

SEMEJANZAS

Y

APLICACIONES

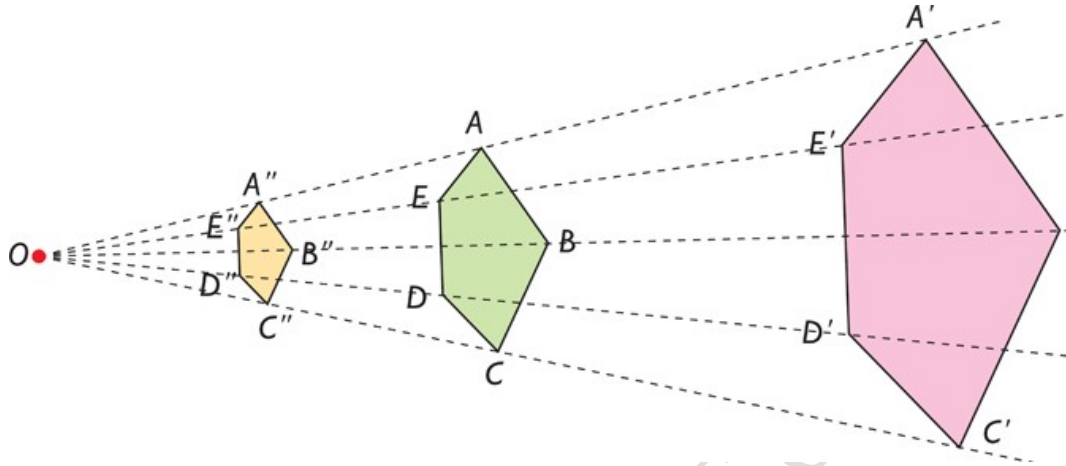
INDICE

Contenido

1	SEMEJANZA:3	
2	TEOREMA DE TALES	3
3	SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.....	5
3.1	CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.....	5
3.2	TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES	6
3.3	TEOREMA DEL CATETO.....	10
3.4	TEOREMA DE LA ALTURA.....	10
4	SEMEJANZA DE ÁREAS Y VOLÚMENES	18
4.1	SEMEJANZAS (PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS).....	18
4.2	SEMEJANZAS (ÁREA DE FIGURAS PLANAS)	18
4.3	SEMEJANZAS (VOLÚMENES DE FIGURAS).....	21
4.4	ESCALAS	23

1 Semejanza:

Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma y sus dimensiones son proporcionales.



La razón de semejanza es el cociente entre la longitud de uno de los lados de la figura semejante respecto al mismo lado de la figura original.

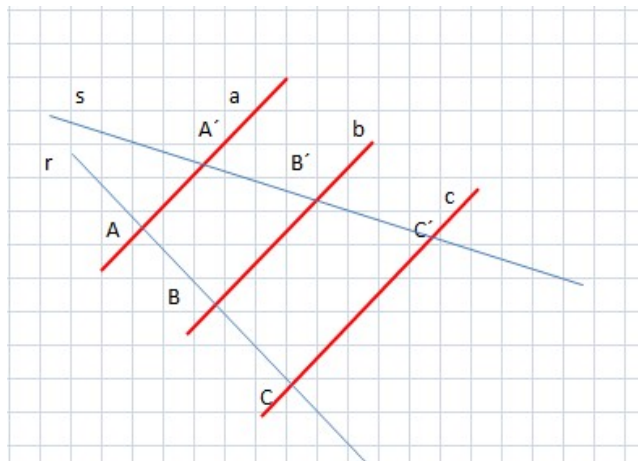
$$r = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AE}{A'E'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'}$$

2 Teorema de Tales

Varias rectas paralelas cortadas por dos rectas secantes, los segmentos que delimitan son proporcionales

Las rectas paralelas **a, b, c**, cortadas por las secantes **r** y **s** determinan segmentos proporcionales

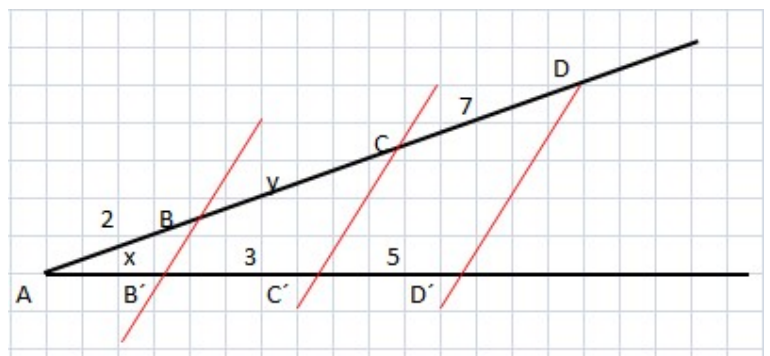
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$



1. Ejercicios de semejanzas

Halla las longitudes desconocidas de los segmentos.

Los valores de los segmentos se expresan en cm



Solución

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{CD}{C'D'}; \frac{2}{x} = \frac{7}{5}; x = \frac{2 * 5}{7} = \frac{10}{7} = 1,43 \text{ cm}; x = 1,43$$

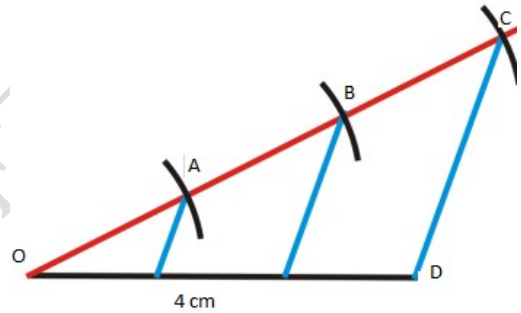
$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}; \frac{y}{3} = \frac{7}{5}; y = \frac{7 * 3}{5} = \frac{21}{5} = 4,2 \text{ cm } y = 4,2 \text{ cm}$$

2. Ejercicios de semejanzas

Utiliza el teorema de Tales para dividir un segmento de 4 cm en tres partes iguales

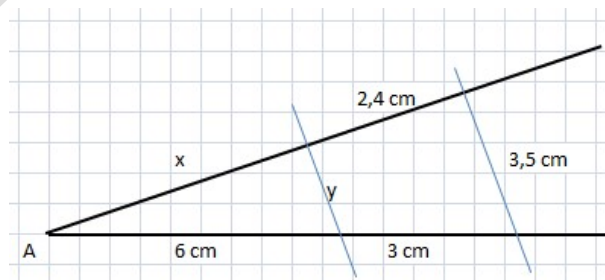
Solución

Desde O trazamos una recta, la dividimos en tres partes iguales con la ayuda de un compás (A, B, C). Unimos C con D y trazamos paralelas a CD por los puntos A y B. Los puntos de corte del segmento OD (de 4 cm) son las tres partes iguales del segmento



3. Ejercicios de semejanzas

Hallar los valores que faltan



Solución

Usaremos el teorema de tales

$$\frac{x}{6} = \frac{2,4}{3}; x = \frac{6 * 2,4}{3} = \frac{14,4}{3} = 4,8 \text{ cm}; x = 4,8 \text{ cm}$$

$$\frac{6}{4,8} = \frac{3,5}{y}; y = \frac{3,5 * 4,8}{6} = \frac{17}{6} = 3; y = 3 \text{ cm}$$

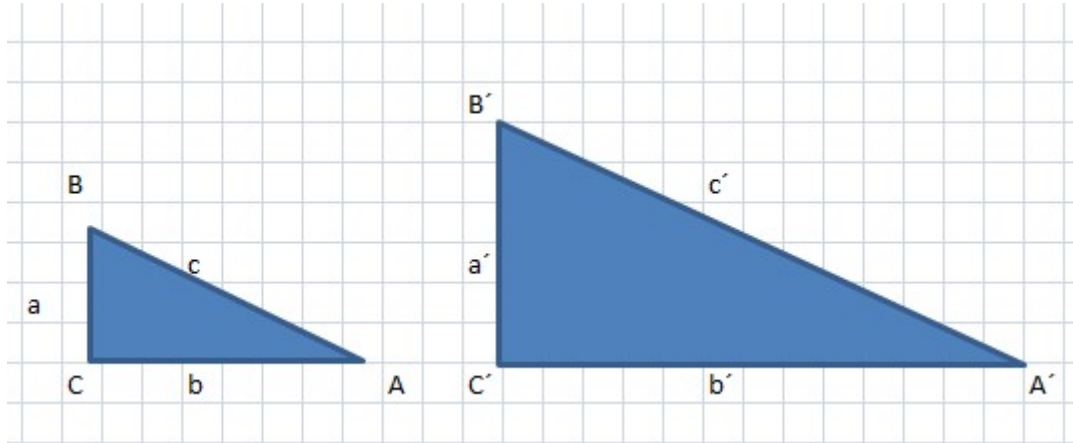
3 Semejanza de Triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando:

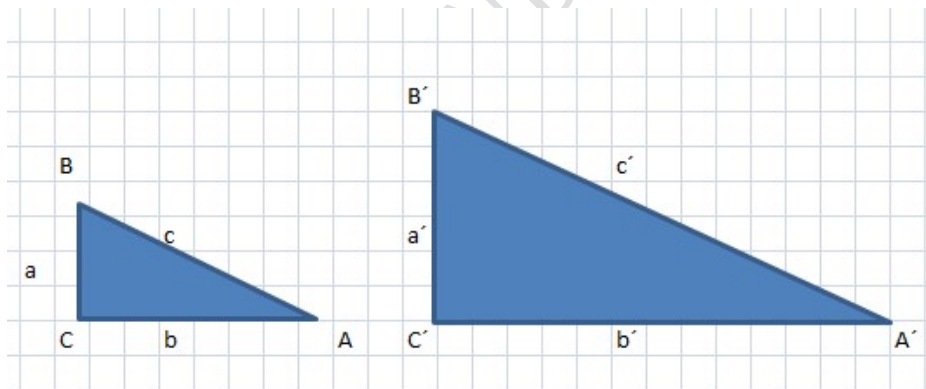
Sus lados son proporcionales

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Sus ángulos son iguales $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$; $\hat{C} = \hat{C}'$



3.1 Criterios de semejanza de triángulos



CRITERIO 1

Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales

$$\hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}';$$

CRITERIO 2

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

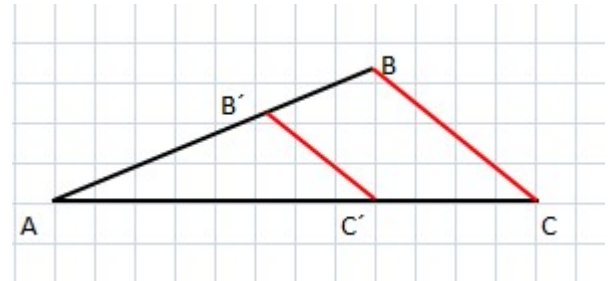
CRITERIO 3

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y sus lados contiguos son proporcionales

$$\hat{A} = \hat{A'} \text{ y } \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};$$

3.2 Triángulos en posición de Tales

Dos triángulos están en posición de tales cuando tienen un ángulo común $\hat{A}$ y lados opuestos a ese ángulo son paralelos $B'C'$ y BC



4. Ejercicios de semejanza de triángulos

Comprobar la semejanza de estos dos triángulos:

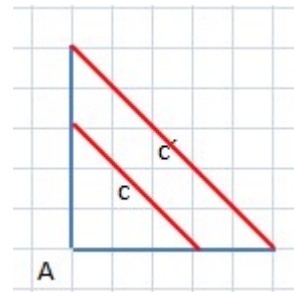
- a) Sus lados miden 2,4 y 6 cm y el otro 3, 6 y 9 cm respectivamente
- b) Son triángulos rectángulos isósceles

Solución

$$a) \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$$

Si son semejantes pues sus lados son proporcionales $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$; $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$

- a) Si son rectángulos e isósceles son proporcionales pues tienen un ángulo común el recto, los lados consecutivos son proporcionales y los lados opuestos tienen que ser paralelos



5. Ejercicios de semejanza de triángulos

Comprobar si son semejantes los siguientes triángulos rectángulos:

La hipotenusa de uno mide 10cm y un cateto 4cm . La hipotenusa del otro mide 20cm y un cateto 8cm.

Solución

Según el teorema de pitágoras

$$4^2 + b^2 = 10^2; b = \sqrt{100 - 16} = 9,17 \text{ cm}$$

$$8^2 + (b')^2 = 20^2; b' = \sqrt{400 - 64} = 18,33 \text{ cm}$$

Dos triángulos rectángulos son semejantes si sus catetos son proporcionales

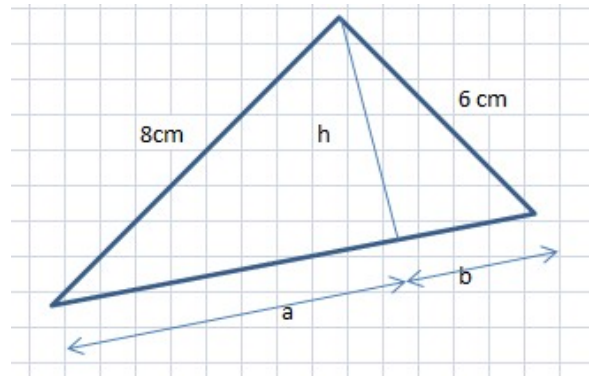
Tercer criterio: dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual (el recto) y sus lados contiguos (catetos) proporcionales

$$\frac{4}{8} = \frac{9,17}{18,33}; 4 \cdot 18,33 = 8 \cdot 9,17; 73 = 73 \quad \text{Por tanto son semejantes}$$

6. Ejercicios de semejanzas de triángulos

Calcular las medidas de h , a y b .

h es perpendicular a la hipotenusa $a+b$.



Solución

Al ser triángulos semejantes ha de cumplirse

Según el teorema de pitágoras

$$h^2 + a^2 = 8^2; h^2 = 64 - a^2;$$

$$h^2 + b^2 = 6^2; h^2 = 36 - b^2;$$

$$64 - a^2 = 36 - b^2; 64 - 36 = a^2 - b^2; 28 = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = 64 + 36; (a + b)^2 = 100; a + b = 10$$

Sustituimos

$$28 = a^2 - b^2; 28 = (10 - b)^2 - b^2 = 100 + b^2 - 20b - b^2; 28 = 100 - 20b;$$

$$28 = 100 - 20b; 2b = 100 - 28 = 72; b = \frac{72}{2} = 3,6 \text{ cm};$$

$$a + b = 10; a = 10 - b; a = 10 - 3,6 = 6,4; a = 6,4 \text{ cm}$$

Sustituimos

$$h = \sqrt{64 - 6,4^2} = 4,8; h = 4,8 \text{ cm};$$

Al ser triángulos semejantes ha de cumplirse

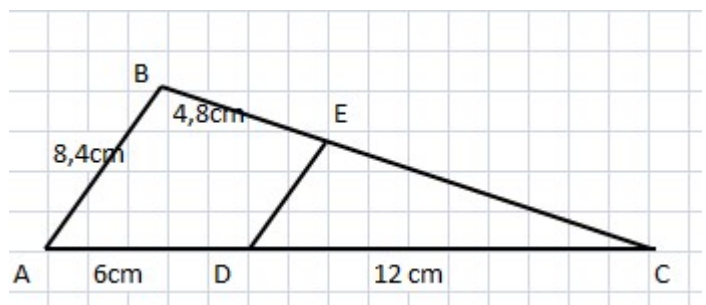
$$\frac{8}{6} = \frac{a}{h} = \frac{h}{b}; \frac{8}{6} = \frac{6,4}{4,8} = \frac{4,8}{3,6} = 1,3333$$

Se cumple pues la razón de todas las fracciones es $= 1,3333$;

7. Ejercicios de semejanzas de triángulos

En la figura los segmentos AB y DE son paralelos.

Calcular la medida del resto de los segmentos DE y EC



Solución

Aplicamos el teorema de tales

$$\frac{12 + 6}{EC + 4,8} = \frac{12}{EC}; (12 + 6)EC = 12(EC + 4,8); 18EC = 12EC + 57,6;$$

$$18EC - 12EC = 57,6; 6EC = 57,6; EC = \frac{57,6}{6}; EC = 9,6 \text{ cm}$$

$$\frac{12 + 6}{8,4} = \frac{12}{DE}; DE = \frac{12 * 8,4}{12 + 6}; DE = \frac{12 * 8,4}{18}; DE = 5,6 \text{ cm}$$

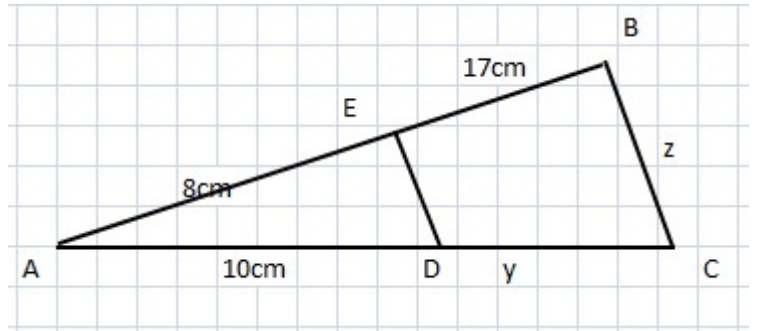
8. Ejercicios de semejanzas de triángulos

Dado que son semejantes los triángulos ABC y AED. Hallar el perímetro del trapecio EBCD.

BC y DE son perpendiculares a AB.

Solución

ED es el cateto de un triángulo rectángulo



$$8^2 + DE^2 = 10^2; DE^2 = 10^2 - 8^2; DE = \sqrt{100 - 64}; DE = \sqrt{36}; DE = 6\text{cm};$$

Aplicamos teorema de tales

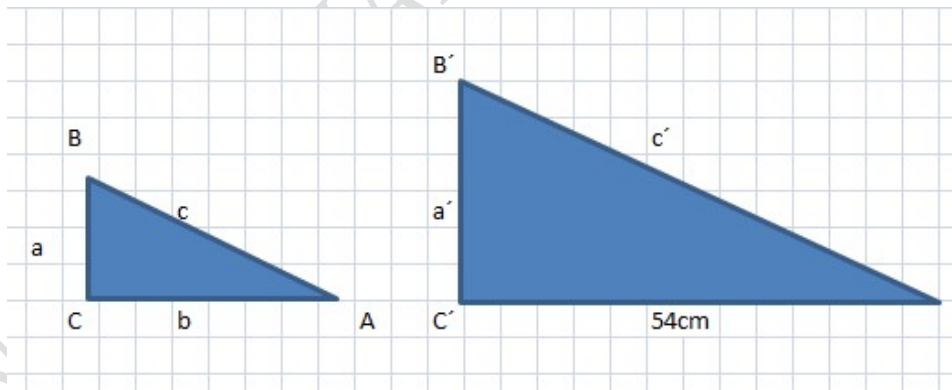
$$\frac{8 + 17}{z} = \frac{8}{6}; (8 + 17)6 = 8z; 25 \cdot 6 = 8z; z = \frac{150}{8}; z = 18,75\text{cm}$$

$$\frac{8 + 17}{10 + y} = \frac{8}{10}; 25 \cdot 10 = 8(10 + y); 250 = 80 + 8y; y = \frac{250 - 80}{8}; y = 21,25\text{cm}$$

$$\text{El perímetro del trapecio EBCD} = 6 + 17 + 18,75 + 21,25 = 63\text{ cm};$$

9. Ejercicios de semejanzas de triángulos

En un triángulo rectángulo la relación entre los catetos es $\frac{3}{4}$. Halla el perímetro de otro triángulo semejante en el que el cateto mide 54cm.



Solución

Si son semejantes ha de cumplirse la relación de semejanza

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Si la relación entre los catetos es $\frac{3}{4}$ ha de cumplirse que:

$$\frac{a'}{54} = \frac{3}{4}; a' = \frac{54 \cdot 3}{4}; a' = 40,5\text{ cm}$$

$$c' = \sqrt{54^2 + 40,5^2} = 67,5; c' = 67,5;$$

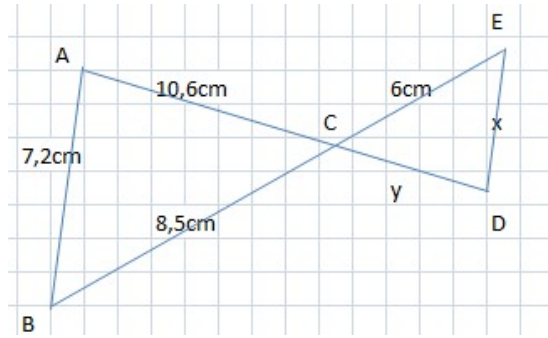
$$\text{Perímetro del triángulo} = 45 + 40,5 + 7,50163\text{cm};$$

10. Ejercicios de semejanzas de triángulos

En la figura, los segmentos AB ED son paralelos, por lo que los triángulos ACB y ECD son semejantes.

Calcular el valor de los segmentos x e y.

Solución



$$\frac{7,2}{x} = \frac{8,5}{6}; x = \frac{7,2 * 6}{8,5}; x = 5,08cm$$

$$\frac{10,6}{y} = \frac{8,5}{6}; y = \frac{10,6 * 6}{8,5}; y = 7,48cm$$

11. Ejercicios de semejanzas de triángulos

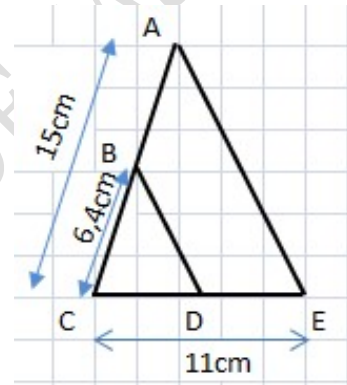
Si BD es paralelo a AE, AC=15cm, CE=11cm y BC=6,4cm.

- Calcular el valor de CD
- Si $\hat{A} = 37^\circ$, y $\hat{C} = 80^\circ$ Calcula el valor de los ángulos $\hat{E}$, $\hat{D}$, y $\hat{B}$

Solución

- Aplicamos las propiedades del teorema de tales

$$\frac{15}{11} = \frac{6,4}{CD}; CD = \frac{6,4 * 11}{15}; CD = 4,69cm$$



- Los ángulos de un triángulo suman 180°
 $180^\circ = 37^\circ + 80^\circ + E; E = 180^\circ - 37^\circ - 80^\circ; E = 63^\circ$

Como los triángulos son semejantes $\hat{D} = \hat{E} = 63^\circ$ y $\hat{B} = \hat{A} = 37^\circ$

3.3 Teorema del cateto

Por ser triángulos semejantes se ha de cumplirse:

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = a * m$$

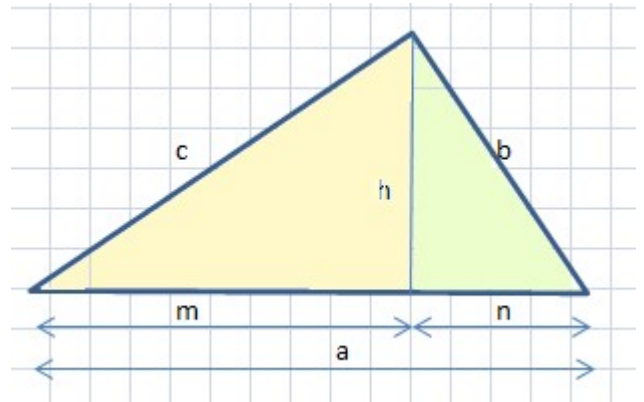
$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = a * n$$

El cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre ella

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c}; \quad \frac{b}{a} = \frac{n}{b}$$

El cuadrado del cateto es igual al producto de la hipotenusa y la proyección de este cateto sobre la hipotenusa.

$$c^2 = a * m; \quad b^2 = a * n;$$



3.4 Teorema de la altura

Por ser triángulos semejantes se ha de cumplirse:

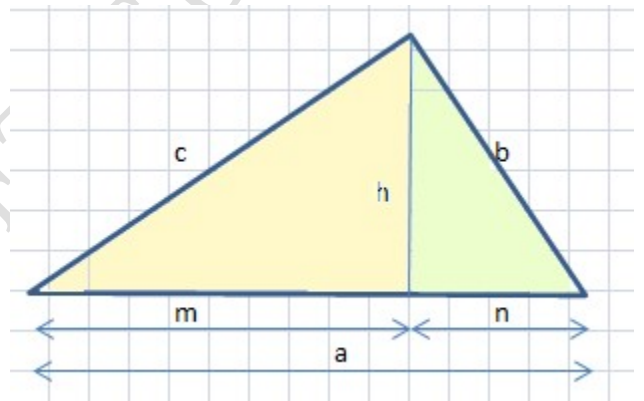
$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = n * m$$

La altura es media proporcional entre los dos segmentos que divide a la hipotenusa.

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

El cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de la proyección de los catetos sobre la hipotenusa.

$$h^2 = n * m$$



12. Ejercicios de semejanzas de triángulos

Calcular las medidas que faltan en este triángulo rectángulo

Solución

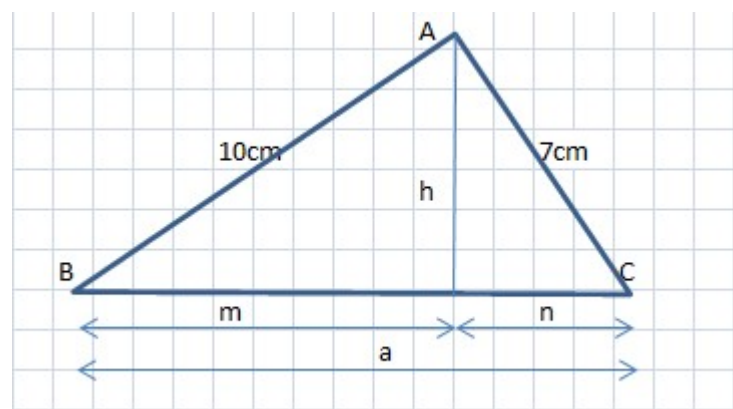
Como el triángulo ABC es rectángulo aplicamos el teorema de pitágoras y hallamos la hipotenusa a

$$10^2 + 7^2 = a^2; a = \sqrt{100 + 49}$$

$$a = \sqrt{149}; a = 12,21 \text{ cm};$$

Aplicando el teorema del cateto

$$10^2 = 12,21 * m; m = \frac{100}{12,21}; m = 8,19 \text{ cm}$$



$$7^2 = 12,21 * n; n = \frac{49}{12,21}; n = 4,01cm$$

Aplicando el teorema de la altura

$$h^2 = n * m; h = \sqrt{m * n}; h = \sqrt{8,19 * 4,01}; h = 5,73cm$$

13. Ejercicios de semejanzas de triángulos

En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa son 8cm y 4,5cm respectivamente. Calcula las medidas de los catetos y de la altura sobre la hipotenusa.

Solución

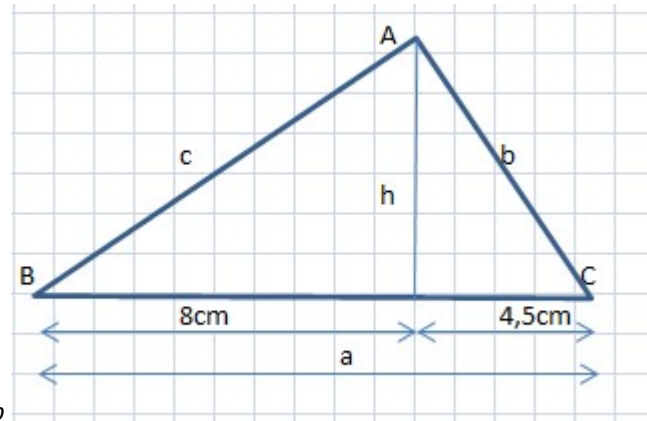
Aplicar el Teorema del cateto

$$c^2 = a * m; c^2 = (8 + 4,5) * 8; c = \sqrt{12,5 * 8}; c = \sqrt{100}; c = 10 cm$$

$$b^2 = a * n; b^2 = (8 + 4,5) * 4,5; b = \sqrt{12,5 * 4,5}; b = \sqrt{56,25}; b = 7,5 cm$$

Aplicar el Teorema de la altura

$$h^2 = n * m; h = \sqrt{m * n}; h = \sqrt{8 * 4,5}; h = 6cm$$



14. Ejercicios de semejanzas de triángulos

En el triángulo rectángulo, se ha trazado o la altura sobre la hipotenusa.

Calcular la medida de los catetos x (AB), (BC) y h(BD).

Solución

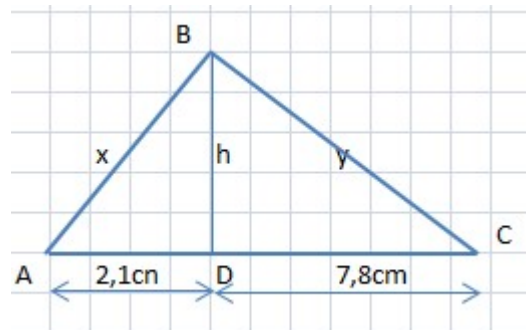
Aplicamos el teorema del cateto

$$x^2 = (2,1 + 7,8) * 2,1; x^2 = 9,9 * 2,1; x = \sqrt{20,79}; x = 4,56 cm$$

$$y^2 = (2,1 + 7,8) * 7,8; y^2 = 9,9 * 7,8; y = \sqrt{77,22}; y = 8,79 cm$$

Aplicamos el teorema de la altura

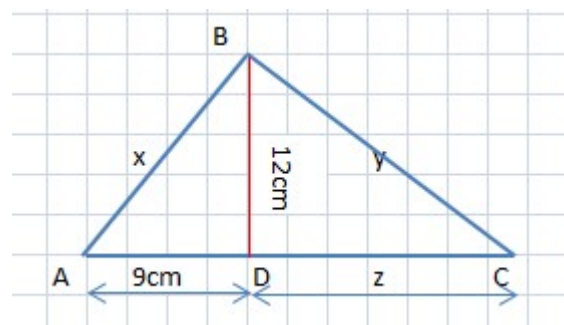
$$h^2 = 2,1 * 7,8; h^2 = 16,38; h = \sqrt{16,38}; h = 4,05 cm$$



15. Ejercicios de semejanzas de triángulos

En el triángulo rectángulo, se ha trazado la altura (BD, que mide 12cm), sobre la hipotenusa.

Calcular la medida de los catetos x (AB), y (BC) y z(DC).



Solución

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular x

$$12^2 + 9^2 = x^2; x = \sqrt{144 + 81}; x = \sqrt{225}; x = 15 \text{ cm};$$

Aplicamos el teorema de la altura para calcular z

$$12^2 = 9 * z; z = \frac{144}{9}; z = 16 \text{ cm};$$

Aplicamos el teorema del cateto para calcular y

$$y^2 = (9 + 16) * 16; y^2 = 400; y = \sqrt{400}; y = 20 \text{ cm}$$

16. Ejercicios de semejanzas de triángulos

En el triángulo rectángulo ABC, se ha trazado la altura BD sobre la hipotenusa.

Calcular la medida de los segmentos h(BD) y (BC) y z(DC).

Solución

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular y

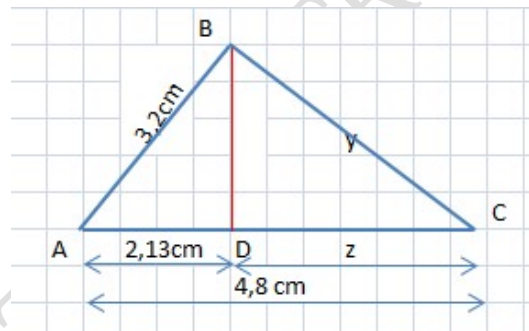
$$3,2^2 - 2,13^2 = h^2; h = \sqrt{10,24 - 4,54}; h = \sqrt{5,7}; h = 2,39 \text{ cm}$$

Calculamos z

$$z = 4,8 - 2,13; z = 2,67 \text{ cm}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular y

$$2,67^2 + 2,39^2 = y^2; y = \sqrt{7,13 + 5,71}; y = \sqrt{12,84}; y = 3,58 \text{ cm};$$

**17. Ejercicios de semejanzas de triángulos**

Calcula el perímetro del triángulo cuya base coincide con la base mayor del trapecio rectángulo y que se obtiene de prolongar los lados no paralelos hasta que se junten.

Solución

Aplicamos el teorema de Tales

$$\frac{x}{15} = \frac{x + 13}{20} \Rightarrow 20x = 15x + 15 * 13;$$

$$20x - 15x = 195; 5x = 195; x = \frac{195}{5}; x = 39 \text{ cm}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular y

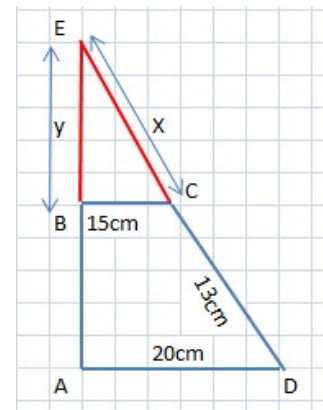
$$39^2 - 15^2 = y^2; y = \sqrt{39^2 - 15^2}; y = \sqrt{1521 - 225} = \sqrt{1296}; y = 36 \text{ cm};$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular EA

$$(13 + 39)^2 - 20^2 = (EA)^2; EA = \sqrt{(13 + 39)^2 - 20^2}; EA = \sqrt{2704 - 400} = \sqrt{2304};$$

$$EA = 48 \text{ cm};$$

$$\text{Perímetro del triángulo AED } P = 20 + 48 + 52 = 120 \text{ cm}$$



18. Ejercicios de semejanzas de triángulos

Para medir la altura de una casa Pedro, que mide 1,65 m, se situó a 1,5 m de la verja de la casa y tomo las siguientes medidas. ¿Qué altura tiene la casa?



Solución

Aplicamos el teorema de tales para calcular x

$$\frac{x}{1,65} = \frac{x + 1,5}{3,5} \Rightarrow 3,5x = 1,65x + (1,5 * 1,65);$$

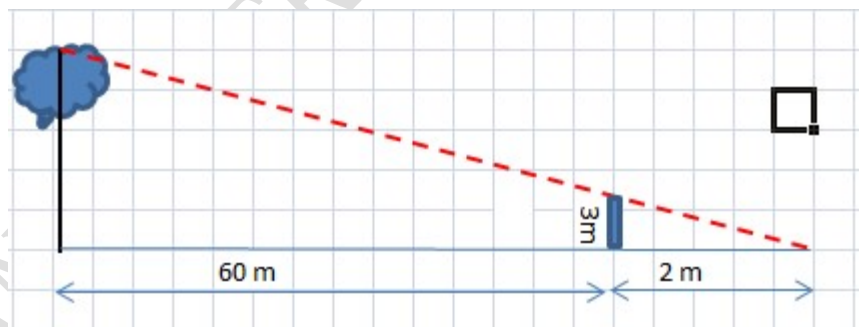
$$3,5x - 1,65x = 2,48; 1,85x = 2,48; x = \frac{2,48}{1,85}; x = 1,34 \text{ m}$$

Aplicamos el teorema de tales para calcular h

$$\frac{25 + 1,5 + 1,34}{h} = \frac{1,34}{1,65} \Rightarrow 27,85 * 1,65 = 1,34h; h = \frac{2,48}{1,85}; h = 34,33 \text{ m}$$

19. Ejercicios de semejanzas de triángulos

Calcular la altura a la que se encuentra la nube.



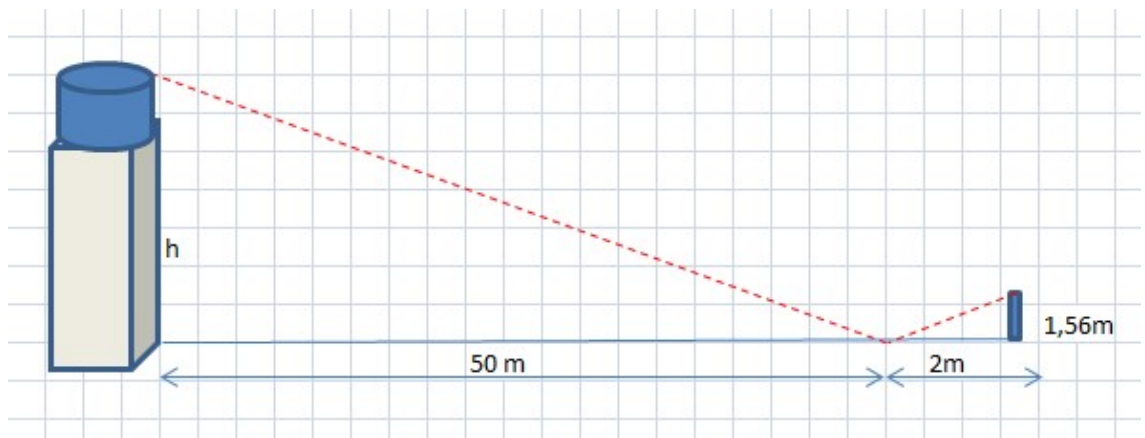
Solución

Aplicamos el teorema de tales para calcular x

$$\frac{2}{3} = \frac{60 + 2}{h} \Rightarrow h = 62 * \frac{3}{2}; h = 90 \text{ m}$$

20. Ejercicios de semejanzas de triángulos

Un niño situado a 2 m de un charco ve reflejado en el agua, un depósito situado sobre una torre, que se encuentra a 50 m del charco. Si el niño mide 1,56. Calcular la altura de la torre.



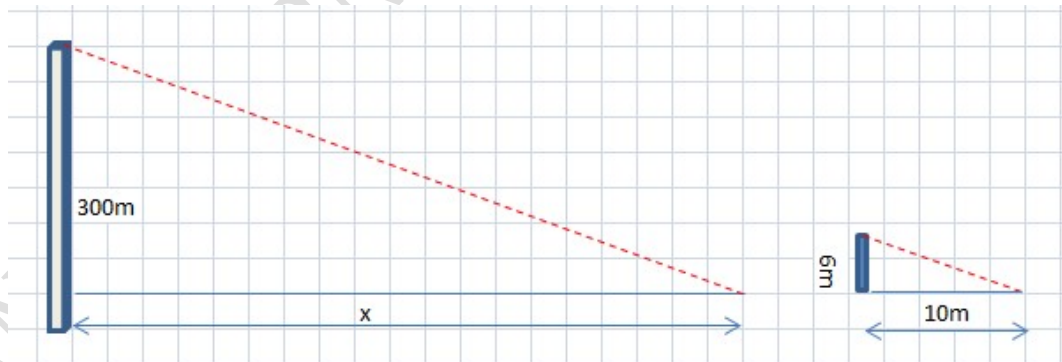
Solución

Dado que la teoría de la reflexión establece que el ángulo que forma el rayo incidente con la normal, es igual al ángulo que se forma entre el rayo reflejado y la normal, debemos considerar que los triángulos formados son semejantes y podemos aplicar el teorema de Tales.

$$\frac{2}{1,56} = \frac{50}{h} \Rightarrow h = 50 \cdot \frac{1,56}{2}; h = 62 \cdot 3/2; h = 39m$$

21. Ejercicios de semejanzas de triángulos

¿Cuánto mide la sombra proyecta la torre Eiffel que tiene una altura de 300m, si un árbol de 8 metros de altura proyecta una sombra de 10m.



Solución

Los triángulos que se forman son semejantes

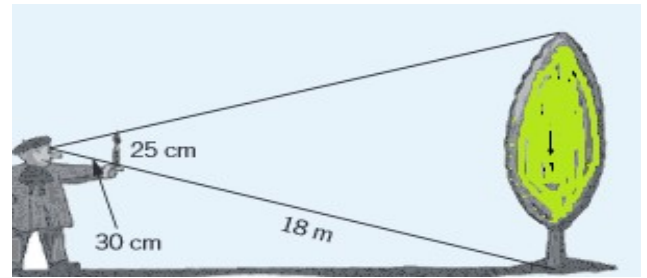
Aplicamos el teorema de Tales para calcular x

$$\frac{6}{10} = \frac{300}{h} \Rightarrow h = 300 \cdot 10/6; h = 500m$$

22. Ejercicios de semejanzas de triángulos

Un pintor quiere pintar un paisaje y para conseguir que todas las figuras tengan la misma proporción toma medidas con este método.

Calcular la altura del árbol con las medidas obtenidas.

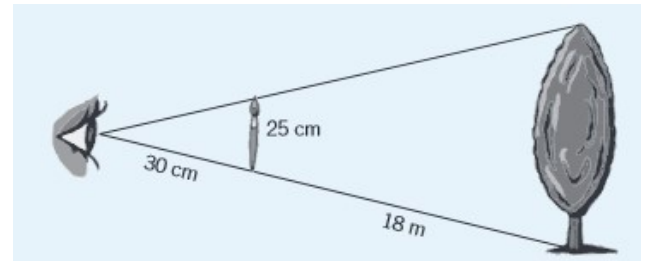


Solucion:

Los triángulos que se forman son semejantes.

Aplicamos el teorema de Tales para calcular x

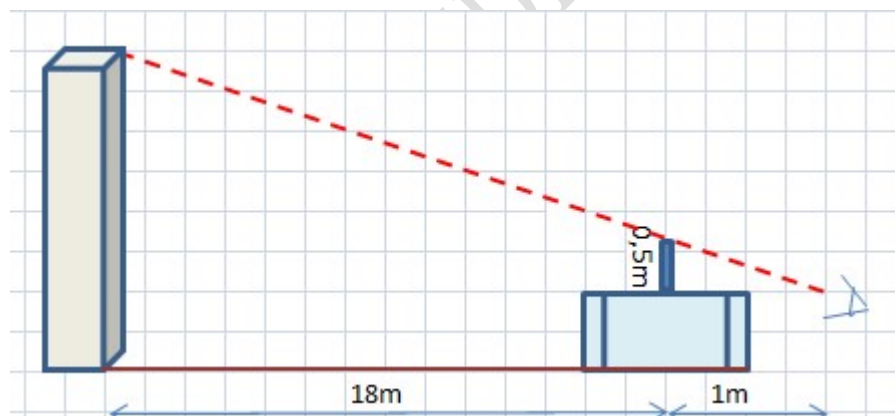
$$\frac{0,25}{0,30} = \frac{h}{18} \Rightarrow h = 0,25 * 18 / 0,30; h = 15m$$



23. Ejercicios de semejanzas de triángulos

Sobre una mesa de 1m de alta, se coloca un taco de madera de 0,50 m y situandome a una distancia de 1m del mismo, veo alineado un edificio que se encuentra a 19 m de mi posición.

¿Cuál será la altura del edificio?.



Solucion:

Los triángulos que se forman son semejantes.

Aplicamos el teorema de Tales para calcular h

$$\frac{0,50}{1} = \frac{h}{19} \Rightarrow h = 0,5 * \frac{19}{1}; h = 9,5 m$$

Dado que el taco de madera está sobre la mesa que mide 1 metro la altura de la torre será

$$\text{Altura} = 9,5 m + 1m = 10,5 m$$

24. Ejercicios de semejanzas de triángulos

Calcular la posición que debe dar la bola blanca en la banda para que el rebote de a la bola roja

Solucion:

Los triángulos que se forman son semejantes.

Aplicamos el teorema de Tales para calcular x

$$\frac{x}{0,25} = \frac{0,80 - x}{0,15}$$

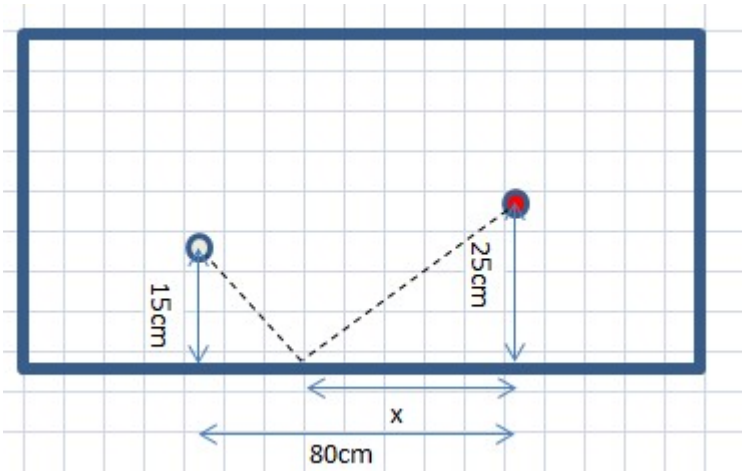
$$\Rightarrow 0,25(0,80 - x) = 0,15x;$$

$$0,2 - 0,25x = 0,15x;$$

$$0,2 = 0,15x + 0,25x;$$

$$0,2 = 0,4x; x = \frac{0,2}{0,4};$$

$$x = 0,5m; \mathbf{x = 50cm}$$



25. Ejercicios de semejanzas de triángulos

Demostrar que no influye la distancia (x) a la que se envuencran los postes para calcular la altura (h).

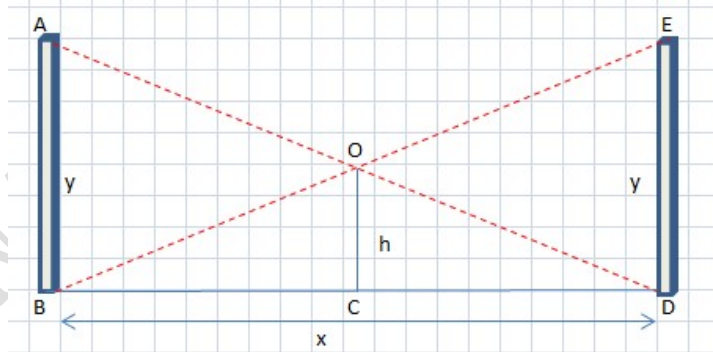
Calcular la altura (h) sabiendo que la altura de los postes es (y) y la distancia entre ellos es (x)

Solucion:

Los triángulos que se forman ABD Y OCD son semejantes.

Aplicamos el teorema de Tales para calcular h

$$\frac{x}{y} = \frac{x/2}{h} \Rightarrow h * x = \frac{x * y}{2}; \mathbf{h = \frac{y}{2}};$$



26. Ejercicios de semejanzas de triángulos

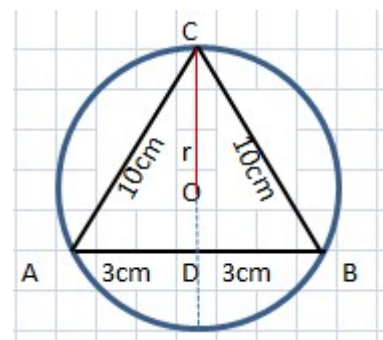
Calcular el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo isosceles .

Solucion:

En este caso la mediana y la mediatriz (CD) sobre el lado desigual AB es la misma.

Medianas, (rectas que unen un vertice del triangulo con el punto medio del lado opuesto) Las medianas se cortan en un punto llamado baricentro. La mediana desde el vertice C es la recta que pasa por CD. El baricentro está a 2/3 del vertice.

Mediatriz de un lado del triangulo es la recta perpendicular al lado y que pasa por su punto medio (ej la mediatriz del lado AB es la recta que pasa por CD). Las



mediatrices se cortan en un punto llamado circuncentro (Centro de la circunferencia circunscrita al triángulo)

En este caso el baricentro y el circuncentro coinciden.

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular y

$$39^2 - 15^2 = y^2; y = \sqrt{39^2 - 15^2}; y = \sqrt{1521 - 225} = \sqrt{1296}; y = 36\text{cm};$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular CD

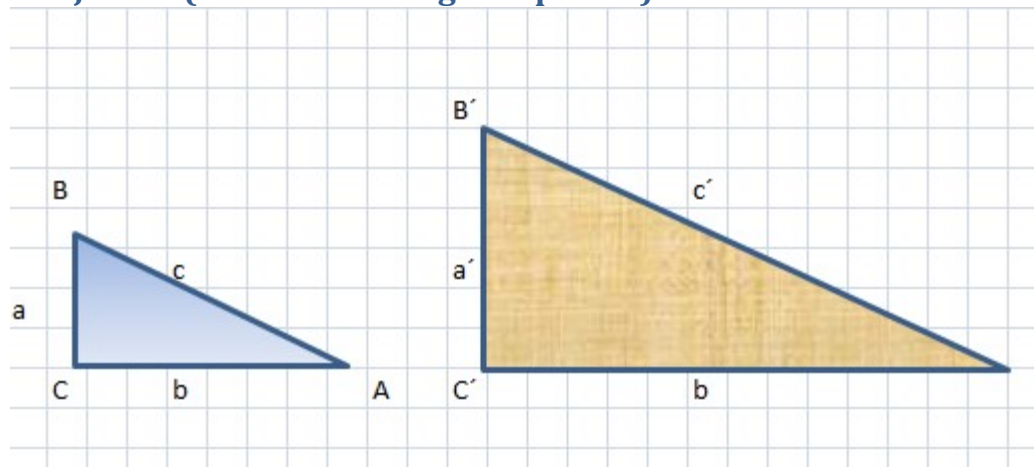
$$(10)^2 - 3^2 = (CD)^2; CD = \sqrt{100 - 9}; CD = \sqrt{91}; CD = 9\text{cm};$$

Si el circuncentro está a $\frac{2}{3}$ del vértice de C Luego $CO=r=9 \cdot \frac{2}{3}$; $r = 6\text{cm}$;

ANGEL HERNANDEZ DE CASTRO

4 Semejanza de áreas y volúmenes

4.1 Semejanzas (Perímetro de figuras planas)



Si dos figuras planas son semejantes, con una razón de semejanza de r . Sus perímetros son proporcionales y la razón de semejanza es r

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r; r = \frac{\text{perímetro figura menor}}{\text{perímetro figura mayor}};$$

Si $a=3\text{cm}$, $b=4\text{cm}$ y $c=5\text{cm}$; y la relación de semejanza es $r=1/3$,

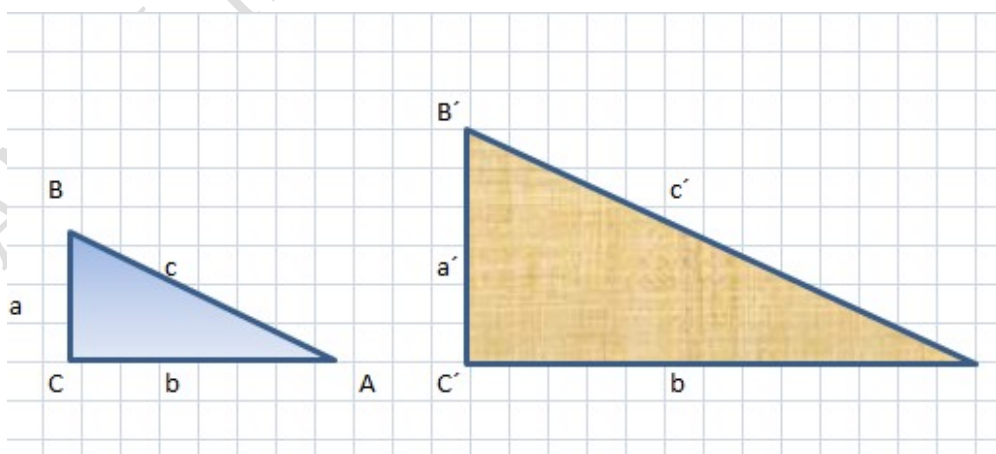
$a'=9\text{cm}$, $b'=12\text{cm}$ y $c'=15\text{cm}$;

Perímetro de la figura menor $= a + b + c = 12$;

Perímetro de la figura mayor $= a' + b' + c' = 36$;

La relación entre los perímetros de dos figuras planas semejantes es la razón de semejanza de sus lados

4.2 Semejanzas (Área de figuras planas)



Si dos figuras planas son semejantes, con una razón de semejanza de r .

Sus áreas son proporcionales y la razón de semejanza es r^2

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r; r^2 = \frac{\text{Área pequeña}}{\text{Área grande}};$$

Si $a=3\text{cm}$, $b=4\text{cm}$ y $c=5\text{cm}$; $a' = 9\text{cm}$, $b'=12\text{cm}$ y $c' = 15\text{cm}$; y la relación de semejanza es $r=1/3$;

$$\text{Area de la figura menor } \frac{b \cdot a}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\text{cm}^2$$

$$\text{El área de la figura mayor será } \frac{1}{9} = \frac{\text{Area pequeña}}{\text{Area grande}};$$

$$\text{Area mayor} = \text{Area de la figura pequeña} \cdot 9; \text{Area mayor} = 6 \cdot 9 = 54\text{cm}^2$$

Se comprueba ;

$$\text{Area de la figura mayor } \frac{b' \cdot a'}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54\text{cm}^2$$

27. Ejercicios de semejanzas de figuras planas

La razón de semejanza de dos triángulos es $2/5$. Si el área del mayor es 150cm^2 . ¿Cuál será el área del menor?

Solución:

La relación de semejanza de los triángulos es

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{2}{5};$$

La relación de las áreas será

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} = \frac{\text{Area pequeña}}{\text{Area grande}} \Rightarrow \frac{4}{25} = \frac{\text{Area pequeña}}{150};$$

$$\text{Area pequeña} = \frac{4 \cdot 150}{25} = 24\text{cm}^2;$$

28. Ejercicios de semejanzas de figuras planas

Dos triángulos ABC y A'B'C' semejantes. Los lados del ABC son respectivamente 24cm, 28cm y 34 cm. Sabiendo que el perímetro del triángulo A'B'C' es 129 cm.

Calcular los lados del triángulo A'B'C'

Solución:

Perímetro del triángulo ABC será $24+28+34=86\text{cm}$

Como el perímetro del otro triángulo es 129 y en triángulos semejantes se cumple que la relación de semejanza de los lados es igual a la relación de semejanza del perímetro.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{\text{Perímetro del menor}}{\text{Perímetro del mayor}} = \frac{86}{129};$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{86}{129}; \frac{24}{a'} = \frac{86}{129}; a' = \frac{24 \cdot 129}{86}; a' = 36\text{cm}$$

$$\frac{b}{b'} = \frac{86}{129}; \frac{28}{b'} = \frac{86}{129}; b' = \frac{28 \cdot 129}{86}; b' = 42\text{cm}$$

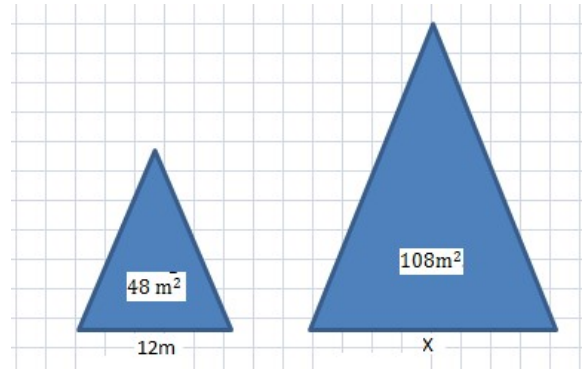
$$\frac{c}{c'} = \frac{86}{129}; \frac{34}{c'} = \frac{86}{129}; c' = \frac{34 \cdot 129}{86}; c' = 51\text{cm}$$

29. Ejercicios de semejanzas de figuras planas

Las áreas de dos triángulos isosceles ABC y A'B'C' semejantes, son respectivamente 48 m^2 y 108 m^2 . Si el lado desigual del triángulo ABC es 12 m .

¿Cuál será el perímetro del triángulo segundo?.

Solucion:



$$(r)^2 = \frac{\text{Area pequeña}}{\text{Area grande}} = \frac{48}{108}; r = \sqrt{\frac{48}{108}}$$

$$\frac{\text{Lado desigual triángulo pequeño}}{\text{Lado desigual triángulo grande}} = \frac{12}{x} = r$$

$$r = \sqrt{\frac{48}{108}}; \frac{12}{x} = \sqrt{\frac{48}{108}}; \left(\frac{12}{x}\right)^2 = \frac{48}{108};$$

$$\frac{144}{x^2} = \frac{48}{108}; x^2 = \frac{144 * 108}{48}; x^2 = 324 \text{ m}; x = \sqrt{324}; x = 18 \text{ m};$$

$$\text{Area del triángulo} = \frac{\text{base} * \text{altura}}{2}; 48 = \frac{12 * h}{2}; h = \frac{96}{12}; h = 8 \text{ m}$$

Aplicamos el teorema de pitágoras:

$$6^2 + 8^2 = c^2; 36 + 64 = c^2; 100 = c^2; c = 10 \text{ m};$$

Triángulo Pequeño, lados 10 m , 10 m y 12 m ; **Perímetro pequeño = 32 m**

$$\text{Perímetro del triángulo grande} \frac{32}{P} = \sqrt{\frac{48}{108}}; \left(\frac{32}{P}\right)^2 = \frac{48}{108}$$

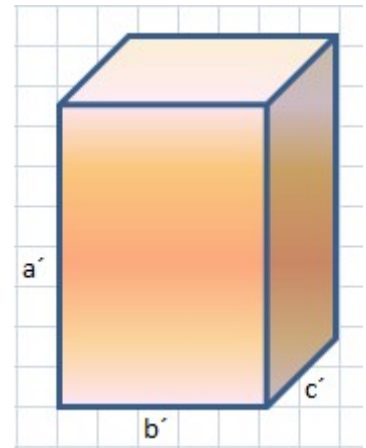
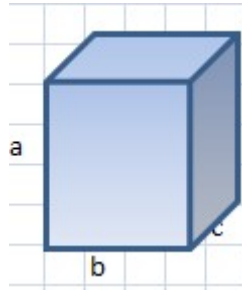
$$\frac{1024}{P^2} = \frac{48}{108}; P^2 = \frac{1024 * 108}{48}; P^2 = 2304; \text{Perímetro triángulo Grande} = 48 \text{ m};$$

4.3 Semejanzas (volúmenes de figuras)

Si dos cuerpos geométricos son semejantes, con una razón de semejanza de r .

Sus volúmenes son proporcionales y la razón de semejanza es r^3

$$\frac{\text{volumen cuerpo pequeño}}{\text{volumen cuerpo grande}} = r^3;$$



30. Ejercicios de semejanzas de figuras

Una estatua mide 10 m de altura y pesa 200kg ¿Cuánto pesará una reproducción del mismo material que mida 22 cm de altura?

Solución:

Al ser figuras proporcionales, sus volúmenes son proporcionales y la razón de semejanza es r^3

$$\frac{\text{volumen cuerpo pequeño}}{\text{volumen cuerpo grande}} = r^3; \frac{\text{altura cuerpo pequeño}}{\text{altura cuerpo grande}} = r$$

$$\text{La relación de las alturas es } \frac{22}{1000} = r;$$

La relación de los volúmenes, es la misma del peso, al ser el mismo material

$$\frac{\text{volumen cuerpo pequeño}}{\text{volumen cuerpo grande}} = r^3;$$

$$r^3 = \frac{\text{Peso del cuerpo pequeño}}{200} = \left(\frac{22}{1000}\right)^3 = 0,00001;$$

$$\text{Peso del cuerpo pequeño} = 200 * 0,000011 = 0,00123 \text{ kg};$$

$$\text{Peso del cuerpo pequeño } 1,23 \text{ g}$$

31. Ejercicios de semejanzas de figuras

Una esfera de vidrio tiene un radio de 4cm y una canica de vidrio tiene un diametro de 1 cm. Encuentra la razón entre sus volúmenes.

Solución:

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{Volumen de la esfera grande} = \frac{4}{3}\pi 4^3;$$

$$\text{Volumen de la esfera pequeña} = \frac{4}{3}\pi 1^3;$$

Relación de los volúmenes;

$$\frac{\text{volumen esfera pequeño}}{\text{volumen esfera grande}} = \frac{\frac{4}{3}\pi 1^3}{\frac{4}{3}\pi 4^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi 1^3}{\frac{4}{3}\pi 4^3} = \frac{1}{64};$$

$$\frac{\text{volumen esfera pequeño}}{\text{volumen esfera grande}} = \frac{1}{64} = r^3;$$

32. Ejercicios de semejanzas de figuras

Una pelota de balonmano tiene doble diametro que una pelota de tenis. ¿Cuál será la relación entre sus volúmenes?

Solucion:

Pelota de balonmano, diámetro $2x$; radio x ; Volumen $\frac{4}{3}$

Pelota de Balonmano diametro = $2x$; radio = x ; Volumen = $\frac{4}{3}\pi x^3$;

Pelota de tenis diámetro = x ; radio = $x/2$; Volumen = $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3$;

Relación de los volúmenes;

$$r^3 = \frac{\text{volumen pelota de tenis}}{\text{volumen pelota balonmano}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi x^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi x^3} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{x^3} = \frac{x^3}{8x^3} = \frac{1}{8};$$

$$r^3 = \frac{\text{volumen esfera pequeño}}{\text{volumen esfera grande}} = \frac{\text{volumen pelota de tenis}}{\text{volumen pelota de Balonmano}} = \frac{1}{8};$$

33. Ejercicios de semejanzas de figuras

La superficie acristalada de un invernadero mide 270 m^2 . ¿Qué m^2 de cristal se necesitará para construir una maqueta del invernadero a escala 1:20?

Solucion:

$$(r)^2 = \frac{\text{Area pequeña}}{\text{Area grande}}$$

$$\left(\frac{1}{20}\right)^2 = \frac{\text{Area de la maqueta}}{\text{Area del invernadero}}; \left(\frac{1}{20}\right)^2 = \frac{x}{270}; \frac{1}{400} = \frac{x}{270};$$

$$x = \frac{270}{400} = 0,675 \text{ m}^2; \text{Cristal necesario para la maqueta} = 0,675 \text{ m}^2$$

34. Ejercicios de semejanzas de figuras

Queremos hacer un armario en miniatura, semejante a otro cuyas medidas son 180 cm de largo, 45 cm de ancho y 110 cm de alto. Siendo su altura $13,5 \text{ cm}$.

Solucion:

$$\text{Razon de semejanza } r = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};$$

Hallamos la razón de semejanza con las medidas de las alturas

$$r = \frac{13,5}{110}; r = 0,123;$$

$$\frac{\text{largo de la miniatura}}{\text{largo del armario}} = 0,123; \frac{\text{largo de la miniatura}}{180} = 0,123;$$

$$\text{largo de la miniatura} = 180 * 0,123 = 22,14 \text{ cm}$$

$$\frac{\text{ancho de la miniatura}}{\text{ancho del armario}} = 0,123; \frac{\text{ancho de la miniatura}}{45} = 0,123;$$

$$\text{ancho de la miniatura} = 45 * 0,123 = 5,54 \text{ cm}$$

4.4 Escalas

La escala es la relación matemática que existe entre las dimensiones reales y las del dibujo que representa la realidad sobre un plano o un mapa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida de la reproducción en el plano}}{\text{Medida real}}$$

Las escalas se escriben en forma de razón donde el antecedente indica el valor del plano y el consecuente el valor de la realidad. Por ejemplo la escala 1:500, significa que 1 cm del plano equivale a 500 cm (5m) en la realidad.

35. Ejercicios de Escalas

La altura de un edificio es de 65 m. ¿Cuál será su altura en una maqueta hecha a escala 1:500.

Solucion:

$$\text{Escala} = \frac{\text{Altura del edificio en la maqueta}}{\text{Altura del edificio en la realidad}}$$

$$\frac{1}{500} = \frac{\text{Altura del edificio en la maqueta}}{\text{Altura del edificio en la realidad}}; \frac{1}{500} = \frac{x}{65}; x = \frac{65}{500} = 0,13\text{m}$$

$$x = 13\text{cm altura del edificio en la maqueta}$$

36. Ejercicios de Escalas

Las dimensiones de un campo de futbol son 70 y 100 m, respectivamente. ¿Cuál es la superficie de un futbolín hecho a escala 1:75?

Solucion:

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida del futbolín}}{\text{Medida del campo}}$$

$$\frac{1}{75} = \frac{x}{70}; x = \frac{70}{75}; x = 0,93 \text{ m (93 cm)}$$

$$\frac{1}{75} = \frac{x}{100}; x = \frac{100}{75}; x = 1,33 \text{ m (133 cm)}$$

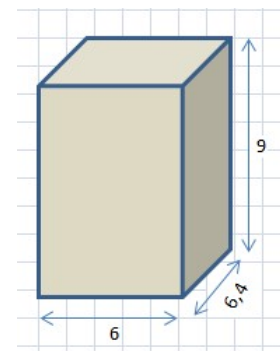
37. Ejercicios de Escalas

Una maqueta a escala 1:500 en forma de ortoedro tiene las siguientes dimensiones 6cm y 6,4 cm de planta y 9 cm de altura.

Hallar las dimensiones del área de la fachada y el volumen del edificio en la realidad.

Solucion:

$$\frac{1}{500} = \frac{6}{x}; x = 6 * 500; x = 3000 \text{ cm (30m)}$$



$$\frac{1}{500} = \frac{6,4}{x}; x = 6,4 * 500; x = 3200 \text{ cm (32m)}$$

$$\frac{1}{500} = \frac{9}{x}; x = 9 * 500; x = 4500 \text{ cm (45m)}$$

$$\text{Area de la fachada} = 30 * 45 = 1350 \text{ m}^2$$

$$\text{Volumen del edificio} = 30 * 32 * 45 = 43200 \text{ m}^3$$

38. Ejercicios de Escalas (El ejercicio anterior se puede hacer

utilizando la semejanza de los volúmenes)

Una maqueta a escala 1:500 en forma de ortoedro tiene las siguientes dimensiones 6cm y 6,4 cm de planta y 9 cm de altura.

Hallar las dimensiones del area de la fachada y el volumen del edificio en la realidad.

Solucion:

La escala es la razon de semejanza

$$\text{Area de la fachada maqueta} = 9 * 6 = 54 \text{ cm}^2:$$

Razón de semejanza de figuras planas r^2

$$(r)^2 = \frac{\text{Area maqueta}}{\text{Area real}}; \left(\frac{1}{500}\right)^2 = \frac{54}{x}; x = 54 * 250000 = 13500000 \text{ cm}^2 (1350 \text{ m}^2)$$

$$\text{Volumen de la maqueta} = 9 * 6 * 6,4 = 345,6 \text{ cm}^3;$$

Razón de semejanza de los volúmenes r^3

$$(r)^3 = \frac{\text{Volumen maqueta}}{\text{Volumen real}}; \left(\frac{1}{500}\right)^3 = \frac{345,6}{x}; x = 345,6 * 125000000$$

$$x = 43200000000 \text{ cm}^3 (43200 \text{ m}^3)$$

39. Ejercicios de Escalas

La superficie de un campo de futbol sala en una maqueta es de 32 cm² ¿Cuál sera la superficie en la realidad si está hecha a escala 1:500 .

Solucion:

Razón de semejanza de figuras planas r^2

$$(r)^2 = \frac{\text{Area maqueta}}{\text{Area campo de futbol}}; \left(\frac{1}{500}\right)^2 = \frac{32}{x}; x = 32 * 250000$$

$$x = 8000000 \text{ cm}^2 (800 \text{ m}^2) \text{ Area del campo de futbol}$$

40. Ejercicios de Escalas

Una caseta de una maqueta está hecha con $0,3 \text{ cm}^3$ de poliespan. ¿Cuál será el volumen de esta caseta en la realidad si está hecha a escala 1:500 .

Solucion:

Razón de semejanza de los volúmenes r^3

$$(r)^2 = \frac{\text{Volumen de la maqueta}}{\text{Volumen en la realidad}}; \left(\frac{1}{500}\right)^3 = \frac{0,3}{x}; x = 0,3 * 25000000$$

$$x = 37500000 \text{ cm}^3 \text{ (37,5 m}^3\text{) volumen de la caseta}$$

ANGEL HERNANDEZ DE CASTRO