

SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

INDICE

Contenido

1	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES:	2
1.1	ECUACIONES LINEALES	2
1.2	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.....	2
2	CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	3
3	MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS	4
3.1	MÉTODO DE SUSTITUCIÓN	4
3.2	MÉTODO DE IGUALACIÓN	5
3.3	MÉTODO DE REDUCCIÓN	5
4	SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES	13
5	SISTEMAS DE INECUACIONES	24
5.1	SISTEMAS DE INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS	28

1 Sistemas de ecuaciones lineales:

1.1 Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una igualdad algebraica del tipo $ax + by = c$; donde x e y son variables (incógnitas) y a y b son números reales.

Estas ecuaciones se denominan lineales porque representan una recta

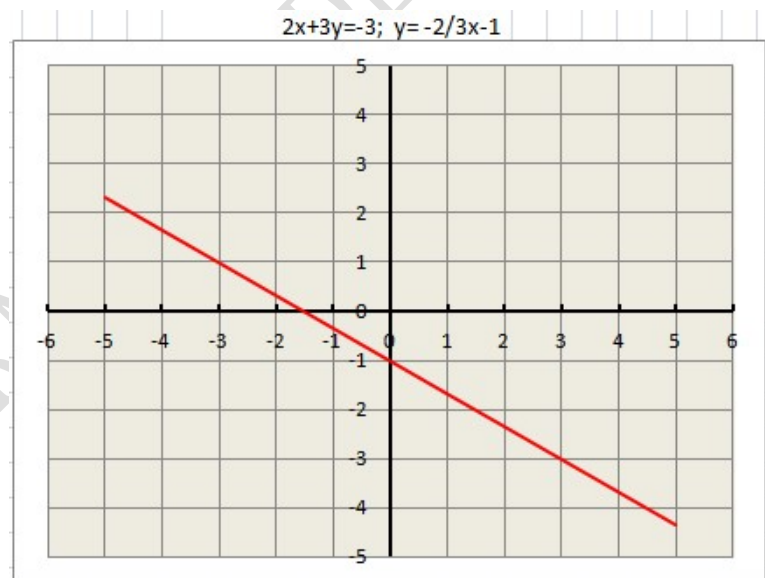
La ecuación tiene infinitas soluciones. Como esta ecuación representa una recta y una recta está delimitada por dos números, hallando un par de números que cumplan la ecuación y uniéndolos con una recta, esta representa las infinitas soluciones de la ecuación.

Ejemplo $2x + 3y = -3$; $y = -\frac{2}{3}x - \frac{3}{3}$; $y = -\frac{2}{3}x - 1$

Hallamos varios puntos que cumplan la ecuación, dando valores a x .

Para $x = 0$; $y = -1$ un punto es $(0, -1)$. Para $x = 3$ $y = -3$; $(3, -3)$

x	y
0	-1
3	-3



Si representamos estos pares de números en un sistema de ejes cartesianos y hacemos pasar por ellos una recta, en ella estarán contenidas todas las soluciones de la ecuación

1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, es un conjunto de ecuaciones lineales del tipo $ax + by = c$, para el que se quiere encontrar una solución común.

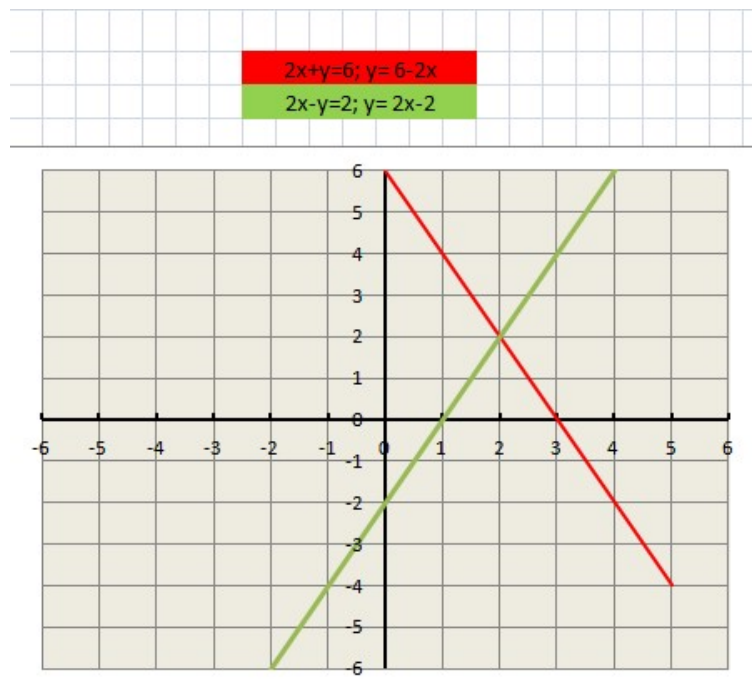
Una solución del sistema de ecuaciones lineales es cada par de valores que cumplen las distintas ecuaciones

Ejemplo :

Hallar la solución del sistema de ecuaciones: $2x + y = 6$; $2x - y = 2$;

x	y
0	6
3	0

x	y
0	-2
1	0



Si representamos las dos ecuaciones lineales (las rectas) el punto donde se cortan las dos rectas, es la solución que cumple las dos ecuaciones

2 Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

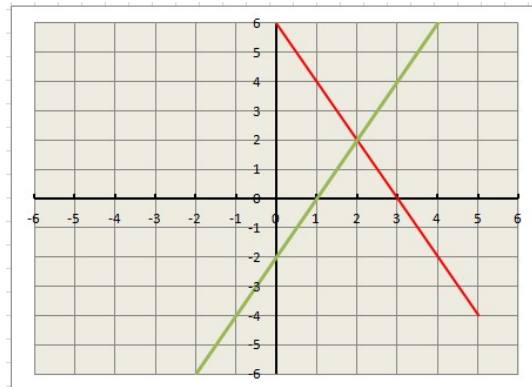
El sistema de ecuaciones se clasifican, atendiendo al tipo de soluciones que tienen como:

Compatibles determinados: El sistema tiene una única solución.

Las rectas que representan a cada una de las ecuaciones lineales son secantes, se cortan en un punto

$$2x + y = 6;$$

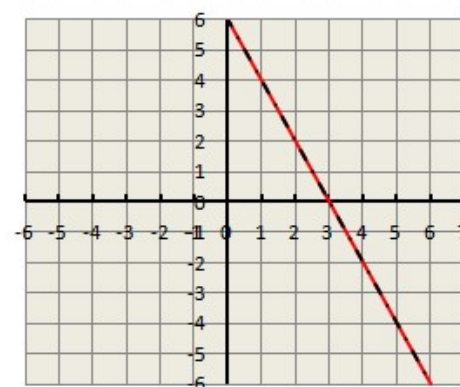
$$2x - y = 2$$



Compatibles indeterminados: El sistema tiene infinitas soluciones. Las rectas que representan a cada una de las ecuaciones lineales son coincidentes.

$$2x + y = 6;$$

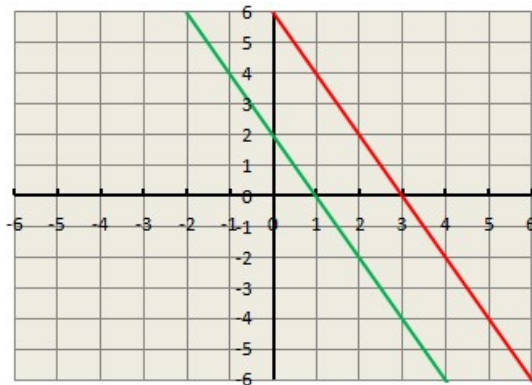
$$4x + 2y = 12;$$



Incompatibles: El sistema no tiene solución. Las rectas que representan a cada una de las ecuaciones lineales son paralelas.

$$2x + y = 6; y = 6 - 2x$$

$$y + 2x = 2; y = 2 - 2x;$$



3 Método de resolución de sistemas

Hay distintos métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales

3.1 Método de sustitución

Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir su valor en la otra.

Ejemplo:

$$2x + 3y = 5;$$

$$3x - y = 2;$$

Despejamos "y" en la segunda ecuación $3x - y = 2$; $y = 3x - 2$;

Sustituimos el valor de "y" en la primera ecuación $2x + 3y = 5$;

$$2x + 3(3x - 2) = 5; 2x + 9x - 6 = 5; 11x = 11; x = \frac{11}{11} = 1; x = 1;$$

Sustituimos el valor de "x" en la ecuación que ya tenemos despejada $y = 3x - 2$;

$$y = 3x - 2; y = 3(1) - 2; y = 3 - 2; y = 1;$$

La solución del sistema es el punto (1,1)

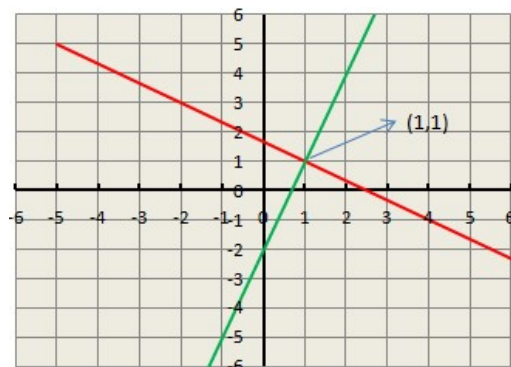
Prueba:

Comprobamos que la solución ($x=1, y=1$), se cumple en las dos ecuaciones:

$$2x + 3y = 5; 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5; 5 = 5; \text{Se cumple la ecuación}$$

$$3x - y = 2; 3 \cdot 1 - 1 = 2; 2 = 2; \text{Se cumple la ecuación}$$

Comprobamos la solución gráficamente



3.2 Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones, igualarlas y resolver la ecuación resultante.

Ejemplo:

$$2x + 3y = 5; 3y = 5 - 2x; y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x$$

$$3x - y = 2; y = 3x - 2;$$

$$\text{Igualamos las dos ecuaciones } \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x = 3x - 2; \frac{5 - 2}{3}x = 3x - 2;$$

$$\text{Hallamos comun denominador } \frac{5 - 2x}{3} = \frac{9x - 6}{3}; 5 - 2x = 9x - 6;$$

$$5 + 6 = 9x + 2x; 11 = 11x; x = \frac{11}{11} = 1; x = 1$$

$$\text{Sustituimos el valor de x en cualquiera de las ecuaciones } y = 3x - 2; y = 3 \cdot 1 - 2;$$

$$y = 3 - 2 = 1; y = 1;$$

3.3 Método de reducción

El método consiste en igualar mediante multiplicaciones los coeficientes de una de las incógnitas de modo que al sumar o restar las dos ecuaciones se elimina una de las incógnitas:

Ejemplo: Resolver el sistema de ecuaciones

$$2x + 3y = 5;$$

$$3x - y = 2;$$

$$2x + 3y = 5;$$

$$3x - y = 2; \text{ Multiplicamos la ecuación por 3 } \Rightarrow 9x - 3y = 6$$

$$\text{Sumamos las dos ecuaciones } 11x + 0 = 11; x = \frac{11}{11}; x = 1;$$

$$\text{Sustituimos el valor de x en cualquiera de las ecuaciones } y = 3x - 2; y = 3 \cdot 1 - 2;$$

$$y = 3 - 2 = 1; y = 1;$$

1. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve por reducción el siguiente sistema de ecuaciones

$$5x + 3 = 20 - 9y;$$

$$2x - 3y = 5x - y;$$

Solución

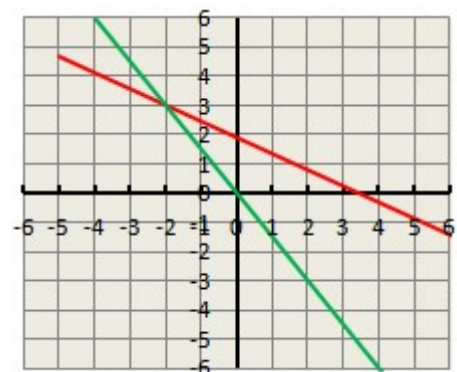
1º Simplificamos las ecuaciones

$$5x + 3 = 20 - 9y, 5x + 9y = 20 - 3; 5x + 9y = 17;$$

$$2x - 3y = 5x - y; 5x - 2x - 3y + y = 0; 3x - 2y = 0$$

2º Aplicamos el método de reducción

$$5x + 9y = 17; \text{ multiplico por (3) } \Rightarrow 15x + 27y = 51;$$



$$3x - 2y = 0; \text{ multiplico por } (-5) \Rightarrow -15x + 10y = 0;$$

$$\text{Sumamos las dos ecuaciones} \quad \begin{array}{r} 0 + 27y = 51; \end{array}$$

$$y = \frac{51}{27} = 3 \quad y = 3;$$

Sustituyo el valor de "y" en cualquiera de las ecuaciones

$$3x + 2y = 0; 3x + 2 \cdot 3 = 0; 3x = -6; x = -\frac{6}{3} = -2; \quad x = -2;$$

La solución del sistema es $(3, -2)$;

2. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve por sustitución el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + y = 30;$$

$$6,5x + 3,2y = 158,7;$$

Solución

Aplicamos el método de sustitución

$$x + y = 30; y = 30 - x;$$

$$6,5x + 3,2y = 158,7 \Rightarrow 6,5x + 3,2(30 - x) = 158,7; 6,5x + 96 - 3,2x = 158,7;$$

$$6,5x - 3,2x = 158,7 - 96; 3,3x = 62,7; x = \frac{62,7}{3,3}; x = 19;$$

Sustituimos el valor de x en cualquiera de las ecuaciones y despejamos el valor de y

$$\text{Sustituimos el valor de x en la ecuación } y = 30 - x; y = 30 - 19; y = 11;$$

La solución del sistema es $x = 19, y = 11$;

3. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve por sustitución el sistema de ecuaciones

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 4;$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2;$$

Solución

1º Simplificamos

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 4; \text{MCM} = 6; \frac{2x}{6} - \frac{3y}{6} = \frac{24}{6}; 2x - 3y = 24;$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2; \text{MCM} = 4; \frac{2x}{4} - \frac{y}{4} = \frac{8}{4}; 2x - y = 8;$$

2º Resolvemos por sustitución

$$2x - y = 8; y = 2x - 8;$$

$$\text{Sustituimos el valor de y en } 2x - 3y = 24 \Rightarrow 2x - 3(2x - 8) = 24;$$

$$2x - 6x + 24 = 24; 6x - 2x = 24 - 24; 4x = 0; x = 0;$$

$$\text{Sustituimos el valor de x en } y = 2x - 8; y = 2(0) - 8; y = -8;$$

La solución del sistema es $x = 0, y = -8$;

4. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve por reducción el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{2x}{3} + y + 1 = 0;$$

$$\frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{3} + 1 = 0;$$

Solución

1º Simplificamos

$$\frac{2x}{3} + y + 1 = 0; \text{MCM} = 3; \frac{2x}{3} + \frac{3y}{3} + \frac{3}{3} = 0; 2x + 3y + 3 = 0; 2x + 3y = -3;$$

$$\frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{3} + 1 = 0; \text{MCM} = 6; \frac{3(x+1)}{6} + \frac{2(y-1)}{6} + \frac{6}{6} = 0;$$

$$3(x+1) + 2(y-1) + 6 = 0; 3x + 3 + 2y - 2 + 6 = 0; 3x + 2y = -7;$$

2º Resolvemos por reducción

$$2x + 3y = -3; (\text{multiplicamos por } 3) \Rightarrow 6x + 9y = -9;$$

$$3x + 2y = -7; (\text{multiplicamos por } -2) \Rightarrow -6x - 4y = 14;$$

$$\text{Sumamos las dos ecuaciones} \quad 0 + 5y = 5; \quad y = \frac{5}{5}; \quad y = 1;$$

Sustituimos el valor de y en cualquiera de las ecuaciones

$$2x + 3y = -3; 2x + 3(1) = -3; 2x + 3 = -3; 2x = -6; x = \frac{-6}{2} = -3;$$

La solución del sistema es $x = -3, y = 1$;

5. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve por reducción el siguiente sistema de ecuaciones

$$3x - 3y = 12;$$

$$4x + 4y = 16;$$

Solución

$$3x - 3y = 12; (\text{multiplicamos por } 4) \Rightarrow 12x - 12y = 48;$$

$$4x + 4y = 16; (\text{multiplicamos por } 3) \Rightarrow 12x + 12y = 48;$$

$$\text{Sumamos las dos ecuaciones} \quad 24x + 0 = 96; \quad x = \frac{96}{24}; \quad x = 4;$$

Sustituimos el valor de x en cualquiera de las ecuaciones

$$3x - 3y = 12; 3(4) - 3y = 12; 12 - 3y = 12; 3y = 0; y = 0;$$

La solución del sistema es $x = 4, y = 0$;

6. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve por reducción el siguiente sistema de ecuaciones

$$8,6x + 5,4y = 11;$$

$$25x - 12y = -245;$$

Solución

$$8,6x + 5,4y = 11; \text{ quitamos decimales multiplicando por } 10 \Rightarrow 86x + 54y = 110;$$

$$86x + 54y = 110; \text{ (multiplicamos por } 12) \Rightarrow 1032x + 648y = 1320;$$

$$25x - 12y = -245; \text{ (multiplicamos por } 54) \Rightarrow 1350x - 648y = -13230;$$

$$\text{Sumamos las dos ecuaciones} \quad \begin{array}{r} 1032x + 648y = 1320 \\ 1350x - 648y = -13230 \\ \hline 2382x + 0 = -11910; \end{array}$$

$$x = -\frac{11910}{2382}; x = -5$$

Sustituimos el valor de x en una de las ecuaciones

$$25x - 12y = -245; \Rightarrow 25(-5) - 12y = -245; -125 - 12y = -245; 12y = -120;$$

$$y = 10; \text{ La solución del sistema es } x = -5, y = 10;$$

7. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + y = 4 - y;$$

$$3x - 5 = 7 - 6y;$$

Solución

$$x + y = 4 - y; x + y + y = 4; x + 2y = 4; \text{ por } (-3) \Rightarrow -3x - 6y = -12;$$

$$3x - 5 = 7 - 6y; 3x + 6y = 7 + 5; 3x + 6y = 12; \quad \begin{array}{r} 3x + 6y = 12 \\ -3x - 6y = -12 \\ \hline 0 \quad 0 = 0; \end{array}$$

$$\text{Sumamos las dos ecuaciones} \quad \begin{array}{r} 3x + 6y = 12 \\ -3x - 6y = -12 \\ \hline 0 \quad 0 = 0; \end{array}$$

El sistema tiene infinitas soluciones, las rectas son coincidentes

8. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$5 + x = y;$$

$$7x - y + 17 = 3x + 3y;$$

Solución

$$5 + x = y;$$

$$7x - y + 17 = 3x + 3y; 7x - 3x - y - 3y = -17; 4x - 4y = -17;$$

$$\text{Aplicamos el metodo de sustitución } 4x - 4y = -17; 4x - 4(5 + x) = -17;$$

$$4x - 20 - 4x = -17; 4x - 4x = -17 + 20; 0 = 3;$$

El sistema no tiene solución, las rectas son paralelas ;

9. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{x+15}{8} + \frac{3(y+1)}{16} = 3;$$

$$\frac{7-x}{2} - \frac{1+y}{12} = 3;$$

Solución

1º Simplificamos

$$\frac{x+15}{8} + \frac{3(y+1)}{16} = 3; \frac{2(x+15)}{16} + \frac{3(y+1)}{16} = \frac{48}{16};$$

$$2x + 30 + 3y + 3 = 48; \quad 2x + 3y = 15;$$

$$\frac{7-x}{2} - \frac{1+y}{12} = 3; \quad \frac{6(7-x)}{2} - \frac{1+y}{12} = \frac{36}{12};$$

$$42 - 6x - 1 - y = 36; \quad -6x - y = -5; \quad 6x + y = 5;$$

2º Aplicamos método de sustitución

$$6x + y = 5; \quad y = 5 - 6x;$$

$$2x + 3y = 15; \quad 2x + 3(5-6x) = 15; \quad 2x + 15 - 18x = 15; \quad -16x = 0; \quad x = 0$$

$$y = 5 - 6x; \quad y = 5 - 6(0); \quad y = 5$$

La solución del sistema es $x = 0, y = 5$;

10. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + y = 1;$$

$$xy + 2y = 2$$

Solución

Aplicamos método de sustitución

$$x + y = 1; \quad y = 1 - x;$$

$$xy + 2y = 2; \quad x(1-x) + 2(1-x) = 2; \quad x - x^2 + 2 - 2x = 2; \quad x^2 + x = 0$$

Las soluciones son $x(x+1) = 0$; $x = 0$ y $x = -1$;

Sustituimos en la primera ecuación $y = 1 - x$;

Para $x = 0$; $y = 1$; Para $x = -1$; $y = 1 - (-1)$; $y = 2$;

Las soluciones del sistema son $x = 0$; $x = -1$; $y = 1$; $y = 2$;

11. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

En un barrio se reciclan 20 toneladas mensuales de papel y vidrio. Se recoge el triple de papel que de vidrio. ¿Cuántas toneladas de cada material se reciclan?

Solución

Toneladas de vidrio = x

Toneladas de papel y ;

$$x + y = 20;$$

$$3x = y;$$

Sustituimos y en la primera ecuación $x + y = 20 \Rightarrow x + 3x = 20$;

$$4x = 20; x = 5; \text{ para } x = 5 \ y = 15;$$

La solución es $x = 5$ y $y = 15$;

12. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

En una pastelería hay 1800 bombones embasados en cajas de 12 y 18 unidades. ¿Cuántas cajas hay de cada clase si en total tenemos 125 cajas?

Solución

x cajas de 12 Bombones

y cajas de 18 Bombones

$$x + y = 125; \ y = 125 - x;$$

$$x * 12 + y * 18 = 1800; \text{ sustituir la } y \text{ en esta ecuación}$$

$$12x + 18(125 - x) = 1800; 12x + 2250 - 18x = 1800;$$

$$18x - 12x = 2250 - 1800; 6x = 450; x = \frac{450}{6}; x = 75;$$

$$y = 125 - 75; y = 50;$$

Hay 75 cajas de 12 bombones y 50 cajas de 18 bombones

13. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Calcula la edad de dos personas sabiendo que hace 4 años la primera tenía 4 veces la edad de la segunda y dentro de 20 años la edad de la primera será el doble de la segunda

Solución

Edades	Hace 4 años	Hoy	Dentro de 20
Primera persona	$x-4$	x	$x+20$
Segunda persona	$y-4$	y	$y+20$

$$\text{Hace 4 años se cumplía } x - 4 = 4(y - 4); x - 4 = 4y - 16; x - 4y = -12;$$

$$\text{Dentro de 20 años se cumplirá } x + 20 = 2(y + 20); x + 20 = 2y + 40;$$

$$x = 2y + 20; x - 2y = 20; \text{ Resolvemos por reducción, restamos una de la otra:}$$

$$x - 4y = -12;$$

$$x - 2y = 20;$$

$$0 - 2y = -32; y = 16;$$

$$\text{Sustituir en la primera } x - 4y = -12 \Rightarrow x - 4(16) = -12; x = -12 + 64;$$

$$x = 52;$$

14. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

La edad de Pedro mas la edad que tendrá dentro de 3 años es igual a la edad de Lucia dentro de 6 años, y la edad de Lucia dentro de 3 años es igual a la que tendrá Pedro dentro de seis años ¿Cuáles son las edades de Pedro y Lucia?

Solución

Edades	Dentro de 3 años	Hoy	Dentro de 6 años
Pedro	$x+3$	x	$x+6$
Lucia	$y+3$	y	$y+6$

Se ha de cumplir $x + (x + 3) = y + 6$; $2x + 3 = y + 6$; $2x - y = 3$;

Se ha de cumplir $y + 3 = x + 6$; $y - x = 3$;

Aplicamos método de igualación

$$2x - y = 3; y = 2x - 3;$$

$$y - x = 3; y = 3 + x;$$

igualamos las ecuaciones $2x - 3 = 3 + x$; $2x - x = +3 + 3$; $x = 6$;

Sustituimos en unade las ecuaciones $y = 3 + x$; $y = 3 + 6$; $y = 9$;

La edad de Pedro hoy es 6 años; y la de Lucia es 9

15. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Angel va al banco a cambiar monedas de 5 céntimos por monedas de 20 céntimos. Cuando sale del banco tiene 225 monedas menos que cuando entro. ¿Cuánto dinero llevaba?

Solución:

Antes del cambio tenía x monedas de 5 centimos

Despues del cambio tiene y monedas de 20 centimos

Diferencia entre monedas antes y despues $x - y = 225$; $y = x - 225$;

Dinero que llevaba $5x = 20y$;

Sustituimos el valor de y de la 1ª en la 2ª ecuación $5x = 20(x - 225)$

$$5x = 20x - 4500; 15x = 4500; x = \frac{4500}{15}; x = 300 \text{ monedas de 5 centimos};$$

Sustituyo el valor de x en la 1ª ecuación $y = x - 225$; $y = 300 - 225$;

$y = 75$ monedas de 20 centimos;

16. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Por la mezcla de 400 kg de pienso de tipo A con 800 kg del tipo B se han pagado 2200 €. Calcula el precio de cada tipo de pienso sabiendo que si mezclamos 1 kg de cada tipo de pienso la mezcla costaría 3,90€?

Solución:

x precio Kg pienso tipo A

y precio Kg pienso tipo B

$$400\text{kg} * x + 800\text{kg} * y = 2200\text{€}; 400x + 800y = 2200;$$

$$1\text{kg} * x + 1\text{kg} * y = 3,90\text{€}; x + y = 3,9; y = 3,9 - x$$

Aplicamos método de sustitución :

$$400x + 800y = 2200; 400x + 800(3,9 - x) = 2200; 400x + 3120 - 800x = 2200;$$

$$800x - 400x = 3120 - 2200; 400x = 920; x = \frac{920}{400}; x = 2,3\text{€/Kg}$$

$$y = 3,9 - x; y = 3,9 - 2,3; y = 1,6\text{€/Kg};$$

Prueba

$$400 * x + 800 * y = 2200; 400 * 2,3 + 800 * 1,6 = 920 + 1280 = 2200;$$

17. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

La suma de las dos cifras de un número es 9. Si le añadimos 27 el número resultante es capicúa con él . Halla cual es el numero resultante

Solución

El numero es xy si sumamos 27 el numero será $(x + 2)(y + 7)$

Se ha de cumplir

$$x + y = 9; y = 9 - x;$$

Si es capicua se ha de cumplir $x + 2 = y + 7$;

Aplicamos sustitución

$$x + 2 = y + 7; x + 2 = (9 - x) + 7; x + 2 = 9 + 7 - x; x + x = 9 + 7 - 2;$$

$$2x = 14; x = 7; y = 9 - x; y = 9 - 7; y = 2;$$

El número es 72

18. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Obtener un número de dos cifras cuya diferencia de sus cifras es 6 y la cifra de las unidades es el cuadrado de la de las decenas.

Solución

El numero es $\overline{xy}$ y se ha de cumplir;

$$y - x = 6; y = x + 6;$$

$$y = x^2;$$

Usamos el metodo de sustitución $y = x^2 \Rightarrow x + 6 = x^2; x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 * 1 * (-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\text{Tomamos el valor positivo } x = \frac{6}{2}; x = 3;$$

$$\text{Sustituimos en la ecuación } y = x + 6; y = 3 + 6; y = 9;$$

El número es 39

19. Ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales

Obtener un número de dos cifras de forma que el producto de sus cifras sea 18 y la cifra de las unidades sea el doble del de las decenas.

Solución

El numero es xy y se ha de cumplir;

$$x * y = 18;$$

$$y = 2x;$$

Aplicamos sustitución

$$x * y = 18; x * 2x = 18; 2x^2 = 18; x^2 = 9; x = \pm 3 \text{ tomamos el valor positivo;}$$

$$x = 3; y = 2x \Rightarrow y = 2 + 3; y = 6;$$

El número es 36

4 Sistema de ecuaciones no lineales

Los sistemas de ecuaciones no lineales son aquellas que contienen alguna ecuación no lineal, de grado mayor que uno, con fracciones o radicales.

20. Ejercicio de sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x + y = 3;$$

$$xy - y^2 = 0;$$

Solución

Utilizamos el método de sustitución.

$$2x + y = 3; y = 3 - 2x;$$

$$xy - y^2 = 0; \text{ sustituimos } x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0; 3x - 2x^2 - (9 + 4x^2 - 12x) = 0;$$

$$3x - 2x^2 - 9 - 4x^2 + 12x = 0; 6x^2 - 15x + 9 = 0;$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{(15)^2 - (4 * 6 * 9)}}{2 * 6} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 216}}{12} = \frac{15 \pm \sqrt{9}}{12} = \frac{15 \pm 3}{12};$$

$$x = \frac{15 + 3}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}; x = \frac{3}{2}; \quad x = \frac{15 - 3}{12} = \frac{12}{12} = 1; x = 1;$$

$$\text{Para } x = \frac{3}{2}, \text{ sustituyo en la ecuación } y = 3 - 2x; y = 3 - 2 * \frac{3}{2} = 3 - 3 = 0;$$

$$\text{Para } x = 1, \text{ sustituyo en la ecuación } y = 3 - 2x; y = 3 - 2 * 1 = 3 - 2 = 1;$$

Las soluciones son para $x = 1$ $y = 1$. para $x = \frac{3}{2}$ $y = 0$;

21. Ejercicio de sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x + 2y = 0;$$

$$x(x - y) = 2y^2 - 8;$$

Solución

Utilizamos el metodo de sustitución. Despejamos $3x + 2y = 0; x = -\frac{2}{3}y;$

$$x(x - y) = 2y^2 - 8; = -\frac{2}{3}y\left(-\frac{2}{3}y - y\right) = 2y^2 - 8; \frac{4}{9}y^2 + \frac{2}{3}y^2 = 2y^2 - 8;$$

$$\frac{4}{9}y^2 + \frac{6}{9}y^2 = \frac{18}{9}y^2 - \frac{72}{9}; 4y^2 + 6y^2 = 18y^2 - 72; 8y^2 = 72; y^2 = 9; y = \pm 3$$

Sustituimos en valor de y en la ecuación $x = -\frac{2}{3}y$;

$$\text{Para } y = 3; x = -\frac{2}{3} * 3; x = -2; \text{ Para } y = -3; x = -\frac{2}{3} * (-3); x = 2$$

Las soluciones son para $y = 3, x = -2$ y Para $y = -3, x = 2$;

22. Ejercicio de sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 41;$$

$$x^2 - y^2 = 9;$$

Solución

Aplicamos método de reducción:

$$x^2 + y^2 = 41;$$

$$x^2 - y^2 = 9;$$

$$\hline 2x^2 \quad 0 = 50; = x^2 = \frac{50}{2}; x = \pm 5;$$

Sustituimos en una ecuación $x^2 + y^2 = 41$;

$$\text{Para } x = 5; 5^2 + y^2 = 41; y^2 = 41 - 25; y^2 = 16; y = \pm 4;$$

$$\text{Para } x = -5; (-5)^2 + y^2 = 41; y^2 = 41 - 25; y^2 = 16; y = \pm 4;$$

Las soluciones son para $x = 5, y = 4$ e $y = -4$; Para $x = -5, y = 4$ e $y = -4$;

23. Ejercicio de sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x^2 + 2y^2 = 35;$$

$$x^2 - 2y^2 = 1;$$

Solución

Aplicando el método de reducción (sumo las dos ecuaciones)

$$3x^2 + 2y^2 = 35;$$

$$x^2 - 2y^2 = 1;$$

$$\hline 4x^2 \quad 0 = 36;$$

$$4x^2 = 36; x^2 = \frac{36}{4}; x^2 = 9; x = \pm 3;$$

Sustituyo el valor de x en una ecuación $x^2 - 2y^2 = 1$;

$$\text{Para } x = 3; 3^2 - 2y^2 = 1; 9 - 1 = 2y^2; y^2 = \frac{8}{2}; y^2 = 4; y = \pm 2;$$

$$\text{Para } x = -3; (-3)^2 - 2y^2 = 1; 9 - 1 = 2y^2; y^2 = \frac{8}{2}; y^2 = 4; y = \pm 2;$$

Las soluciones son para $x = 3, y = 2$ e $y = -2$; Para $x = -3, y = 2$ e $y = -2$;

24. Ejercicio de sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + x + y = 32;$$

$$x^2 - y^2 + x - y = 28;$$

Solución

Aplicando el método de reducción (sumo las dos ecuaciones)

$$x^2 + y^2 + x + y = 32;$$

$$\underline{x^2 - y^2 + x - y = 28;}$$

$$2x^2 + 0 + 2x + 0 = 60 ; 2x^2 + 2x - 60 = 0; \Rightarrow x^2 + x - 30 = 0;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 * 1 * (-30)}}{2 * 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2}$$

$$x = \frac{-1 + 11}{2} = 5; \quad y = \frac{-1 - 11}{2} = -6$$

$$\text{Sustituyo en una de las ecuaciones } x^2 + y^2 + x + y = 32;$$

$$\text{Para } x = 5; 5^2 + y^2 + 5 + y = 32; y^2 + y + 25 + 5 = 32; y^2 + y - 2 = 0;$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 * 1 * (-2)}}{2 * 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2};$$

$$y = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$y = \frac{-1 - 3}{2} = \frac{-4}{2}; y = -2;$$

$$\text{Para } x = -6 \text{ sustituyo } (-6)^2 + y^2 - 6 + y = 32; y^2 + y + 36 - 6 - 32 = 0;$$

$$y^2 + y - 2 = 0; \text{ la ecuación es la misma luego las soluciones son } y = 1 \text{ e } y = -2$$

Las soluciones son para $x = 5, y = 1$ e $y = -2$; Para $x = -6, y = 1$ e $y = -2$;

25. Ejercicio de sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0;$$

$$x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0;$$

Solución

Aplicando el método de reducción (sumo las dos ecuaciones)

$$x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0;$$

$$\underline{x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0;}$$

$$2x^2 - 0 + 4x + 2 = 0; \quad \underline{x^2 + 2x + 1 = 0;}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 * 1 * 1}}{2 * 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1; \text{ Raíz doble}$$

$$\text{Para } x = -1, \text{ sustituyo en una ecuación } x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0;$$

$$(-1)^2 + 2y^2 + (-1) + 1 = 0; 1 + 2y^2 - 1 + 1 = 0; 1 + 2y^2 = 0; y^2 = -\frac{1}{2};$$

$$y = \sqrt{\frac{-1}{2}} \text{ No existe solución en el conjunto de los números reales.}$$

26. Ejercicio de sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y comprueba la solución

$$2\sqrt{x+1} = y + 1$$

$$2x - 3y = 1;$$

Solución

1º simplificar

$$2\sqrt{x+1} = y + 1; \text{ elevamos al cuadrado los dos términos } 4(x+1) = (y+1)^2;$$

$$4x + 4 = y^2 + 1 + 2y; y^2 + 2y - 4x = 3;$$

$$2x - 3y = 1;$$

2º Resolver el sistema mediante el método de sustitución

$$2x - 3y = 1; x = \frac{1+3y}{2}; \text{ sustituyo en la otra ecuación } y^2 + 2y - 4x = 3$$

$$y^2 + 2y - 4 \cdot \frac{1+3y}{2} = 3; \frac{2y^2}{2} + \frac{4y}{2} - \frac{4(1+3y)}{2} = \frac{6}{2}; 2y^2 + 4y - 4(1+3y) = 6;$$

$$2y^2 + 4y - 4 - 12y = 6; 2y^2 - 8y - 10 = 0; y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$y^2 - 4y - 5 = 0; y = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2};$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}; y = \frac{10}{2} = 5; y = -\frac{2}{2} = -1$$

$$\text{Para } y = 5 \Rightarrow x = \frac{1+3y}{2} = \frac{1+3 \cdot 5}{2} = \frac{16}{2} = 8;$$

$$\text{Para } y = -1 \Rightarrow x = \frac{1+3y}{2} = \frac{1+3(-1)}{2} = \frac{1-3}{2} = -\frac{2}{2} = -1;$$

Las soluciones son para $y = -1, x = -1$ y Para $y = 5, x = 8$;

Comprobación

$$\text{Para } x = -1 \text{ e } y = -1;$$

$$2\sqrt{x+1} = y + 1; 2\sqrt{(-1)+1} = (-1) + 1; 0 = 0 \text{ Se cumple;}$$

$$2x - 3y = 1; 2(-1) - 3(-1) = 1; -2 + 3 = 1 \text{ Se cumple;}$$

$$\text{Para } x = 8 \text{ e } y = 5;$$

$$2\sqrt{x+1} = y + 1; 2\sqrt{(8)+1} = 5 + 1; 2\sqrt{9} = 5 + 1; 2 \cdot 3 = 6; 6 = 6 \text{ Se cumple;}$$

$$2x - 3y = 1; 2(8) - 3(5) = 1; 16 - 15 = 1; 1 = 1; \text{ Se cumple;}$$

27. Ejercicio de sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y comprueba la solución

$$y^2 - 2y + 1 = x;$$

$$\sqrt{x} + y = 5$$

Solución

1º simplificar

$$y^2 - 2y + 1 = x; y^2 - 2y + 1 = x$$

$$\sqrt{x} + y = 5; \sqrt{x} = 5 - y; x = (5 - y)^2; x = 25 + y^2 - 10y;$$

2º Resolver el sistema mediante el método de igualación

$$y^2 - 2y + 1 = x$$

$$x = 25 + y^2 - 10y$$

$$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y; y^2 - y^2 - 2y + 10y + 1 - 25 = 0;$$

$$8y - 24 = 0; y = \frac{24}{8} = 3; y = 3 \text{ es una solución doble}$$

Sustituimos en una de las ecuaciones y hallamos los valores de x

$$\text{Para } y = 3; y^2 - 2y + 1 = x; 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = x; 9 - 6 + 1 = x; x = 4;$$

Las soluciones son $x = 4$ e $y = 3$;

Comprobación:

$$y^2 - 2y + 1 = x; 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 4; 9 - 6 + 1 = 4; \text{Se cumple;}$$

$$\sqrt{x} + y = 5; \sqrt{4} + 3 = 5; 2 + 3 = 5 \text{ Se cumple;}$$

28. Ejercicio de sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y comprueba la solución

$$x + y = 2;$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{2}{3};$$

Solución

1º simplificar

$$x + y = 2;$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{2}{3}; \frac{3y}{3yx} + \frac{3x}{3yx} = -\frac{2xy}{3yx}; 3y + 3x = -2xy;$$

2º Resolver el sistema mediante el método de sustitución

$$x + y = 2; x = 2 - y;$$

$$3y + 3x = -2xy; 3y + 3(2 - y) = -2(2 - y)y; 3y + 6 - 3y = -4y + 2y^2;$$

$$2y^2 - 3y + 3y - 4y = 6; 2y^2 - 4y - 6 = 0; y^2 - 2y - 3 = 0;$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2};$$

$$y = \frac{2 + 4}{2} = 3; y = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1;$$

Las soluciones son $y = 3$ e $y = -1$;

Sustituimos y hallamos el valor de x

$$\text{Para } y = 3; x + y = 2; x + 3 = 2; x = -1;$$

$$\text{Para } y = -1; x + y = 2; x - 1 = 2; x = 3;$$

Las soluciones son para $y = 3, x = -1$; Para $y = -1, x = 3$;

Comprobación:

$$\text{Para } y = -1; x = 3$$

$$x + y = 2; 3 - 1 = 2. \text{ Se cumple;}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{2}{3}; \frac{1}{3} + \frac{1}{-1} = -\frac{2}{3}; \frac{1}{3} - \frac{3}{3} = -\frac{2}{3}; \text{ se cumple;}$$

$$\text{Para } y = 3; x = -1$$

$$x + y = 2; -1 + 3 = 2. \text{ Se cumple;}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{2}{3}; \frac{1}{-1} + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}; -\frac{3}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}; \text{ se cumple}$$

29. Ejercicio de sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y comprueba la solución

$$x + 2y = 3;$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}$$

Solución

1º simplificar

$$x + 2y = 3; x = 3 - 2y;$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}; \frac{20y}{20xy} + \frac{20x}{20xy} = \frac{xy}{20xy}; 20y + 20x = xy$$

2º Resolver el sistema mediante el método de sustitución

$$x = 3 - 2y;$$

$$20y + 20x = xy; 20y + 20(3 - 2y) = (3 - 2y)y; 20y + 60 - 40y = 3y - 2y^2;$$

$$2y^2 + 20y - 40y - 3y + 60 = 0; 2y^2 - 23y + 60 = 0;$$

$$y = \frac{23 \pm \sqrt{(-23)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 60}}{2 \cdot 2} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 480}}{4} = \frac{23 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{23 \pm 7}{4};$$

$$y = \frac{23 + 7}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}; y = \frac{23 - 7}{4} = \frac{16}{4} = 4; \text{ Las soluciones son } y = 4 \text{ e } y = \frac{15}{2};$$

Sustituimos y hallamos el valor de x

$$\text{Para } y = \frac{15}{2}; x = 3 - 2y; x = 3 - 2 \cdot \frac{15}{2}; x = 3 - 15; x = -12$$

$$\text{Para } y = 4; x = 3 - 2y; x = 3 - 2 \cdot 4; x = 3 - 8; x = -5;$$

$$\text{Las soluciones son para } y = \frac{15}{2}, x = -12; \text{ para } y = 4, x = -5;$$

Comprobación:

$$\text{Para } y = \frac{15}{2}, x = -12;$$

$$x + 2y = 3; -12 + 2 \left(\frac{15}{2} \right) = 3; -12 + 15 = 3 \text{ Se cumple}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}; \frac{1}{-12} + \frac{1}{\frac{15}{2}} = \frac{1}{20}; -\frac{1}{12} + \frac{2}{15} = \frac{1}{20};$$

$$-\frac{15 \cdot 20}{12 \cdot 15 \cdot 20} + \frac{12 \cdot 20 \cdot 2}{12 \cdot 15 \cdot 20} = -\frac{300}{3600} + \frac{480}{3600} = \frac{180}{3600} = \frac{1}{20} \text{ Se cumple}$$

$$\text{Para } y = 4, x = -5;$$

$$x + 2y = 3; -5 + 2 * 4 = 3; -5 + 8 = 3 \text{ Se cumple}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}; \frac{1}{-5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{20}; -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{20}; -\frac{4}{20} + \frac{5}{20} = \frac{1}{20} \text{ Se cumple}$$

30. Ejercicio de sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y comprueba la solución

$$x^2 - y^2 = 4;$$

$$x - y = 2;$$

Solución Aplicamos método de sustitución

$$x - y = 2; \quad x = 2 + y;$$

$$(2 + y)^2 - y^2 = 4; 4 + y^2 + 2 * 2 * y - y^2 = 4; y^2 - y^2 + 4y + 4 = 4; \\ +4y = 0; y = 0;$$

$$\text{Sustituimos } y = 0 \text{ en la ecuación } x = 2 + y; x = 2 + 0; \quad x = 2;$$

Las soluciones son $x = 2$ e $y = 0$;

31. Ejercicio de sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y comprueba la solución

$$x^2 + y^2 = 10;$$

$$xy = 3;$$

Solución

Aplicamos método de sustitución $xy = 3; x = 3/y$;

$$\text{Sustituimos en } x^2 + y^2 = 10; \left(\frac{3}{y}\right)^2 + y^2 = 10; \frac{9}{y^2} + y^2 = 10;$$

$$\frac{9}{y^2} + \frac{y^4}{y^2} = \frac{10y^2}{y^2}; 9 + y^4 = 10y^2; y^4 - 10y^2 + 9 = 0;$$

Hacemos el cambio de variables $y^2 = t$; y sustituimos $t^2 - 10t + 9 = 0$;

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 * 1 * 9}}{2 * 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2};$$

$$t = \frac{10 + 8}{2} = 9; t = \frac{10 - 8}{2} = 1; \text{Soluciones } t = 9 \text{ y } t = 1;$$

$$y^2 = t; y = \sqrt{t}; y = \sqrt{9} \quad y = \pm 3; \quad y = \sqrt{1}; y = \sqrt{1} \quad y = \pm 1;$$

Sustituimos $x = \frac{3}{y}$ y hallamos el valor de x

Las soluciones son:

$$\text{Para } y = 3; x = \frac{3}{3}; x = 1;$$

$$\text{Para } y = -3; x = \frac{3}{-3}; x = -1;$$

$$\text{Para } y = 1; x = \frac{3}{1}; x = 3;$$

$$\text{Para } y = -1; x = \frac{3}{-1}; x = -3;$$

32. Ejercicio de sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y comprueba la solución

$$2y - \frac{3x}{4} + \frac{5}{2} = 0;$$

$$x + \frac{y}{2} + 1 = 0;$$

Solución

1º Simplificar

$$\frac{8y}{4} - \frac{3x}{4} + \frac{10}{4} = 0; \quad 8y - 3x + 10 = 0$$

$$\frac{2x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{2}{2} = 0; \quad 2x + y + 2 = 0$$

2º Aplicar método de reducción

$$8y - 3x + 10 = 0; \text{ multiplico por } 2; \quad 16y - 6x + 20 = 0;$$

$$y + 2x + 2 = 0; \text{ multiplico por } 3; \quad \underline{3y + 6x + 6 = 0}$$

$$\text{Sumar} \quad 19y + 0 + 26 = 0; \quad y = -\frac{26}{19};$$

$$\text{Sustituimos y hallamos el valor de } x; \quad 2x + y + 2 = 0; \quad 2x - \frac{26}{19} + 2 = 0$$

$$38x - 26 + 38 = 0; \quad 38x = -38 + 26; \quad 38x = -12; \quad x = -\frac{12}{38}; \quad x = -\frac{6}{19};$$

Las soluciones son $y = -\frac{26}{19}$ e $y = -\frac{6}{19}$;

33. Ejercicio de sistemas de ecuaciones

Si el lado de un cuadrado aumenta 5cm su área se multiplica por 4 ¿Cuánto mide el lado inicialmente?

Solución

Área del cuadrado inicial $x * x$;

Área del cuadrado aumentado $(x + 5) * (x + 5)$

Se ha de cumplir $4x^2 = (x + 5)^2$

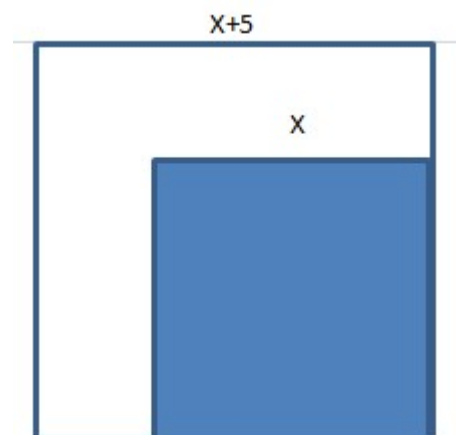
$$4x^2 = x^2 + 25 + 10x; \quad 4x^2 - x^2 - 10x - 25 = 0$$

$$3x^2 - 10x - 25 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 * 3 * (-25)}}{2 * 3} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 300}}{6}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{400}}{6} = \frac{10 \pm 20}{6}; \text{ tomamos el valor positivo}$$

$$x = \frac{10 + 20}{6} = \frac{30}{6} = 5 \text{ cm};$$

**34. Ejercicio de sistemas de ecuaciones**

Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 28cm y la hipotenusa es 14cm menor que la suma de los catetos. ¿Cuánto mide el cateto?

Solución

$$h = (x + 28) - 14; h = x + 14;$$

Ha de cumplirse el teorema de pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow x^2 + 28^2 = (x + 14)^2;$$

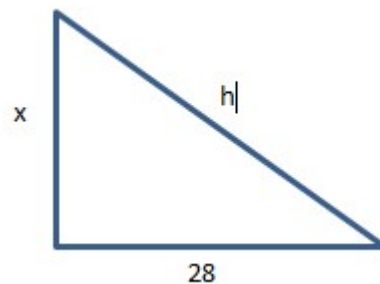
$$x^2 + 28^2 = x^2 + 28x + 196$$

$$x^2 + 784 = x^2 + 28x + 196$$

$$x^2 - x^2 + 784 - 28x - 196 = 0$$

$$-28x + 588 = 0; 28x = 588; x = \frac{588}{28} = 21\text{cm};$$

La solución es $x = 21$ y $h = 35\text{cm}$



35. Ejercicio de sistemas de ecuaciones

El perímetro de un triángulo rectángulo es 36cm. Un cateto mide 3cm menos que el otro.

¿Hallar los lados del triángulo?

Solución

$$\text{Perímetro} = x + (x - 3) + h = 36;$$

$$h = 36 + 3 - 2x; h = 39 - 2x;$$

Se ha de cumplir pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$

$$x^2 + (x - 3)^2 = (39 - 2x)^2;$$

$$x^2 + x^2 + 9 - 6x = 1521 + 4x^2 - 156x;$$

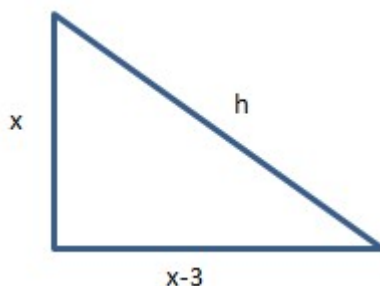
$$4x^2 - 2x^2 + 6x - 156x + 1521 - 9 = 0; 2x^2 - 150x + 1512; x^2 - 75x + 756 = 0$$

$$x = \frac{75 \pm \sqrt{(-75)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (756)}}{2 \cdot 1} = \frac{75 \pm \sqrt{5625 - 3024}}{2} = \frac{75 \pm \sqrt{2601}}{2} = \frac{75 \pm 51}{2};$$

$$x = \frac{75 + 51}{2} = \frac{126}{2} = 63; \text{ no es válido pues es mayor que el perímetro}$$

$$x = \frac{75 - 51}{2} = \frac{24}{2} = 12;$$

La solución es $x = 12\text{cm}$ y $h = 15$;



36. Ejercicio de sistemas de ecuaciones

Un grupo de amigos alquila una furgoneta por 490 € para hacer un viaje. A última hora se apuntan dos más, con lo que se devuelven 28 € a cada uno de los que se apuntaron inicialmente. ¿Cuántos amigos fueron de excursión y cuánto pago cada uno?

Solución

x = número de personas iniciales

y = precio que pago inicialmente cada uno

Numero de personas inicialmente $x * y = 490$; $x = \frac{490}{y}$;

Numero de personas al final $(x + 2) * (y - 28) = 490$;

Aplicamos el método de sustitución

$$\left(\frac{490}{y} + 2\right) * (y - 28) = 490; \left(\frac{490 + 2y}{y}\right) (y - 28) = 490; (490 + 2y)(y - 28) = 490y$$

$$490y - 13720 + 2y^2 - 56y = 490y; 2y^2 - 56y - 13720 = 0;$$

$$y^2 - 28y - 6860 = 0; y = \frac{28 \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 * 1 * (-6860)}}{2 * 1} = \frac{28 \pm \sqrt{786 + 27440}}{2}$$

$$y = \frac{28 \pm \sqrt{28224}}{2} = \frac{28 \pm 168}{2}; \text{ Como el numero ha de ser positivo}$$

$$y = \frac{28 + 168}{2} = \frac{196}{2}; y = 98;$$

Sustituimos y en la ecuación $x = \frac{490}{y}$ y hallamos x; $x = \frac{490}{98} = 5$; $x = 5$;

El precio inicial por persona fue $y = 98$; el precio final $98 - 28 = 70$ €

Número de personas que iban inicialmente 5 al final 7;

37. Ejercicio de sistemas de ecuaciones

Una caja contiene bolas negras y blancas. Si añadimos una bola blanca, estas representan entonces el 25 % del contenido de la caja. Si se quita una bola blanca las bolas blancas que quedan representan el 20% del contenido de la caja. ¿Cuántas bolas negras y blancas hay en la caja?

Solución

x = Numero de bolas blancas;

y = Numero de bolas negras;

$x + y$ = Numero de bolas en la caja;

$$(x + 1) = 0,25(x + y); x + 1 = 0,25x + 0,25y; x - 0,25x = 0,25y - 1;$$

$$0,75x + 1 = 0,25y \Rightarrow 75x + 100 = 25y;$$

$$(x - 1) = 0,20(x + y); x - 1 = 0,20x + 0,20y; x - 0,20x - 1 = 0,20y;$$

$$0,80x - 1 = 0,20y \Rightarrow 80x - 100 = 20y;$$

Aplicamos metodo de igualación $75x + 100 = 25y$; $y = \frac{75x + 100}{25}$;

$$80x - 100 = 20y; y = \frac{80x - 100}{20};$$

$$\frac{75x + 100}{25} = \frac{80x - 100}{20}; 20(75x + 100) = 25(80x - 100);$$

$$1500x + 2000 = 2000x - 2500; 2000x - 1500x = 2000 + 2500;$$

$$500x = 4500; x = \frac{4500}{500}; x = 9;$$

$$\text{Sustituyo en la ecuación } y = \frac{75x + 100}{25}; y = \frac{75 * 9 + 100}{25} = \frac{675 + 100}{25} = \frac{775}{25}$$

$$y = 31;$$

Solución: Bolas blancas 9, bolas negras 31;

38. Ejercicio de sistemas de ecuaciones

Hallar las dimensiones de un rectangulo cuya diagonal mide 13m y su area 60m².

Solución

$$\text{Area } x * y = 60; x = \frac{60}{y};$$

$$\text{Diagonal } x^2 + y^2 = d^2;$$

$$\left(\frac{60}{y}\right)^2 + y^2 = 13^2;$$

$$\frac{3600}{y^2} + y^2 = 169; 3600 + y^4 = 169y^2;$$

$$y^4 - 169y^2 + 3600 = 0;$$

Hacemos un cambio de variable $t = y^2$

$$t^2 - 169t + 3600 = 0; t = \frac{169 \pm \sqrt{(-169)^2 - 4 * 1 * (3600)}}{2 * 1};$$

$$t = \frac{169 \pm \sqrt{28561 - 14400}}{2} = \frac{169 \pm \sqrt{14161}}{2} = \frac{169 \pm 119}{2}$$

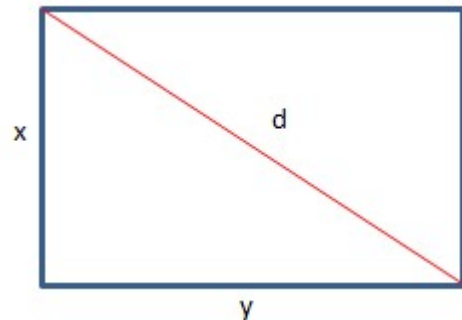
$$t = \frac{169 + 119}{2} = \frac{288}{2} = 144; t = \frac{169 - 119}{2} = \frac{50}{2} = 25;$$

$$y = \sqrt{t}; y = \sqrt{144}; y = 12; y = \sqrt{25} = 5; y = 5$$

Sustituimos en una ecuación $x = \frac{60}{y}$ y hallamos el valor de x ; $x = \frac{60}{12} = 5$; $x = 5$;

$$x = \frac{60}{y}; x = \frac{60}{5} = 12; x = 12$$

La solución de los lados del rectangulo son 12cm y 5 cm;



39. Ejercicio de sistemas de ecuaciones

La suma de las dos cifras de un número es 8. Si al número se le añade 18 unidades, el número resultante está formado por las mismas cifras en orden inverso. ¿Cuál es el numero?.

Solución

El numero sera xy ;

$$x + y = 8;$$

Si al número le añadimos 18 unidades quedaría $(x + 1) * 10 + (y + 8)$;

El número resultante sería $(x + 1) * 10 + (y + 8) = 10y + x$;

Aplicamos metodo sustitución $x + y = 8$; $x = 8 - y$;

Sustituimos $(x + 1) * 10 + (y + 8) = 10y + x$; $(8 - y + 1)10 + y + 8 = 10y + (8 - y)$;

$$80 - 10y + 10 + y + 8 = 10y + 8 - y;$$

$$10y + 10y - y - y = 80 + 10 + 8 - 8; 18y = 90;$$

$$y = \frac{90}{18} = 5; y = 5 \text{ sustituimos en } x = 8 - y; x = 8 - 5 = 3;$$

La solución es el número $xy = 35$;

5 Sistemas de inecuaciones

Un sistema de inecuaciones es un conjunto de inecuaciones del que se quiere encontrar una solución común a todas ellas.

Para resolver un sistema de inecuaciones se resuelve cada inecuación de forma separada y se toman las soluciones comunes a todas las ella

40. Ejercicio de sistemas de inecuaciones

Resolver el siguiente sistema

$$x - 3 \leq 1;$$

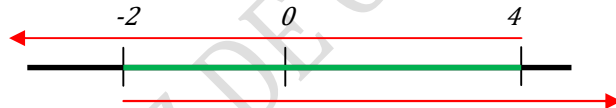
$$x + 4 > 2;$$

Solución

$$x - 3 \leq 1; x \leq 1 + 3; x \leq 4;$$

$$x + 4 > 2; x > 2 - 4; x > -2;$$

La solución es $(-2, 4]$



41. Ejercicio de sistemas de inecuaciones

Resolver el siguiente sistema

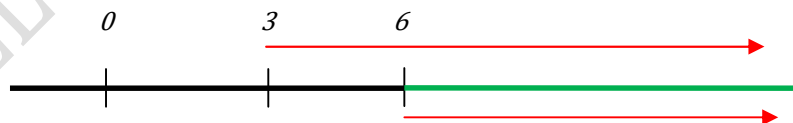
$$x + 8 \leq 3x + 2;$$

$$\frac{x + 2}{2} \leq x - 2;$$

Solución

$$x + 8 \leq 3x + 2; x - 3x \leq 2 - 8; -2x \leq -6; -x \leq -3; x \geq 3;$$

$$\frac{x + 2}{2} \leq x - 2; x + 2 \leq 2x - 4; x - 2x \leq -4 - 2; -x \leq -6; x \geq 6$$



La solución es $[6, +\infty)$;

42. Ejercicio de sistemas de inecuaciones

Resolver el siguiente sistema

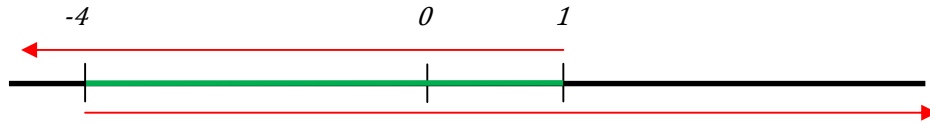
$$5x - 3 \leq x + 1;$$

$$2x + 6 \geq x + 2;$$

Solución

$$5x - 3 \leq x + 1; 5x - x \leq 3 + 1; 4x \leq 4; x \leq 1;$$

$$2x + 6 \geq x + 2; 2x - x \geq 2 - 6; x \geq -4;$$



La solución es $[-4, +1]$

43. Ejercicio de sistemas de inecuaciones

Resolver el siguiente sistema

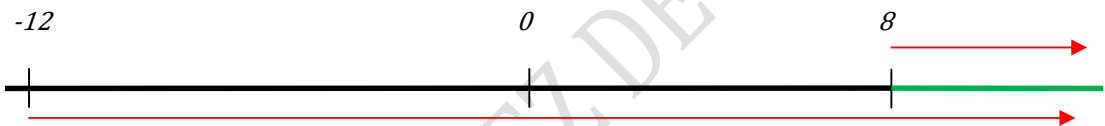
$$\frac{2x+5}{3} < x-1;$$

$$\frac{x}{3} - 1 < \frac{2x-1}{5};$$

Solución

$$\frac{2x+5}{3} < x-1; 2x+5 < 3x-3; 2x-3x < -3-5; -x < -8; x > 8$$

$$\frac{x}{3} - 1 < \frac{2x-1}{5}; 5x-15 < 6x-3; 5x-6x < -3+15; -x < 12; x > -12$$



La solución es $(8, +\infty)$

44. Ejercicio de sistemas de inecuaciones

Resolver el siguiente sistema

$$5x-10 \leq 0;$$

$$2x+4 > 0;$$

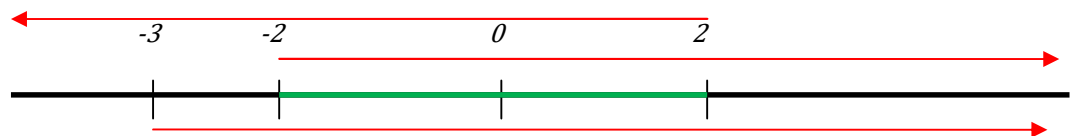
$$\frac{x+9}{2} \geq 3;$$

Solución

$$5x-10 \leq 0; 5x \leq 10; x \leq 2;$$

$$2x+4 > 0; 2x > -4; x > -2;$$

$$\frac{x+9}{2} \geq 3; x+9 \geq 6; x \geq -3;$$



La solución es $[-2, 2]$

45. Ejercicio de sistemas de inecuaciones

El producto de un número entero por otro, dos unidades mayor, es menor que 8. ¿Cuál puede ser el número?

Solución

El numero es x;

$$x(x+2) < 8; x^2 + 2x - 8 < 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 * 1 * (-8)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 6}{2} = 2; x = \frac{-2 - 6}{2} = -4; x = 2 \text{ y } x = -4$$

$$x^2 + 2x - 8 < 0; (x - 2)(x + 4) < 0;$$

	I	II	III
	-4		2
x-2	-	-	+
x+4	-	+	+
$x^2 + 2x - 8$	+	-	+

Como el producto de los factores ha de ser < 0 tomaremos los valores negativos;

La solución serán los números enteros de este intervalo $(-4, 2)$; $-3, -2, -1, 0, 1$;

46. Ejercicio de sistemas de inecuaciones

Si al cuadrado de un número le restamos su triple obtenemos un número mayor de 4.

¿Cual puede ser el número?.

Solución

El numero es x;

$$x^2 - 3x > 4; x^2 - 3x - 4 > 0;$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 * 1 * (-4)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{3 + 5}{2} = 4; x = \frac{3 - 5}{2} = -1; x = 4 \text{ y } x = -1$$

$$x^2 - 3x - 4 > 0; (x - 4)(x + 1) > 0;$$

	I	II	III
	-1		4
x - 4	-	-	+
x+1	-	+	+
$x^2 - 3x - 4$	+	-	+

Como el producto de los factores ha de ser > 0 tomaremos los valores positivos;

La solución serán los números enteros de este intervalo $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$

47. Ejercicio de sistemas de inecuaciones

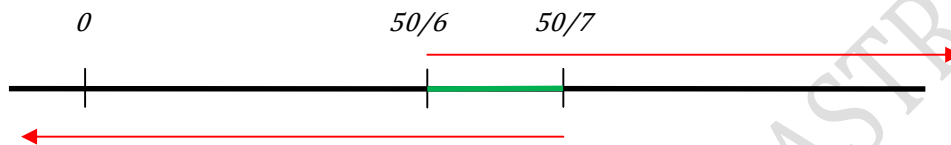
Un grupo de amigos han reunido 50€ para ir a una discoteca. Si la entrada cuesta 6 € les sobra dinero pero si cuesta 7€ les falta dinero. ¿Cuántos amigos son?

Solución

El numero de amigos es x;

$$6x > 50; x > \frac{50}{6}; \frac{50}{6} = 7,1428$$

$$7x < 50; x < \frac{50}{7}; \frac{50}{7} = 8,333;$$



La solución serán los números enteros de este intervalo $\left(\frac{50}{6}, \frac{50}{7}\right)$

El numero de amigos será 8;

48. Ejercicio de sistemas de inecuaciones

La suma de los cuadrados de tres números enteros consecutivos está comprendida entre 180 y 200. ¿Cuales son estos números?

Solución

Los numeros son x, (x + 1) y (x + 2)

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 \geq 180; x^2 + x^2 + 1 + 2x + x^2 + 4 + 4x \geq 180;$$

$$3x^2 + 6x + 5 \geq 180; 3x^2 + 6x - 175 \geq 0;$$

$$3x^2 + 6x + 5 \leq 200; 3x^2 + 6x - 195 \leq 0;$$

$$3x^2 + 6x - 175 \geq 0;$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4 * 3 * (-175)}}{2 * 3} = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4 * 3 * (-175)}}{6}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 2100}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{2136}}{6}; x = \frac{-6 + \sqrt{2136}}{6} = 6,7028;$$

$$x = \frac{-6 - \sqrt{2136}}{6} = -8,7028;$$

	I	II	III
	-8,7028 6,70284		
$x - 6,7028$	-	-	+
$x + 8,7028$	-	+	+
$3x^2 + 6x - 175$	+	-	+

La solución serán los números enteros del intervalo $(-\infty, -8,7028] \cup [(6,70284, +\infty)$

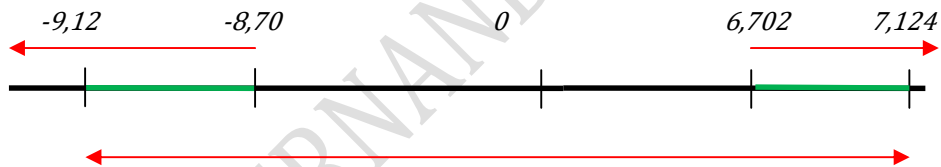
$$3x^2 + 6x - 195 \leq 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-195)}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 2340}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{2376}}{6} = \frac{-6 \pm 48,744}{6};$$

$$x = \frac{-6 + 48,744}{6} = 7,1240; x = \frac{-6 - 48,744}{6} = -9,1240$$

	I	II	III
	-9,1240 7,1240		
$x - 7,1240$	-	-	+
$x + 9,1240$	-	+	+
$3x^2 + 6x - 195$	+	-	+

La solución serán los números enteros del intervalo $[-9,1240, 7,1240]$;



Los números enteros que cumplen las dos condiciones son $-9, -8, -7$ y $7, 8$ y 9 ;

5.1 Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas

Ejemplo

$|x + 2| < 2x - y$ al estar en valor absoluto el primer término, tiene que cumplirse

$$x + 2 < 2x - y; -x - 2 < 2x - y$$

$-x - 2 < 2x - y$; Si multiplico la desigualdad por -1 me queda $x + 2 > -2x + y$;

Por lo que las dos ecuaciones del sistema serán.

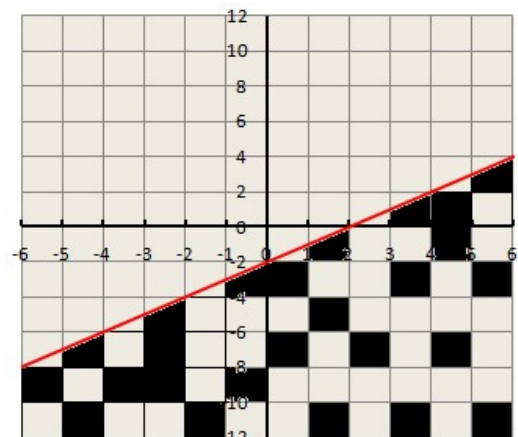
$$x + 2 < 2x - y; y < 2x - x - 2; y < x - 2;$$

$$x + 2 > -2x + y; y < x + 2 + 2x; y < 3x + 2;$$

El sistema de ecuaciones se resuelve hallando los valores del plano que cumplen las dos inecuaciones.

Trazamos la recta $y = x - 2$ para ver

que área es la válida, (la que está por encima o la que está por debajo) sustituyo x e y por un valor que esté por encima o por debajo de la recta. Como la



recta no pasa por 00 tomo como punto por encima el (0,0).

$y < x - 2$ para el punto (0,0) $\Rightarrow 0 < 0 - 2$; como

0 no es menor que -2 no se cumple

Por lo que el área que lo cumple es la que está por debajo de la recta.

Trazamos la recta $y < 3x + 2$ y comprobamos que parte cumple la inecuación

Como la recta no pasa por (0,0). Tomo ese punto.

Sustituyo el punto (0,0) $y < 3x + 2 \Rightarrow 0 < 0 + 2$

Como 0 es menor que 2 el área que cumple la inecuación es la que contiene el (0,0)

Los puntos que cumplen las dos inecuaciones estarán en la parte del plano comprendida por las dos rectas

Prueba :

Tomamos puntos que estén en esa área

$(2, -4) \Rightarrow y < x - 2$; $-4 < 2 - 2$; $-4 < 0$ se cumple

$(2, -4) \Rightarrow y < 3x + 2$; $-4 < 6 + 2$; $-4 < 8$ se cumple

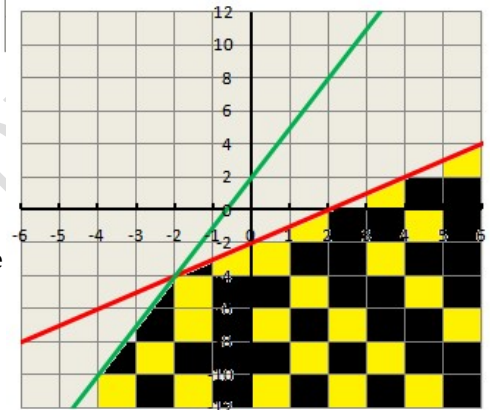
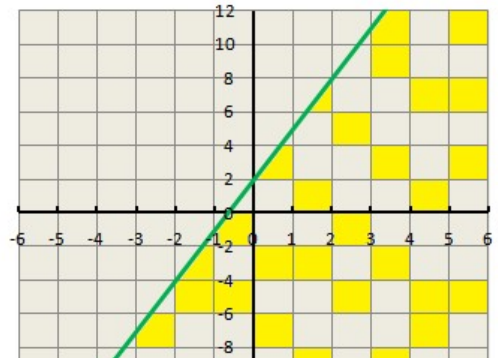
$(-2, -8) \Rightarrow y < x - 2$; $-8 < -2 - 2$; $-8 < -4$ se cumple

$(-2, -8) \Rightarrow y < 3x + 2$; $-8 < -6 + 2$; $-8 < 4$ se cumple;

Tomamos puntos que estén fuera de esa área

$(-1, 2) \Rightarrow y < x - 2$; $2 < -1 - 2$; $2 < -3$ no se cumple

$(-1, 2) \Rightarrow y < 3x + 2$; $2 < -3 + 2$; $2 < -1$ se cumple



49. Ejercicio de sistemas de inecuaciones con dos incógnitas

Hallar el número de dos cifras tal que, el doble de las cifras de las decenas restado a las cifras de las unidades es mayor que 5 y la diferencia entre 14 veces la cifra de las unidades y la cifra de las decenas es menor que 112. ¿Cuál es el número?

Solución

El número es xy ;

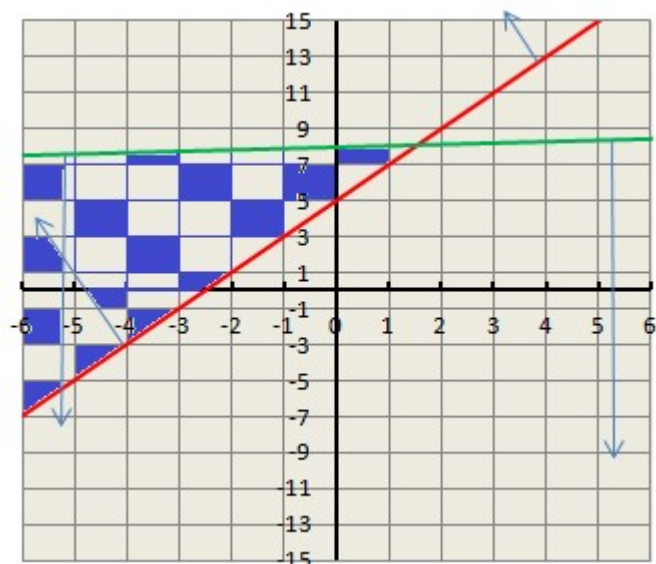
$y - 2 * x > 5$; $y > 5 + 2x$;

$14y - x < 112$; $14y < 112 + x$; y

$$< \frac{112 + x}{14};$$

Representamos las dos ecuaciones y definimos la parte del espacio que cumple las dos condiciones.

$$y = 5 + 2x$$



x	y
0	5
-2	1

$$y = (112 + x)/14$$

x	y
0	8
7	8,5
-2	1

Tomo un punto por debajo (0,0)

$$y < \frac{112 + x}{14}; 0 < \frac{112 + 0}{14}; 0 < \frac{112}{14} \text{ Se cumple lo que está por abajo}$$

$$y > 5 + 2x; 0 > 5 + 2 \cdot 0; 0 > 5 \text{ No se cumple. Se cumplirá lo que este encima}$$

Prueba, tomo números que estén en el área marcada

$$(-2,5) y < \frac{112 + x}{14}; 5 < \frac{112 + (-2)}{14}; -5 < \frac{110}{14} \text{ Se cumple}$$

$$(-2,5) y > 5 + 2x; 5 > 5 + 2 \cdot (-2); 5 > 5 - 4; 5 > 1 \text{ Se cumple}$$

$$(0,7) y < \frac{112 + x}{14}; 7 < \frac{112 + 0}{14}; 7 < \frac{112}{14} \text{ Se cumple}$$

$$(0,7) y > 5 + 2x; 7 > 5 + 2 \cdot 0; 7 > 5 \text{ Se cumple}$$

50. Ejercicio de sistemas de inecuaciones

La edad de un padre es menor que el triple de la edad de su hijo, y hace 5 años, la edad del padre era mayor que el doble de la de su hijo. ¿Entre qué años está comprendida la edad del hijo, sabiendo que la suma de edades es 40 años?

Solución

La edad del padre es x y la del hijo y ;

Se ha de cumplir $x < 3y$;

Hace 5 años $(x - 5) > 2(y - 5)$

Despejamos las inecuaciones.

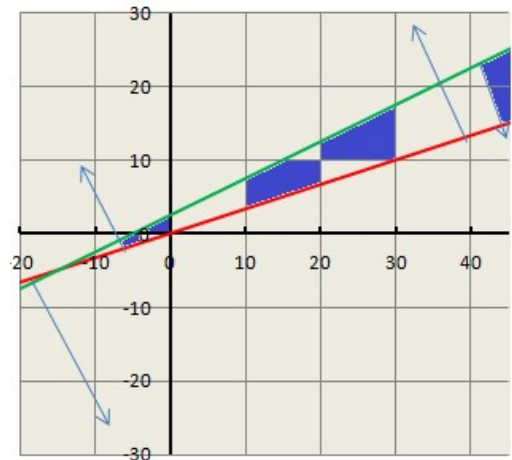
$$y > \frac{x}{3};$$

$$(x - 5) > 2(y - 5); x - 5 > 2y - 10; 2y < x - 5 + 10;$$

$$y < \frac{x + 5}{2};$$

Tomo un punto por debajo ej. (10,0)

$$y < \frac{x + 5}{2}; 0 < \frac{10 + 5}{2}; 0 < \frac{15}{2}; \text{ Se cumple lo que está por abajo}$$



$$y > \frac{x}{3}; 0 > \frac{10}{3} \text{ No se cumple. Se cumplirá lo que este encima}$$

Prueba, tomo números que estén en el área marcada (20,10)

$$y < \frac{x+5}{2}; 10 < \frac{20+5}{2}; 10 < \frac{25}{2}; \text{Se Cumple;}$$

$$y > \frac{x}{3}; 10 > \frac{20}{3}; \text{Se Cumple;}$$

51. Ejercicio de sistemas de inecuaciones

Hallar el conjunto de pares de números cuyo producto sea positivo y su suma menor que 3.

Solución

Numero 1 = x;

Numero 2 = y;

Se ha de cumplir $x * y > 0$;

Para que esto se cumpla los valores han de estar en el primer o tercer cuadrante

$$+ * + > 0; - * + < 0; - * - > 0; - * + < 0$$

$$x + y < 3; \text{ trazamos la recta } y = 3 - x;$$

Tomo un punto bajo la recta (0,0); $0 + 0 < 3$ se cumple

Prueba:

Tomamos un punto del primer cuadrante sobre la recta (1,5)

$$x * y > 0; 1 * 5 > 0 \text{ se cumple;}$$

$$x + y < 3; 1 + 5 < 3 \text{ no se cumple}$$

Tomamos un punto del primer cuadrante bajo la recta (1,1)

$$x * y > 0; 1 * 1 > 0 \text{ se cumple;}$$

$$x + y < 3; 1 + 1 < 3 \text{ se cumple}$$

Tomamos un punto del tercer cuadrante (-1,-1)

$$x * y > 0; -1 * -1 > 0 \text{ se cumple;}$$

$$x + y < 3; -1 + (-1) < 3 \text{ se cumple}$$

