cdot y$;

Dimensiones del nuevo rectangulo largo $(4 + x)$ cm, ancho $(2 + y)$

Area del nuvo rectangulo; $40 \text{ cm}^2 = (4 + x)(2 + y)$

$$\text{sustitución } \begin{cases} 12 = x \cdot y; & \text{despejo } y = \frac{12}{x}; \\ 40 = (4 + x)(2 + y); & \text{sustituyo } ; 40 = (4 + x) \left(2 + \frac{12}{x} \right); \end{cases}$$

$$40 = \frac{48}{x} + 2x + 8 + 12; 40 - 20 = \frac{48}{x} + 2x; 20 = \frac{48}{x} + 2x; \frac{20x}{x} = \frac{48}{x} + \frac{2x^2}{x};$$

$$2x^2 - 20x + 48 = 0; \text{ resuelvo la ecuacion } x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 * 48 * 2}}{2 * 2};$$

$$x = 6; x = 4; \text{ despejo en } y = \frac{12}{x}; y = \frac{12}{6} = 2; y = \frac{12}{4} = 3;$$

Habría dos rectángulos que cumplirían la ecuación $x = 6\text{cm}; y = 2\text{cm}; x = 4\text{cm}; y = 3\text{cm}$

89. Ejercicio de ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Determinar el valor de a para que el sistema tenga infinitas soluciones $\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x - 2y + 2z = 1; \\ 2x + y + z = a; \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4; & E_1 & x - y + 3z = 4; & E_1 \\ 2x - y - z = 6; & E_2 = E_2 - E_1 & 0 + y - 7z = -2; & E_2 \\ 3x - 2y + 2z = a; & E_3 = E_3 - E_1 & 0 + y - 7z = a - 12; & E_3 = 2E_3 + 3E_2 \end{cases}$$

$$E_2 - 2E_1 \text{ para quitar } x \begin{cases} 2x - y - z = 6; \\ 2x - 2y + 6z = 8 \end{cases}$$

$$\hline 0 + y - 7z = -2;$$

$$E_3 - 3E_1 \text{ para quitar } x \begin{cases} 3x - 2y + 2z = a; \\ 3x - 3y + 9z = 12 \end{cases}$$

$$\hline 0 \quad y - 7z = a - 12;$$

$$E_3 - E_2 \text{ para quitar } y \begin{cases} 0 + y - 7z = a - 12 \\ 0 + y - 7z = -2 \end{cases}$$

$$\hline 0 \quad 0 \quad 0 = a - 12 + 2; a = 10;$$

para $a = 10$, el sistema es compatible indeterminado infinitas soluciones;

para $a \neq 10$, el sistema es indeterminado; no tiene solución;