

# Vectores

## Contenido

|     |                                                   |    |
|-----|---------------------------------------------------|----|
| 1   | PLANO CARTESIANO.....                             | 2  |
| 2   | VECTORES FIJOS EN $\mathbb{R}^2$ .....            | 3  |
| 2.1 | EQUIPOLENCIA DE VECTORES.....                     | 3  |
| 3   | VECTORES LIBRES EN $\mathbb{R}^2$ .....           | 4  |
| 4   | OPERACIONES CON VECTORES. DEPENDENCIA LINEAL..... | 4  |
| 4.1 | SUMA DE VECTORES LIBRES .....                     | 4  |
| 4.2 | PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UN VECTOR .....    | 5  |
| 5   | BASE CANÓNICA. COORDENADAS DE UN VECTOR.....      | 5  |
| 6   | OPERACIONES CON VECTORES CON COORDENADAS .....    | 6  |
| 7   | PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES .....            | 11 |
| 7.1 | PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR .....            | 11 |
| 7.2 | EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO ESCALAR.....     | 13 |
| 7.3 | ÁNGULO DE DOS VECTORES .....                      | 13 |

## 1 Plano cartesiano

Se conoce como plano cartesiano, coordenadas cartesianas o sistema cartesiano, a dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal (**eje de abscisas o eje OX**) y otra vertical (**eje de ordenadas o eje OY**), que se cortan en un punto llamado **origen o punto cero**.

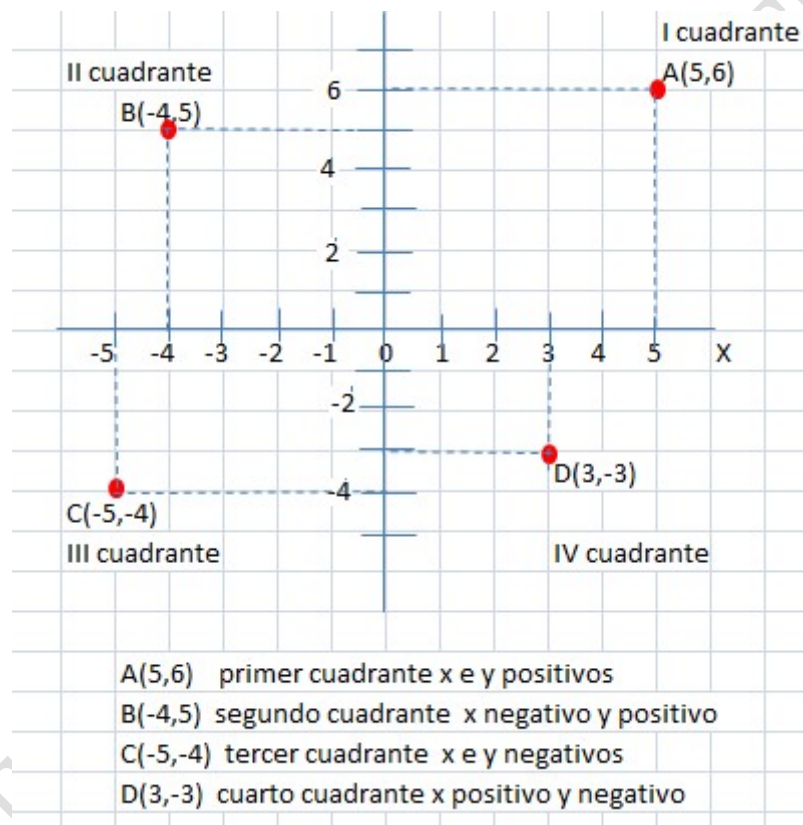
Al cortarse los dos ejes dividen el plano en cuatro cuadrantes

### Coordenadas del plano cartesiano

Un punto del plano cartesiano se representa con un par de números  $P(x, y)$

$x$  = valor del eje de abscisas (horizontal)

$y$  = valor del eje de ordenadas (vertical)



El conjunto  $R^2$  se forma  $R * R$

Igualdad de pares de números reales

$$(x', y') \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

### Operaciones en el conjunto $R^2$

Suma en  $R^2$  (suma de pares de números reales)  $(x, y) + (x', y') = x + x', y + y'$

Producto de un número real por un par de números reales  $a(x, y) = (ax, ay)$

### 1. Ejercicio

Efectúa las siguientes operaciones

$$a) -4(2, -1) + 6(4, -1) \quad b) -(3, 6) + \frac{3}{2}(-2, -1) \quad c) -(5, 3) - (-2, -2)$$

*Solución*

$$a) -4(2, -1) + 6(4, -1) = (-8, +4) + (24, -6) = (16, -2)$$

$$b) -(3, 6) + \frac{3}{2}(-2, -1) = (-3, -6) + \left(-3 - \frac{3}{2}\right) = \left(-6, -\frac{15}{2}\right)$$

$$c) -(5, 3) - (-2, -2) = (-5, -3) - (-2, -2) = (-3, -1)$$

## 2 Vectores Fijos en $\mathbb{R}^2$

El vector fijo  $\overrightarrow{AB}$  es un segmento orientado con origen en A y extremo en B

**El modulo del vector fijo  $\overrightarrow{AB}$**  es igual a la longitud del segmento  $\overline{AB}$  y se representa  $|\overrightarrow{AB}|$ ;

**Dirección del vector fijo  $\overrightarrow{AB}$**  es la de la recta que pasa por A y B

**Sentido del vector fijo  $\overrightarrow{AB}$**  es el recorrido en la recta cuando nos desplazamos de A a B

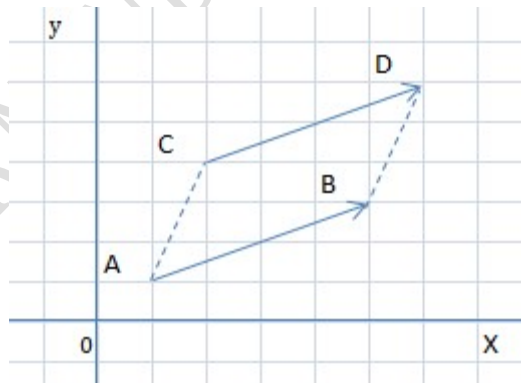
*El conjunto de vectores fijos del plano se designan como  $F^2$*

### 2.1 Equipolencia de vectores

Dos vectores fijos  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$  no nulos son equipolentes cuando tienen el mismo modulo, dirección y sentido.

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

Gráficamente dos vectores son equipolentes si al unir sus orígenes y extremos formamos un paralelogramo



### 2. Ejercicio

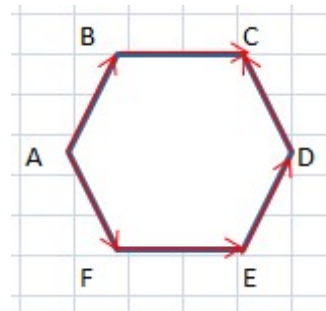
En el hexágono regular de la figura indica que

Vectores son equipolentes

*Solución*

Son equipolentes  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{ED}$  y  $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{FE}$ ;

y  $\overrightarrow{AF}$  y  $\overrightarrow{DC}$  son opuestos



### 3. Ejercicio

Calcular los valores de  $a$  y  $b$  para que los vectores  $\overrightarrow{PQ}$  y  $\overrightarrow{RS}$  sean equipolentes sabiendo que  $P(a+4, -b)$ ,  $Q(a+1, b)$ ,  $R(4, -1)$  y  $S(a, b)$ ;

*Solución*

$$\overrightarrow{PQ} = (a+1, b) - (a+4, -b) = (a+1-a-4, b-(-b)) = (-3, 2b)$$

$$\overrightarrow{RS} = (a, b) - (4, -1) = (a-4, b+1)$$

$$\text{Si son equipolentes } \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS} \Rightarrow \begin{cases} -3 = a-4; & a=1; \\ 2b = b+1; & b=1; \end{cases} \quad \boxed{a=1, b=1}$$

$$\text{Prueba } \overrightarrow{PQ} = (-3, 2b) \text{ Para } a=1 \text{ y } b=1; \overrightarrow{PQ} = (-3, 2)$$

$$\overrightarrow{RS} = (a-4, b+1); \text{ Para } a=1 \text{ y } b=1; \overrightarrow{RS} = (-3, 2)$$

## 3 Vectores libres en $\mathbb{R}^2$

Vector libre es cada una de las clases en que queda definido el conjunto de vectores fijos mediante la relación de equipolencia

*El conjunto de vectores libres del plano se designan como  $V^2$*

**Propiedades de los vectores libres:**

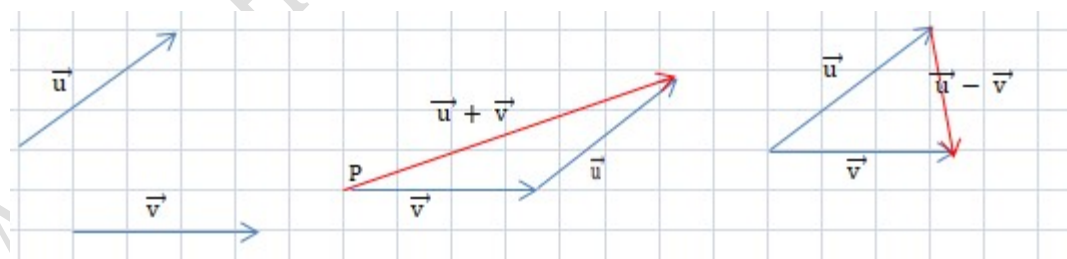
Si  $\vec{u}$  es un vector libre y  $P$  un punto del plano, existe un único representante de ese vector que tiene su origen en  $P$

## 4 Operaciones con vectores. Dependencia lineal

### 4.1 Suma de vectores libres

Para sumar dos vectores libres  $\vec{u} + \vec{v}$  se pone, en un punto del plano, uno a continuación del otro y se halla el vector resultante  $\vec{u} + \vec{v}$

Para resta se ponen los dos en el mismo y se halla el vector resultante  $\vec{u} - \vec{v}$



**Propiedades:**

Asociativa  $\vec{w} + (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{w} + \vec{u}) + \vec{v}$

Conmutativa  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Elemento neutro  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

Elemento opuesto  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$  ;

## 4.2 Producto de un número real por un vector

El producto de un número real  $k$  por un vector libre  $\vec{u}$  es otro vector  $k\vec{u}$  que tienen:

*Modulo*  $|k\vec{u}|$

*Dirección* la misma de  $|\vec{u}|$

*Sentido* si  $k$  es positivo es mismo de  $\vec{u}$  y si  $k$  es negativo el opuesto de  $\vec{u}$ .

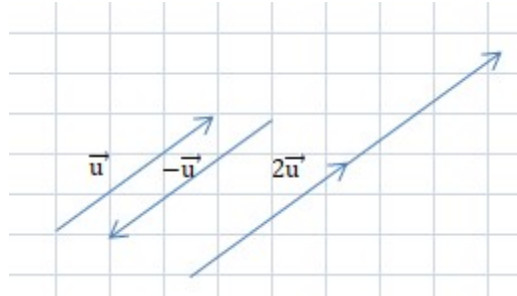
### Propiedades:

$$a * (\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

$$(a + b) * \vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$

$$a(b\vec{u}) = ab\vec{u}$$

$$1 * \vec{u} = \vec{u}$$



## 5 Base canónica. Coordenadas de un vector

La base canónica de  $V^2$  es el formado por

dos vectores perpendiculares de modulo

la unidad que representamos como

$$\vec{i} \text{ e } \vec{j}; \quad \vec{i} = (1,0) \text{ y } \vec{j} = (0,1)$$

ejemplo de la figura  $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$

Se llaman coordenadas cartesianas del vector  $\vec{u}$  al par de números reales  $(x,y)$  tales que permiten expresar el vector  $\vec{u}$  como combinación lineal de los vectores de la base.

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

### 4. Ejercicio

Dado el rectángulo completar las siguientes igualdades

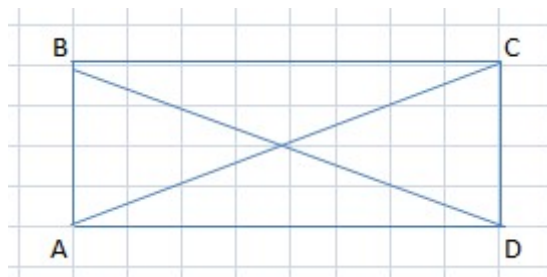
*Solución*

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$$

$$\vec{AD} + \vec{DB} = \vec{AB}$$

$$\vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}; \quad \vec{CB} - \vec{CA} = \vec{BA}; \quad \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{BA}$$



## 6 Operaciones con vectores con coordenadas

Si  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  es la base canonica de  $V^2$  a cada vector del plano le corresponde un par de

numeros reales  $(x, y)$  que son sus coordenadas.

A cada vector  $\vec{u}$  del plano le corresponde

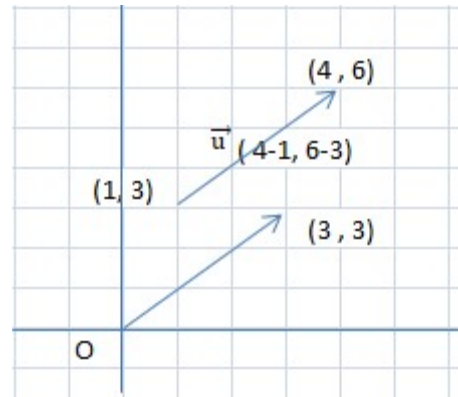
un vector en  $B (\vec{x}\vec{i}, \vec{y}\vec{j})$

El vector  $\vec{u}$  de coordenadas origen  $(1, 3)$

destino  $(4, 6)$  le corresponde un vector unico

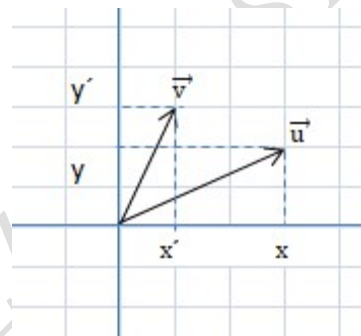
$(4 - 1, 6 - 3) = (3, 3); \vec{u} = 3\vec{i}, 3\vec{j}$

Coordenadas del vector  $\vec{u} = (3, 3)$



$\vec{u} = (x, y) = (3, 2);$

$\vec{v} = (x', y') = (1, 3)$



### Suma de vectores :

$\vec{u} + \vec{v} = (x, y) + (x', y') = x + x', y + y';$

siendo los vectores del ejemplo anterior  $\vec{u} + \vec{v} = (3, 2) + (1, 3) = (4, 5)$

### Resta de vectores

$\vec{u} - \vec{v} = (x, y) - (x', y') = x - x', y - y';$

siendo los vectores del ejemplo anterior  $\vec{u} - \vec{v} = (3, 2) - (1, 3) = (2, -1)$

### Modulo de un vector

Modulo de un vector  $\vec{u}$ ,  $|\vec{u}|$  es su longitud  $|\vec{u}| = +\sqrt{x^2 + y^2};$

Siendo el vector del ejemplo anterior  $\vec{u}; |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}; |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

### Argumento de un vector

Es el menor angulo que el vector forma con el eje x, eje de abscisas;

$\arg(\vec{u}) = \alpha = \arctg \frac{y}{x} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{y}{x}$

Siendo el vector del ejemplo anterior  $\vec{u}; \arg(\vec{u}) = \alpha = \arctg \frac{2}{3};$

### Vector unitario

Vector unitario es el que tiene de modulo la unidad.

Vector unitario de  $\vec{u}$ , en la direccion y sentido de  $\vec{u} = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}});$

Siendo el vector del ejemplo anterior  $\vec{u}$ ; vector unitario  $\vec{u} = \left( \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$ ;

### Vectores alineados

Dos vectores están alineados si tienen la misma dirección, lo que implica que sus coordenadas son proporcionales .

### Coordenadas del punto medio de un segmento

Sea el segmento  $A(a_1, a_2) - B(b_1, b_2)$ ;  $M = \frac{b_1 + a_1}{2}, \frac{b_2 + a_2}{2}$

#### 5. Ejercicio

Dados los vectores  $\vec{u}(-4,2)$ ,  $\vec{v}(0,-3)$   $\vec{w}(-3,3)$ .

Hallar: a)  $3\vec{u} - (5\vec{v} + \vec{w})$ ; b)  $\vec{u} + (-\vec{v} + 3\vec{w})$

Solución :

$$\begin{aligned} \text{a) } 3\vec{u} - (5\vec{v} + \vec{w}) &= 3 * (-4,2) - (5(0,-3) + (-3,3)) = (-12,6) - ((0,-15) + (-3,3)) \\ &= (-12,6) - 3, -12 = (-12,6) + (3,12) = \boxed{(-9,18)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{u} + (-\vec{v} + 3\vec{w}) &= (-4,2) + (-(0,-3) + (3(-3,3)) = (-4,2) + ((0,3) + (-9,9)) \\ &= (-4,2) + (-9,12) = \boxed{(-13,14)} \end{aligned}$$

#### 6. Ejercicio

Un vector fijo tiene su origen en  $A(6,-2)$  y sus coordenadas son  $(4,5)$ .

Hallar las coordenadas de extremo B  $(x,y)$

Solución

Las coordenadas del vector serán  $(4,5) = B(x,y) - A(6,-2)$ ;  $(4,5) = (x-6, y-(-2)) =$

$$(4,5) = (x-6, y+2); \Rightarrow \begin{cases} 4 = x-6; x=10, \\ 5 = y+2; y=3; \end{cases} \boxed{B(10,3)}$$

#### 7. Ejercicio

Dados los vectores  $\vec{u}(x,y)$ ,  $\vec{v}(2x-y,1)$

Hallar los valores de x e y para que se cumpla que  $|\vec{u}| = 1$  y el  $\arg(\vec{v}) 45^\circ$ ;

Solución:

$$|\vec{u}| = 1 = \sqrt{x^2 + y^2}; \text{ elevamos al cuadrado los dos terminos } 1 = x^2 + y^2$$

$$\text{el } \arg(\vec{v}) = 45^\circ; \Rightarrow 45^\circ = \arctg \frac{1}{2x-y}; \text{ dado que } \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2x-y};$$

$$1 = 2x - y$$

$$\begin{cases} 1 = x^2 + y^2 \\ 1 = 2x - y; y = 2x - 1; \end{cases} \text{ Sustituyo en la primera } 1 = x^2 + (2x-1)^2;$$

$$1 = x^2 + 4x^2 + 1 - 4x; 1 - 1 = 5x^2 - 4x; 0 = x(5x - 4) \text{ Soluciones } x = 0 \text{ y } x = \frac{4}{5};$$

para  $x = 0$  y  $y = -1$ ; para  $x = \frac{4}{5}$ ,  $y = 2 * \frac{4}{5} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$ ;  $y = \frac{3}{5}$ ;

Soluciones  $x = 0, y = -1$ ;  $x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}$ ;

$$\vec{u}(x, y) = (0, -1) \text{ y } \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right); \quad \vec{v}(2x - y, 1) = (1, 1) \text{ y } \left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5}, 1\right) = (1, 1)$$

#### 8. Ejercicio

Expresar el vector  $\vec{u}(-3, 5)$  como combinacion lineal de los vectores  $\vec{v}(-1, 0)$  y  $\vec{w}(3, 4)$

*Solución*

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}; (-3, 5) = a(-1, 0) + b(3, 4);$$

$$\begin{cases} -3 = -a + 3b \\ 5 = 0 + 4b; b = \frac{5}{4}; \end{cases} \text{ Sustituyo en la primera } -3 = -a + 3 * \frac{5}{4}; a = 3 + \frac{15}{4}; a = \frac{27}{4};$$

$$(a, b) = \left(\frac{27}{4}, \frac{5}{4}\right);$$

#### 9. Ejercicio

Hallar los valores de a y b para que el vector  $\vec{u}(-3, 5)$  se pueda expresar como la siguiente combinacion lineal de los vectores  $\vec{v}(2, 0)$  y  $\vec{w}(-7, 3)$

*Solución*

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}; (-3, 5) = a(2, 0) + b(-7, 3);$$

$$\begin{cases} -3 = 2a - 7b; \\ 5 = 0 + 3b; b = \frac{5}{3}; \end{cases} \text{ Sustituyo en la primera } -3 = 2a - 7 * \frac{5}{3}; 2a = 3 - \frac{35}{3}; 2a = \frac{26}{3};$$

$$a = \frac{13}{3}; (a, b) = \left(\frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right);$$

#### 10. Ejercicio

Calcular modulo y argumento de los siguientes vectores

a)  $\vec{u}_1(3, -2)$ , b)  $\vec{u}_2(0, 3)$ ; c)  $\vec{u}_3(-5, -1)$

*Solución*

$$\text{a) } \vec{u}_1(3, -2) \begin{cases} \text{modulo } |\vec{u}_1| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \quad |\vec{u}_1| = \sqrt{13}; \\ \text{argumento de } \vec{u}_1 = \alpha = \arctg -\frac{2}{3} = \text{esta en el 4º cuadrante } -63,43^\circ; \end{cases}$$

$$\text{b) } \vec{u}_2(0, 3) \begin{cases} \text{modulo } |\vec{u}_2| = \sqrt{0^2 + (3)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad |\vec{u}_2| = 3; \\ \text{argumento de } \vec{u}_1 = \alpha = \arctg \frac{3}{0} = 90^\circ \end{cases}$$

$$\text{c) } \vec{u}_3(-5, -1) \begin{cases} \text{modulo } |\vec{u}_3| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26} \quad |\vec{u}_3| = \sqrt{26}; \\ \text{argumento de } \vec{u}_1 = \alpha = \arctg \frac{-1}{-5} = \text{esta en el 3º cuadrante } 191,31^\circ \end{cases}$$

### 11. Ejercicio

¿ Como varia el modulo del vector  $\vec{u}_1(-3,5)$  si lo multiplicamos por 7?

Solución

$$\begin{cases} \text{modulo } |\vec{u}_1| = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \quad |\vec{u}_1| = \sqrt{34} = 5,83; \\ \text{modulo } 7 * |\vec{u}_1| = 7(-3,5) = (-21, 35) \sqrt{(21)^2 + (35)^2} = \sqrt{441 + 1225} = \sqrt{1666} = 40,82 \end{cases}$$

El modulo queda multiplicado por 7;  $|\vec{u}_1| = 5,83 * 7 = 40,82$

### 12. Ejercicio

¿ Calcular el valor de m para que el vector  $\vec{u}(m, -4)$  sea unitario?

Solución

$$|\vec{u}| = \sqrt{(m)^2 + (-4)^2} = 1; \sqrt{(m)^2 + 16} = 1; \text{elevo los dos terminos al cuadrado}$$

$$(\sqrt{(m)^2 + 16})^2 = (1)^2; m^2 + 16 = 1; m^2 = -15; m = \sqrt{-15};$$

Comprobación:

$$|\vec{u}_1| = \sqrt{(m)^2 + (-4)^2} = \sqrt{(\sqrt{-15})^2 + (-4)^2} = \sqrt{-15 + 16} = 1;$$

### 13. Ejercicio

¿ Calcular el valor de n para que el argumento  $\alpha$  vector se el indicado

a)  $\vec{u}_1(-1, n), \alpha 180^\circ$ , b)  $\vec{u}_2(n, -2) \alpha = 225^\circ$ ; c)  $\vec{u}_3(3, n) \alpha = 60^\circ$ ?

Solución

$$\text{a) } \vec{u}_1(-1, n), \alpha = 180^\circ; \text{tag } 180^\circ = 0 = \frac{n}{-1}; n = 0;$$

$$\text{b) } \vec{u}_2(n, -2) \alpha = 225^\circ; \text{tag } 225^\circ = 1 = \frac{-2}{n}; n = -2$$

$$\text{c) } \vec{u}_3(3, n) \alpha = 60^\circ; \text{tag } 60^\circ = 1,73205 = \frac{n}{3}; n = 5,196152$$

### 14. Ejercicio

Sea el vector  $\vec{u}$  un representante del vector libre  $\overrightarrow{AB}$ . Hallar:

a) Coordenadas de  $\vec{u}$  sabiendo que A(5, -3) y B (3,4)

b) Coordenadas de B sabiendo que A(-3,1) y  $\vec{u} = (5,4)$

c) Coordenadas de A sabiendo que B(-1,7) y  $\vec{u} = (3,4)$ ;

Solución

a) Coordenadas de  $\vec{u}$  sabiendo que A(5, -3) y B (3,4);  $\vec{u} = B - A$ ;

$$\vec{u} = B - A; \vec{u} = (3,4) - (5, -3) = (3 - 5, 4 - (-3)) = (-2, 7); \vec{u} = (-2, 7);$$

b) Coordenadas de B sabiendo que A(-3,1) y  $\vec{u} = (5,4)$

$$\vec{u} = B - A; B = \vec{u} + A; B = (5,4) + (-3,1) = (2, 5); B = (2,5);$$

c) Coordenadas de A sabiendo que B(-1,7) y  $\vec{u} = (3,4)$ ;

$$\vec{u} = B - A; A = B - \vec{u}; A = (-1,7) - (3,4) = (-4,3); A = (-4,3)$$

### 15. Ejercicio

Dados los puntos A(3,-2), B(1,3), C(-6,0), halla el punto D de modo que ABCD sea un paralelogramo.

*Solución :*

Para que sea un paralelogramo sus lados han de ser paralelos dos a dos

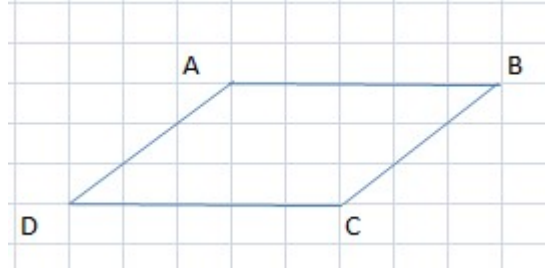
$$AB = DC; (1,3) - (3,-2) = (-6,0) - (x,y)$$

$$(-2,5) = (-6-x, 0-y) \Rightarrow$$

$$-2 = -6 - x; x = -4;$$

$$5 = -y; y = -5;$$

$$D(-4, -5)$$



### 16. Ejercicio

Comprueba si los puntos A(2,1), B(-1,4) y C(4,-1) están alineados;

*Solución:*

Dos vectores están alineados si tienen la misma dirección, lo que implica que sus coordenadas son proporcionales .

$$\overrightarrow{AB} = (-1,4) - (2,1) = (-3,3), \overrightarrow{AB} = (-3,3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4,-1) - (2,1) = (2,-2); \overrightarrow{AC} = (2,-2)$$

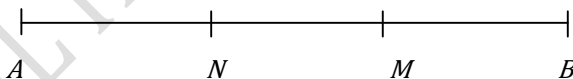
Vemos si las coordenadas son proporcionales  $\frac{-3}{2} = \frac{3}{-2}$ ,  $6 = 6$ ; son proporcionales ;

A, B y C están alineados

### 17. Ejercicio

Halla los puntos que dividen al segmento de extremos A(-2,3) y B(6,2) en tres partes iguales

*Solución*



$$\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AB}}{3}; -\frac{(6,2) - (-2,3)}{3} = \frac{(8,-1)}{3} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right); \overrightarrow{AN} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right);$$

$$N - A = \overrightarrow{AN}; N = \overrightarrow{AN} + A; N = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right) + (-2,3) = \frac{8}{3} - 2, -\frac{1}{3} + 3 = \frac{2}{3}, \frac{8}{3}; N = \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} * 2}{3}; -\frac{(6,2) - (-2,3)}{3} * 2 = \frac{(8,-1)}{3} * 2 = \left(\frac{16}{3}, -\frac{2}{3}\right); \overrightarrow{AM} = \left(\frac{16}{3}, -\frac{2}{3}\right);$$

$$M - A = \overrightarrow{AM}; M = \overrightarrow{AM} + A; M = \left(\frac{16}{3}, -\frac{2}{3}\right) + (-2,3) = \frac{16}{3} - 2, -\frac{2}{3} + 3 = \frac{10}{3}, \frac{7}{3}; M = \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

## 7 Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es igual al producto de sus módulos por el cos del ángulo que forman.  $\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$

$$\cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|}; \alpha = \arccos \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|}$$



$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \Rightarrow \vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}'|$$

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}'| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \Rightarrow \vec{u} * \vec{v} = |\vec{v}| * |\vec{u}'|$$

$$\text{proyección de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v}; |\vec{v}'| = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}|}$$

$$\text{proyección de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u}; |\vec{u}'| = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

El producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por el módulo de la proyección del otro sobre el primero

### 7.1 Propiedades del producto escalar

$$\vec{u} * \vec{u} = |\vec{u}| * |\vec{u}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{u}} = |\vec{u}| * |\vec{u}| * \cos 0 = |\vec{u}| * |\vec{u}| = |\vec{u}|^2 \geq 0;$$

*Conmutativa*

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = |\vec{v}| * |\vec{u}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \Rightarrow \vec{u} * \vec{v} = \vec{v} * \vec{u}$$

*Homogenea*

$$\mathbf{k}(\vec{u} * \vec{v}) = \mathbf{k}\vec{u} * \vec{v} = \mathbf{k}\vec{v} * \vec{u};$$

*Distributiva*

$$\vec{u} * (\vec{v} * \vec{w}) = \vec{u} * \vec{v} + \vec{u} * \vec{w};$$

#### **Propiedades**

*Producto escalar de dos vectores paralelos (forman un ángulo 0;  $\cos 0 = 1$ ):*

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}; \vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{u}| * \cos 0 \Rightarrow \vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}|$$

Dos vectores son paralelos cuando son proporcionales

Para hallar un vector paralelo a otro vector es suficiente con multiplicarlo por un escalar

$$\text{Dos vectores } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son paralelos si } \frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y}; u_x * v_y = u_y * v_x$$

Producto escalar de dos vectores perpendiculares (forman un ángulo 90;  $\cos 90 = 0$ ):

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}; \vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos 90 = 0; \vec{u} * \vec{v} = 0$$

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v})^2 &= (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} * \vec{u}) + 2(\vec{u} * \vec{v}) + (\vec{v} * \vec{v}) = \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}| * |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}; \end{aligned}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}| * |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$$

$$\begin{aligned} (\vec{u} - \vec{v})^2 &= (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u} * \vec{u}) - 2(\vec{u} * \vec{v}) + (\vec{v} * \vec{v}) = \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}| * |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}; \end{aligned}$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}| * |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$$

### 18. Ejercicio

a) Escribir todos los vectores paralelos al vector libre  $\vec{u}$  (2, -3)

b) Escribir todos los vectores perpendiculares al vector libre  $\vec{u}$  (2, -3)

Solución:

a) Los vectores paralelos a  $\vec{u}$  (2, -3) son los formados por (2t, -3t). siendo t un numero real no nulo.

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}|$$

$$\text{Ejemplo (t = 1)} \Rightarrow (2, -3)(2, -3) = 4 + 9 = \sqrt{2^2 + (-3)^2} * \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13^2} = 13;$$

a) Los vectores perpendiculares  $\vec{u}$  (2, -3) son los formados por (3t, 2t). siendo t un numero real no nulo. Ejemplo (t = 1)  $\Rightarrow (2, -3)(3 * 2) = 2 * 3 + (-3) * 2 = 6 - 6 = 0$ ;

### 19. Ejercicio

Calcular las coordenadas de un vector paralelo  $\overrightarrow{AB}$  y de modulo 10 siendo A(-1,3) y

B (-4,7)

Solución

A(-1,3) y B (-4,7)  $\Rightarrow \overrightarrow{AB}$  (-3,4); un vector paralelo seria  $\overrightarrow{CD}$  (-3t, 4t)

si el modulo ha de ser 10  $\sqrt{(-3t)^2 + (4t)^2} = 10; 9t^2 + 16t^2 = 25t^2; 25t^2 = 10;$

$$t^2 = \frac{10}{25}; t = \frac{\pm\sqrt{10}}{5}; t = \frac{+\sqrt{10}}{5} \text{ y } t = \frac{-\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{tendriamos dos soluciones; } \left(-3 * \frac{+\sqrt{10}}{5}, 4 * \frac{+\sqrt{10}}{5}\right); \left(-3 * \frac{-\sqrt{10}}{5}, 4 * \frac{-\sqrt{10}}{5}\right)$$

Prueba:

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}|$$

$$t = \frac{+\sqrt{10}}{5}; \vec{u} * \vec{v} = (-3,4) * \left(\frac{-3\sqrt{10}}{5}, \frac{4\sqrt{10}}{5}\right) = \frac{9\sqrt{10}}{5} + \frac{16\sqrt{10}}{5} = \frac{25\sqrt{10}}{5} = 5\sqrt{10}$$

$$|\vec{u}| * |\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} * \sqrt{\left(\frac{-3\sqrt{10}}{5}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \sqrt{25} * \sqrt{\frac{9 * 10}{25} + \frac{16 * 10}{25}}$$

$$= 5 * \sqrt{\frac{25 * 10}{25}} = 5\sqrt{10}$$

$$t = \frac{-\sqrt{10}}{5}; \vec{u} * \vec{v} = (-3,4) * \left(\frac{-3(-\sqrt{10})}{5}, \frac{4(-\sqrt{10})}{5}\right) = \frac{-9\sqrt{10}}{5} + \frac{-16\sqrt{10}}{5} = -\frac{25\sqrt{10}}{5} = -5\sqrt{10}$$

$$|\vec{u}| * |\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} * \sqrt{\left(\frac{-3(-\sqrt{10})}{5}\right)^2 + \left(\frac{4(-\sqrt{10})}{5}\right)^2} = \sqrt{25} * \sqrt{\frac{9 * 10}{25} + \frac{16 * 10}{25}}$$

$$= 5 * \sqrt{\frac{25 * 10}{25}} = 5\sqrt{10}$$

## 7.2 Expresión analítica del producto escalar

En la base canónica

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

$$\vec{u} * \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) * (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

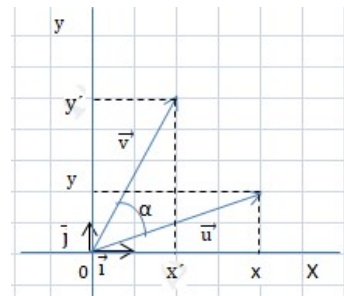
$$\vec{u} * \vec{v} = x\vec{i} * x'\vec{i} + x\vec{i} * y'\vec{j} + y\vec{j} * x'\vec{i} + y\vec{j} * y'\vec{j} =$$

$$x * x' \vec{i} * \vec{i} + x * y' \vec{i} * \vec{j} + y * x' \vec{j} * \vec{i} + y * y' \vec{j} * \vec{j};$$

$$\vec{i} * \vec{i} = 1 \text{ pues el ángulo que forman es } 0^\circ \text{ y } \cos 0^\circ = 1;$$

$$\vec{i} * \vec{j} = 0 \text{ pues el ángulo que forman es } 90^\circ \text{ y } \cos 90^\circ = 0;$$

$$\vec{u} * \vec{v} = x * x' + y * y'$$



## 7.3 Ángulo de dos vectores

Del producto escalar se ha deducido

$$\cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|}; \alpha = \arccos \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|} \Rightarrow$$

$$\cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|} = \frac{x * x' + y * y'}{\sqrt{x^2 + y^2} * \sqrt{(x')^2 + (y')^2}};$$

$$\alpha = \arccos \frac{x * x' + y * y'}{\sqrt{x^2 + y^2} * \sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$$

## 20. Ejercicio

Dados los vectores  $\vec{u} = (-2,1)$  y  $\vec{v} = (3,5)$  referidos a la base canónica calcular

a)  $\vec{u} * \vec{v}$ ; b) proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ ; c) ángulo formado  $\vec{u} * \vec{v}$ ;

d) Un vector ortogonal a  $\vec{u}$

*Solución*

a)  $\vec{u} * \vec{v} = x * x' + y * y'$ ;  $\vec{u} * \vec{v} = -2 * 3 + 1 * 5 = -6 + 5 = -1$ ;  $\vec{u} * \vec{v} = -1$ ;

b) proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ ;

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \Rightarrow \vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}|; |\vec{v}| = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}|}$$

$$|\vec{v}| = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \text{ proyección de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

c) ángulo formado  $\vec{u} * \vec{v}$ ;  $\alpha = \arccos \frac{x * x' + y * y'}{\sqrt{x^2 + y^2} * \sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$ ;

$$= \frac{-1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2} * \sqrt{(3)^2 + (5)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{5} * \sqrt{34}} = \frac{-1}{\sqrt{170}} = -\frac{\sqrt{170}}{170};$$

$$\alpha = \arccos -\frac{\sqrt{170}}{170} = 94,40^\circ$$

d) Un vector ortogonal a  $\vec{u} = (-2,1)$ ; sería  $\vec{w} = (1,2)$

pues  $\vec{u} * \vec{w} = (-2,1) * (1,2) = -2 + 2 = 0$ ;

## 21. Ejercicio

Calcular los ángulos del triángulo A(-3,2), B(2,5) y C(-6,-3) y comprueba que tipo de triángulo

*Solución*

$$\vec{AB} = (2,5) - (-3,2) = (5,3)$$

hallo el modulo para ver el tipo de triángulo

$$|\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

$$\vec{AC} = (-6,-3) - (-3,2) = (-3,-5)$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$

*Dos lados iguales el triángulo es isosceles*

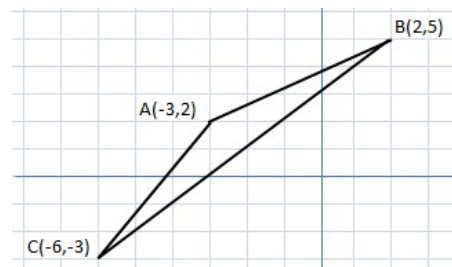
$$\hat{A} = \arccos \frac{\vec{AB} * \vec{AC}}{|\vec{AB}| * |\vec{AC}|} = \frac{x * x' + y * y'}{\sqrt{x^2 + y^2} * \sqrt{(x')^2 + (y')^2}};$$

$$\hat{A} = \arccos \frac{\vec{AB} * \vec{AC}}{|\vec{AB}| * |\vec{AC}|} = \frac{(5 * (-3) + (3 * (-5))}{\sqrt{34} * \sqrt{34}} = \frac{-15 - 15}{34} = \frac{-30}{34};$$

$\hat{A}$  está en el 2º cuadrante;  $\hat{A} = 151,93^\circ$

Los otros ángulos  $\hat{B} + \hat{C} = 180 - 151,93^\circ = 28,07^\circ$

Como es un triángulo isosceles  $\hat{B} = \hat{C} = \frac{28,07}{2} = 14,04^\circ$ ;



## 22. Ejercicio

Calcular los lados del triángulo y sus ángulos ABC A(2, -1), B (-1,5) y C (-1, -1)

*Solución*

$$\overrightarrow{AB} = (-1,5) - (2, -1) = (-3,6)$$

$$\text{hallo el modulo } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1, -1) - (2, -1) = (-3,0)$$

$$\text{hallo el modulo } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\overrightarrow{CB} = (-1,5) - (-1, -1) = (0,6)$$

$$\text{hallo el modulo } |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(0)^2 + 6^2} = \sqrt{36} = 6$$

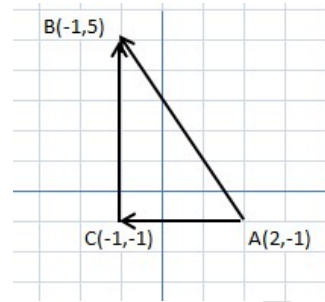
$$\hat{A} = \arccos \frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| * |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-3) * (-3) + (6 * 0)}{\sqrt{45} * 3} = \frac{9}{20,1246} = 0,4472; \hat{A} = 63,435^\circ$$

$$\hat{C} = \arccos \frac{\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{AC}| * |\overrightarrow{CB}|} = \frac{(-3) * 0 + (0 * 6)}{3 * 6} = \frac{0}{18} = 0; \hat{C} = 90^\circ$$

$$\hat{B} = 180 - (63,435^\circ + 90^\circ) = 26,565^\circ;$$

Comprobacion

$$\hat{B} = \arccos \frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{AB}| * |\overrightarrow{CB}|} = \frac{(-3) * 0 + (6 * 6)}{\sqrt{45} * 6} = \frac{36}{\sqrt{45} * 6} = \frac{6}{\sqrt{45}} = 0,8944; \hat{B} = 26,565^\circ$$



## 23. Ejercicio

Considera el rectángulo ABCD y el punto E tal

que  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$ . Si AB y AD miden respectivamente 6 cm y 12 cm demuestramos que los vectores  $\overrightarrow{AE}$  y  $\overrightarrow{BD}$  son perpendiculares

*Solución*

Si  $\overrightarrow{AE}$  y  $\overrightarrow{BD}$  son perpendiculares su producto escalar será 0

$$\overrightarrow{AE} = \text{suma de los vectores } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE};$$

$$\overrightarrow{BD} = \text{suma de dos vectores y } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$

$$AB = 6\text{cm}; AD = BC = 12; BE = \frac{1}{4} BC \Rightarrow BE = \frac{12}{4} = 3$$

$$\overrightarrow{AE} * \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) * (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}); \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \text{ Sustituyo}$$

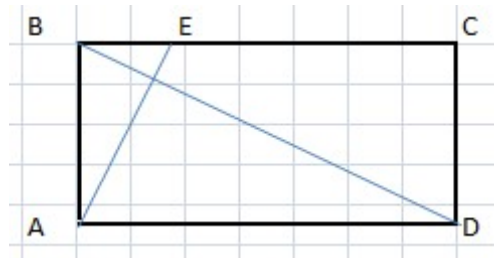
$$\overrightarrow{AE} * \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) * (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) =$$

$$\overrightarrow{AB} * (-\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} * (-\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BE} * \overrightarrow{AD} =$$

$$-(\overrightarrow{AB})^2 + \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} * (-\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BE} * \overrightarrow{AD};$$

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$$

$$\overrightarrow{AB} * (-\overrightarrow{AB}) = -6 * 6 * \cos \alpha (\text{son coincidentes}) = 6 * 6 * \cos 0 = -36$$



$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} = 6 * 12 \cos \beta (\text{son perpendiculares}) = 72 * 0 = 0;$$

$$\overrightarrow{BE} * \overrightarrow{-AB} = \left(\frac{1}{4} * 12\right) * 6 \cos \beta (\text{son perpendiculares}) = 18 * 0 = 0;$$

$$\overrightarrow{BE} * \overrightarrow{AD} = 3 * 12 \cos \gamma (\text{son paralelos}) = 26 + 1 = 36;$$

$$\overrightarrow{AE} * \overrightarrow{BD} = -36 + 0 + 0 + 36 = 0; \Rightarrow \text{que los vectores son perpendiculares}$$

## 24. Ejercicio

Descomponer la fuerza  $\vec{F}$  de 15 Newtons en otras dos  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  que forme  $45^\circ$  y  $60^\circ$  respectivamente con ella.

Solución

Si descomponemos  $\vec{F}$  se ha de cumplir

$$\begin{cases} |\vec{A}| \cos 45^\circ = x'; \\ |\vec{B}| \cos 60^\circ = x; \end{cases}$$

$$x' + x = F; \quad x' + x = 15;$$

$$F = |\vec{A}| \cos 45^\circ + |\vec{B}| \cos(-60^\circ);$$

$$|\vec{A}| \cos 45^\circ + |\vec{B}| \cos 300^\circ = 15;$$

$$|\vec{A}| 0,7071 + |\vec{B}| 0,5 = 15;$$

$$\begin{cases} |\vec{A}| \sin 45^\circ = y'; \\ |\vec{B}| \sin(-60^\circ) = y; \end{cases} \quad y' + y = 0$$

$$|\vec{A}| 0,7071 + |\vec{B}| (-0,866) = 0;$$

$$\begin{cases} |\vec{A}| 0,7071 + |\vec{B}| 0,5 = 15; & |\vec{B}| = \frac{15 - 0,7071|\vec{A}|}{0,5} \\ |\vec{A}| 0,7071 - |\vec{B}| 0,866 = 0; & |\vec{B}| = |\vec{A}| \frac{0,7071}{0,866} = 0,8165|\vec{A}| \end{cases}$$

$$\frac{15 - 0,7071|\vec{A}|}{0,5} = 0,8165|\vec{A}|; \quad 15 - 0,7071|\vec{A}| = 0,8165 * 0,5|\vec{A}| = 0,40825|\vec{A}|$$

$$15 - 0,7071|\vec{A}| = 0,40825|\vec{A}|; \quad 15 = 0,40825|\vec{A}| + 0,7071|\vec{A}|; \quad 15 = 1,11535|\vec{A}|;$$

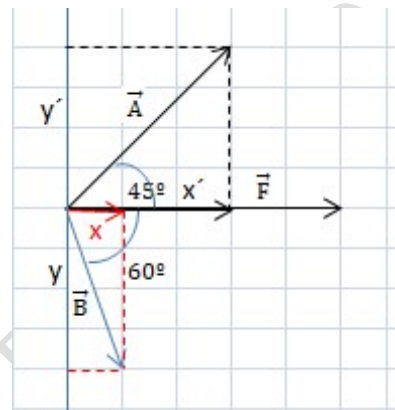
$$|\vec{A}| = \frac{15}{1,11535} = 13,44869; \quad |\vec{A}| = 13,44869;$$

$$|\vec{B}| = \frac{15 - 0,7071|\vec{A}|}{0,5} = \frac{15 - 0,7071 * 13,44869}{0,5} = 10,981; \quad |\vec{B}| = 10,981;$$

Prueba:

$$\begin{cases} |\vec{A}| \cos 45^\circ + |\vec{B}| \cos 60^\circ = 15; & 13,44869 * 0,7071 + 10,981 * 0,5 = \\ |\vec{A}| \sin 45^\circ + |\vec{B}| \sin(-60^\circ) = 0; & 13,44869 * 0,7071 + 10,981 * (-0,866) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} = 9,5096 + 5,4904 = 15 \\ = 9,5096 - 9,5096 = 0 \end{cases}$$



## 25. Ejercicio

Jorge realiza una excursión en tres etapas. En la primera se dirige hacia el este y anda 2km. En la segunda anda 3km hacia el suroeste y finalmente anda 4km hacia el norte. ¿Que distancia le separa del punto de partida?. Realiza usando vectores

Solución

El vector  $\overrightarrow{AB}$  se desplaza 2 Km sobre el eje x

El vector  $\overrightarrow{BC}$  tiene una proyección sobre el eje x de

Proyección sobre x  $|\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 225^\circ =$

$$3 \cdot (-0,7071) = -2,1213$$

Proyección sobre y  $|\overrightarrow{BC}| \cdot \sin 225^\circ =$

$$3 \cdot (-0,7071) = -2,1213;$$

Desplazamiento horizontal sobre el eje de las x

$$x = 2 + (-2,1213) = -0,12132;$$

Desplazamiento vertical = -2,12132;

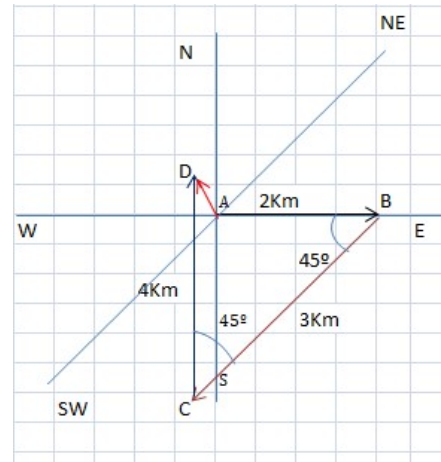
El vector  $\overrightarrow{CD}$  se desplaza 4 Km sobre el eje y

Desplazamiento vertical total = -2,1213 + 4 = 1,8787

El punto D tendrá las coordenadas (-0,12132, 1,8787) Vector  $\overrightarrow{BC}$  ((-0,12132, 1,8787)

La distancia del origen =  $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-0,12132)^2 + 1,8787^2} = 1,8826\text{Km};$

$$|\overrightarrow{BC}| = 1,8826\text{Km};$$



## 26. Ejercicio

Una barca se desplaza para cruzar un río del punto A hacia el punto B con una velocidad de 20km/h.

Si empieza a soplar un viento en dirección este a 5 km/h, ¿En qué dirección y a qué velocidad se moverá la barca?

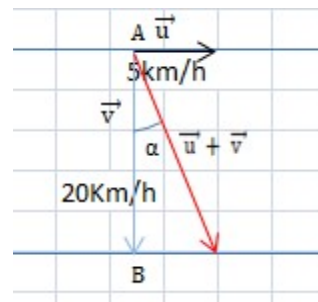
Solución

Velocidad

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 20^2} = \sqrt{25 + 400} = \sqrt{425} = 20,6155 \text{ Km/h}$$

Angulo  $\alpha$

$$|\vec{v}| = |\vec{u} + \vec{v}| \cdot \cos \alpha; \cos \alpha = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u} + \vec{v}|} = \frac{20}{\sqrt{425}} = 0,9701; \alpha = 14,03624^\circ$$



## 27. Ejercicio

Los módulos de dos vectores son 15 y 12 unidades de longitud. El módulo de la suma de dichos vectores es de 8 unidades de longitud. Calcular el producto escalar de dichos vectores y el ángulo que forman.

*Solución*

### Propiedades de producto escalar

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{|u|} + \overrightarrow{|v|})^2 &= \overrightarrow{(u+v)}(\overrightarrow{(u+v)}) = \overrightarrow{(u * u)} + 2\overrightarrow{(u * v)} + \overrightarrow{(v * v)} = \\ &= |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 + 2\overrightarrow{u} * \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 + 2|\overrightarrow{u}| * |\overrightarrow{v}| \cos \widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}; \end{aligned}$$

$$(\overrightarrow{|u|} + \overrightarrow{|v|})^2 = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 + 2|\overrightarrow{u}| * |\overrightarrow{v}| \cos \widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}$$

$$(8)^2 = 15^2 + 12^2 + 2 * 15 * 12 \cos \widehat{u, v}; \cos \widehat{u, v} = \frac{64 - 225 - 144}{360} = -0,8472$$

$$\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \arccos(-0,847\hat{2}) = 147,9108^\circ$$

$$(\vec{u} * \vec{u}) = |\vec{u}| * |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}; (\vec{u} * \vec{u}) = 15 * 12 * (-0,8472) = -152,5$$

## 28. Ejercicio

Una pesa de 10Kg está suspendida de una cuerda sujeta a dos puntos A y B de igual altura y distantes 10m, tal y como muestra la figura. La cuerda tienen una longitud de 14m . La pesa está situada a 6m de A y a 8m de B .

Calcular el valor de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  y los ángulos que forman con  $F$

*Solución*

$$F = m \cdot a; F = 10\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} = 98 \text{ N}$$

El ángulo que forman  $F_1$  y  $F_2$

$$(\overrightarrow{|u|} + \overrightarrow{|v|})^2 = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 + 2|\overrightarrow{u}| * |\overrightarrow{v}| \cos \widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}$$

$$(10)^2 = 6^2 + 8^2 + 2 * 6 * 8 \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$$

$$\cos \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} = -\frac{100 - 36 - 64}{96} = 0; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} = 90^\circ$$

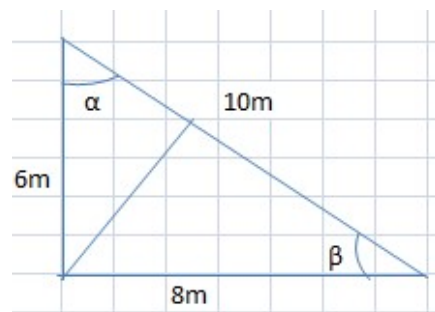
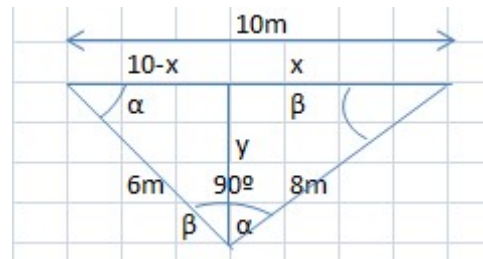
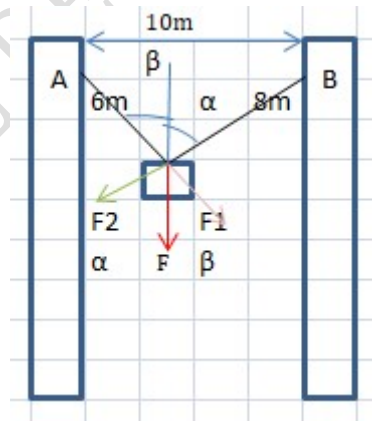
$$90^\circ = \alpha + \beta;$$

$$\cos \beta = \frac{8}{10}; \arccos \frac{8}{10} = 36,8698^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{6}{10}; \arccos \frac{6}{10} = 53,1301^\circ$$

$$F_1 = 98\text{N} * \cos\beta = 98 * \frac{8}{10} = 78,4\text{ N}$$

$$F_2 = 98 * \cos \alpha = 98 * \frac{6}{10} = 58,8 \text{ N}$$

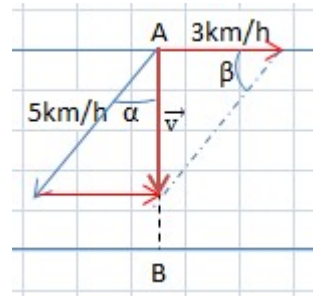


### 29. Ejercicio

Un nadador intenta cruzar un río del punto A al B (perpendicular al río). Si nada a una velocidad de 5 km/h y la corriente del río es de 3 km/h.

- ¿En que dirección debe nadar para llegar al punto B?
- ¿Cuál será la dirección resultante?

*Solución*



- Dirección en que debe nadar;  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ;  $\arcsen \frac{3}{5} = 36,8698^\circ$  ;

*Debe nadar con  $36,869897^\circ$  en dirección contraria a la corriente*

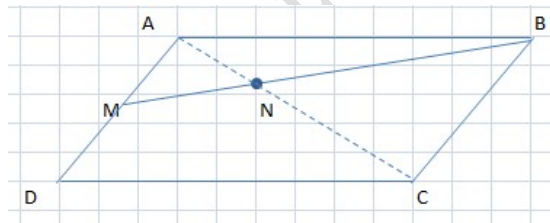
- Dirección resultante  $|\vec{v}|$ ;

### 30. Ejercicio

La figura ABCD es un paralelogramo.

M es el punto medio de AD y

$$\overrightarrow{BN} = 2 \overrightarrow{NM}$$



- demuestra que C, N y A están alineados

*Solución*

*Si N, A y C están alineados por tales tendré*

$$2NM = BN; AD = CB = 2AM$$

$$\frac{BN}{MN} = \frac{CN}{AN} = \frac{BC}{MA} \Rightarrow \frac{2MN}{MN} = \frac{2MA}{MA} = 2;$$

$$\frac{2MN}{MN} = \frac{BC}{MA} = 2 \Rightarrow BC = 2MA$$

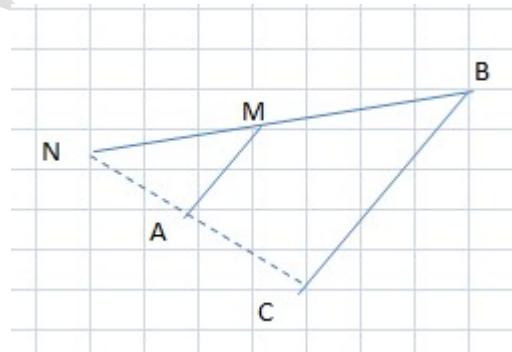
*Se cumpliría.*

Por vectores.

Los puntos C, N y A están alineados si  $\frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{NA}}$  son proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}; \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MA}; \text{ y } \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NM} \\ \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA} \end{cases} \quad \frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{NA}} = \frac{2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{NM}}{\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA}} = \frac{2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NM})}{\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA}} = 2$$

$$\frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{NA}} = 2 \text{ son proporcionales, están alineados}$$



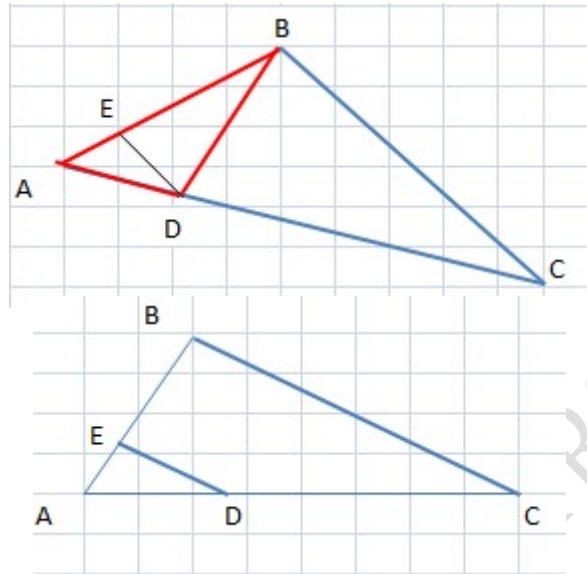
### 1. Ejercicio

En la figura ABC es un triángulo

$$\text{cualquiera } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{y } \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AD}$$

Demuestra que las rectas BC y ED son paralelas.



*Solución*

Si son paralelos por tales se cumplirá

$$AC = 4AD \text{ y } AB = 4AE;$$

$$\frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}; \frac{BC}{ED} = \frac{4AD}{AD} = \frac{4AE}{AE} \Rightarrow \frac{BC}{ED} = 4 \text{ se cumple;}$$

Por vectores.

Los vectores BC y ED son paralelos si sus valores son proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{EA}; \text{ y } \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} \end{cases} \quad \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{ED}} = \frac{4\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}} = \frac{4(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD})}{\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}} = 4$$

$$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{ED}} = 4 \text{ son proporcionales, son paralelos}$$