

Trigonometría

INDICE

Contenido

1	MEDIDAS DE ÁNGULOS.....	2
2	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO.....	3
3	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA.....	4
3.1	RAZONES T. DE 0° , 90° , 180° Y 270°	4
3.2	SIGNO DE LAS R. T. EN CUALQUIER CUADRANTE.....	4
4	REDUCCIÓN DE ÁNGULOS AL PRIMER CUADRANTE.....	6
5	ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS, SUPLEMENTARIOS Y OPUESTOS.....	6
5.1	RAZONES T. DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS	6
5.2	RAZONES T. DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS.....	6
5.3	RAZONES T. DE ÁNGULOS OPUESTOS	7
5.4	RAZONES T. DE ÁNGULOS MAYORES DE 360°	7
5.5	RAZONES DE 45°	7
5.6	RAZONES DE 30° Y 60°	8
5.7	RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	9
5.8	RELACIONES FUNDAMENTALES.....	9
6	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS LA SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS.....	14
7	RAZONES TRIG. DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD.....	17
8	TRANSFORMACIÓN DE SUMAS EN PRODUCTOS.....	18
9	ECUACIONES Y SISTEMAS TRIGONOMÉTRICOS.....	19
10	TEOREMA DEL SENO Y DEL COSENO.....	25

1 Medidas de Ángulos

Grado sexagesimal: Equivale a cada una de las partes que resulta de dividir la circunferencia en 360 partes iguales

Como divisores tenemos **minuto** que es la sesentaava parte de un grado y **segundo** que es la sesentaava parte de un minuto grado

Un grado = 60 minutos ($1^\circ = 60'$) y un minuto = 60 segundos ($1' = 60''$); $1^\circ = 3600''$

La circunferencia mide 360° . Un ángulo llano mide 180° . Un ángulo recto mide 90° .

Ángulos positivos giramos en el sentido de las agujas del reloj,

Ángulos negativos giramos en sentido contrario a las agujas del reloj. Para hallar el ángulo de referencia positivo le sumamos 360°

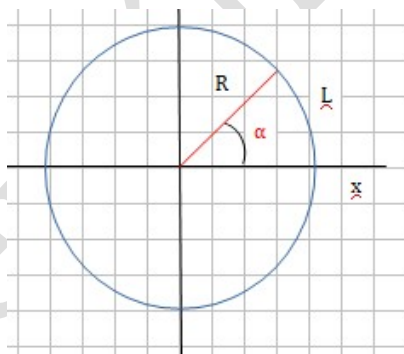
El ángulo -150° tendría un ángulo de referencia positivo $= +360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$;

El ángulo -60° tendría un ángulo de referencia positivo $= +360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$;

Radian:

Es la medida de un ángulo α tal que cualquier arco que se asocie mide lo mismo que el Radio de la circunferencia. La longitud del arco $L = R$ radio de la circunferencia

La circunferencia mide 2π radianes



Relación Radianes grados:

La circunferencia mide 360° y 2π rad

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}; 180^\circ = \pi \text{ rad}; 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad};$$

El ángulo $-\frac{2}{3}\pi$ rad tendría un ángulo de referencia positivo $= +2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$ rad;

1. Ejercicio trigonometría

Convertir grados en radianes y biceversa los siguientes datos

a) 60° ; $58^\circ 38' 48''$; 420° ; b) $\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$; $\frac{3}{4}\pi \text{ rad}$; $\frac{46}{4}\pi \text{ rad}$.

Solución

$$a) \quad 60^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } 180^\circ = \pi \text{ rad} \\ 60^\circ = x \end{array} \right. ; x = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad};$$

$$58^\circ 38' 48'' \text{ pasamos a grados} = 58^\circ + \left(\frac{38}{60}\right)^\circ + \left(\frac{48}{3600}\right)^\circ = 58^\circ + 0,6333^\circ + 0,0133^\circ;$$

$$58^\circ 38' 48'' = 58,6467^\circ \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } 180^\circ = \pi \text{ rad} \\ 58,6467^\circ = x \end{array} \right. ; x = \frac{58,6467^\circ \pi}{180} = 0,3258\pi \text{ rad}$$

$$420^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } 180^\circ = \pi \text{ rad} \\ 420^\circ = x \end{array} \right. ; x = \frac{420\pi}{180} = \frac{7\pi}{3} \text{ rad}$$

$$b) \frac{2}{3}\pi \text{ rad} \begin{cases} \text{Si } 180^\circ = \pi \text{ rad} \\ x = \frac{2}{3}\pi \end{cases}; x = \frac{\frac{2}{3}\pi * 180^\circ}{\pi} = \frac{2 * 180}{3} = 120^\circ;$$

$$\frac{3}{4}\pi \text{ rad} \begin{cases} \text{Si } 180^\circ = \pi \text{ rad} \\ x = \frac{3}{4}\pi \end{cases}; x = \frac{\frac{3}{4}\pi * 180^\circ}{\pi} = \frac{3 * 180}{4} = 135^\circ;$$

$$\frac{46}{4}\pi \text{ rad} \begin{cases} \text{Si } 180^\circ = \pi \text{ rad} \\ x = \frac{46}{4}\pi \end{cases}; x = \frac{\frac{46}{4}\pi * 180^\circ}{\pi} = \frac{46 * 180}{4} = 2070^\circ;$$

2. Ejercicio trigonometría

¿Cuánto suman los ángulos de un triángulo en radianes y uno ángulo recto?

Solución

Los angulos de un triángulo suman $180^\circ = \pi \text{ rad}$;

Un angulo recto mide $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

3. Ejercicio trigonometría

Un ciclista ha recorrido 5 rad de un velódromo de velocidad circular de radio 30m ¿Cuánto m ha recorrido?

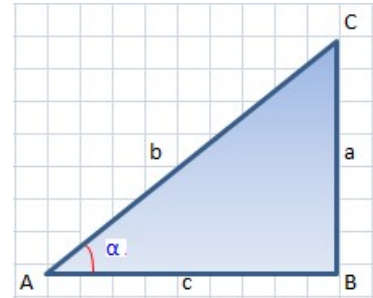
Solución

Longitud de la circunferencia = $2\pi r$. El angulo de la circunferencia son $2\pi \text{ rad}$.

$$\begin{cases} \text{Si } 2\pi r = 2\pi \text{ rad} \\ x = 5 \text{ rad} \end{cases} \quad x \text{ longitud recorrida} = \frac{2\pi r * 5}{2\pi} = 5 * r = 5 * 30; x = 150m$$

2 Razones trigonométricas de un ángulo agudo

La trigonometría es una rama importante de las matemáticas dedicada al estudio de la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Con este propósito se definieron una serie de funciones.



$$\text{Seno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{Longitud de la hipotenusa}}; \text{Sen } \alpha = \frac{a}{b};$$

$$\text{Coseno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{Longitud de la hipotenusa}}; \cos \alpha = \frac{c}{b};$$

$$\text{Tangente de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}; \text{tg } \alpha = \frac{a}{c};$$

El sen y el cos de un ángulo agudo son siempre menores que 1, dado que la hipotenusa es siempre mayor que cada uno de los catetos

$$\text{cosecante de } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{Longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}; \text{cosec } \alpha = \frac{b}{a};$$

$$\text{Secante de } \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\text{Longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}; \sec \alpha = \frac{b}{c};$$

$$\text{Cotangente de } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}; \cot \alpha = \frac{c}{a};$$

4. Ejercicios de trigonometría

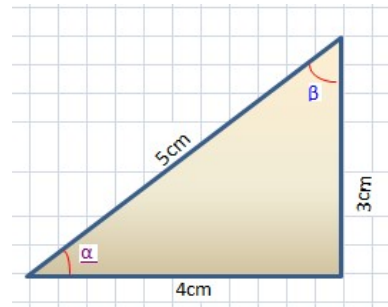
Calcular las razones trigonometricas de los angulos agudos del triangulo

Solucion

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} = 0,6; \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{4}{5} = 0,8;$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8; \quad \cos \beta = \frac{3}{5} = 0,6;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3} = 1,33;$$



3 Razones Trigonómicas de un ángulo cualquiera

Sobre los ejes de coordenadas (X,Y) trazamos una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y de radio 1 ($a=1$) (circunferencia goniométrica)

Trazamos un ángulo α que corta a la circunferencia en el punto (c, b).

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a}; \text{ dado que } a = 1; \quad \operatorname{sen} \alpha = b;$$

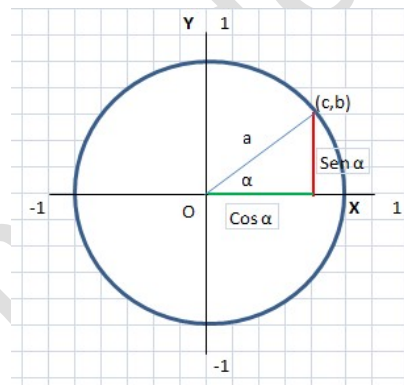
$$\cos \alpha = \frac{c}{a}; \text{ dado que } a = 1; \quad \cos \alpha = c;$$

Los ángulos también pueden definirse en radianes

$$\frac{\pi}{2} \text{ radianes} = 90^\circ;$$

$$\pi \text{ radianes} = 180^\circ;$$

$$2\pi \text{ radianes} = 360^\circ;$$



3.1 Razones t. de 0° , 90° , 180° y 270°

Angulo	0°	90°	180°	270°
Seno	0	1	0	-1
Coseno	1	0	-1	0
Tangente	0	no existe	0	No existe

3.2 Signo de las R. t. en cualquier cuadrante

Según este el ángulo en un cuadrante u otro el valor de las razones trigonométricas tendrán un valor positivo + o negativo -

	1 ^{er} Cuadrante	2 ^{er} Cuadrante	3 ^{er} Cuadrante	4 ^{er} Cuadrante
Angulo α	$0^\circ - 90^\circ$	$90^\circ - 180^\circ$	$180^\circ - 270^\circ$	$270^\circ - 360^\circ$
Seno α	Positivo	Positivo	Negativo	Negativo
Coseno α	Positivo	Negativo	Negativo	Positivo
Tangente α	Positivo	Negativo	Positivo	Negativo

5. Ejercicios de trigonometría

Indicar en que cuadrante está cada uno de los siguientes ángulos:

- a) $\text{Sen } \alpha = 0,8$; $\text{Cos } \alpha = -0,6$;
 b) $\text{Sen } \beta = -0,8$; $\text{Cos } \beta = -0,6$;
 c) $\text{Sen } \gamma = 0,5$; $\text{Cos } \gamma = 0,57$;
 d) $\text{Sen } \gamma = -0,5$; $\text{Cos } \gamma = 0,57$;

Solución

- a) α está en el 2º cuadrante (seno positivo, coseno negativo)
 b) β está en el 3º cuadrante (seno negativo, coseno negativo)
 c) γ está en el 1º cuadrante (seno positivo, coseno positivo)
 d) γ está en el 4º cuadrante (seno negativo, coseno positivo)

6. Ejercicios de trigonometría

Indicar el signo que tienen las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

66° ; 175° ; 342° ; 18° ; 235°

Solución

Ángulo α	66° (1º cuadrante)	175° (2º cuadrante)	342° (4º cuadrante)	18° (1º cuadrante)	235° (3º cuadrante)
Sen α	Positivo	Positivo	Negativo	Positivo	Negativo
Coseno α	Positivo	Negativo	Positivo	Positivo	Negativo
Tangente α	Positivo	Negativo	Negativo	Positivo	Positivo

7. Ejercicios de trigonometría

Indicar el signo que tienen las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

- a) $\frac{3\pi}{4}$; b) $\frac{11\pi}{3}$; c) $\frac{4\pi}{3}$; d) $-\frac{7\pi}{3}$; e) $-\frac{9\pi}{4}$;

Solución

- a) $\pi > \frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{2}$; $\frac{4\pi}{4} > \frac{3\pi}{4} > \frac{2\pi}{4}$ segundo cuadrante;

- b) $\frac{11\pi}{3} \text{ rad} = -2\pi + \frac{5\pi}{3}$; $2\pi > \frac{5\pi}{3} > \frac{3\pi}{2}$; $\frac{12\pi}{6} > \frac{10\pi}{6} > \frac{9\pi}{6}$ rad 4º cuadrante

- c) $\frac{4\pi}{3} \text{ rad}$; $\frac{3\pi}{2} > \frac{4\pi}{3} > \pi$; $\frac{9\pi}{6} > \frac{8\pi}{6} > \frac{6\pi}{6}$ rad 3º cuadrante

- d) $-\frac{7\pi}{3} \text{ rad} - 2\pi = 1 \text{ vuelta y } -\frac{1}{3}\pi$; $-\frac{1}{3}\pi + 2\pi$; $-\frac{1}{3}\pi + \frac{6}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$ ángulo de referencia;

$$2\pi > \frac{5\pi}{3} > \frac{3\pi}{2}; \frac{12\pi}{6} > \frac{10\pi}{6} > \frac{9\pi}{6} \text{ rad 4º cuadrante};$$

- e) $-\frac{9\pi}{4} \text{ rad} - 2\pi = 1 \text{ vuelta y } -\frac{1}{4}\pi$; $-\frac{1}{4}\pi + 2\pi$; $-\frac{1}{4}\pi + \frac{8}{4}\pi$; $\frac{7}{4}\pi$ ángulo de referencia;

$$2\pi > \frac{7\pi}{4} > \frac{3\pi}{2}; \frac{8\pi}{4} > \frac{7\pi}{4} > \frac{6\pi}{4} \text{ rad 4º cuadrante};$$

Ángulo α	$\frac{3\pi}{4}$ (2º cuadrante)	$\frac{11\pi}{3}$ (4º cuadrante)	$\frac{4\pi}{3}$ (3º cuadrante)	$-\frac{7\pi}{3}$ (4º cuadrante)	$-\frac{9\pi}{4}$ (4º cuadrante)
Sen α	+	-	-	-	-
Cos α	+	+	-	+	+
Tg α	+	-	+	-	-
Cosec α	+	-	-	-	-
Sec α	+	+	-	+	+
Cotg α	+	-	+	-	-

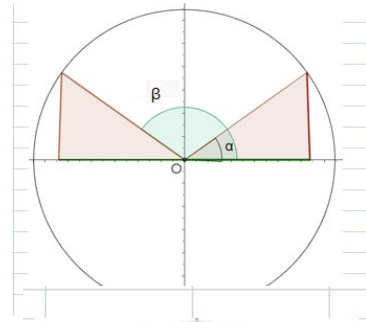
4 Reducción de ángulos al primer cuadrante.

Si el ángulo β está en el segundo cuadrante siempre habrá un ángulo α en el primer cuadrante que cumpla $\alpha = 180^\circ - \beta$; en radianes $\pi - \beta$;

$$\text{sen } \beta = \text{sen } \alpha;$$

$$\text{Cos } \beta = -\text{cos } \alpha;$$

$$\text{Tg } \beta = -\text{tg } \alpha;$$

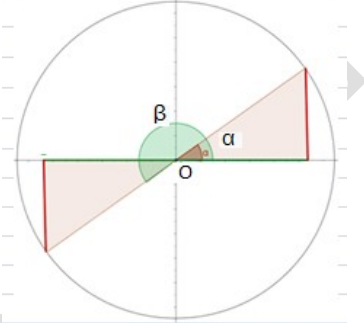


Si el ángulo β está en el tercer cuadrante siempre habrá un ángulo α en el primer cuadrante que cumpla $\beta = 180^\circ + \alpha$; en radianes $\pi + \beta$;

$$\text{sen } \beta = -\text{sen } \alpha;$$

$$\text{Cos } \beta = -\text{cos } \alpha;$$

$$\text{Tg } \beta = \text{tg } \alpha;$$



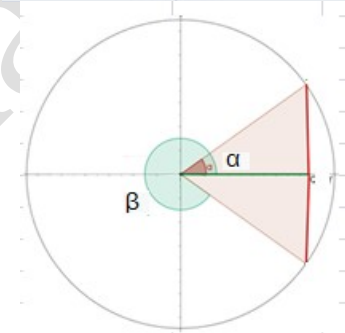
Si el ángulo β está en el cuarto cuadrante siempre habrá un ángulo α en el primer cuadrante que

cumpla $\beta = 360^\circ - \alpha$; en radianes $2\pi - \alpha$;

$$\text{sen } \beta = -\text{sen } \alpha;$$

$$\text{Cos } \beta = \text{cos } \alpha;$$

$$\text{Tg } \beta = -\text{tg } \alpha;$$



5 Ángulos complementarios, suplementarios y opuestos

5.1 Razones t. de ángulos complementarios

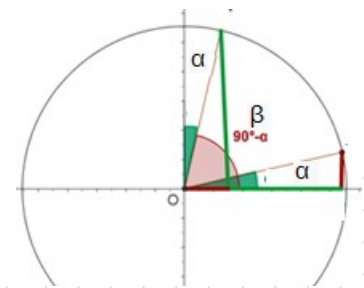
Ángulos complementarios son aquellos que sumados forman un ángulo recto

$$\alpha + \beta = 90^\circ; \beta = 90^\circ - \alpha; \text{ en radianes } \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\text{Sen } \alpha = \text{cos } \beta; \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{Cos } \alpha = \text{sen } \beta; \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \beta};$$



5.2 Razones t. de ángulos Suplementarios

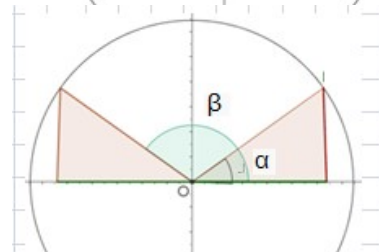
Ángulos suplementarios son aquellos que sumados forman un ángulo llano

$$\alpha + \beta = 180^\circ; \beta = 180^\circ - \alpha; \text{ en radianes } \beta = \pi - \alpha$$

$$\text{Sen } \alpha = \text{sen } \beta; \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{Cos } \alpha = -\text{cos } \beta; \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{tg } \alpha = -\text{tg } \beta;$$



5.3 Razones t. de ángulos opuestos

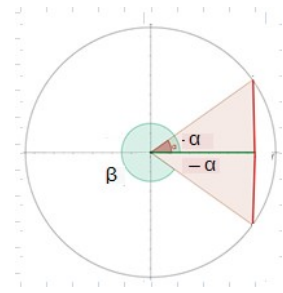
El ángulo opuesto de α es $-\alpha$;

El ángulo opuesto de 50 es -50 ;

$$\text{Sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha; \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{Cos}(-\alpha) = \text{cos } \alpha; \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg } \alpha;$$



5.4 Razones t. de ángulos mayores de 360°

Para calcular las razones trigonométricas de ángulos mayores de 360°, se divide el ángulo por 360 y se calculan las razones trigonométricas del resto de la división.

Para ángulos mayores de 2π radianes, se divide por 2π ;

Ej. Calcular el número de vueltas y ángulo de los siguientes ángulo de 390° y de 2285°

$$390^\circ \overline{) 360}$$

$$30^\circ \quad 1$$

$$390^\circ = 1 \text{ vuelta} + 30^\circ;$$

$$2285^\circ \overline{) 360}$$

$$125^\circ \quad 6$$

$$2285 = 6 \text{ vueltas} + 125^\circ$$

Ej. Calcular el número de vueltas y ángulo de los siguientes ángulo de

Ej. Calcular el número de vueltas y ángulo de los siguientes ángulo de 35π y $\frac{11}{3}\pi$

$$15\pi \overline{) 2\pi}$$

$$1 \quad 7$$

$$15\pi = 7 \text{ vuelta} + \pi;$$

$$7\pi \overline{) 2\pi}$$

$$1 \quad 3$$

$$7\pi = 3 \text{ vuelta} + \pi$$

5.5 Razones de 45°

En un triángulo rectángulo isósceles, sus ángulos agudos miden 45° y sus catetos miden los dos l

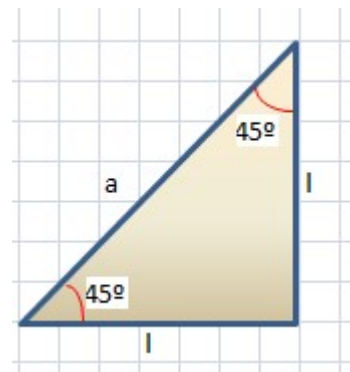
Aplicando el teorema de Pitágoras

$$l^2 + l^2 = a^2; a = \sqrt{l^2 + l^2}; a = \sqrt{2l^2}; a = 2l\sqrt{2};$$

$$\text{Sen}45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{Sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{Cos}45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{Cos}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{tg}45^\circ = \frac{1}{1} = 1; \text{tg}45^\circ = 1;$$



5.6 Razones de 30° y 60°

En un triángulo equilátero, sus lados son iguales (l) y cada uno de sus ángulos miden 60°

Aplicando el teorema de Pitágoras

$$l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = h^2; h = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{4l^2}{4} + \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{5l^2}{4}};$$

$$h = \frac{l}{2} \sqrt{3}; h = \frac{\sqrt{3}}{2} l;$$

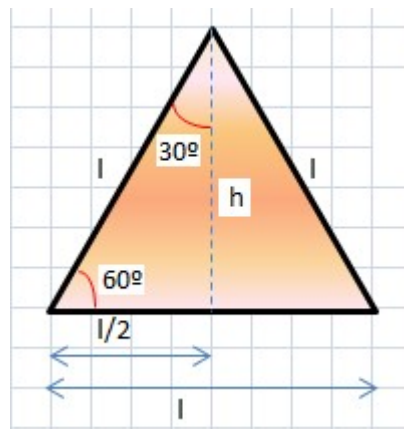
$$\text{Sen } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{Sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{Cos } 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}; \text{Cos } 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}; \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}; \text{Sen } 30^\circ = \frac{1}{2}; \text{Cos } 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{Cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} l} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



8. Ejercicios de trigonometría

Calcular el valor de las siguientes expresiones $\cos 60^\circ - \sin 30^\circ + \text{tg } 45^\circ$;

Solución

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \text{tg } 45^\circ = 1;$$

$$\cos 60^\circ - \sin 30^\circ + \text{tg } 45^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = 1;$$

9. Ejercicios de trigonometría

Calcular el valor de las siguientes razones trigonométricas reduciéndolas al primer cuadrante

a) $\cos 150^\circ$; b) $\cotg 300^\circ$; c) $\sec 240^\circ$; d) $\text{tag } 240^\circ$; e) $\sin \frac{3}{4} \pi$; f) $\cos \frac{11}{6} \pi$; g) $\text{cosec} = \frac{7}{6} \pi$;

Solución:

$$\text{a) } \cos 150^\circ (2^\circ \text{ cuadrante}); 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ; \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } \cotg 300^\circ (4^\circ \text{ cuadrante}); 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ; \cotg 300^\circ = -\cotg 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{c) } \sec 240^\circ (3^\circ \text{ cuadrante}); 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ; \sec 240^\circ = \frac{1}{\cos 240^\circ} = -\frac{1}{\cos 60^\circ};$$

$$\sec 240^\circ = -\sec 60^\circ = -2;$$

$$\text{d) } \text{tag } 240^\circ (3^\circ \text{ cuadrante}); 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ; \text{tag } 240^\circ = \text{tag } 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$e) \sin \frac{3}{4} \pi \left(2^{\circ} \text{ cuadrante } \pi > \frac{3}{4} \pi > \frac{\pi}{2} \right); \pi - \frac{3}{4} \pi = \frac{1}{4} \pi; \sin \frac{3}{4} \pi = \sin \frac{1}{4} \pi$$

$$f) \cos \frac{11}{6} \pi \left(4^{\circ} \text{ cuadrante } 2\pi > \frac{11}{6} \pi > \frac{3}{2} \pi; \frac{12}{6} \pi > \frac{11}{6} \pi > \frac{9}{6} \pi \right); 2\pi - \frac{11}{6} \pi = \frac{1}{6} \pi;$$

$$\cos \frac{11}{6} \pi = \cos \frac{1}{6} \pi;$$

$$g) \operatorname{cosec} \frac{7}{6} \pi \left(3^{\circ} \text{ cuadrante } \frac{3}{2} \pi > \frac{7}{6} \pi > \pi; \frac{9}{6} \pi > \frac{7}{6} \pi > \frac{6}{6} \pi \right); \frac{7}{6} \pi - \pi = \frac{1}{6} \pi;$$

$$\operatorname{cosec} \frac{7}{6} \pi = -\operatorname{cosec} \frac{1}{6} \pi$$

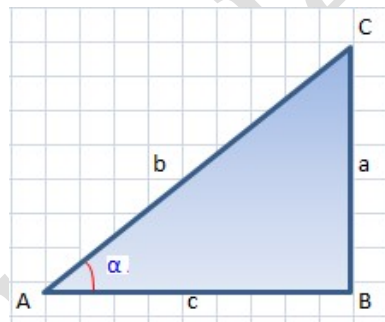
5.7 Relaciones entre las razones trigonométricas

Teorema de pitágoras $a^2 + c^2 = b^2$

$$(\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha;$$

$$(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha;$$

$$(\operatorname{tg} \alpha)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha;$$



5.8 Relaciones fundamentales

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1;$$

Aplicando el teorema de pitágoras $a^2 + c^2 = b^2$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{b}; \cos \alpha = \frac{c}{b}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{c}; \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a * b}{c * b} = \frac{a}{c} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$\text{Si dividimos } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \text{ por } \cos^2 \alpha; \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha;$$

$$1 + \cotg^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\text{Si dividimos } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \text{ por } \sin^2 \alpha; \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; 1 + \cotg^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha;$$

10. Ejercicios de trigonometría

Sabiendo que la cotangente de un ángulo del primer cuadrante vale $= \frac{\sqrt{3}}{3}$. Calcula el resto de razones del ángulo.

Solución (al ser ángulo del 1º cuadrante todas las razones son positivas)

$$\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}; \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3};$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha; \operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}; \operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} =$$

$$; \sqrt{1 + \frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \operatorname{cosec} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}; \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}}; \operatorname{sen} \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}; \cos^2 \alpha = \frac{1}{4};$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{4}}; \cos \alpha = \frac{1}{2};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}; \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \sec \alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2; \sec \alpha = 2$$

11. Ejercicios de trigonometría

Sabiendo que la secante de un ángulo del 2º cuadrante vale $= -5$. Calcula el resto de razones del ángulo.

Solución (al ser ángulo del 2º cuadrante, sen +; cos -; cosec +; sec -; tg - cotg -;

todas las razones son positivas)

$$\sec \alpha = -5, \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{1}{-5}; \cos \alpha = -\frac{1}{5};$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}; \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{24}{25}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{24}{25}}; \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5};$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{24}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{24}}; \operatorname{cosec} \alpha = \frac{5\sqrt{24}}{24};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{24}}{5}}{-\frac{1}{5}} = -\sqrt{24}; \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{24}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{-\sqrt{24}} = -\frac{\sqrt{24}}{24}; \cot \alpha = -\frac{\sqrt{24}}{24};$$

12. Ejercicios de trigonometría

Resolver las siguientes ecuaciones a) $3 \sin^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$; b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cos x$;

Solución:

a) $3 \sin^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$; $3(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x + \cos x = 0$;

$$3 - 3\cos^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0; -2\cos^2 x + \cos x + 3 = 0; \text{ multiplico todo por } (-1)$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0; \text{ cambio de variables } \cos x = t; 2t^2 - t - 3 = 0;$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 * 2 * (-3)}}{2 * 2} = \frac{1 \pm 5}{4}; t = \frac{6}{4}; t = 1;$$

$$\cos x = \frac{6}{4} \text{ solucion no valida. el valor de } \sin x \text{ y } \cos x, \text{ ha de estar comprendida } -1 \text{ y } 1;$$

$$\cos x = -1; x = 180^\circ \pm 360^\circ$$

b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cos x$; $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{2} \cos x$; $\sin x = \sqrt{2} \cos^2 x$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$;

$$\sin x = \sqrt{2} (1 - \sin^2 x); \sqrt{2} \sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0; \text{ cambio de variables } t = \sin x;$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 * \sqrt{2} * (-\sqrt{2})}}{2 * \sqrt{2}} = \frac{-1 \pm 3}{2 * \sqrt{2}}; t = \frac{-4}{2 * \sqrt{2}} = -\sqrt{2}; t = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin x = -\sqrt{2}; \text{ solucion no valida. el valor de } \sin x \text{ y } \cos x, \text{ ha de estar comprendida } -1 \text{ y } 1$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; x = 45^\circ \pm 360^\circ \text{ y } x = 135^\circ \pm 360^\circ;$$

13. Ejercicios de trigonometría

Hallar el resultado de las siguientes operaciones sin usar calculadora

a) $5 \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2 \cos \pi - \cos \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$ b) $5 \operatorname{tg} \pi + 3 \cos \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{tg} 0 + \sin \frac{3\pi}{2} - 2 \sin 2\pi$;

Solución:

a) $5 \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2 \cos \pi - \cos \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$;

$$5(0) - (1) + 2(-1) - (0) + 1 = -1 - 2 + 1 = -2;$$

b) $5 \operatorname{tg} \pi + 3 \cos \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{tg} 0 + \sin \frac{3\pi}{2} - 2 \sin 2\pi$; $5(0) + 3(0) - 2(0) + (-1) - 2(0) = -1$;

14. Ejercicios de trigonometría

Demuestra que son ciertas las siguientes identidades

a) $(\operatorname{tg} x)(\cos x) = \sin x$; b) $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$; c) $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$

Solución

a) $(\operatorname{tg} x)(\cos x) = \sin x$; $\frac{\sin x}{\cos x} * \cos x = \sin x$; $\sin x = \sin x$;

b) $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$; $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$; $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$; $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

c) $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$; $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$; $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$; $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

15. Ejercicios de trigonometría

Demuestra que son ciertas las siguientes identidades

$$a) \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}; \quad b) \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{cosec} x} = \cos x ;$$

Solución

$$a) \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}; \quad (1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x) = \cos^2 x; \quad 1^2 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x;$$

$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$$

$$b) \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{cosec} x} = \cos x ; \quad \operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x = \cos x (\operatorname{tg} x + \operatorname{cosec} x);$$

$$\operatorname{sen} x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right); \quad \operatorname{sen} x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x * \operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x};$$

$$\operatorname{sen} x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}; \quad \text{se cumple}$$

16. Ejercicios de trigonometría

Hallar las razones trigonometricas conociendo que $\operatorname{tg} \alpha = 3$;

Solución

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{3}; \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{3};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 3, \operatorname{sen} \alpha = 3 \cos \alpha;$$

$$1 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha; \quad (3 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1; \quad 9 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad 10 \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{10}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}; \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10};$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 3 \cos \alpha; \quad \operatorname{sen} \alpha = 3 \frac{\sqrt{10}}{10}; \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10};$$

17. Ejercicios de trigonometría

Hallar las razones trigonometricas sabiendo que α esta en el 2 cuadrante y $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = -\frac{3}{4}$;

Solución

Si α es del 2º cuadrante $\pi > \alpha > \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ es un angulo negativo y

estará en el IV cuadrante

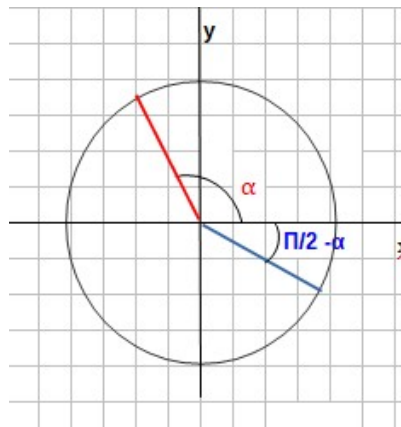
$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = -\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{-3}; \quad \operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{3} \cos \alpha;$$

Hallamos el valor del seno con la formula

$$1 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha;$$

$$1 = \left(-\frac{4}{3} \cos \alpha \right)^2 + \cos^2 \alpha; \quad 1 = \frac{16}{9} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha; \quad 1 = \frac{25}{9} \cos^2 \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = -\frac{3}{5};$$



como α es del II cuadrante será negativo $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$;

$$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{3} \cos \alpha = \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}; \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}; \operatorname{cotg} \alpha = -\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{seca} = -\frac{5}{3}; \operatorname{coseca} = \frac{5}{4};$$

18. Ejercicios de trigonometría

Hallar las razones trigonometricas sabiendo que α esta en el 2 cuadrante y $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$;

Solución

Hallamos el valor del cos con la formula $1 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$; $\cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{9} - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}}; \cos \alpha = \frac{\pm \sqrt{8}}{3};$$

como esta en el segundo cuadrante será negativo $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{8}}{3}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{-\sqrt{8}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{8}}{8} = -\frac{2\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{4}; \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3; \operatorname{cosec} \alpha = 3$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{8}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{8}} = -\frac{3\sqrt{8}}{8}; \operatorname{sec} \alpha = -\frac{3\sqrt{8}}{8}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{4}} = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}; \operatorname{cotg} \alpha = -2\sqrt{2}$$

6 Razones trigonométricas la suma y resta de ángulos

En ocasiones es necesario calcular las razones trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos, conociendo las razones trigonométricas de estos ángulos independientemente.

SUMA DE ANGULOS

Triangulo AED

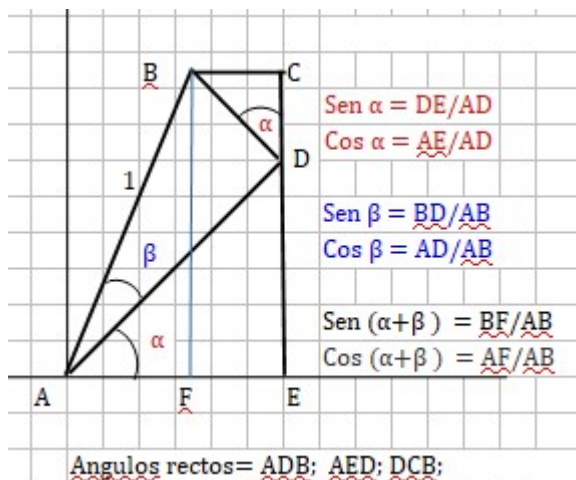
Dado que $AB=1$;

$$\sin \beta = \frac{BD}{AB}; \sin \beta = BD;$$

$$\cos \beta = \frac{AD}{AB}; \cos \beta = AD;$$

$$\sin \alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{DE}{\cos \beta}; DE = \sin \alpha * \cos \beta;$$

$$\cos \alpha = \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{\cos \beta}; AE = \cos \alpha * \cos \beta;$$



Los triángulos AED y DCB son semejantes por tener los lados perpendiculares.

Triangulo DCB

$$\sin \alpha = \frac{BC}{DB} = \frac{BC}{\sin \beta}; BC = \sin \alpha * \sin \beta;$$

$$\cos \alpha = \frac{DC}{DB} = \frac{DC}{\sin \beta}; DC = \cos \alpha * \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{BF}{AB}; \text{dado que } AB = 1; \sin(\alpha + \beta) = BF; BF = DE + DC;$$

Triangulo AFB

$$\sin(\alpha + \beta) = DE + DC; \text{sustituyo por su valor}; \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha * \cos \beta + \cos \alpha * \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AF}{AB}; \text{dado que } AB = 1; \cos(\alpha + \beta) = AF; AF = AE - BC;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = AE - BC; \text{sustituyo por su valor}; \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha * \cos \beta - \sin \alpha * \sin \beta;$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha * \cos \beta + \cos \alpha * \sin \beta}{\cos \alpha * \cos \beta - \sin \alpha * \sin \beta} =$$

$$\frac{\sin \alpha * \cos \beta}{\cos \alpha * \cos \beta - \sin \alpha * \sin \beta} + \frac{\cos \alpha * \sin \beta}{\cos \alpha * \cos \beta - \sin \alpha * \sin \beta};$$

dividimos numerador y denominador por $\cos \alpha * \cos \beta$

$$\frac{\frac{\sin \alpha * \cos \beta}{\cos \alpha * \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha * \cos \beta}{\cos \alpha * \cos \beta} - \frac{\sin \alpha * \sin \beta}{\cos \alpha * \cos \beta}} + \frac{\frac{\cos \alpha * \sin \beta}{\cos \alpha * \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha * \cos \beta}{\cos \alpha * \cos \beta} - \frac{\sin \alpha * \sin \beta}{\cos \alpha * \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\sin \alpha * \sin \beta}{\cos \alpha * \cos \beta}} +$$

$$\frac{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha * \sin \beta}{\cos \alpha * \cos \beta}} = \frac{\text{tg} \alpha}{1 - \text{tg} \alpha * \text{tg} \beta} + \frac{\text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha * \text{tg} \beta}; \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha * \text{tg} \beta}$$

DIFERENCIA DE ANGULOS

Si sustituimos β por $(-\beta)$ obtendremos las formulas de la diferencia

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha * \cos(-\beta) + \cos \alpha * \sin(-\beta); \cos(-\beta) = \cos \beta; \sin(-\beta) = -\sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha * \cos \beta - \cos \alpha * \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha * \cos(-\beta) - \sin \alpha * \sin(-\beta); \cos(-\beta) = \cos \beta; \sin(-\beta) = -\sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha * \cos \beta + \sin \alpha * \sin \beta;$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha * \tan \beta}$$

19. Ejercicios de trigonometría

Calcula el valor de a) $\cos 105^\circ$ y b) $\sin 15^\circ$

Solución

a) $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ)$ aplicamos $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha * \cos \beta - \sin \alpha * \sin \beta$

$$\cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ * \cos 45^\circ - \sin 60^\circ * \sin 45^\circ = \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}; \cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4};$$

b) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ); \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha * \cos \beta - \cos \alpha * \sin \beta$

$$\sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ * \cos 30^\circ - \cos 45^\circ * \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4};$$

20. Ejercicios de trigonometría

Calcula el valor de a) $\sin 75^\circ$ y b) $\sin \frac{\pi}{12}$ rad

Solución

a) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$ aplicamos $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha * \cos \beta + \cos \alpha * \sin \beta$

$$\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ * \cos 30^\circ + \cos 45^\circ * \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} =$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

b) $\sin \frac{\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}); \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha * \cos \beta - \cos \alpha * \sin \beta$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{4} * \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} * \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4};$$

21. Ejercicios de trigonometría

Demuestra que $\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$;

Solución

$\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$ aplico $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha * \cos \beta + \cos \alpha * \sin \beta$;

$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$; sabemos que $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$; y $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$

$$\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin \alpha * \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \alpha * \sin \frac{3\pi}{2} = \sin \alpha * 0 + \cos \alpha * (-1) = -\cos \alpha$$

22. Ejercicios de trigonometría

Demuestra que $\sin(x + y) * \sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$;

Solución

$\sin(x + y) * \sin(x - y) = (\sin x * \cos y + \cos x * \sin y)(\sin x * \cos y - \cos x * \sin y) =$

Identidad notable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(\sin x * \cos y + \cos x * \sin y)(\sin x * \cos y - \cos x * \sin y)$

$(\sin x * \cos y)^2 - (\cos x * \sin y)^2 = \sin^2 x * \cos^2 y - \cos^2 x * \sin^2 y$

Aplico $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

$\sin^2 x * \cos^2 y - \cos^2 x * \sin^2 y = \sin^2 x(1 - \sin^2 y) - (1 - \sin^2 x)\sin^2 y =$

$\sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 y - (\sin^2 y - \sin^2 y \sin^2 x) = \sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 y - \sin^2 y + \sin^2 y \sin^2 x =$

$= \sin^2 x - \sin^2 y$ se cumple

23. Ejercicios de trigonometría

Demuestra que $\frac{\sin(A + B)}{\sin(A - B)} = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B}$

Solución

$$\frac{\sin(A + B)}{\sin(A - B)} = \frac{\sin A * \cos B + \cos A * \sin B}{\sin A * \cos B - \cos A * \sin B};$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B} = \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B}} = \frac{\sin A * \cos B + \cos A * \sin B}{\sin A * \cos B - \cos A * \sin B}$$

24. Ejercicios de trigonometría

Demuestra que $\tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A * \sin^2 A$;

Solución

$$\tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A * \sin^2 A; \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \sin^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} * \sin^2 A;$$

$$\sin^2 A - \sin^2 A * \cos^2 A = \sin^4 A; \sin^2 A(1 - \cos^2 A) = \sin^4 A;$$

dado que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$; $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$; sustituyo en la anterior

$$\sin^2 A(1 - \cos^2 A) = \sin^4 A; \sin^2 A * \sin^2 A = \sin^4 A; \text{se cumple } \sin^4 A = \sin^4 A;$$

7 Razones Trig. del ángulo doble y del ángulo mitad

RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO DOBLE.

Para hallar las razones trigonométricas del ángulo doble parto de las ecuaciones de la suma y diferencia de dos ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha * \cos \beta + \cos \alpha * \operatorname{sen} \beta ; \text{ sustituyo } \beta \text{ por } \alpha ;$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen} \alpha * \cos \alpha + \cos \alpha * \operatorname{sen} \alpha ; \quad \boxed{\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha * \cos \alpha ;}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha * \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha * \operatorname{sen} \beta ; \text{ sustituyo } \beta \text{ por } \alpha ;$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha = \cos \alpha * \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha * \operatorname{sen} \alpha ; \quad \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha ;}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha * \operatorname{tg} \beta} ; \text{ sustituyo } \beta \text{ por } \alpha ;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha * \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha * \operatorname{tg} \alpha} ; \quad \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO MITAD.

Para hallar las razones trigonométricas del ángulo mitad parto de las ecuaciones del coseno del ángulo doble sustituyendo α por $\frac{\alpha}{2}$;

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha ; \cos(2 * \frac{\alpha}{2}) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} ; \cos \alpha = \left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} ;$$

$$\cos \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} ; 2\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha ; \quad \boxed{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} ;}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha ; \cos(2 * \frac{\alpha}{2}) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} ; \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) ; ;$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} ; \cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 ; 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha ; \quad \boxed{\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} ;}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \cos \alpha}} ; \quad \boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} ;}$$

8 Transformación de sumas en productos

Para resolver ciertos cálculos puede ser conveniente transformar las razones trigonométricas del formato suma la de productos.

Una posible forma de hacerlo es sumando y restando las expresiones de la suma y diferencia de ángulos

$$\text{sumo} \begin{cases} \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha * \cos \beta + \cos \alpha * \text{sen } \beta \\ \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha * \cos \beta - \cos \alpha * \text{sen } \beta \end{cases} \quad \text{resto} \begin{cases} \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha * \cos \beta + \cos \alpha * \text{sen } \beta \\ \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha * \cos \beta - \cos \alpha * \text{sen } \beta \end{cases}$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\text{sen } \alpha * \cos \beta;$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha * \text{sen } \beta$$

Hacemos un cambio de variables

$$\text{sumo} \begin{cases} \alpha + \beta = A; \\ \alpha - \beta = B \end{cases} \quad A + B = 2\alpha; \quad \alpha = \frac{A+B}{2}; \quad \text{resto} \begin{cases} \alpha + \beta = A; \\ \alpha - \beta = B \end{cases} \quad A - B = 2\beta; \quad \beta = \frac{A-B}{2};$$

$$\begin{cases} \text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\text{sen } \alpha * \cos \beta; \\ \text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha * \text{sen } \beta \end{cases} \quad \begin{cases} \text{sen } A + \text{sen } B = 2\text{sen } \frac{A+B}{2} * \cos \frac{A-B}{2}; \\ \text{sen } A - \text{sen } B = 2\cos \frac{A+B}{2} * \text{sen } \frac{A-B}{2} \end{cases}$$

$$\text{sumo} \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha * \cos \beta - \text{sen } \alpha * \text{sen } \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha * \cos \beta + \text{sen } \alpha * \text{sen } \beta \end{cases} \quad \text{resto} \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha * \cos \beta - \text{sen } \alpha * \text{sen } \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha * \cos \beta + \text{sen } \alpha * \text{sen } \beta \end{cases}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha * \cos \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\text{sen } \alpha * \text{sen } \beta;$$

Hacemos un cambio de variables

$$\text{sumo} \begin{cases} \alpha + \beta = A; \\ \alpha - \beta = B \end{cases} \quad A + B = 2\alpha; \quad \alpha = \frac{A+B}{2}; \quad \text{resto} \begin{cases} \alpha + \beta = A; \\ \alpha - \beta = B \end{cases} \quad A - B = 2\beta; \quad \beta = \frac{A-B}{2};$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha * \cos \beta; \\ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\text{sen } \alpha * \text{sen } \beta; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos A + \cos B = 2\cos \frac{A+B}{2} * \cos \frac{A-B}{2}; \\ \cos A - \cos B = -2\text{sen} \frac{A+B}{2} * \text{sen} \frac{A-B}{2} \end{cases}$$

25. Ejercicios de trigonometría

Calcula el valor de las siguientes expresiones a) $\text{sen } 105^\circ + \text{sen } 15^\circ$; b) $\cos 195^\circ - \cos 105^\circ$;

Solución

a) $\text{sen } 105^\circ + \text{sen } 15^\circ$; Aplico $\text{sen } A + \text{sen } B = 2\text{sen } \frac{A+B}{2} * \cos \frac{A-B}{2}$;

$$\text{sen } 105^\circ + \text{sen } 15^\circ = 2\text{sen } \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} * \cos \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = 2\text{sen } 60^\circ * \cos 45^\circ$$

$$\text{sen } 105^\circ + \text{sen } 15^\circ = 2 * \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

b) $\cos 195^\circ - \cos 105^\circ$; $\cos A - \cos B = -2\text{sen} \frac{A+B}{2} * \text{sen} \frac{A-B}{2}$

$$\cos 195^\circ - \cos 105^\circ = -2\text{sen} \frac{195^\circ + 105^\circ}{2} * \text{sen} \frac{195^\circ - 105^\circ}{2} = -2\text{sen} 150^\circ * \text{sen } 45^\circ$$

$$\text{sen} 150^\circ = \text{sen } 30^\circ; \quad \cos 195^\circ - \cos 105^\circ = -2\text{sen} 30^\circ * \text{sen } 45^\circ; = -2 * \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	
Suma de Ángulos ($\alpha + \beta$)	$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha * \cos \beta + \cos \alpha * \text{sen } \beta$
	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha * \cos \beta - \text{sen } \alpha * \text{sen } \beta$
	$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha * \text{tg} \beta}$
Diferencia de Ángulos ($\alpha - \beta$)	$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha * \cos \beta - \cos \alpha * \text{sen } \beta$
	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha * \cos \beta + \text{sen } \alpha * \text{sen } \beta;$
	$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg} \alpha - \text{tg} \beta}{1 + \text{tg} \alpha * \text{tg} \beta}$
Ángulo doble 2α	$\text{sen}(2\alpha) = 2 \text{sen } \alpha * \cos \alpha;$
	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha;$
	$\text{tg} 2\alpha = \frac{2 \text{tg} \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha};$
Ángulo mitad $\alpha/2$	$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
	$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
	$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$
Transformación de Razones trigonométricas de suma a producto	
$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{sen } \frac{A + B}{2} * \cos \frac{A - B}{2};$	$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cos \frac{A + B}{2} * \text{sen } \frac{A - B}{2};$
$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} * \cos \frac{A - B}{2};$	$\cos A - \cos B = -2 \text{sen } \frac{A + B}{2} * \text{sen } \frac{A - B}{2}$

9 Ecuaciones y sistemas trigonométricos

Las ecuaciones trigonométricas son las que la incógnita aparece en razones trigonométricas

26. Ejercicios de trigonometría

Hallar la solución de la ecuación $\cos x = 1$;

Solución:

Los ángulos cuyo coseno vale 1 es el de 0° y todos los múltiplos de 360° . $360^\circ, 720^\circ \dots$;

$$x = \arccos 1; \quad x = 0^\circ = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z};$$

27. Ejercicios de trigonometría

Demuestra que $\frac{2\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} 2A}{2\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} 2A} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$

Solución:

$$\frac{2\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} 2A}{2\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} 2A} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}; \text{ sustituimos } \operatorname{sen}(2A) = 2 \operatorname{sen} A * \cos A;$$

$$\frac{2\operatorname{sen} A - (2 \operatorname{sen} A * \cos A)}{2\operatorname{sen} A + (2 \operatorname{sen} A * \cos A)} = \frac{2\operatorname{sen} A - 2 \operatorname{sen} A * \cos A}{2\operatorname{sen} A + 2 \operatorname{sen} A * \cos A} = \frac{2\operatorname{sen} A(1 - \cos A)}{2\operatorname{sen} A(1 + \cos A)} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A};$$

28. Ejercicios de trigonometría

Demuestra que $\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} + \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 + \cos 2x}{\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x};$

Solución

$$\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} + \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 + \cos 2x}{\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x}; \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x; (2A) = 2 \operatorname{sen} x * \cos x;$$

$$\frac{1 + \cos 2x}{\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x} = \frac{1 + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\cos x - \frac{1}{2}(2 \operatorname{sen} x * \cos x)} = \frac{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x - \operatorname{sen} x * \cos x} = \frac{2\cos^2 x}{\cos x(1 - \operatorname{sen} x)} =$$

$$= \frac{2\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$$

$$\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} + \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x * \cos x}{(1 - \operatorname{sen} x) \cos x} + \frac{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x) \cos x} = \frac{\cos^2 x + (1 - \operatorname{sen}^2 x)}{(1 - \operatorname{sen} x) \cos x} =$$

$$\frac{\cos^2 x + \cos^2 x}{(1 - \operatorname{sen} x) \cos x} = \frac{2\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$$

29. Ejercicios de trigonometría

Demuestra que $2\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x\right) = 1;$

Solución

$$2\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x\right) = 1; 2\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x\right) = 2\left(\left(\cos \frac{x}{2} * \cos \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos x\right)$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}; \text{ sustituyo } 2\left(\left(\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} * \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}\right) - \frac{1}{2} \cos x\right) = \frac{1 + \cos x}{2} - \frac{1}{2} \cos x$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos x}{2} = 1; \text{ Se cumple}$$

30. Ejercicios de trigonometría

Demuestra que $\frac{(\operatorname{sen} x + \cos x) \cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1 + 2\operatorname{sen}^2 x;$

Solución

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha * \cos \alpha; \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \text{ sustituyo}$$

$$\frac{(\operatorname{sen} x + \cos x) \cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x) (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\cos x - \operatorname{sen} x} = (\operatorname{sen} x + \cos x)(\cos x - \operatorname{sen} x) =$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x; \text{ Se cumple}$$

31. Ejercicios de trigonometría

Demuestra que $\frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \cos x$;

Solución

$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha * \cos \alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$ sustituyo

$$\frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \cos x; \quad \frac{2\operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = (\text{Sustituyo})$$

$$\frac{2\operatorname{sen} x * \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{2\operatorname{sen} x * (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{2 \operatorname{sen} x * \cos x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} =$$

$$\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x; \text{ Se cumple}$$

32. Ejercicios de trigonometría

Demuestra que $\operatorname{sen}(x+y) * \operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

Solución

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha * \cos \beta + \cos \alpha * \operatorname{sen} \beta; \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha * \cos \beta - \cos \alpha * \operatorname{sen} \beta$$

$\operatorname{sen}(x+y) * \operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$; sustituyo

$(\operatorname{sen} x * \cos y + \cos x * \operatorname{sen} y) * (\operatorname{sen} x * \cos y - \cos x * \operatorname{sen} y)$ identidad notable

$$\operatorname{sen}^2 x * \cos^2 y - \cos^2 x * \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}^2 x * (1 - \operatorname{sen}^2 y) - (1 - \operatorname{sen}^2 x) * \operatorname{sen}^2 y =$$

$$(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x * \operatorname{sen}^2 y) - (\operatorname{sen}^2 y - \operatorname{sen}^2 x * \operatorname{sen}^2 y) =$$

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x * \operatorname{sen}^2 y - \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 x * \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y; \text{ se cumple}$$

33. Ejercicios de trigonometría

Demuestra que $2\operatorname{tg} x * \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$;

Solución

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \text{ se sustituye en la ecuación } 2\operatorname{tg} x * \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$$

$$2\operatorname{tg} x * \left(\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \right)^2 - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x; 2\operatorname{tg} x * \frac{1 + \cos x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x;$$

$$2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} * \frac{1 + \cos x}{2} - \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}; \frac{\operatorname{sen} x(1 + \cos x)}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x * \cos x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\operatorname{sen} x(1 + \cos x) - \operatorname{sen} x * \cos x = \operatorname{sen} x; \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x * \cos x - \operatorname{sen} x * \cos x = \operatorname{sen} x;$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x; \text{ se cumple}$$

34. Ejercicios de trigonometría

Calcular el valor de x en la ecuación $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$;

Solución

Aplico la razón trigonométrica $(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha * \cos \alpha$;

$\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$; $2 \operatorname{sen} x * \cos x + \cos x = 0$; $\cos x (2 \operatorname{sen} x + 1) = 0$; para que esto valga 0

ha de cumplirse que $\cos x = 0$ ó que $(2 \operatorname{sen} x + 1) = 0$;

para $\cos x = 0$; $x = \operatorname{Arccos} 0$; $x_1 = 90^\circ + 360^\circ k$; $x_2 = 270^\circ + 360^\circ k$;

para $2 \operatorname{sen} x + 1 = 0$; $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$; $x = \operatorname{arcsen} -\frac{1}{2}$; estará en el 3º ó 4º cuadrante;

$$x_1 = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ + 360^\circ k; x_2 = 330^\circ + 360^\circ k$$

35. Ejercicios de trigonometría

Calcular el valor de x en la ecuación $\cos x * \sin 2x - \sin x = 0$;

Solución

Aplico la razón trigonométrica $(2\alpha) = 2 \sin \alpha * \cos \alpha$;

$$\cos x * \sin 2x - \sin x = 0; \cos x * 2 \sin x * \cos x - \sin x = 0; \sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0;$$

ha de cumplirse que $\sin x = 0$ ó que $(2 \cos^2 x - 1) = 0$;

$$\text{para } \sin x = 0; x = \text{Arcsen } 0; x_1 = 0^\circ + 360^\circ k; x_2 = 180^\circ + 360^\circ k;$$

$$\text{para } 2 \cos^2 x - 1 = 0; \cos^2 x = \frac{1}{2}; x = \arcsen \pm \sqrt{\frac{1}{2}}; = \frac{\pm \sqrt{2}}{2};$$

$$\arcsen \frac{+\sqrt{2}}{2}; x_1 = 45^\circ + 360^\circ k; x_2 = (360^\circ + 45^\circ); x_2 = 315^\circ + 360^\circ k;$$

$$\arcsen \frac{-\sqrt{2}}{2}; x_3 = (45^\circ + 90^\circ); x_3 = 135^\circ + 360^\circ k; x_4 = (180^\circ + 45^\circ); x_4 = 225^\circ + 360^\circ k;$$

36. Ejercicios de trigonometría

Calcular el valor de x en la ecuación $\cos^3 x - 3 \cos x = 3 \cos x * \sin x$;

Solución

$$\cos^3 x - 3 \cos x = 3 \cos x * \sin x; \cos^3 x - 3 \cos x - 3 \cos x * \sin x = 0;$$

$$\cos x (\cos^2 x - 3 - 3 \sin x) = 0;$$

ha de cumplirse que $\cos x = 0$ ó que $(\cos^2 x - 3 - 3 \sin x) = 0$; cambio $\cos^2 x$

$$(1 - \sin^2 x) - 3 - 3 \sin x = 0; -\sin^2 x - 3 \sin x - 3 + 1 = 0; \sin^2 x + 3 \sin x + 2 = 0;$$

Hago un cambio de variable $t = \sin x$; $t^2 + 3t + 2 = 0$; resuelvo la ecuación de 2º grado

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 * 1 * 2}}{2}; t = \frac{-3 \pm 1}{2}; t = -1; t = -2; \sin x = -1, \sin x = -2 (\text{no valido})$$

$$\text{para } \sin x = -1; \arcsen -1; x_1 = 270^\circ + 360^\circ k;$$

$$\text{para } \cos x = 0; x = \arccos 0; x_1 = 90^\circ + 360^\circ k; x_2 = 270^\circ + 360^\circ k$$

37. Ejercicios de trigonometría

Calcular el valor de x en la ecuación $4 \cos 2x = 1 - 3 \cos x$;

Solución

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \text{ sustituyo en la ecuación } 4 \cos 2x = 1 - 3 \cos x; 4;$$

$$4(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - 3 \cos x; \sin^2 x = 1 - \cos^2 x; \text{ sustituyo en la ecuación}$$

$$4(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) = 1 - 3 \cos x; 4(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) = 1 - 3 \cos x;$$

$$8 \cos^2 x - 4 = 1 - 3 \cos x; 8 \cos^2 x + 3 \cos x - 5 = 0;$$

Hago un cambio de variable $t = \cos x$; $8t^2 + 3t - 5 = 0$; resuelvo la ecuación de 2º grado

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 * 8 * (-5)}}{2 * 8}; t = \frac{-3 \pm 13}{16}; t = \frac{10}{16}; t = -1; \cos x = -1, \cos x = \frac{10}{16} = \frac{5}{8};$$

$$\text{para } \cos x = -1; \arccos -1; x_1 = 180^\circ + 360^\circ k;$$

$$\text{para } \cos x = \frac{5}{8}; x = \arccos \frac{5}{8}; x_1 = 51^\circ + 360^\circ k; x_2 = 360 - 51; x_2 = 309^\circ + 360^\circ k$$

38. Ejercicios de trigonometría

Calcular el valor de x en la ecuación $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$;

Solución

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}; \text{ sustituyo en la ecuacion } \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right)^2}{1 + \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right)^2} = \frac{1 - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} =$$

$$= \frac{\frac{1 + \cos x - 1 + \cos x}{1 + \cos x + 1 - \cos x}}{\frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x + 1 - \cos x}} = \frac{2 \cos x}{2} = \cos x \text{ Se cumple}$$

39. Ejercicios de trigonometría

Resolver el sistema de ecuaciones trigonometricas $\begin{cases} x + y = 90^\circ \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$;

Solución

$$\text{Sustitucion } \begin{cases} x + y = 90^\circ; & x = 90^\circ - y \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{2}; & \text{Sustituyo } \operatorname{sen}(90^\circ - y) + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Aplico la razon $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$

$$\operatorname{sen}(90 - y) + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{2}; \operatorname{sen} 90^\circ \cdot \cos y - \cos 90^\circ \cdot \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$\text{sustituyo los valores } 1 \cdot \cos y - 0 \cdot \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{2}; \cos y + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{elevo los terminos al cuadrado } (\cos y)^2 + (\operatorname{sen} y)^2 + 2 \operatorname{sen} y \cdot \cos y = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2;$$

$$\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y + 2 \operatorname{sen} y \cdot \cos y = \frac{6}{4}; \text{ pongo } \cos y \text{ en funcion de } \operatorname{sen} y$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 y + 2 \operatorname{sen} y \cdot \cos y = \frac{6}{4}; 1 + 2 \operatorname{sen} y \cdot \cos y = \frac{6}{4}; 2 \operatorname{sen} y \cdot \cos y = \frac{6}{4} - 1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha; \text{ sustituyo en la ecuación } 2 \operatorname{sen} y \cdot \cos y = \frac{2}{4}; \operatorname{sen}(2y) = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = 30^\circ; \begin{cases} 2y_1 = 30^\circ + 180^\circ k; & y_1 = 15^\circ + 180^\circ k \\ 2y_2 = (180^\circ - 30^\circ) + 180^\circ k; & y_2 = 75^\circ + 180^\circ k; \end{cases}$$

$$\text{sustituyo } x = 90^\circ - y; \begin{cases} x_1 = 75^\circ + 180^\circ k; \\ x_2 = 15^\circ + 180^\circ k; \end{cases}$$

$$\text{Las soluciones son } \begin{cases} x_1 = 75^\circ + 180^\circ k; & y_1 = 15^\circ + 180^\circ k; \\ x_2 = 15^\circ + 180^\circ k; & y_2 = 75^\circ + 180^\circ k; \end{cases}$$

40. Ejercicios de trigonometría

Resolver el sistema de ecuaciones trigonometricas $\begin{cases} \text{sex} = 2 * \text{seny} \\ \text{senx} * \text{seny} = \frac{1}{2}; \end{cases}$

Solución

sustitucion $\begin{cases} \text{sex} = 2 * \text{seny} \\ \text{senx} * \text{seny} = \frac{1}{2}; \end{cases}$ sustituyo; $2\text{seny} * \text{seny} = \frac{1}{2}; 2\text{sen}^2\text{y} = \frac{1}{2}; \text{sen}^2\text{y} = \frac{1}{4};$

$$\text{seny} = \frac{1}{\pm\sqrt{4}}; \text{seny} = \frac{1}{-2}; \text{seny} = \frac{1}{2};$$

$$\text{Para seny} = \frac{1}{-2}; y = \arcsen \frac{1}{-2}; y = \arcsen \frac{1}{2};$$

$$\text{Para } y = \arcsen \frac{1}{-2} \begin{cases} y_1 = (180^\circ + 30^\circ) + 360^\circ k; y_1 = 210^\circ + 360^\circ k \\ y_2 = (360^\circ - 30^\circ) + 360^\circ k; y_2 = 330^\circ + 180^\circ k; \end{cases}$$

$$\text{Para } y = \arcsen \frac{1}{2} \begin{cases} y_3 = 30^\circ + 360^\circ k \\ y_4 = (180^\circ - 30^\circ) + 360^\circ k; y_4 = 150^\circ + 360^\circ k; \end{cases}$$

Sustituyo en la primera ecuacion $\text{senx} = 2 \text{seny};$

$$\text{para } y_1 = 210^\circ; \text{sex} = 2 * \text{sen } 210^\circ = 2 * \frac{1}{-2} = -1; x_1 \arcsen -1; x_1 = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{para } y_2 = 330^\circ; \text{sex} = 2 * \text{sen } 330^\circ = 2 * \frac{1}{-2} = -1; x_2 \arcsen -1; x_2 = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{para } y_3 = 30^\circ; \text{sex} = 2 * \text{sen } 33^\circ = 2 * \frac{1}{2} = 1; x_3 \arcsen 1; x_3 = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{para } y_4 = 150^\circ; \text{sex} = 2 * \text{sen } 150^\circ = 2 * \frac{1}{2} = 1; x_3 \arcsen 1; x_3 = 90^\circ + 360^\circ k$$

41. Ejercicios de trigonometría

Resolver el sistema de ecuaciones trigonometricas $\begin{cases} x + \text{sen}^2\text{y} = 2; \\ x + \text{cos}^2\text{y} = 1; \end{cases}$

Solución

sustitucion $\begin{cases} x + \text{sen}^2\text{y} = 2; x = 2 - \text{sen}^2\text{y} \\ x + \text{cos}^2\text{y} = 1; x = 1 - \text{cos}^2\text{y} \end{cases}$ Igualo $2 - \text{sen}^2\text{y} = 1 - \text{cos}^2\text{y}$

Aplico la relacion fundamental **$\text{sen}^2\text{y} + \text{cos}^2\text{y} = 1$** ; $1 - \text{cos}^2\text{y} = \text{sen}^2\text{y}$

sustituyo en la ecuacion $2 - \text{sen}^2\text{y} = 1 - \text{cos}^2\text{y}$; $2 - \text{sen}^2\text{y} = \text{sen}^2\text{y}$; $2 = 2\text{sen}^2\text{y}$; $\text{sen}^2\text{y} = 1$

$$\text{seny} = \pm\sqrt{1}; \text{seny} = 1; \text{seny} = -1;$$

$$\text{Para } y = \arcsen 1; y_1 = 90^\circ + 360^\circ k,$$

$$\text{Para } y = \arcsen -1; y_1 = 270^\circ + 360^\circ k$$

Sustituyo en una de las ecuaciones $x = 2 - \text{sen}^2\text{y};$

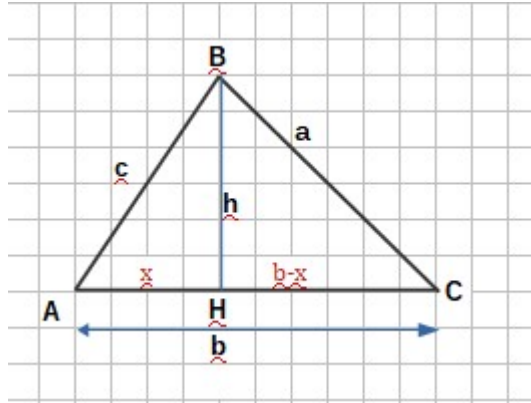
$$\text{para } y_1 = 90^\circ; x_1 = 2 - \text{sen}^2\text{y}; x_1 = 2 - \text{sen}^2 90^\circ; x = 2 - (1)^2 = 1; x_1 = 1;$$

$$\text{para } y_1 = 270^\circ; x_1 = 2 - \text{sen}^2\text{y}; x_1 = 2 - \text{sen}^2 270^\circ; x = 2 - (-1)^2 = 1; x_2 = 1;$$

10 Teorema del seno y del coseno

Teorema del Seno Es una proporción entre las longitudes de los lados de un triángulo y los senos de sus correspondientes ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



Demostración:

$$\begin{cases} \sin A = \frac{h}{c}; h = c * \sin A; \\ \sin C = \frac{h}{a}; h = a * \sin C; \end{cases} \quad c * \sin A = a * \sin C; \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

Si eligiéramos otra altura del triángulo se demostraría $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

Teorema del Coseno es una generalización del teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2$$

$$c^2 = h^2 + x^2; \quad h^2 = c^2 - x^2$$

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2$$

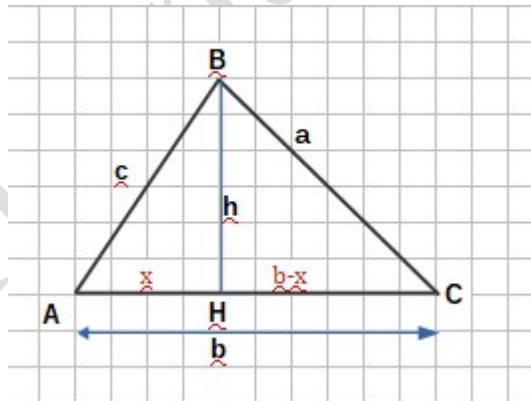
Sustituyo en la primera ecuación

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2 = c^2 - x^2 + (b - x)^2$$

$$a^2 = c^2 - x^2 + (b^2 + x^2 - 2bx);$$

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + x^2 - 2bx;$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bx;$$



Como $\cos A = \frac{x}{c}$; $x = c * \cos A$; sustituyo en la ecuación anterior;

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc * \cos A; \text{ esto se cumple en todos los ángulos}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos C;$$

42. Ejercicios de trigonometría

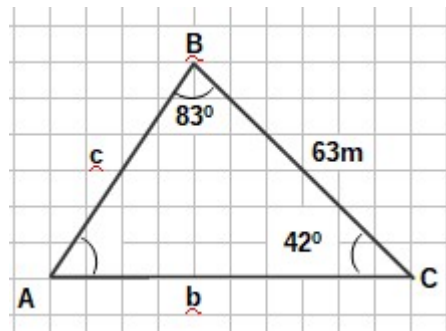
Calcular el valor de c, b y el ángulo A

Solución

Dado que la suma de los ángulos de un triángulo es de 180°

$$A = 180^\circ - (83^\circ + 42^\circ); A = 55^\circ$$

Aplicamos el teorema del seno y calculo c y b;



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\cos C}; \frac{63m}{\sin 55^\circ} = \frac{b}{\sin 83^\circ}; b = \frac{63m * \sin 83^\circ}{\sin 55^\circ} = 76,34m; b = 76,34m$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\cos C}; \frac{63m}{\sin 55^\circ} = \frac{c}{\sin 42^\circ}; c = \frac{63m * \sin 42^\circ}{\sin 55^\circ} = 51,46m; c = 51,46m$$

43. Ejercicios de trigonometría

Hallar el valor de los ángulos del siguiente triángulo

Solución

Aplico la ecuación del coseno

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc * \cos A;$$

$$12^2 = 10^2 + 16^2 - 2 * 10 * 16 * \cos A;$$

$$-320 \cos A = 144 - 100 - 256;$$

$$-320 \cos A = -212; \cos A = \frac{-212}{-320} = 0,6625;$$

$$\arccos(0,6625) = 48,5^\circ; A = 48,5^\circ;$$

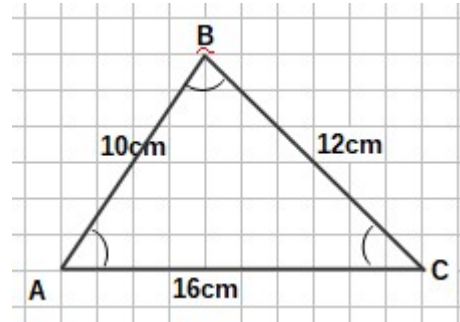
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ba * \cos B;$$

$$16^2 = 10^2 + 12^2 - 2 * 10 * 12 * \cos B; 256 = 100 + 144 - 240 \cos B;$$

$$256 - 100 - 144 = -240 \cos B; 12 = -240 \cos B; \cos B = \frac{12}{-240}; \cos B = -0,05;$$

$$\arccos(-0,05) = 92,87^\circ; B = 92,87^\circ;$$

$$A + B + C = 180^\circ; C = 180^\circ - A - B; C = 180^\circ - 48,5^\circ - 92,87^\circ = 38,63^\circ; C = 38,63^\circ$$



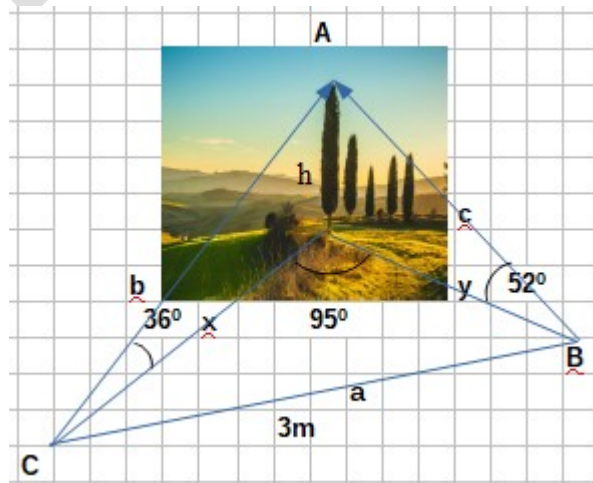
44. Ejercicios de trigonometría

Dos personas situadas en B y C separadas 3m, ven el árbol con un ángulo de 36° y 52° respectivamente. Hallar la altura del árbol.

Solución

Los ángulos formados por los segmentos yh, xh son de 90°

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 36^\circ = \frac{h}{x}; h = x * \operatorname{tg} 36^\circ; \\ \operatorname{tg} 52^\circ = \frac{h}{y}; h = y * \operatorname{tg} 52^\circ; \end{cases}$$



$$x * \operatorname{tg} 36^\circ = y * \operatorname{tg} 52^\circ; x * 0,727 = y * 1,28; y = 0,568x;$$

$$\text{Aplico el teorema del coseno } b^2 = c^2 + a^2 - 2ba * \cos B;$$

$$3^2 = x^2 + y^2 - 2xy * \cos 95^\circ; 9 = x^2 + y^2 - 2xy * 0,087; 9 = x^2 + y^2 - 0,1742xy$$

$$\text{Sustituyo y por su valor, } y = 0,568x; 9 = x^2 + (0,568x)^2 - 0,1742x(0,568x)$$

$$9 = x^2 + 0,323x^2 - 0,1x^2; 9 = 1,223x^2; x = \sqrt{9/1,223}; x = 2,713$$

$$\text{Sustituyo en la ecuacion } h = x * \operatorname{tg} 36^\circ; h = 2,713 * 0,727; h = 1,97;$$

45. Ejercicios de trigonometría

Dos personas situadas en el punto A y C, que distan 50m ven una cometa con un ángulo de 73° y 84° respectivamente. Hallar la altura a la que se encuentra la cometa.

Solución

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 73^\circ = \frac{h}{50-x}; h = (50-x) * \operatorname{tg} 73^\circ; \\ \operatorname{tg} 84^\circ = \frac{h}{x}; h = x * \operatorname{tg} 84^\circ; \end{cases}$$

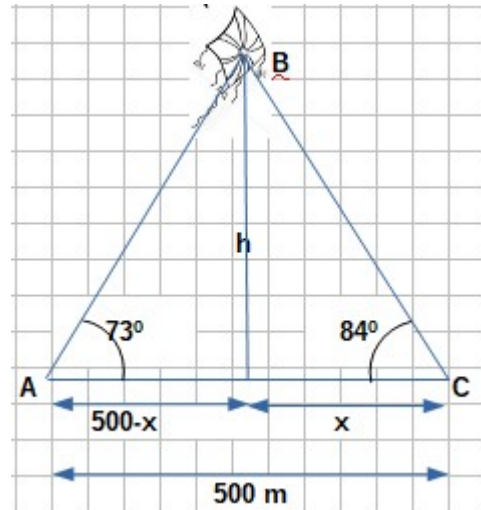
$$(50-x) * \operatorname{tg} 73^\circ = x * \operatorname{tg} 84^\circ;$$

$$(50-x) * 3,27 = x * 9,514;$$

$$163,5 - 3,27x = 9,514x; 163,5 = 12,784x;$$

$$x = \frac{163,5}{12,784} = 12,8\text{m};$$

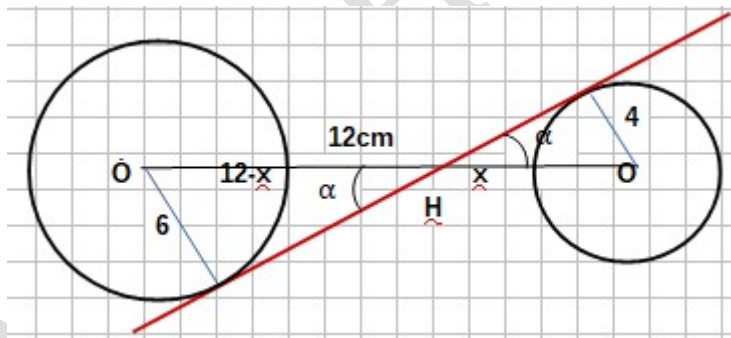
$$\text{Sustituyo en la ecuación } h = x * \operatorname{tg} 84^\circ; h = 12,8 * 9,514 = 121,8\text{m}; h = 121,8\text{m}$$

**46. Ejercicios de trigonometría**

Hallar el ángulo que forma la **tangente** con la línea que une los centros de las dos circunferencias.

Los radios de las circunferencias son 6 y 4 cm respectivamente.

La distancia entre los centros es de 12cm.



Solución

Los radios son segmentos paralelos cortados por dos líneas, la formada por la tangente y la que une los centros, por lo que los ángulos son iguales

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \frac{6}{12-x}; \frac{6}{12-x} = \frac{4}{x}; 6x = 48 - 4x; 10x = 48; x = 4,8; \\ \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{x}; \end{cases}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{4,8} = 0,833; \alpha = \operatorname{arsen} (0,833) = 56,44^\circ$$

47. Ejercicios de trigonometría

Calcular el valor del ángulo α

Solución

Si trazamos un arco de lado $2a$ veo que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}; \frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = 26,57^\circ$$

$$\alpha = 53,13^\circ$$

