

TRIGONOMETRIA

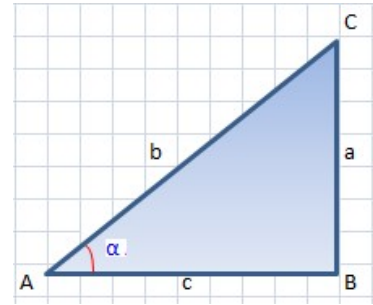
INDICE

Contenido

1	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO.....	2
2	RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	2
2.1	RELACIONES FUNDAMENTALES.....	3
3	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30° , 60° Y 45°	6
3.1	RAZONES DE 45°	6
3.2	RAZONES DE 30° Y 60°	6
4	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA.....	9
4.1	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 0° , 90° , 180° Y 270°	9
4.2	SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN CUALQUIER CUADRANTE	9
5	REDUCCIÓN DE ÁNGULOS AL PRIMER CUADRANTE.....	11
6	ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS, SUPLEMENTARIOS Y OPUESTOS.....	12
6.1	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS	12
6.2	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS	12
6.3	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS OPUESTOS.....	12
6.4	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MAYORES DE 360°	12

1 Razones trigonométricas de un ángulo agudo

La trigonometría es una rama importante de las matemáticas dedicada al estudio de la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Con este propósito se definieron una serie de funciones.



$$\text{Seno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{Longitud de la hipotenusa}}; \text{Sen } \alpha = \frac{a}{b};$$

$$\text{Coseno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{Longitud de la hipotenusa}}; \cos \alpha = \frac{c}{b};$$

$$\text{Tangente de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}; \text{tg } \alpha = \frac{a}{c};$$

El sen y el cos de un ángulo agudo son siempre menores que 1, dado que la hipotenusa es siempre mayor que cada uno de los catetos

1. Ejercicios de trigonometría

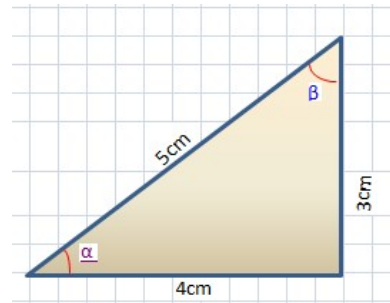
Calcular las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo

Solucion

$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} = 0,6; \quad \text{sen } \beta = \frac{4}{5} = 0,8;$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8; \quad \cos \beta = \frac{3}{5} = 0,6;$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4} = 0,75; \quad \text{tg } \beta = \frac{4}{3} = 1,33;$$



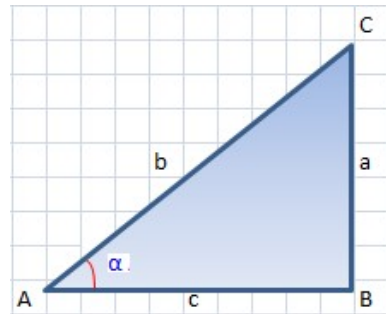
2 Relaciones entre las razones trigonométricas

Teorema de pitágoras $a^2 + c^2 = b^2$

$$(\text{sen } \alpha)^2 = \text{sen}^2 \alpha;$$

$$(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha;$$

$$(\text{tg } \alpha)^2 = \text{tg}^2 \alpha;$$



2.1 Relaciones fundamentales

Primera Relación fundamental $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$;

$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1; \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1;$$

Aplicando el teorema de pitágoras $a^2 + c^2 = b^2$

Segunda relacion fundamental $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$

$$\text{Sen } \alpha = \frac{a}{b}; \text{cos } \alpha = \frac{c}{b}; \text{tg}\alpha = \frac{a}{c}; \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a * b}{c * b} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \text{tg } \alpha;$$

2. Ejercicios de trigonometría

Utilizando las razones trigonométricas, calcular el coseno y la tangente de α , sabiendo que

$$\text{Sen } \alpha = \frac{1}{2};$$

Solución

$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \text{cos}^2\alpha = 1; \frac{1}{4} + \text{cos}^2\alpha = 1; \text{cos}^2\alpha = 1 - \frac{1}{4}; \text{cos}^2\alpha = \frac{3}{4}; \text{cos } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

3. Ejercicios de trigonometría

Utilizando las razones trigonométricas, calcular el seno y el coseno de α , sabiendo que

$$\text{tg}\alpha = 2;$$

Solución

Si la tangente de α es positiva el ángulo estará en el primer o tercer cuadrante

$$\text{tg}\alpha = 2; \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}; 2 = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}; 2\text{cos } \alpha = \text{sen } \alpha$$

$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1; \text{sustituimos sen}\alpha \text{ por su valor}$$

$$=1; \text{sustituimos sen } \alpha \text{ por su valor}$$

$$(2\text{cos } \alpha)^2 + \text{cos}^2\alpha = 1; 4\text{cos}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1; 5\text{cos}^2 = 1; \text{cos}^2 = \frac{1}{5};$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\text{Sustituimos en sen } \alpha = 2\text{cos } \alpha; \text{sen } \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

4. Ejercicios de trigonometría

Existe algún ángulo con $\text{sen } \alpha = 0,4$ y $\text{cos } \alpha = 0,6$?

Solución

$$\text{Si existiera se tendría que cumplir } \text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1;$$

$$\text{Sustituimos en la relación } (0,4)^2 + (0,6)^2 = 1;$$

$$0,16 + 0,36 \neq 1 \text{ no existen ángulos con esos valores}$$

5. Ejercicios de trigonometría

Utilizando las razones fundamentales de trigonometría calcular que se cumple la siguiente igualdad

$$(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$$

Solución

$$(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha * \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha * \cos \alpha = 2;$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cancel{2 \operatorname{sen} \alpha * \cos \alpha} + \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cancel{2 \operatorname{sen} \alpha * \cos \alpha} = 2;$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 2; 2\operatorname{sen}^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha = 2; \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Se cumple la igualdad

6. Ejercicios de trigonometría

Utilizando las razones fundamentales de trigonometría calcular que se cumple la siguiente igualdad

$$\frac{(\operatorname{sen} \alpha)^3 + \operatorname{sen} \alpha * (\cos \alpha)^2}{\operatorname{sen} \alpha} = 1;$$

Solución

$$\frac{(\operatorname{sen} \alpha)^3 + \operatorname{sen} \alpha * (\cos \alpha)^2}{\operatorname{sen} \alpha} = 1; \frac{(\operatorname{sen} \alpha)^3}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha * (\cos \alpha)^2}{\operatorname{sen} \alpha} = 1;$$

$$\frac{(\operatorname{sen} \alpha)^3}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{\cancel{\operatorname{sen} \alpha} * (\cos \alpha)^2}{\cancel{\operatorname{sen} \alpha}} = 1;$$

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1;$$

7. Ejercicios de trigonometría

Utilizando las razones fundamentales de trigonometría calcular que se cumple la siguiente igualdad

$$\frac{(\operatorname{sen} \alpha)^3 + \operatorname{sen} \alpha * (\cos \alpha)^2}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

Solución

$$\frac{(\operatorname{sen} \alpha)^3 + \operatorname{sen} \alpha * (\cos \alpha)^2}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

Sacamos Factor común: $\frac{\operatorname{sen} \alpha [(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2]}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha; \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} [(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2] = \operatorname{tg} \alpha; \text{ Dado que } \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$[(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2] = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}; \Rightarrow (\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1; \text{ Se cumple la igualdad}$$

8. Ejercicios de trigonometría

Utilizando las razones fundamentales de trigonometría calcular que se cumple la siguiente igualdad

$$1 + (\operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{1}{(\cos \alpha)^2};$$

Solución

$$1 + (\operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{1}{(\cos \alpha)^2}; \text{ Dado que } \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$1 + \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = \frac{1}{(\cos \alpha)^2}; \quad 1 + \frac{(\operatorname{sen} \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} = \frac{1}{(\cos \alpha)^2}; \text{ sacamos comun denominador}$$

$$\frac{(\cos \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} + \frac{(\operatorname{sen} \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} = \frac{1}{(\cos \alpha)^2}; \quad \frac{(\cos \alpha)^2 + (\operatorname{sen} \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} = \frac{1}{(\cos \alpha)^2}$$

Quitamos los denominadores pues son iguales en los dos términos de la igualdad y nos queda

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1; \text{ Se cumple la igualdad}$$

3 Razones trigonométricas de 30°, 60° y 45°

3.1 Razones de 45°

En un triángulo rectángulo isósceles, sus ángulos agudos miden 45° y sus catetos miden los dos l

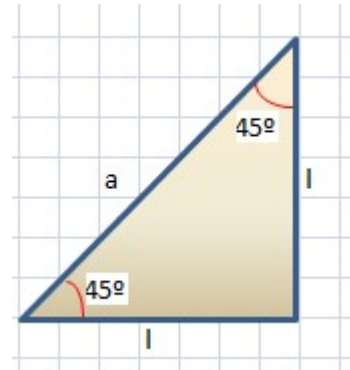
Aplicando el teorema de Pitágoras

$$l^2 + l^2 = a^2; a = \sqrt{l^2 + l^2}; a = \sqrt{2l^2}; a = 2l\sqrt{2};$$

$$\text{Sen}45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{Sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{Cos}45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{Cos}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{tg}45^\circ = \frac{1}{1} = 1; \text{tg}45^\circ = 1;$$



3.2 Razones de 30° y 60°

En un triángulo equilátero, sus lados son iguales (l) y cada uno de sus ángulos miden 60°

Aplicando el teorema de Pitágoras

$$l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = h^2; h = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{4l^2}{4} + \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{5l^2}{4}};$$

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{3} l; h = \frac{\sqrt{3}}{2} l;$$

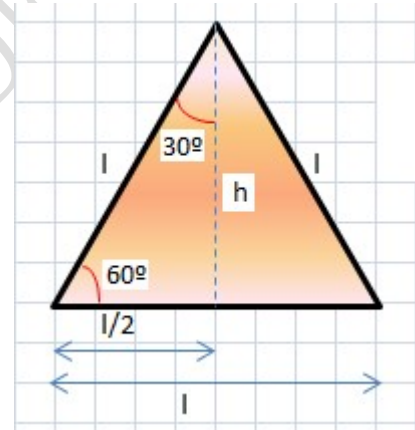
$$\text{Sen } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{Sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{Cos } 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}; \text{Cos } 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\text{tg}60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}; \text{tg}60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}; \text{Sen } 30^\circ = \frac{1}{2}; \text{Cos}30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{Cos}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{tg}30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} l} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \text{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



9. Ejercicios de trigonometría

Calcular el valor de las siguientes expresiones $\cos 60^\circ - \sin 30^\circ + \text{tg} 45^\circ$;

Solución

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \text{tg} 45^\circ = 1;$$

$$\cos 60^\circ - \sin 30^\circ + \text{tg} 45^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = 1;$$

10. Ejercicios de trigonometría

Calcular el valor de las siguientes expresiones $\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ - \cos^2 30^\circ$;

Calcular el valor de las siguientes expresiones

Solución

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}; \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ - \cos^2 30^\circ = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}; \frac{4\sqrt{3}}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ - \cos^2 30^\circ = \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 3}{4} = 1,68;$$

11. Ejercicios de trigonometría

Determina la altura de un triángulo equilátero de lado 5cm, sin aplicar el teorema de pitágoras

Solución

$$\operatorname{Sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{5}; h = \frac{5\sqrt{3}}{2} = 4,33;$$

12. Ejercicios de trigonometría

Los dos Catetos de un triángulo rectángulo miden 48cm y 71 cm. Calcular en grados y minutos los ángulos del triángulo.

Solución

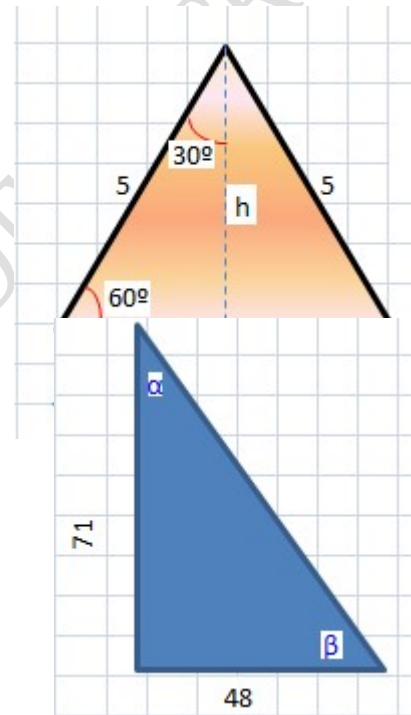
Angulo recto 90°

$$\text{Angulo } \alpha; \operatorname{tag} \alpha = \frac{48}{71} = 0,64; \alpha = 34^\circ, 36', 32,7'';$$

$$\begin{array}{r} 89^\circ \quad 59' \quad 60'' \\ 34^\circ \quad 36' \quad 32,7'' \\ \hline \end{array}$$

$$55^\circ \quad 23' \quad 27,3''$$

$$\text{Angulo } \beta = 55^\circ \quad 23' \quad 27,3''$$

**13. Ejercicios de trigonometría**

En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos mide 37° y el cateto opuesto 87 cm. Hallar el valor del otro cateto y la hipotenusa

Solución

Angulo recto 90°

Un ángulo agudo 37°

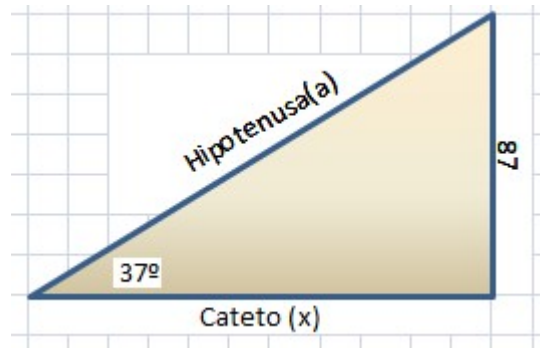
El otro angulo agudo $90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$;

Cateto (x)

$$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{87}{x}; 0,7536 = \frac{87}{x}; x = \frac{87}{0,7536} = 115,446; x = 115,446 \text{ cm}$$

Hipotenusa(a)

$$\operatorname{sen} 37^\circ = \frac{87}{a}; 0,601815 = \frac{87}{a}; a = \frac{87}{0,6018} = 144,5663; a = 144,562 \text{ cm};$$



14. Ejercicios de trigonometría

Hallar el radio de un Octógono regular de 20 cm de lado.

Calcular:

- a) Angulo interior
- b) Angulo Central
- c) Hipotenusa(r)

Solución

- a) Valor de un ángulo interior del

octógono regular es $(n - 2) * \frac{180}{n}$;

$$(8 - 2) * \frac{180}{8} = 135^\circ;$$

- b) El angulo central del octogono regular mide $360:8 = 45^\circ$;

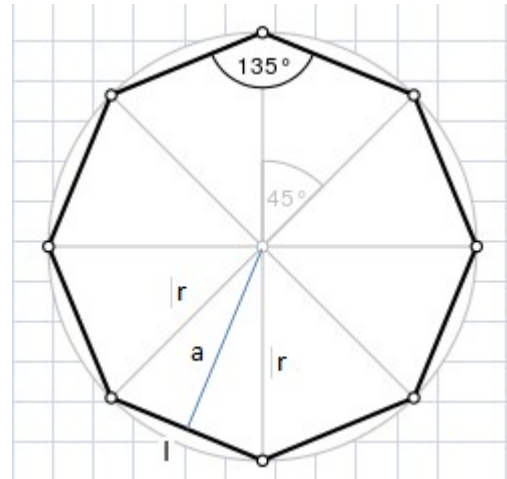
- c) Radio (para hallar el radio, hallamos primero la apotema del triangulo interior)

$$\operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \operatorname{tg} 22,5 = 0,44; \text{ dado que } l = 20; \frac{l}{2} = 10 \Rightarrow \operatorname{tg} 22,5 = 0,44 = \frac{10}{a};$$

$$a \text{ (apotema)} = \frac{10}{0,44} = 24,142\text{cm};$$

$$r \text{ (radio); } \operatorname{sen} \frac{45^\circ}{2} = \operatorname{sen} 22,5^\circ = 0,38 = \frac{10}{r};$$

$$r = \frac{10}{0,38} = 26,3, \text{ cm};$$



4 Razones Trigonométricas de un ángulo cualquiera

Sobre los ejes de coordenadas (X,Y) trazamos una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y de radio 1 ($a=1$) (circunferencia goniométrica)

Trazamos un ángulo α que corta a la circunferencia en el punto (c, b).

$$\text{sen} \alpha = \frac{b}{a}; \text{ dado que } a = 1; \text{ sen} \alpha = b;$$

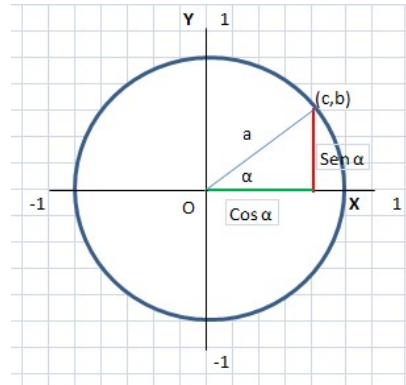
$$\text{cos} \alpha = \frac{c}{a}; \text{ dado que } a = 1; \text{ cos} \alpha = c;$$

Los ángulos también pueden definirse en radianes

$$\frac{\pi}{2} \text{ radianes} = 90^\circ;$$

$$\pi \text{ radianes} = 180^\circ;$$

$$2\pi \text{ radianes} = 360^\circ;$$



4.1 Razones trigonométricas de 0° , 90° , 180° y 270°

Angulo	0°	90°	180°	270°
Seno	0	1	0	-1
Coseno	1	0	-1	0
Tangente	0	no existe	0	No existe

4.2 Signo de las razones trigonométricas en cualquier cuadrante

Según este el ángulo en un cuadrante u otro el valor de las razones trigonométricas tendrán un valor positivo + o negativo -

	1 ^{er} Cuadrante	2 ^{er} Cuadrante	3 ^{er} Cuadrante	4 ^{er} Cuadrante
Angulo α	$0^\circ - 90^\circ$	$90^\circ - 180^\circ$	$180^\circ - 270^\circ$	$270^\circ - 360^\circ$
Seno α	Positivo	Positivo	Negativo	Negativo
Coseno α	Positivo	Negativo	Negativo	Positivo
Tangente α	Positivo	Negativo	Positivo	Negativo

15. Ejercicios de trigonometría

Indicar en que cuadrante está cada uno de los siguientes ángulos:

- a) $\text{Sen } \alpha = 0,8$; $\text{Cos } \alpha = -0,6$;
- b) $\text{Sen } \beta = -0,8$; $\text{Cos } \beta = -0,6$;
- c) $\text{Sen } \gamma = 0,5$; $\text{Cos } \gamma = 0,57$;

Solución

- a) α está en el 2^o cuadrante
- b) β está en el 3^o cuadrante
- c) γ está en el 1^o cuadrante

16. Ejercicios de trigonometría

Indicar el signo que tienen las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

66° ; 175° ; 342° ; 18° ; 235°

Solución

Angulo α	66°	175°	342°	18°	235°
Seno α	Positivo	Positivo	Negativo	Positivo	Negativo
Coseno α	Positivo	Negativo	Positivo	Positivo	Negativo
Tangente α	Positivo	Negativo	Negativo	Positivo	Positivo

17. Ejercicios de trigonometría

Dibuja el ángulo cuyo seno sea $2/5$ y halla el coseno

Solución

El ángulo estaría en el primer o segundo cuadrante.

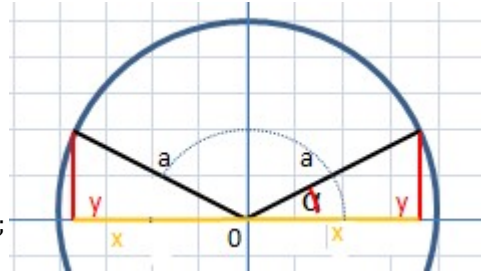
Los ángulos serían α y $180-\alpha$;

$$\text{Si } \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180 - \alpha) = \frac{y}{a} = \frac{2}{5}; \Rightarrow a = 5 \text{ e } y = 2;$$

Aplicando el teorema de Pitágoras

$$a^2 = x^2 + y^2; 5^2 = x^2 + 2^2; x^2 = 25 - 4 = 21; x = \sqrt{21}; x = 4,58;$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5} = 0,92;$$



18. Ejercicios de trigonometría

Dibuja el ángulo menor que 180° cuyo coseno sea $-2/3$.

Halla su seno y su tangente

Solución

El ángulo α estaría en el segundo cuadrante.

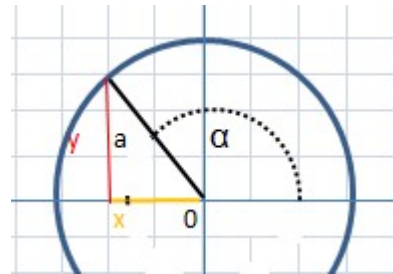
$$\text{Si } \cos \alpha = \frac{x}{a} = -\frac{2}{3}; a = 3 \text{ y } x = -2;$$

Aplicando el teorema de Pitágoras

$$a^2 = x^2 + y^2; 3^2 = (-2)^2 + y^2; y^2 = 9 - 4 = 5; y = \sqrt{5};$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{-2};$$



19. Ejercicios de trigonometría

Sabiendo que la $\operatorname{tg} \alpha = -2$ y $\alpha < 180$.

Halla su seno y su coseno

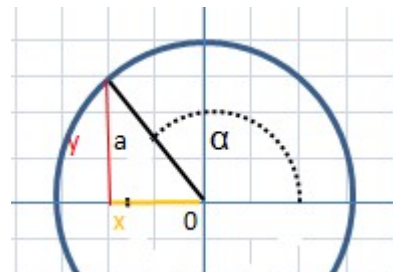
Solución

Como el ángulo es menor de 180 y la tangente es negativa, el ángulo debe de estar en el segundo cuadrante.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{a}; \cos \alpha = \frac{x}{a};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -2; \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -2 \cos \alpha;$$

Aplicando la primera relacion fundamental: $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$



Sustituir

$$(-2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1; 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; 5\cos^2\alpha = 1; \cos^2\alpha = \frac{1}{5};$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\operatorname{sen}\alpha = -2 * (\sqrt{5}/5) = \frac{2\sqrt{5}}{5};$$

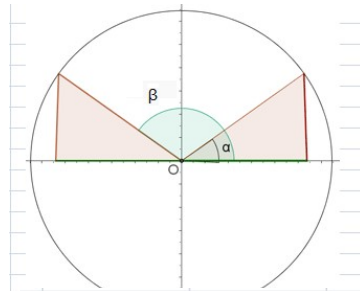
5 Reducción de ángulos al primer cuadrante.

- Si el ángulo β está en el segundo cuadrante siempre habrá un ángulo α en el primer cuadrante que cumpla $\alpha = 180 - \beta$

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha;$$

$$\operatorname{Cos}\beta = -\cos\alpha;$$

$$\operatorname{Tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha;$$

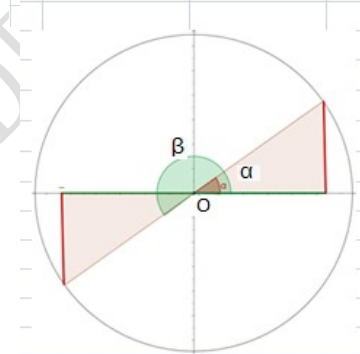


- Si el ángulo β está en el tercer cuadrante siempre habrá un ángulo α en el primer cuadrante que cumpla $\beta = 180 + \alpha$

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha;$$

$$\operatorname{Cos}\beta = -\cos\alpha;$$

$$\operatorname{Tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha;$$

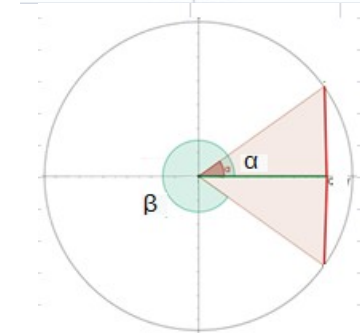


- Si el ángulo β está en el cuarto cuadrante siempre habrá un ángulo α en el primer cuadrante que cumpla $\beta = 360 - \alpha$

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha;$$

$$\operatorname{Cos}\beta = \cos\alpha;$$

$$\operatorname{Tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha;$$



20. Ejercicios de trigonometría

Calcula las razones trigonométricas de 165° , sabiendo que $\operatorname{sen} 15^\circ = 0,26$ y $\operatorname{cos} 15^\circ = 0,97$;

Solución

El ángulo de 165° está en el 2° cuadrante y se cumple $165^\circ = 180^\circ - 15^\circ$;

$$\operatorname{sen} 165^\circ = \operatorname{sen} 15^\circ; \operatorname{sen} 165^\circ = 0,26;$$

$$\operatorname{cos} 165^\circ = -\operatorname{cos} 15^\circ; \operatorname{cos} 165^\circ = -0,97;$$

$$\operatorname{tg} 165^\circ = -\operatorname{tg} 15^\circ; \operatorname{tg} 165^\circ = -\frac{0,26}{0,97};$$

6 Ángulos complementarios, suplementarios y opuestos

6.1 Razones trigonométricas de ángulos complementarios

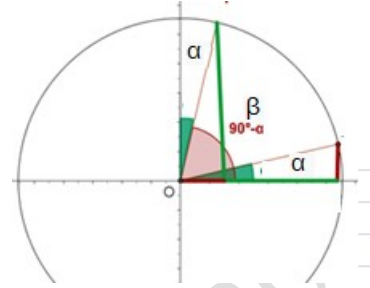
Ángulos complementarios son aquellos que sumados forman un ángulo recto

$$\alpha + \beta = 90; \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{Sen } \alpha = \cos \beta; \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{Cos } \alpha = \text{sen } \beta; \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \beta};$$



6.2 Razones trigonométricas de ángulos Suplementarios

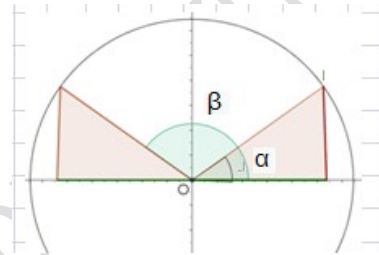
Ángulos suplementarios son aquellos que sumados forman un ángulo llano

$$\alpha + \beta = 180; \beta = 180 - \alpha;$$

$$\text{Sen } \alpha = \text{sen } \beta; \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{Cos } \alpha = -\cos \beta; \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{tg } \alpha = -\text{tg } \beta;$$



6.3 Razones trigonométricas de ángulos opuestos

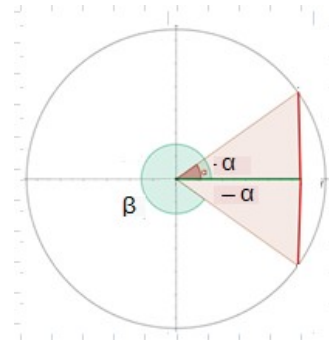
El ángulo opuesto de α es $-\alpha$;

El ángulo opuesto de 50 es -50 ;

$$\text{Sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha; \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{Cos } (-\alpha) = \cos \alpha; \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{tg } (-\alpha) = -\text{tg } \alpha;$$



6.4 Razones trigonométricas de ángulos mayores de 360°

Para calcular las razones trigonométricas de ángulos mayores de 360° , se divide el ángulo por 360 y se calculan las razones trigonométricas del resto de la división

Ej. Calcular el seno del ángulo de 390°

$$\begin{array}{r} 390 \quad 360 \\ \underline{30} \quad 1 \end{array}$$

$$\text{Sen } 390^\circ = \text{sen } 30^\circ;$$

Ej. Calcular el seno del ángulo de 1470°

$$\begin{array}{r} 1470 \quad 360 \\ \underline{30} \quad 4 \end{array}$$

$$\text{Sen } 1470^\circ = \text{sen } 30^\circ;$$

21. Ejercicios de trigonometría

Hallar las dimensiones de todas las incógnitas del triángulo de la figura.

Solución

$$\sin 48^\circ = \frac{h}{14}; h = 14 \sin 48^\circ;$$

$$h = 14 * 0,743; \mathbf{h = 10,404cm}$$

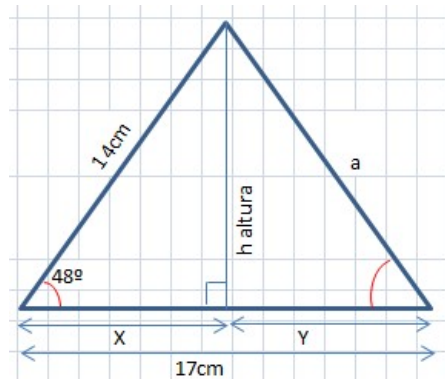
$$\cos 48^\circ = \frac{x}{14}; x = 14 * \cos 48^\circ;$$

$$x = 14 * 0,67; \mathbf{x = 9,37cm};$$

$$y = 17 - 9,37; \mathbf{y = 7,63cm};$$

$$a^2 = h^2 + y^2; a = \sqrt{h^2 + y^2}; a = \sqrt{10,4^2 + 7,63^2};$$

$$\mathbf{a = 12,9cm};$$



22. Ejercicios de trigonometría

Una antena de radio está sujeta al suelo por dos tirantes de acero. Con las medidas de la figura. Calcular la altura de la antena y la longitud de los tirantes.

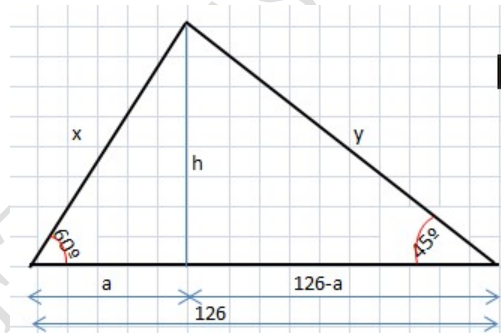
Solución

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{126 - a}; h = \tan 45^\circ * (126 - a);$$

$$\text{dado que } \tan 45^\circ = 1; h = 1 * (126 - a);$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{a}; h = \tan 60^\circ * a;$$

$$\text{dado que } \tan 60^\circ = 1,73; h = 1,73 * a;$$



Resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\left. \begin{array}{l} h = 126 - a; \\ h = 1,73a; \end{array} \right\} \begin{array}{l} 126 - a = 1,73a; 126 = 1,73a + a; 126 = 2,73a; a = 126/2,73 \\ \mathbf{a = 46,15m}; \end{array}$$

$$h = 1,73a; h = 1,73 * 46,15; \mathbf{h = 79,85m};$$

$$\sin 45^\circ = \frac{h}{y}; \text{dado que } \sin 45^\circ = 0,71; 0,71 = \frac{79,85}{y}; y = \frac{79,85}{0,71}; \mathbf{y = 112,92m}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{x}; \text{dado que } \sin 60^\circ = 0,866; 0,866 = \frac{79,85}{x}; x = \frac{79,85}{0,866};$$

$$\mathbf{x = 92,2 m};$$

23. Ejercicios de trigonometría

Calcular los valores que faltan en el ejercicio de la figura

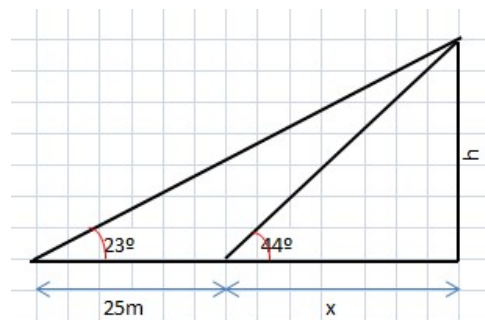
Solución

$$\tan 23^\circ = h/(25 + x);$$

$$\text{dado que } \tan 23^\circ = 0,42; 0,42 = \frac{h}{25 + x};$$

$$h = 0,42(25 + x); h = 10,61 + 0,42x$$

$$\tan 44^\circ = \frac{h}{x}; \text{dado que } \tan 44^\circ = 0,97; 0,97 = \frac{h}{x}; h = 0,97x$$



Resolvemos las dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned} h &= 10,61 + 0,42x; \\ h &= 0,97x \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} 10,61 + 0,42x = 0,97x; \quad 10,61 = 0,97x - 0,42x; \quad 10,61 = 0,55x; \\ x = \frac{10,61}{0,55}; \quad x = 19,29\text{m}; \\ h = 0,97x; \quad h = 0,97 * 19,29; \quad h = 18,63\text{m}; \end{array} \right.$$

24. Ejercicios de trigonometría

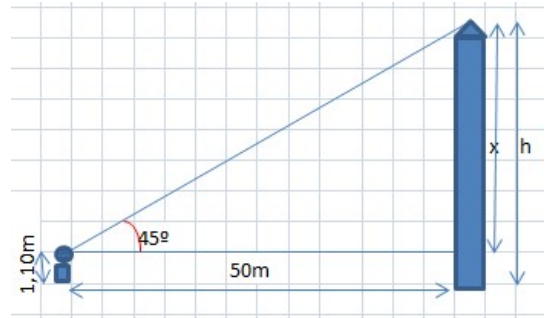
Antonio mide 1,10 m y está viendo la torre de su pueblo desde una distancia de 50m con un ángulo de 45° . Calcular la altura que tiene la torre.

Solución

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{x}{50}; \text{ dado que } \operatorname{tg} 45^\circ = 1;$$

$$1 = \frac{x}{50}; \quad x = 50\text{m}.$$

$$\text{La altura de la torre} = 50\text{m} + 1,10\text{m}; \quad h = 51,1\text{m}$$



25. Ejercicios de trigonometría

Desde un satélite artificial se ve la tierra bajo un ángulo de 140° . Calcular:

a) Distancia a la que se encuentra la tierra

b) Área de la posición de la tierra visible desde el satélite

Radio de la tierra $R = 6366\text{Km}$

Área de la esfera; $A = 4\pi r^2$

Solución

a) Distancia a la que se encuentra la tierra

$x + b = \text{radio de la tierra};$

h la altura a la que se encuentra el satélite

l es tangente a la circunferencia de la tierra y r perpendicular a l y forman un ángulo de 90°

$$\cos 20^\circ = \frac{r}{r+h}; \text{ dado que } \cos 20^\circ = 0,94; \quad 0,94 = \frac{6366}{6366+h}; \quad 0,94(6366+h) = 6366;$$

$$0,94h + 5982,1 = 6366; \quad h = \frac{6366 - 5982,1}{0,94}; \quad h = 408,6 \text{ km de altura está el satélite};$$

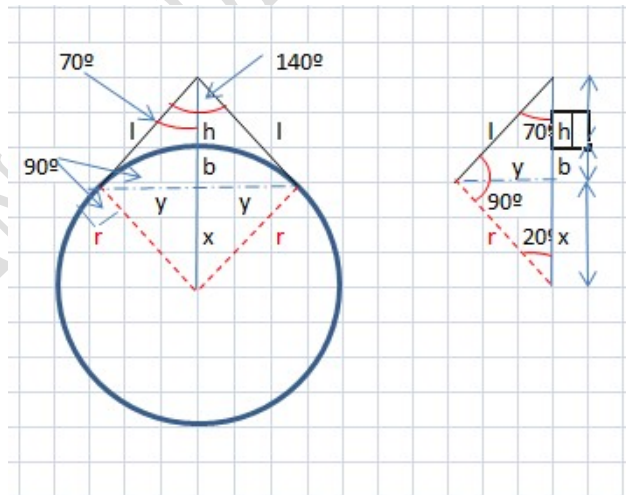
Calculamos el valor de x e y

$$\cos 20^\circ = \frac{x}{r}; \text{ dado que } \cos 20^\circ = 0,94; \quad 0,94 = \frac{x}{r}; \quad x = 0,94 * r; \quad x = 0,94 * 6366;$$

$$x = 5982,1 \text{ km};$$

$$\sin 20^\circ = \frac{y}{r}; \quad \sin 20^\circ = 0,342; \quad 0,342 * 6366 = y; \quad y = 2177,3 \text{ km};$$

$$b = r - x; \quad b = 6366 - 2177,3; \quad b = 4188,7\text{km};$$



b) El área que se ve desde el satélite es la marcada en morado

=====

Desarrollo de la fórmula del casquete esférico

Si el radio de la esfera es r , el radio de la base del casquete y , la altura del casquete b , el área de la superficie curva del casquete esférico es:

$$\text{Area} = 2\pi r h$$

El radio de la esfera se lo puede relacionar con el radio de la base del casquete y con la altura de este a través del teorema de Pitágoras:

$$(r - b)^2 + y^2 = r^2$$

$$r^2 + b^2 - 2rb + y^2 = r^2; \quad 2rb = r^2 - r^2 + b^2 + y^2$$

$$2br = b^2 + y^2; \quad r = \frac{b^2 + y^2}{2b};$$

Si remplazando esto en la fórmula del área del casquete esférico

$$A = 2\pi r b; \quad A = 2\pi \frac{b^2 + y^2}{2b} b; \quad A = \pi (b^2 + y^2)$$

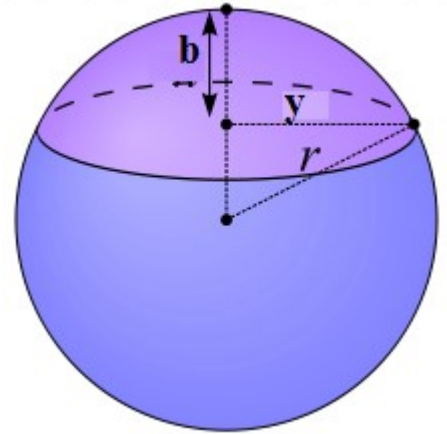
$$\text{Area} = \pi (b^2 + y^2)$$

=====

área del casquete esférico que vemos desde el satélite.

$$\text{Area} = \pi (b^2 + y^2)$$

$$\text{Area} = 3,1416 (4188,7^2 + 5982,1^2) = 167543178,7 \text{ Km}^2$$



26. Ejercicios de trigonometría

Comprueba con el teorema de Pitágoras que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo y halla el valor del ángulo α .

Solución

Si es un triángulo rectángulo ha de cumplirse el teorema de pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$24^2 + 7^2 = 25^2;$$

$$625 = 576 - 49; \quad 625 = 625; \text{ luego es un angulo recto}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{7}{24} = 0,291666; \quad \alpha = 16.2602011881^\circ$$

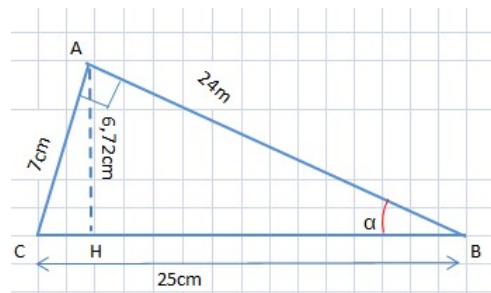
$$a^2 + b^2 = c^2;$$

$$24^2 + BH^2 = 6,72^2; \quad BH^2 = 576 - 45,2; \quad BH = \sqrt{530,84} = 23,04 \text{ cm}; \quad BH = 23,04 \text{ cm}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$6,72^2 + HC^2 = 7^2; \quad HC^2 = 49 - 45,2; \quad HC = \sqrt{3,84} = 1,96 \text{ cm}; \quad HC = 1,96 \text{ cm}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{6,72}{23,04} = 0,291666; \quad \alpha = 16.2602011881^\circ$$



27. Ejercicios de trigonometría

Halla el valor de los distintos segmentos en el triángulo rectángulo de la figura.

Solución

$$a^2 = 50^2 - 40^2$$

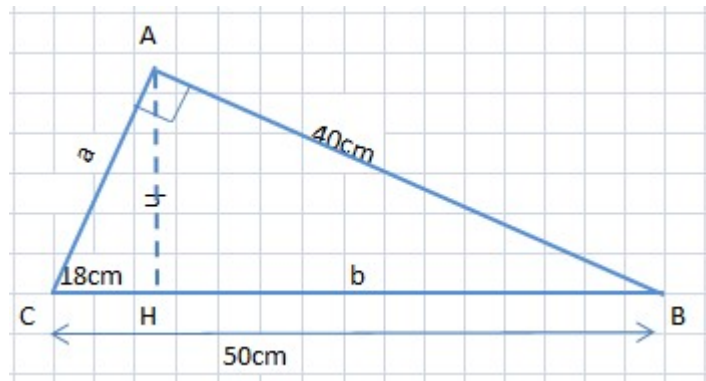
$$a^2 = 2500 - 1600; a^2 = 900;$$

$$a = 30 \text{ cm};$$

$$b = 50 - 18; b = 32 \text{ cm};$$

Aplicamos el teorema de la altura $\frac{h}{CH} = \frac{HB}{h}$;

$$\frac{h}{CH} = \frac{HB}{h}; \frac{h}{18} = \frac{32}{h}; h^2 = 32 * 18 = 576; h = \sqrt{576}; h = 24 \text{ cm};$$



28. Ejercicios de trigonometría

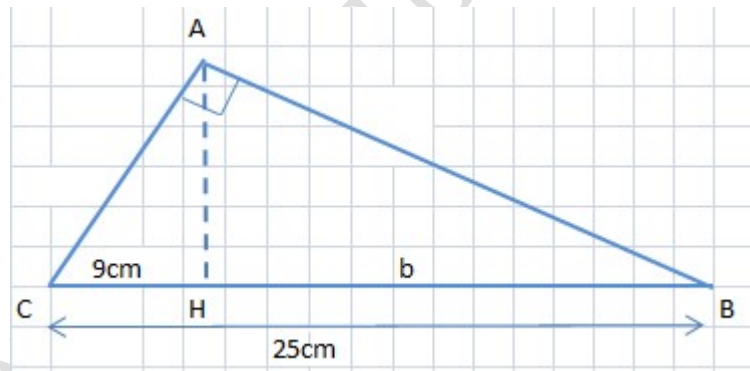
Sabiendo que la hipotenusa mide 25 cm y la proyección sobre la hipotenusa del cateto menor 9 cm. Halla el valor del cateto mayor.

Solución

$$b = 25 - 9; b = 16 \text{ cm};$$

Aplicamos el teorema del cateto.

$$\frac{b}{c} = \frac{c}{25}; \frac{16}{c} = \frac{c}{25}; c^2 = 25 * 16; c^2 = 400; c = 20 \text{ cm}$$



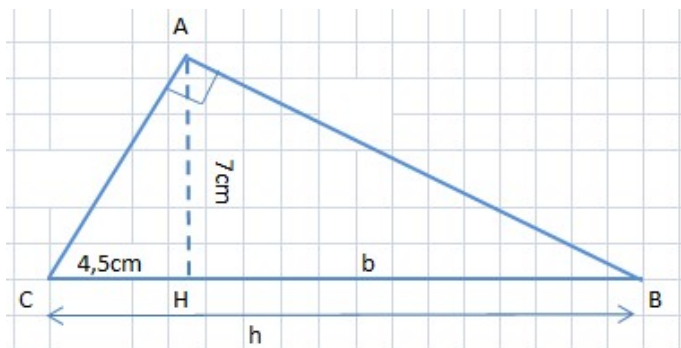
29. Ejercicios de trigonometría

La altura relativa a la hipotenusa mide 7 cm y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa 4,5 cm. Halla el valor de la hipotenusa.

Solución

Aplicamos el teorema de la altura.

$$\frac{h}{4,5} = \frac{b}{h}; h^2 = 4,5 * b; 7^2 = 4,5 * b; 49 = 4,5 * b; b = \frac{49}{4,5}; b = 10,89 \text{ cm}$$



La hipotenusa medirá $4,5 + 10,88 = 15,39 \text{ cm}$

30. Ejercicios de trigonometría

Calcula la altura y el área del siguiente triángulo rectángulo.

Solución

$$\cos 65^\circ = \frac{a}{18}; \quad a = 18 * \cos 65^\circ; \quad a = 7,6 \text{ cm}$$

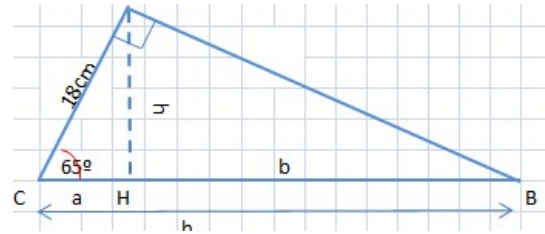
Aplicamos el teorema del cateto

$$\frac{18}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{18}; \quad 18^2 = 7,6 * \text{hipotenusa}; \quad \text{hipotenusa} = \frac{324}{7,6}; \quad \text{hipotenusa} = 42,6 \text{ cm}$$

$$\sin 65^\circ = \frac{h}{18}; \quad h = 18 * \sin 65^\circ; \quad h = 18 * 0,91; \quad h = 16,3 \text{ cm}$$

$$\text{Area del triángulo} = \frac{b * h}{2};$$

$$\text{Area del triángulo} = \frac{42,6 * 16,3}{2} = 347,19 \text{ cm}^2; \quad \text{Area del triángulo } 347,19 \text{ cm}^2$$

**31. Ejercicios de trigonometría**

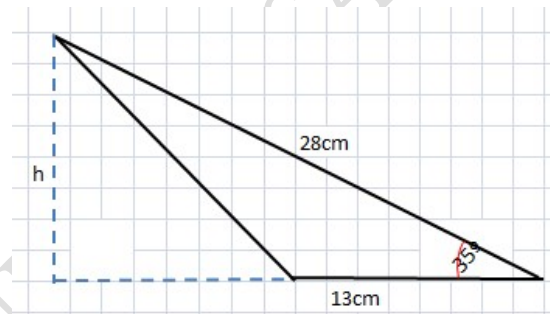
Calcula la altura y el área del siguiente triángulo.

Solución

$$\sin 35^\circ = \frac{h}{28}; \quad h = 28 * \sin 35^\circ;$$

$$h = 28 * 0,57; \quad h = 16,06 \text{ cm}$$

$$\text{Area del triángulo} = \frac{b * h}{2}; \quad \text{Area del triángulo} = \frac{13 * 16,06}{2} = 104,39 \text{ cm}^2;$$

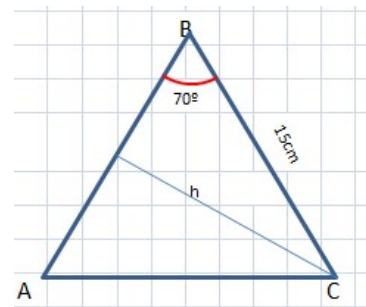
**32. Ejercicios de trigonometría**

Calcula la altura sobre el lado AB del siguiente triángulo.

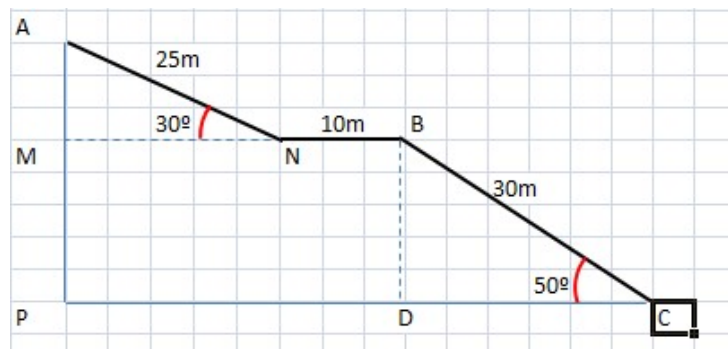
Solución

$$\sin 70^\circ = \frac{h}{15}; \quad h = 15 * \sin 70^\circ;$$

$$h = 15 * 0,939693; \quad h = 14,09 \text{ cm}$$

**33. Ejercicios de trigonometría**

Una escalera que accede a un túnel tiene la forma y las dimensiones que se indican en la figura. Calcula la profundidad del punto C



Solucion

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{AM}{25}; AM = 25 * \operatorname{sen} 30^\circ; AM = 25 * 0,5; AM = 12,5m;$$

$$\operatorname{sen} 50^\circ = \frac{BD}{30}; BD = 30 * \operatorname{sen} 50^\circ; BD = 30 * 0,766; BD = 22,98m;$$

$$\text{Profundidad del tunel} = AM + BD = 12,5 + 22,98; AP = 35,48m;$$

34. Ejercicios de trigonometría

Hallar el área del triangulo de la figura

Solucion

$$\cos 53^\circ = \frac{CD}{23}; CD = 23 * \cos 53^\circ = 23 * 0,6;$$

$$CD = 13,8 \text{ cm}$$

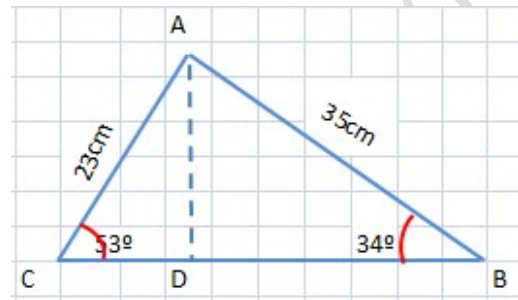
$$\cos 34^\circ = \frac{BD}{35}; BD = 35 * \cos 34^\circ = 35 * 0,83;$$

$$BD = 29,02 \text{ cm};$$

$$\text{Base} = CB = 13,8 + 29,02 = 42,86 \text{ cm};$$

$$\operatorname{Sen} 34^\circ = \frac{AD}{35}; AD = 35 * \operatorname{sen} 34^\circ = 35 * 0,56; AD = 19,57;$$

$$\text{Area} = \frac{\text{Base} * \text{altura}}{2} = \frac{42,86 * 19,57}{2} = 419,4 \text{ cm}^2; \text{Area} = 419,4 \text{ cm}^2$$



35. Ejercicios de trigonometría

Hallar el lado x y el área del triangulo rectángulo de la figura

Solucion

$$\cos 65^\circ = \frac{AD}{18}; AD = 18 * \cos 65^\circ;$$

$$AD = 18 * 0,42; AD = 7,61 \text{ cm};$$

$$\operatorname{sen} 65^\circ = \frac{BD}{18}; BD = 18 * \operatorname{sen} 65^\circ;$$

$$BD = 18 * 0,91; BD = 16,3;$$

Para calcular DC aplicamos el teorema de la altura

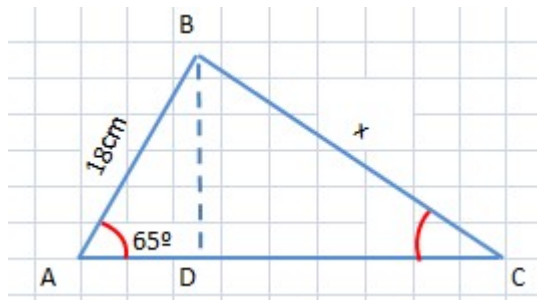
$$\frac{BD}{AD} = \frac{DC}{BD}; BD^2 = AD * DC; DC = \frac{BD^2}{AD} = \frac{16,3^2}{7,61} = \frac{266,13}{7,61}; DC = 35 \text{ cm};$$

$$\text{Base} = AC = AD + DC = 7,61 + 35 = 42,6 \text{ cm};$$

$$\text{Area} = \frac{\text{Base} * \text{altura}}{2} = \frac{42,6 * 16,3}{2} = 347,4 \text{ cm}^2; \text{Area} = 347,4 \text{ cm}^2$$

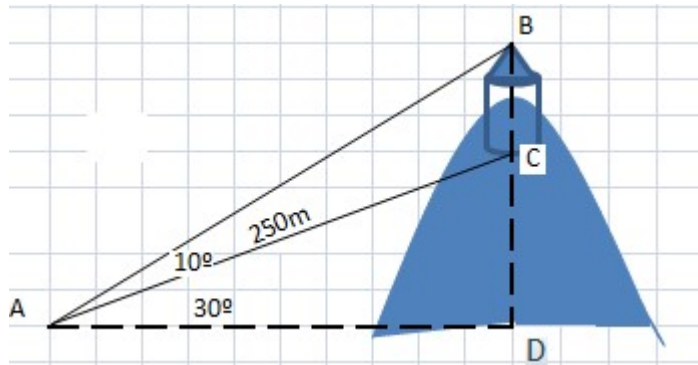
Para calcular x aplicamos el teorema del cateto

$$\frac{x}{AC} = \frac{DC}{x}; x^2 = 42,6 * 35 = 1490,04; x = \sqrt{1490,04} = 38,6 \text{ cm}; x = 38,6 \text{ cm}$$



Ejercicios de trigonometría

Calcular la altura del faro BC situado en lo alto de una colina. Desde el punto A el faro se ve con los ángulos que se indican. Para acceder al faro se usa un funicular cuyo cable tiene una longitud de 250m.



Solución

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{CD}{250}; CD = 250 * \text{sen} 30^\circ$$

$$CD = 0,5 * 250; CD = 125\text{m}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{AD}{250}; AD = 250 * \text{cos} 30^\circ = 250 * 0,87; AD = 216,5\text{m};$$

Calculamos AB

$$\text{cos } 40^\circ = \frac{AD}{AB}; AB = \frac{AD}{\text{cos } 40^\circ} = \frac{216,5}{0,77} = \frac{216,5}{0,77}; AB = 282,63\text{m};$$

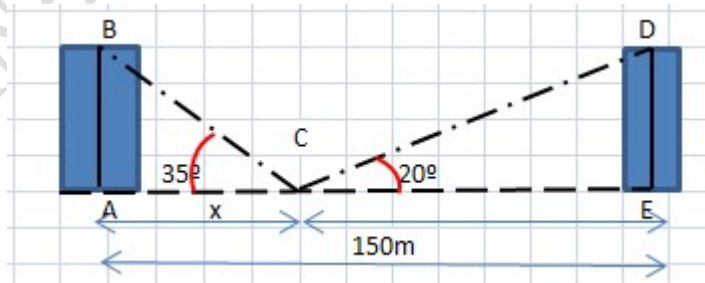
Calculamos BD

$$\text{sen } 40^\circ = \frac{BD}{AB}; BD = AB * \text{sen} 40^\circ = 282,63 * 0,64 = 181,67; BD = 181,67;$$

$$\text{Altura del faro BC} = BD - CD = 181,67 - 125; \text{Altura del faro} = 56,7\text{m};$$

36. Ejercicios de trigonometría

Dos edificios que tienen la misma altura están separados por 150m. Si me coloco en el suelo entre los dos edificios los veo con un ángulo de 35° y 20° . Calcular la altura de los edificios y la posición en que me encuentro. (considero despreciable mi altura)



Solución

$$\text{tg} 35^\circ = \frac{AB}{x}; AB = x * \text{tg} 35^\circ = 0,7x; AB = 0,7x$$

$$\text{tg} 20^\circ = \frac{DE}{150 - x}; DE = (150 - x) * \text{tg} 20^\circ = (150 - x)0,36; DE = (150 - x)0,36;$$

Como los dos edificios tienen la misma altura ha de cumplirse $AB = DE$;

$$AB = DE \Rightarrow 0,7x = (150 - x)0,36; 0,7x = 54 - 0,36x; 0,7x + 0,36x = 54; 1,06x = 54;$$

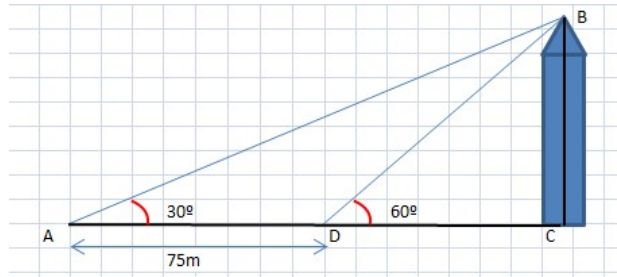
$$x = \frac{54}{1,06} = 50,94\text{m};$$

Calculamos la altura

$$\text{tg} 35^\circ = \frac{AB}{x}; AB = x * \text{tg} 35^\circ = 0,7x; AB = 0,7 * 50,94; AB(\text{altura}) = 35,66\text{m};$$

37. Ejercicios de trigonometría

Desde el suelo se ve la torre de la iglesia con un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 75 m a la torre el ángulo es de 60° . Hallar la altura de la torre.



Solución

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{BC}{DC}; BC = DC * \operatorname{tg} 60^\circ;$$

$$BC = 1,73DC;$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BC}{DC + 75}; BC = (DC + 75) * \operatorname{tg} 30^\circ; BC = (DC + 75) * 0,58; BC = 0,58DC + 43,3;$$

Resolvemos las dos ecuaciones

$$BC = 1,73DC$$

$$BC = 0,58DC + 43,3;$$

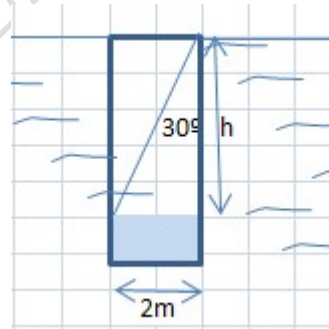
$$1,73DC = 0,58DC + 43,3; 1,73DC - 0,58DC = 43,3; 1,15DC = 43,3; DC = \frac{43,3}{1,15};$$

$$DC = 37,65\text{m};$$

$$\text{Altura de la torre; } BC = 1,73DC; BC = 1,73 * 37,65; BC = 65,13\text{m (Altura de la torre)}$$

38. Ejercicios de trigonometría

Calcular la profundidad de un pozo de 2m de ancho si vemos el borde opuesto del fondo con un ángulo de 30° .



Solución

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2}{h}; h = \frac{2}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{2}{0,58}$$

$$\text{Profundidad del pozo } h = 3,45\text{m}$$

39. Ejercicios de trigonometría

Calcular el área del trapecio de la figura.

Solución

Calculamos la altura, h

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{3}; h = \operatorname{sen} 60^\circ * 3;$$

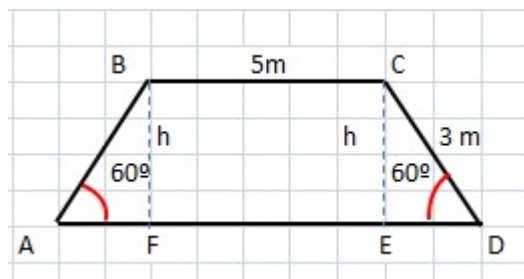
$$h = 2,6\text{m};$$

$$\cos 60^\circ = \frac{DE}{3}; DE = 3 * \cos 60^\circ; DE = 3 * 0,5; DE = 1,5\text{m}$$

$$\text{Logitud de la base mayor} = 5 + 1,5 + 1,5 = 8\text{m};$$

$$\text{Area del trapecio isosceles} = \frac{B + b}{2} * h;$$

$$\text{Area del trapecio isosceles} = \frac{8 + 5}{2} * 2,6 = 16,9 \text{ m}^2;$$



40. Ejercicios de trigonometría

Calcular el volumen de la pirámide cuadrangular regular, de la figura, sabiendo que el lado de la base mide 6 cm y el ángulo APD es de 60° .

Solución

Volumen de la pirámide

$$\frac{\text{Area de la base} \cdot \text{altura}}{3}$$

$$\text{Area de la base} = 6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$$

Si el ángulo APD mide 60°

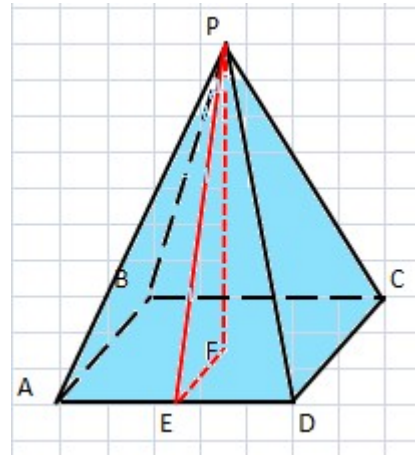
El ángulo EPF medirá la mitad 30°

EF es la mitad del lado luego valdrá 3cm

$$\text{tg} 30^\circ = \frac{EF}{PF}; PF = \frac{EF}{\text{tg} 30^\circ} = \frac{3}{0,58}; PF = 5,2 \text{ cm (Altura de la pirámide);}$$

Volumen de la pirámide

$$\frac{\text{Area de la base} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{36 \cdot 5,2}{3} = 62,4 \text{ cm}^3$$



41. Ejercicios de trigonometría

Calcular el ángulo que forma la diagonal, de un cubo regular de 6cm de lado, con la diagonal de la base.

Solución

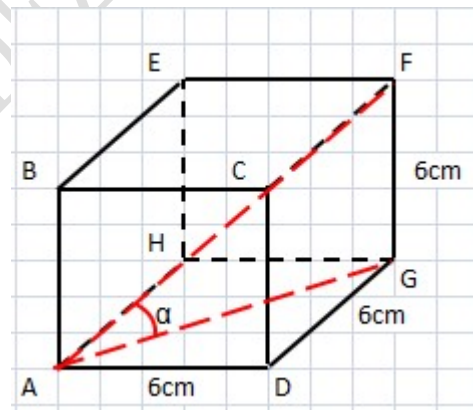
Al ser un cubo la diagonal AG la calculamos con el teorema de Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2; 6^2 + 6^2 = AG^2;$$

$$2 \cdot 6^2 = AG^2; AG = 6\sqrt{2}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{FG}{AG}; \text{tg } \alpha = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{El arco tg } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ es } 35,26^\circ$$



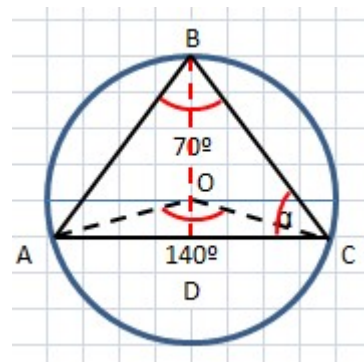
42. Ejercicios de trigonometría

En una circunferencia de 6cm de radio inscribimos un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual mide 70° . Hallar el perímetro y el área del triángulo inscrito.

Solución

- Área del triángulo

Si el ángulo ABC mide 70° el ángulo central AOC medirá 140° por lo que el ángulo DOC medirá 70°



$$\text{sen} 70^\circ = \frac{DC}{OC}; (OC = \text{radio} = 6 \text{ cm}); \text{sen} 70^\circ = \frac{DC}{6}; DC = 6 \cdot \text{sen } 70^\circ = 6 \cdot 0,94;$$

$$DC = 5,64\text{cm};$$

$$AC \text{ (la base del triangulo)} = 5,64 * 2 = 11,28\text{cm}$$

$$DB \text{ (Altura del triangulo)} = DO + OB = DO + 6;$$

$$\text{El angulo OCD medira } 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ;$$

$$\text{sen}20^\circ \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{6}; OD = 6 * \text{sen}20^\circ = 6 * 0,34; OD = 2,05\text{cm};$$

$$BD \text{ (altura del triangulo)} = 6 + 2,05 = 8,05\text{cm};$$

$$\text{Area del triangulo} = \frac{B * h}{2};$$

$$\text{Area} = \frac{11,28 * 8,05}{2} = 45,4 \text{ cm}^2; \text{Area} = 45,4 \text{ cm}^2;$$

- Perimetro del triangulo;

$$\alpha = 180 - \left(90 + \frac{70}{2}\right) = 55^\circ$$

$$\text{sen}55^\circ = \frac{BD}{BC}; \text{sen}55^\circ = \frac{8,05}{BC}; BC = \frac{8,05}{\text{sen}55^\circ}; BC = \frac{8,05}{0,82}; BC = 9,82\text{cm}$$

$$\text{Perimetro} = AB + BC + CA = 9,82 + 9,82 + 11,28 = 30,92\text{cm};$$

$$\text{Perimetro} = 30,92;$$