

Exámenes acceso a la universidad mayores de 25 años (2019)

Contenido

1	EXAMEN 2019 A	2
2	EXAMEN 2019 B	9
3	EXAMEN 2019 C	18
4	EXAMEN 2019 D.....	24

1 Examen 2019 A

1. Ejercicio

- a) Halle la ecuación del plano que es perpendicular a la recta $r(x, y, z) = (1 + 2t, -t, 2t)$ y que contiene al punto $P(3, -1, 2)$
- b) Halle la distancia del punto $P(7, -2, -6)$ a la recta $r = (5 + 2t, 2 + 2t, -1 + t)$
- c) Hallar el área del paralelogramo con vértices en los puntos $O(0,0,0)$, $P_1(1,2,3)$, $P_2(1,1,1)$ y $Q(2,3,4)$

Solución

- a) Halle la ecuación del plano que es perpendicular a la recta $r(x, y, z) = (1 + 2t, -t, 2t)$

$$r = \begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = -t; \\ z = 2t; \end{cases} \text{ vector director } \vec{v} = (2, -1, 2)$$

Si el plano es perpendicular a la recta tendrá el mismo vector director $\vec{v} = (2, -1, 2)$

$Ax + By + Cz + D = 0$; $2x - y + 2z + D = 0$ como ha de contener al punto $P(3, -1, 2)$

Cumplirá la ecuación del plano. Sustituyo

$$2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + D = 0; 6 + 1 + 4 + D = 0; ; D = -11$$

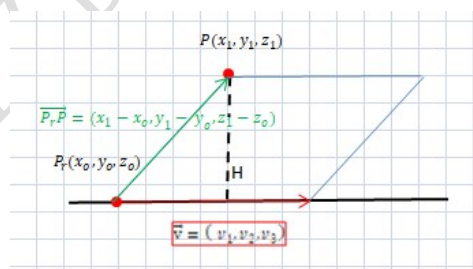
El plano será $2x - y + 2z - 11 = 0$;

- b) Halle la distancia del punto $P(7, -2, -6)$ a la recta $r = (5 + 2t, 2 + 2t, -1 + t)$

$$H = \frac{|\vec{P_r P} * \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{v} = (2, 2, 1)$$

$$\vec{P_r P} = (7 - 5, -2 - 2, -6 - (-1)) = (2, -4, -5)$$



$$|\vec{P_r P} * \vec{v}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -6i + 12j - 12k$$

$$|\vec{P_r P} * \vec{v}| = \sqrt{(-6)^2 + (12)^2 + (-12)^2} = \sqrt{36 + 144 + 144} = \sqrt{324} = 18$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (1)^2} = 3;$$

$$H = \frac{|\vec{P_r P} * \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{18}{3} = 6$$

- c) Hallar el área del paralelogramo con vértices en los puntos $O(0,0,0)$, $P_1(1,2,3)$, $P_2(1,1,1)$ y $Q(2,3,4)$

$$\vec{OP_1} = (1 - 0, 2 - 0, 3 - 0) = (1, 2, 3)$$

$$\vec{OP_2} = (1 - 0, 1 - 0, 1 - 0) = (1, 1, 1)$$

$$\vec{OQ} = (2, 3, 4)$$

Dado que $\vec{OP_1} + \vec{OP_2} = \vec{OQ}$; $(1, 2, 3) + (1, 1, 1) = (2, 3, 4)$ estos puntos forman un paralelogramo

El área del paralelogramo = producto vectorial de $\vec{OP_1} * \vec{OP_2}$

$$|\vec{OP_1} * \vec{OP_2}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1i + 2j - 1k$$

$$|\vec{OP_1} * \vec{OP_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

2. Ejercicio

a) Halle la valor minimo de $f(x) = 3x + \frac{12}{x}$ cuando $x > 0$;

b) Halle $\int_0^4 \frac{3x}{2x+1} dx$

c) Halle $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{3x \operatorname{sen} x}$

Solución

a) Halle la valor minimo de $f(x) = 3x + \frac{12}{x}$ cuando $x > 0$;

$$f'(x) = 3 - \frac{12}{x^2} \text{ igualamos a } 0 \Rightarrow f'(x) = 3 - \frac{12}{x^2} = 0; \frac{3x^2 - 12}{x^2} = 0; 3x^2 - 12 = 0; x = 2$$

El valor minimo será en $x = 2$; $f(x) = 3x + \frac{12}{x}$; $f(2) = 3 \cdot 2 + \frac{12}{2} = 6 + 6 = 12$; $f(2) = 12$;

b) Halle $\int_0^4 \frac{3x}{2x+1} dx$; intentamos convertir la integral en una del 2º tipo Ln

$$2^\circ \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C;$$

$$\frac{3x}{2x+1} = 3 \frac{x}{2x+1} \text{ multiplico numerador y denominador por } 2 = \frac{3}{2} \frac{2 \cdot x}{2x+1}$$

para que el numerador quede como el denominador sumo y resto 1 al numerador

$$\frac{3}{2} \frac{2x+1-1}{2x+1} = \frac{3}{2} \left(\frac{2x+1}{2x+1} - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2x+1}$$

$$\int_0^4 \frac{3x}{2x+1} dx = \int_0^4 \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} \right) dx = \int_0^4 \frac{3}{2} dx - \int_0^4 \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} dx = \frac{3}{2} \left(\int_0^4 1 dx - \int_0^4 \frac{1}{2x+1} dx \right) =$$

$$\left[\frac{3}{2} x - \frac{3}{2} \ln(2x+1) \right]_0^4 = \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{3}{2} \ln(2 \cdot 4 + 1) = 6 - \frac{3}{2} \ln 9;$$

$$\int_0^4 \frac{3x}{2x+1} dx = 6 - \frac{3}{2} \ln 9$$

c) Halle $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{3x \operatorname{sen} x} =$

$$\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{3x \operatorname{sen} x} = \frac{1^2 - (\cos x)^2}{3x \operatorname{sen} x} = \frac{1 - (\cos x)^2}{3x \operatorname{sen} x}; \text{ dado que } (\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1 - (\cos x)^2}{3x \operatorname{sen} x} = \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{3x \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{3x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \text{ es un limite especial } = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{3x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{3x} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{3x \operatorname{sen} x} = \frac{1}{3}$$

3. Ejercicio

a) Halle la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$;

b) discuta la resolubilidad del siguiente sistem segun los valores de λ

$$\begin{cases} x + y + z = -3 \\ -2x - 4y + 3z = 16 \\ 2x + 2y + \lambda z = -4 \end{cases}$$

c) resolver el sistem del apartado anterior para $\lambda = 3$;

Solución

a) Halle la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$;

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}; \text{ La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t;$$

$$|A| = 10 - 6 = 4;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

b) discuta la resolubilidad del siguiente sistem segun los valores de λ

$$\begin{cases} x + y + z = -3 \\ -2x - 4y + 3z = 16 \\ 2x + 2y + \lambda z = -4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & 3 & 16 \\ 2 & 2 & \lambda & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 = E_2 + 2E_1 \\ E_3 = E_3 - 2E_1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & -4 + 6 \end{array} \right)$$

$\lambda - 2 = -4 + 6; \lambda - 2 = 2; \Rightarrow \lambda \neq 2$; Pues para $\lambda = 2$ el sistema es incompatible

c) resolver el sistem del apartado anterior para $\lambda = 3$;

$$\begin{cases} x + y + z = -3 \\ -2x - 4y + 3z = 16 \\ 2x + 2y + \lambda z = -4 \end{cases} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & -4 + 6 \end{array} \right); \text{ para } \lambda = 3$$

$$\begin{array}{ccc} 1x & 1y & 1z = -3 \\ 0 & -2y & 5z = 10 \\ 0 & 0 & (3-2)Z = 2 \end{array} \Rightarrow$$

$$z = 2;$$

$$-2y + 5z = 10; -2y + 5 * 2 = 10; y = 0;$$

$$x + y + z = -3; x + 0 + 2 = -3; x = -5;$$

4. Ejercicio

En una encuesta sobre redes sociales en España determina que el 56% usa YouTube, el 35% usa Twitter y el 21% no usa ni YouTube ni Twitter

a) ¿Cual es la posibilidad de que al elegir al azar un usuario lo sea de las dos redes YouTube ni Twitter?;

b) Si se sabe que un usuario los es de Twitter ¿Cual es la posibilidad de que lo sea tambien de YouTube?;

c) ¿Cual es la posibilidad de que al elegir al azar dos usuario uno cualquiera los sea de Twitter y el otro no?;

Solución

a) ¿Cual es la posibilidad de que al elegir al azar un usuario lo sea de las dos redes YouTube ni Twitter?;

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B); P(Twitter \cap Youtube) = 0,56 + 0,35 - 0,79 = 0,12$$

b) Si se sabe que un usuario los es de Twitter ¿Cuál es la posibilidad de que lo sea también de YouTube?;

$$P(\text{Twitter}|\text{youtube}) = \frac{P(\text{Twitter} \cap \text{youtube})}{P(\text{youtube})} = \frac{0,12}{0,35} = 0,34285$$

c) ¿Cuál es la posibilidad de que al elegir al azar dos usuarios uno cualquiera los sea de Twitter y el otro no?;

$$\text{El primero sea de Twitter y el 2º no} \Rightarrow P(1^{\text{º}} \text{twitter}) * P(\overline{2^{\text{º}} \text{No sea de twitter}}) = 0,35 * 0,65 = 0,2275$$

$$\text{El 2º sea de Twitter y el 1º no} \Rightarrow P(2^{\text{º}} \text{twitter}) * P(\overline{1^{\text{º}} \text{No sea de twitter}}) = 0,65 * 0,35 = 0,2275$$

$$P(\text{un usuario sea twitter}) = 0,2275 + 0,2275 = 0,455$$

5. Ejercicio

a) Hallar la distancia del origen al plano $2x + y + 4z = 7$

b) Hallar el punto de la recta $r = (x, y, z) = (t, 5 - t, -1 + t)$ más próximo al origen

c) ¿dados los puntos $O(0,0,0)$, $P_1(0,1,1)$, $P_2(2,0,1)$ y $P_3(3,1,0)$ Hallar el volumen del paralelepípedo del que sus aristas son $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$, $\overline{OP_3}$,

Solución

a) Hallar la distancia del origen al plano $2x + y + 4z = 7$

Distancia de un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y el plano $\lambda = Ax + By + Cz + D = 0$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \lambda) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \lambda) = \frac{|2 * 0 + 1 + 0 * 4 * 0 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{4 + 1 + 16}} = \frac{7}{\sqrt{21}}$$

$$\text{si quiero quitar fracciones } \frac{7}{\sqrt{21}} = \frac{7\sqrt{21}}{\sqrt{21}\sqrt{21}} = \frac{7\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

b) Hallar el punto de la recta $r = (x, y, z) = (t, 5 - t, -1 + t)$ más próximo al origen

$\vec{v}_{dr} = (1, -1, 1)$; Un plano perpendicular a la recta será $\lambda = 1x - 1y + 1z + D = 0$;

Si ha de pasar por el origen $(0,0,0)$ $\lambda = 1 * 0 - 1 * 0 + 1 * 0 + D = 0$; $\Rightarrow D = 0$

plano perpendicular a la recta $\lambda = x - y + z = 0$

intersección recta plano $= r = (x, y, z) = (t, 5 - t, -1 + t)$ y $\lambda = x - y + z = 0$

$$r = (x, y, z) = (t, 5 - t, -1 + t) \begin{cases} x = t \\ y = 5 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \text{ Sustituyo en el plano}$$

$$\lambda = x - y + z = 0 \Rightarrow t - (5 - t) + (-1 + t) = 0; t - 5 + t - 1 + t = 0; 3t - 6 = 0; t = 2$$

$$\text{para } t = 2 \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - 2; y = 3 \\ z = -1 + 2; z = 1 \end{cases} \text{ El punto pedido será } (2, 3, 1)$$

c) ¿dados los puntos $O(0,0,0)$, $P_1(0,1,1)$, $P_2(2,0,1)$ y $P_3(3,1,0)$ Hallar el volumen del paralelepípedo del que sus aristas son $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$, $\overline{OP_3}$,

$$\overline{OP_1} = (0,1,1) - (0,0,0) = (0 - 0, 1 - 0, 1 - 0) = (0,1,1)$$

$$\overline{OP_2} = (2,0,1) - (0,0,0) = (2 - 0, 0 - 0, 1 - 0) = (2,0,1)$$

$$\overline{OP_3} = (3,1,0) - (0,0,0) = (3 - 0, 1 - 0, 0 - 0) = (3,1,0)$$

$$\text{Volumen} = \text{lado} * \text{lado} * \text{lado} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 3 - 0 - 0 - 0 = 5$$

6. Ejercicio

Sea $f(x) = (2x + 3)e^{\frac{x}{2}}$

a) Hallar los puntos criticos de $f(x)$

b) Decida si $f(x)$ tienen extremos absolutos o extremos relativos y en su caso obténgalos.

c) Halle $\int_0^2 f(x)dx$

Solución

a) Hallar los puntos criticos de $f(x)$. Para eso hallamos la priemera derivada

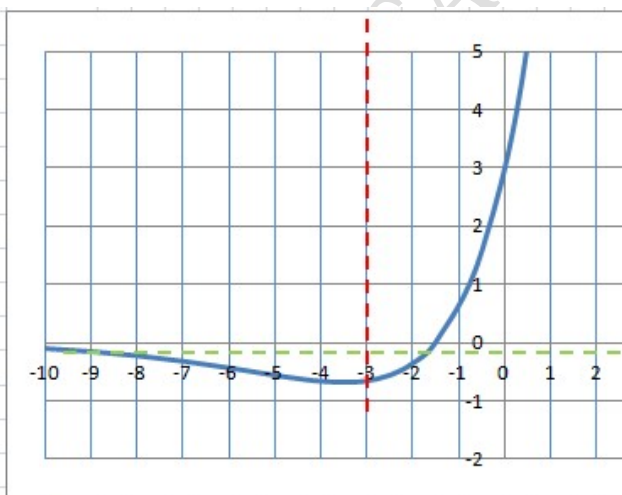
$$f(x) = (2x + 3)e^{\frac{x}{2}}; f'(x) = 2 * e^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{x}{2}\right)' e^{\frac{x}{2}} * (2x + 3) = 2 * e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} * e^{\frac{x}{2}} * (2x + 3) =$$

$$2 * e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} * \left(x + \frac{3}{2}\right) = e^{\frac{x}{2}} \left(2 + x + \frac{3}{2}\right) = e^{\frac{x}{2}} \left(x + \frac{7}{2}\right) \text{ igualamos 0 para ver los puntos criticos}$$

$$e^{\frac{x}{2}} \left(x + \frac{7}{2}\right) = 0; \Rightarrow x + \frac{7}{2} = 0; x = -3,5$$

b) Decida si $f(x)$ tienen extremos absolutos o extremos relativos y en su caso obténgalos.

x	y
-10	-0,11455
-9	-0,16663
-8	-0,2381
-7	-0,33217
-6	-0,44808
-5	-0,57459
-4,8	-0,59874
-4,3	-0,65231
-4,1	-0,66942
-3,9	-0,68292
-3,7	-0,69184
-3,5	-0,6951
-3,3	-0,69138
-3	-0,66939
-2,5	-0,57301
-2	-0,36788
-1,5	0
-0,5	1,557602



Dando valores vemos que a la derecha e izquierda del punto critico la funcion crece. Luego no hay maximos relativos. Hay un minimo absoluto en $x = -3,5$

c) Halle $\int_0^2 f(x)dx$

$$\int_0^2 (2x + 3)e^{\frac{x}{2}} dx; \text{ aplicamos la integracion por partes}$$

$$\int (2x + 3)e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$u = (2x + 3); \text{ derivamos } du = 2 dx$$

$$dv = e^{\frac{x}{2}} dx; \text{ integramos } \int dv = \int e^{\frac{x}{2}} dx; v = 2e^{\frac{x}{2}}$$

$$\text{Aplicamos la formula } \int u dv = uv - \int v du \Rightarrow \int u dv = (2x + 3)2 e^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} 2 dx =$$

$$\int u \, dv = (2x+3)2 * e^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} * 2 \, dx = (2x+3)2 * e^{\frac{x}{2}} - \int 4e^{\frac{x}{2}} \, dx = (2x+3)2 * e^{\frac{x}{2}} - 4(2e^{\frac{x}{2}})$$

$$(2x+3)2 * e^{\frac{x}{2}} - 4(2e^{\frac{x}{2}}) = (4x+6) * e^{\frac{x}{2}} - 8e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}(4x+6-8) = e^{\frac{x}{2}}(4x-2)$$

$$\int_0^2 (2x+3)e^{\frac{x}{2}} \, dx = \left[e^{\frac{x}{2}}(4x-2) \right]_0^2 = e^{\frac{2}{2}}(4*2-2) - e^{\frac{0}{2}}(4*0-2) = 6e + 2$$

$$\int_0^2 (2x+3)e^{\frac{x}{2}} \, dx = 6e + 2$$

7. Ejercicio

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & \lambda \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide hallar:

- El determinante de la matriz A
- El valor de λ para el que la matriz A no tiene inversa.
- Matriz inversa de A cuando $\lambda = 10$

Solución

- El determinante de la matriz A

$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & \lambda \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Hallamos el determinante y vemos si hay valores de λ

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & \lambda \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 20 + 0 + 2\lambda = -22 + 2\lambda; \text{ la matriz no tiene inversa si el determinante es } 0$$

$$-22 + 2\lambda = 0; \lambda = 11$$

- El valor de λ para el que la matriz A no tiene inversa.

La matriz no tiene inversa para $\lambda = 11$

- Matriz inversa de A cuando $\lambda = 10$

La matriz Inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t$;

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 20 + 0 + 2 * 10 = -2;$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} -1 & +4 & 2 \\ 5 & -18 & 10 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & -18 & -4 \\ 2 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & -18 & -4 \\ 2 & 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Ejercicio

Se sabe que en un lote muy grande de bombillas, el 5% son defectuosas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer al azar dos bombillas del lote ninguna sea defectuosa.
- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer al azar cuatro bombillas al menos una sea defectuosa.
- Si se extraen 200 bombillas del lote, ¿Cuál es la probabilidad de que ocho o más sean defectuosas.

Solución

Regla de la multiplicación La regla de la multiplicación es un proceso que se utiliza cuando se quiere calcular la probabilidad de que 2 o más sucesos independientes pasen al mismo tiempo.

$$P(A) = P(a) * P(b) * P(c) \dots * P(n)$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer al azar dos bombillas del lote ninguna sea defectuosa.

Al ser independientes $P(\text{al extraer 2 bombillas del lote ninguna sea defectuosa})$

$$= (1 - 0,5)(1 - 0,5) = 0,9025$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer al azar cuatro bombillas al menos una sea defectuosa.

pueden ser defectuosa la 1ª, 2ª, 3ª o la 4ª o puede haber 1, 2, 3 o las cuatro malas

$$\text{La probabilidad de que no haya ninguna mala} = (1 - 0,05)^4 = ,000000000619$$

$$P(\text{de que no haya ninguna bombilla de las 4 mala}) = (1 - 0,12)^{10} = 0,81450625$$

$$P(\text{de que haya al menos una mala}) = 1 - (1 - 0,05)^4 = 0,18549375$$

- Si se extraen 200 bombillas del lote, ¿Cuál es la probabilidad de que ocho o más sean defectuosas.

Distribución de probabilidad normal estándar

El número de bombillas defectuosas normal X sería; $X = 200 * 0,5 = 10$;

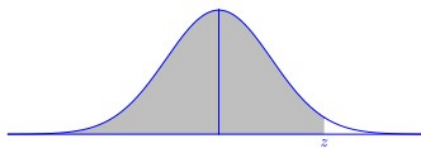
La desviación típica $= \sqrt{200 * 0,5 * 0,5} = 3,08$;

$$P(x \geq 7,5) = P\left(Z \geq \frac{7,5 - 10}{3,08}\right) = P(Z \geq -0,81) = 1 - P(Z \geq 0,81) = 1 - 0,209 = 0,791;$$

según la tabla de distribución normal ya que es simétrica respecto a 0

$$P(Z \geq -0,81) = 0,7910; \text{ se toma la fila } 0,8 \text{ y la columna } 0,01$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

2 Examen 2019 B

1. Ejercicio

Se considera el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro m

$$\begin{cases} x & + y & + z = m + 3 \\ mx & + y & (m-1)z = m \\ x & my & + z = m \end{cases}$$

a) Discutir según los valores de m

b) resolver para $m = -2$;

Solución

a) Discutir según los valores de m

$$\begin{cases} x & + y & + z = m + 3 \\ mx & + y & (m-1)z = m \\ x & my & + z = m \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+3 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & m & 1 & m \end{array} \right) \begin{matrix} E_1 \\ E_2 = E_2 - mE_1 \\ E_3 = E_3 - E_1 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+3 \\ 0 & 1-m & m-1-m & m-m(m+3) \\ 0 & m-1 & 0 & m-(m+3) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+3 \\ 0 & 1-m & m-1-m & m-m(m+3) \\ 0 & m-1 & 0 & m-(m+3) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+3 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2-2m \\ 0 & m-1 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

Para $m \neq 1$ el sistema es compatible indeterminado

Para $m \neq 1$ el sistema es compatible indeterminado

Despejo en E_3 ; $(m-1)y = -3$; $y = -\frac{3}{m-1}$

Despejo en E_2 ; $(1-m)y - 1z = -m^2 - 2m$;

sustituyo y ; $(1-m)\left(-\frac{3}{m-1}\right) - z = -m^2 - 2m$; $z = m^2 + 2m + (1-m)\left(-\frac{3}{m-1}\right)$

$z = m^2 + 2m - \frac{3-3m}{m-1}$; $z = m^2 + 2m - \frac{3-3m}{m-1}$

Despejo en E_1 ; $x + y + z = m + 3$; $x = m + 3 + \frac{3}{m-1} - m^2 - 2m + \frac{3-3m}{m-1}$

Para $m = 1$ el sistema es incompatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+3 \\ 0 & 1-m & m-1-m & m-m(m+3) \\ 0 & m-1 & 0 & m-(m+3) \end{array} \right) \text{ sustituyo } m = 1;$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1+3 \\ 0 & 1-1 & 1-1-1 & 1-1(1+3) \\ 0 & 1-1 & 0 & 1-(1+3) \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Despejo en E_3 ; $0 + 0 + 0 = 3$ el sistema es incompatible

b) resolver para $m = -2$;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right) \begin{matrix} E_1 \\ E_2 = E_2 + 2E_1 \\ E_3 = E_3 - E_1 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

E_3 ; $0x - 3y + 0z = -3$; $y = 1$

E_2 ; dado que $y = 1 \Rightarrow 0x + 3y - z = 0$; $3 \cdot 1 - z = 0$; $3 - z = 0$; $z = 3$;

E_1 ; dado que $y = 1$; $z = 3 \Rightarrow x + y + z = 1$; $x + 1 + 3 = 1$; $x = -3$;

Solución $x = -3$; $y = 1$, $z = 3$

Otra forma es calcularlo partiendo de los valores de x, y, z obtenidos

$$\text{Para } m = -2 \begin{cases} x = m + 3 + \frac{3}{m-1} - m^2 - 2m + \frac{3-3m}{m-1} \\ y = -\frac{3}{m-1} \\ z = m^2 + 2m - \frac{3-3m}{m-1} \end{cases} \quad \text{sustituyo } m = -2$$

$$\begin{cases} x = (-2) + 3 + \frac{3}{(-2)-1} - (-2)^2 - 2(-2) + \frac{3-3(-2)}{(-2)-1} \\ y = -\frac{3}{(-2)-1} \\ z = (-2)^2 + (-2) - \frac{3-3(-2)}{(-2)-1} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - 1 - 4 + 4 - 3 = -3; x = -3 \\ y = 1 \\ z = 4 - 4 + 3 = 3; z = 3 \end{cases}$$

2. Ejercicio

Considera las funciones $f(x) = e^{2x} - 1$

y $g(x) = x$;

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) Determinar el area comprendido entre el eje horizontal y la recta $x = -1$ y $x = 1$ y la curva $f(x)$

Solución

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \frac{e^{2 \cdot 0} - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

Calculamos limite por la derecha $\lim_{x \rightarrow -0,0001} \frac{e^{2 \cdot (-0,0001)} - 1}{(-0,0001)} = 2$

Calculamos limite por la izquierda $\lim_{x \rightarrow 0,0001} \frac{e^{2 \cdot 0,0001} - 1}{0,0001} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$$

b) Determinar el area comprendido entre el eje horizontal y las recta $x = -1$ y $x = 1$ y la curva $f(x)$

$$\int_{-1}^1 e^{2x} - 1 \, dx = - \int_{-1}^0 e^{2x} - 1 \, dx + \int_0^1 e^{2x} - 1 \, dx$$

$$\int_{-1}^0 e^{2x} - 1 \, dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - x \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 0} - 0 - \left(\frac{1}{2} e^{2 \cdot (-1)} - 1 \right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2e^2} + 1 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2} - 1$$

$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2e^2} \right) = \text{hay que cambiar el signo pues la curva esta debajo del eje } X$$

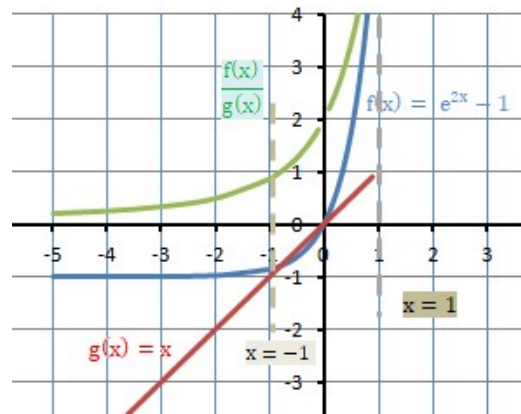
$$- \int_{-1}^0 e^{2x} - 1 \, dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2e^2} \right)$$

$$\int_0^1 e^{2x} - 1 \, dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - x \right]_0^1 = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 1} - 1 - \left(\frac{1}{2} e^{2 \cdot 0} - 0 \right) = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 1} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 1} - \frac{3}{2}$$

$$\int_{-1}^1 e^{2x} - 1 \, dx = - \int_{-1}^0 e^{2x} - 1 \, dx + \int_0^1 e^{2x} - 1 \, dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2e^2} \right) + \left(\frac{1}{2} e^{2 \cdot 1} - \frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} e^2 - 1 = 0,067667 + 3,694528 - 1 = 2,7621956;$$

$$\int_{-1}^1 e^{2x} - 1 \, dx = 2,7621956$$



3. Ejercicio

Dada la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 3}$$

- Calcular sus asíntotas
- calcula y clasifica sus extremos relativos

Solución

- Calcular sus asíntotas

Asíntota vertical

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 3}; \text{ la función se anula en } x = -3$$

Asíntota vertical en $x = -3$

Asíntota Horizontal

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 3}; \text{ para calcularlo hallamos el límite de la función cuando } x \text{ tiende a } \pm \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 3} = -\infty \quad y \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 3} = +\infty \quad \text{luego no hay asíntotas horizontales}$$

Asíntota Oblicua

La asíntota oblicua es una recta $y = mx + n$

$$\text{ha de cumplirse que } m = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad n = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx;$$

$$m = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x + 3}}{x} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x} \quad \text{dividimos numerador y denominador por } x^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}} = 1; \quad m = 1$$

$$n = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx; \quad n = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 3} - 1x \right) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{(x^2 + 1) - x^2 - 3x}{x + 3} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1 - x^2 - 3x}{x + 3} \right) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-3x + 1}{x + 3} \right) = \text{divido numerador y denominador por } x$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} \right) = -3;$$

La asíntota oblicua es una recta $y = x - 3$

- calcula y clasifica sus extremos relativos

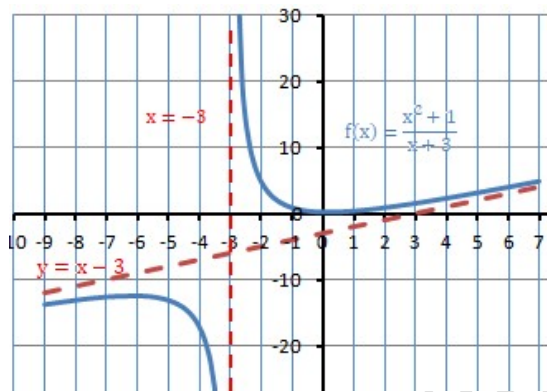
$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 3} \quad \text{hallamos la derivada e igualamos a 0 para ver los puntos críticos}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x + 3) - 1(x^2 + 1)}{(x + 3)^2} = 0; \quad 2x(x + 3) - 1(x^2 + 1) = 0; \quad 2x^2 + 6x - x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + 6x - 1 = 0; \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{40}}{2}; \quad \text{estos pueden ser máximo o mínimo}$$

$$x = \frac{-6 + \sqrt{40}}{2} = 0,162278, \quad y = 0,3333$$

Calculo a la izquierda y derecha para $x = -0,2$ $y = 0,371429$



para $x = 0,6; y = 0,377778 \Rightarrow$ **que este punto es un minimo**

$$x = \frac{-6 - \sqrt{40}}{2} = -6,162278; y = -12,3246$$

Calculo a la izquierda y derecha para $x = -7 y = -12,5$

para $x = -5,6; y = 12,44628 \Rightarrow$ **que este punto es un maximo**

4. Ejercicio

Considera los siguientes planos

$$\Pi_1 \begin{cases} x = \lambda + \beta + 1 \\ y = \lambda - \beta + 2 \\ z = -\lambda + \beta + 3 \end{cases} \quad \Pi_2 \quad x + y + z = 2$$

a) Determina la posivion relativa de los planos. Si se cortan, determina su interseccion

b) Deterinar distancia entre el plano Π_2 y el Punto $P(3,2,1)$

Solución

a) Determina la posivion relativa de los planos. Si se cortan, determina su interseccion

$$\Pi_1 \begin{cases} x = \lambda + \beta + 1 \\ y = \lambda - \beta + 2 \\ z = -\lambda + \beta + 3 \end{cases} \quad \Pi_2 \quad x + y + z = 2$$

$$\begin{cases} x = \lambda + \beta + 1 \\ y = \lambda - \beta + 2 \\ z = -\lambda + \beta + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 = \lambda + \beta \\ y - 2 = \lambda - \beta \\ z - 3 = -\lambda + \beta \end{cases} \quad \text{Hallamos el determinante} \quad \begin{vmatrix} x-1 & +1 & +1 \\ y-2 & +1 & -1 \\ z-3 & -1 & +1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (x-1) * 0 - (y-2)2 + (z-3)(-2) = -2y + 4 - 2z + 6 = 0; -y - z + 5 = 0 \quad \Pi_1 = -y - z + 5 = 0; y + z - 5 = 0$$

$$\begin{cases} \Pi_1 & y + z = 5 \\ \Pi_2 & x + y + z = 2 \end{cases} \text{ Como no son proporcionales se cortan en una recta}$$

$$\text{la recta de corte será: } \begin{cases} y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \text{ resto la 1ª de la segunda } x = -3$$

$$\text{Sustituyo } \begin{cases} y + z = 5 \\ -3 + y + z = 2 \end{cases} \quad y = 5 - z \text{ la ecuacion de la recta será;}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 - z \\ z = z \end{cases} \text{ Sustituyo } z \text{ por } \lambda \text{ ecuacion de la recta interseccion } \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) Deterinar distancia entre el plano Π_2 y el Punto $P(3,2,1)$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \lambda) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{distancia de } (x + y + z = 2 \text{ a } (3,2,1)) = \frac{|1 * 3 - 1 * 2 + 1 * 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

5. Ejercicio

Considerar dos sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,6; P(B) = 0,5 \text{ y } P(A|B) = 0,4$$

a) Determina $P(A \cup B)$

b) Determinar $P(A|\bar{B})$

Solución

a) Determina $P(A \cup B)$

probabilidad condicionada $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) \text{ sustituimos; } P(A \cap B) = P(A|B) * P(B);$$

$$P(A \cap B) = 0,4 * 0,5 = 0,2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,2 = 0,9$$

b) Determinar $P(A|\bar{B})$

$$P(A|\bar{B}) = P(A \cap \bar{B})/P(\bar{B}) \text{ sustituimos;}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,5$$

Dado que $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - (A \cap B)$ sustituyo en la ecuacion

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A) - (A \cap B)}{P(\bar{B})} = \frac{0,6 - 0,2}{0,5} = 0,8$$

6. Ejercicio

Considerar el sistema de ecuaciones lineales para el valor de a:

$$\begin{cases} ax & + y & + z & = 2 + 3a \\ 2x & + y & & z & = 2 \\ 2x & & + y & + az & = 4 - 2a \end{cases}$$

a) Discutir para valores de a

b) Resolver para a = -1

Solución

a) Discutir para valores de a

$$\text{como en } E_2 \text{ no hay a cambio las dos primeras filas l la } \begin{cases} 2x & + y & & z & = 2 \\ ax & + y & + z & = 2 + 3a \\ 2x & & + y & + az & = 4 - 2a \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & +1 & +1 & =2 \\ a & +1 & +1 & =2+3a \\ 2 & +1 & & +a=4-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2+3a \\ a & 1 & 1 & | & 4-2a \\ 2 & 1 & a & | & 4-2a \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2+3a \\ a & 1 & 1 & | & 4-2a \\ 2 & 1 & a & | & 4-2a \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2 = E_2 - \frac{a}{2}E_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2+3a \\ 0 & 1 - \frac{a}{2} & 1 - \frac{a}{2} & | & 2+3a - \frac{2a}{2} \\ 2 & 1 & a & | & 4-2a \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3 = E_3 - E_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2+3a \\ 0 & 1 - \frac{a}{2} & 1 - \frac{a}{2} & | & 2+3a - \frac{2a}{2} \\ 0 & 0 & a-1 & | & 4-2a-2 \end{pmatrix}$$

Para $a \neq 1$ el sistema es compatible indeterminado

$$E_3(a-1)z = 2-2a; \Rightarrow z = \frac{2-2a}{a-1} = \frac{-2(a-1)}{a-1}; z = -2;$$

$$E_2; \frac{2-a}{2}y + \frac{2-a}{2}z = \frac{4+6a-2a}{2}; \text{ sustituyo } z; \frac{2-a}{2}y + \frac{(2-a)}{2}(-2) = \frac{4+4a}{2} \Rightarrow$$

$$(2-a)y + (-4+2a) = 4+4a; (2-a)y = 4+4a+4-2a = 8+2a; y = \frac{8+2a}{2-a}$$

$$\text{Sustituyo es } E_1 2x + y + z = 2; 2x + \frac{8+2a}{2-a} - 2 = 2; 2x = 2 + 2 - \frac{8+2a}{2-a} = \frac{4(2-a) - (8+2a)}{2-a};$$

$$x = \frac{8-4a-8-2a}{2(2-a)} = \frac{-6a}{4-2a}; x = \frac{-3a}{2-a}$$

$$x = \frac{-3a}{2-a}, y = \frac{8+2a}{2-a}; z = -2$$

para $a = 1$ el sistema es Incompatible

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 + 3 \cdot 1 \\ 2x + y + z = 4 - 2 \cdot 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & a & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} E_1 \\ E_2 = E_2 - E_1 \\ E_3 = E_3 - E_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$E_3; 0 = 2 \Rightarrow$ como 0 no puede ser igual a 2 el sistema es incompatible

b) Resolver para $a = -1$

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 + 3a \\ 2x + y + z = 2 \\ 2x + y + az = 4 - 2a \end{cases} \quad \text{para } a = -1 \quad \begin{cases} -x + y + z = 2 + 3(-1) \\ 2x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 - 2(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y + z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 + 1 + 1 = -1 \\ 2 + 1 + 1 = 2 \\ 2 + 1 - 1 = 6 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} E_1 \\ E_2 = E_2 + 2E_1 \\ E_3 = E_3 - 2E_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} E_1 \\ E_2 = E_2 \\ E_3 = E_3 - E_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \Rightarrow -2z = 4; z = -2;$$

$$E_2 \Rightarrow 3y + 3z = 0; \text{ sustituyo } z = -2; y = 2$$

$$E_1 \Rightarrow -x + y + z = -1 \text{ sustituyo } z = -2; y = 2; x = 2 - 2 + 1 = 1;$$

$$x = 1, y = 2, z = -2;$$

Otra forma es calcularlo partiendo de los valores de x, y, z obtenidos

$$\text{Para } m = -1 \quad \begin{cases} x = \frac{-3a}{2-a} \\ y = \frac{8+2a}{2-a} \\ z = -2 \end{cases} \quad \text{sustituyo } a = -1 \quad \begin{cases} x = \frac{-3(-1)}{2-(-1)} \\ y = \frac{8+2(-1)}{2-(-1)} \\ z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{3} = 1 \\ y = \frac{6}{3} = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

7. Ejercicio

$$\text{Dada la matriz } Z = \begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ 2 & m & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determinar el rango de Z en funcion del valor de m

b) Calcular $Z(6Z^{-1} + Z^t)$; donde t indica la matriz transpuesta para $m = 0$

Solución

a) Determinar el rango de Z en funcion del valor de m

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ 2 & m & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 2 & m & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \text{ si hacen 0 el determinante la matriz es indeterminada}$$

$$3m^2 + 2m - 6 = 0; m = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3}; \text{ sus raices son }; m = \frac{-2 \pm \sqrt{72}}{6};$$

$$\text{para } m \neq \frac{-2 + \sqrt{72}}{6} \text{ y } m \neq \frac{-2 - \sqrt{72}}{6} \text{ el rango de la matriz es 3}$$

$$\text{para } m = \frac{-2 + \sqrt{72}}{6} \text{ y } m = \frac{-2 - \sqrt{72}}{6} \text{ el rango de la matriz es 2}$$

b) Calcular $Z(6Z^{-1} + Z^t)$; donde t indica la matriz transpuesta

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; Z^* = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -3 & +2 & -1 \\ 0 & +4 & -2 \end{pmatrix}; (Z^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -6 & +2 & +4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Z^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -6 & +2 & +4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Z(6Z^{-1} + Z^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left(6 \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -6 & +2 & +4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$Z(6Z^{-1} + Z^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & +3 & 0 \\ +6 & -2 & -4 \\ 0 & +1 & +2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$Z(6Z^{-1} + Z^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & +5 & -1 \\ 7 & -2 & -4 \\ 2 & +1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0*0+1*7+2*2 & 0*5+1*(-2)+2+1 & 0(-1)+1(-4)+2*5 \\ 2*0+0*7+0*2 & 2*5+0*(-2)+0*(-4) & 2(-1)+0*(-4)+0*5 \\ (-1)*0+0*7+3*2 & (-1)*5+0*(-2)+3*1 & (-1)(-1)+0*(-4)+3*5 \end{pmatrix} =$$

$$Z(6Z^{-1} + Z^t) = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & -2 \\ 6 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

8. Ejercicio

Considera la funcion real de variable real $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x}$

a) Calcula la ecuacion de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 3$.

b) Calcula el area del recinto delimitado por el eje x, la curva $f(x)$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$

Solucion

$f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x}$ la tangente tendra la forma $y = mx + n$

$$m = f'(x) = \frac{(6x + 2)x - 1(3x^2 + 2x - 1)}{x^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2 - 2x + 1}{x^2} = \frac{3x^2 + 1}{x^2};$$

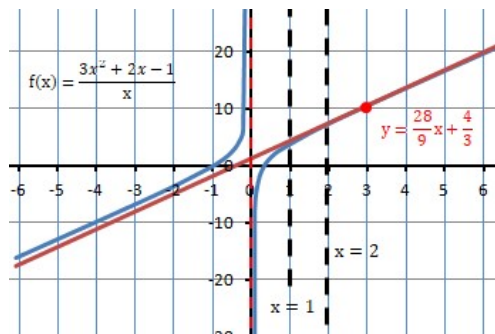
$$\text{para } x = 3; m = f'(x) = \frac{28}{9},$$

$$\text{la tangente ser\'a } y = \frac{28}{9}x + n$$

en el punto $x = 3$;

$$y = f(x) = \frac{27 + 6 - 1}{3} = \frac{32}{3};$$

$$y = \frac{28}{9}x + n;$$



$$\text{sustituyo } \Rightarrow \frac{32}{3} = \frac{28}{9} * 3 + n; n = \frac{32}{3} - \frac{28}{3} = \frac{4}{3} \text{ la tangente ser\'a } y = \frac{28}{9}x + \frac{4}{3}$$

b) Calcula el area del recinto delimitado por el eje x, la curva $f(x)$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$

$$\int_1^2 \frac{3x^2 + 2x - 1}{x} dx = \int_1^2 \left(3x + 2 - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + 2x - \ln x \right]_1^2 =$$

$$= \frac{3 * 2^2}{2} + 2 * 2 - \ln 2 - \left(\frac{3 * 1^2}{2} + 2 * 1 - \ln 1 \right) = 6 + 4 - \ln 2 - \frac{3}{2} + 2 - \ln 1 = \frac{21}{2} - (\ln 2 + \ln 1)$$

$$\frac{21}{2} - (\ln 2 * 1) = \frac{21}{2} - \ln 2; \int_1^2 \frac{3x^2 + 2x - 1}{x} dx = \frac{21}{2} - \ln 2$$

9. Ejercicio

Dadas las rectas $r_1 = \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases}$ $r_2 = \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

a) Determinar la ecuación del plano que contiene las dos rectas.

b) Determinar la distancia entre las dos rectas

Solución

a) Determinar la ecuación del plano que contiene las dos rectas.

Dadas las rectas $r_1 = \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases}$ $r_2 = \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

a) método para hallar el vector director de la recta

$$r_2 = \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

para $x = 0$, $\begin{cases} 0 + y + z = 2 \\ -0 + y = 1 \end{cases}; \begin{cases} y + z = 2 \\ y = 1 \end{cases}; y = 1, z = 1; B = (0, 1, 1)$

para $y = 0$, $\begin{cases} x + 0 + z = 2 \\ -x + 0 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x + z = 2 \\ x = -1 \end{cases}; x = -1; z = 3; A = (-1, 0, 3)$

$$\vec{r}_2 = (0 - (-1), 1 - 0, 1 - 3) = (1, 1, -2)$$

b) otro método para hallar el vector director de la recta

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1i + j - 2k; \vec{r}_2 = ((1, 1, -2)$$

Con el vector director de la recta $(1, 1, -2)$ y un punto $(-1, 0, 3)$; $r_2 = \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 0 \\ z = -2t + 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = -2t + 3 \end{cases}$

$$r_1 = \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases} \quad r_2 = \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = -2t + 3 \end{cases} \quad \text{intersección} \quad \begin{cases} \lambda + 1 = t - 1 \\ \lambda + 2 = t \\ -\lambda + 3 = -2t + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - t = -2 \\ \lambda - t = -2 \\ -\lambda + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda - t = -2 \\ -\lambda + 2t = 0 \end{cases} \text{ sumo la primera y la segunda } t = -2;$$

sustituyo $\lambda - t = -2 \Rightarrow \lambda = -4$

punto de corte en $\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + 1 \\ y = -4 + 2 \\ z = -(-4) + 3 \end{cases} \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = 7 \end{cases}$

Ecuación del plano $(x_0, y_0, z_0) + (u_1, u_2, u_3)\lambda + (v_1, v_2, v_3)\mu$; $\begin{cases} x = x_0 + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = y_0 + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = z_0 + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases}$

$$(x, y, z) = (-3, -2, 7) + (1, 1, -2)\lambda + (1, 1, -1)\mu; \begin{cases} x = -3 + 1\lambda + 1\mu \\ y = -2 + 1\lambda + 1\mu \\ z = 7 - 2\lambda - 1\mu \end{cases} \begin{cases} x = -3 + \lambda + \mu \\ y = -2 + \lambda + \mu \\ z = 7 - 2\lambda - \mu \end{cases}$$

Prueba

Hallamos la ecuación general del plano

$$\begin{cases} x = -3 + \lambda + \mu & x + 3 = \lambda + \mu \\ y = -2 + \lambda + \mu & y + 2 = \lambda + \mu \\ z = 7 - 2\lambda - \mu & z - 7 = -2\lambda - \mu \end{cases} \text{ ecuación general}$$

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 \\ y+2 & 1 & 1 \\ z-7 & -2 & -1 \end{vmatrix} \text{ ha de ser } 0 \Rightarrow (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - (y+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (z-7) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(x+3)1 - (y+2)1 + (z-7)0 = x+3 - y-2 + 0 = x - y + 1 = 0;$$

ecuación del plano $x - y + 1 = 0$

Comprobamos si la recta está incluida en el plano

$$r_1 = \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases} \quad \text{Plano } x - y + 1 = 0$$

1º El Producto escalar de los vectores directores es 0, Vector del plano vector de la recta perpendiculares

$$(1, -1, 0)(1, 1, -1) = 1 - 1 - 0 = 0; \text{ perpendiculares}$$

1º El punto está incluido en el plano

Un punto de la recta será (1,2,3); para $x = 1 \Rightarrow 1 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2$, se cumple

Comprobamos si la recta está incluida en el plano

$$r_2 = \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = -2t + 3 \end{cases} \quad \text{Plano } x - y + 1 = 0$$

1º El Producto escalar de los vectores directores es 0, Vector del plano vector de la recta perpendiculares

$$(1, -1, 0)(1, 1, -2) = 1 - 1 - 0 = 0; \text{ perpendiculares}$$

1º El punto está incluido en el plano

Un punto de la recta será (-1,0,3); para $x = -1 \Rightarrow -1 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 0$, se cumple

10. Ejercicio

Se fumiga una plantación de zanahorias con un producto toxico. Se sabe que la cantidad de producto que absorbe una zanahoria en mg es una variable aleatoria con distribucion normal de media 4 y desviacion tipica 2.

Se considera que una zanahoria está contaminada si ha absorbido mas de 6,4 mg del producto toxico

a) Calcular la probabilidad de que una zanahoria elegida al azar haya sido contaminada en el proceso de fumigación

b) Si elegimos al azar 5 zanahorias. ¿ Cual es la probabilidad de que hay una contaminada?

Solución

a) Calcular la probabilidad de que una zanahoria elegida al azar haya sido contaminada en el proceso de fumigación

Distribucion de probabilidad normal estandar

$$P(x > a) = P\left(Z > \frac{a - \text{distribucion normal media}}{\text{desviacion tipica}}\right)$$

$$P(x > 6,4) = P\left(Z > \frac{6,4 - 4}{2}\right) = 1 - P(Z < 1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151;$$

segun la tabla de distribucion normal $P(Z > 1,2) = 0,8849$

b) Si elegimos al azar 5 zanahorias. ¿ Cual es la probabilidad de que hay una contaminada?

$$P(A = 1) = \binom{5}{1} * (0,1151)(0,1151)^4 = 0,352876$$

3 Examen 2019 C

1. Ejercicio

- a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto $(1,2,0)$ y que es perpendicular al plano $\mu_1 = x - 2y - 3 = 0$
- b) Calcular la distancia del punto $(1, -1, 0)$ al plano
- c) Determinar el vector proporcional al $(3,0,4)$ que pertenece al plano $\mu_2 = x - y - z = 1$

Solución

- a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto $(1,2,0)$ y que es perpendicular al plano $\mu_1 = x - 2y - 3 = 0$

Si es perpendicular al plano $\mu_1 = x - 2y - 3 = 0$, su vector director $\vec{r}_1 = (1, -2, 0)$

$$r_1 = \begin{cases} x = 1\lambda + 1 \\ y = -2\lambda + 2 \\ z = 0\lambda + 0 \end{cases}$$

- b) Calcular la distancia del punto $P(1, -1, 0)$ al plano $\mu_1 = x - 2y - 3 = 0$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \mu_1) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \mu_1) = \frac{|(1 * 1) - 2 * (-1) + 0 * 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{|1 + 2 + 0 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0;$$

el Punto pertenece al plano $\Rightarrow$ distancia es 0;

Prueba

El punto $P(1, -1, 0)$ pertenece al plano si cumple el plano $x - 2y - 3 = 0$ sustituyo x, y, z

$$\Rightarrow 1 - 2(-1) + 0 * 0 - 3 = 0;$$

- c) Determinar el vector proporcional al $(3,0,4)$ que pertenece al plano $\mu_2 = x - y - z = 1$

1º El Producto escalar de los vectores directores es 0

$$\text{Si pertenece al plano} \Rightarrow (3a, 0a, 4a) * (1, -1, -1) = 0; \quad 3a - 0 - 4a = 0; \quad a = 0;$$

el vector $(3,0,4)$ pertenece al plano

2. Ejercicio

Estudiar y resolver el sistema de ecuaciones homogéneo según los valores de b ;

$$\begin{cases} x + by + z = 0 \\ x - 2y + (b - 1)z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 0 \\ 1 & -2 & (b-1) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 = E_2 - E_1 \\ E_3 = E_3 - E_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 0 \\ 0 & (-2-b) & (b-1)-1 & 0 \\ 0 & 1-b & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$1 - b = 0; \text{ es incompatible para } b = 1;$$

3. Ejercicio

$$\text{Dada la función } f(x) \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{Si } x \leq 0 \\ a\sqrt{1+bx} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

- a) Calcular para que valores de a y b la función es continua en $x = 0$
- b) Calcular para que valores de a y b la función es derivable en $x = 0$

Solución

a) Calcular para que valores de a y b la función es continua en $x = 0$

$$\begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{Si } x \leq 0 \\ a\sqrt{1+bx} & \text{Si } 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{Para ver si es continua hallamos el límite de la función}$$

por la derecha e izquierda de 0

$$\lim_{x \rightarrow -0} x + 2e^{-x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} a\sqrt{1+bx} = a\sqrt{1} = a = 2;$$

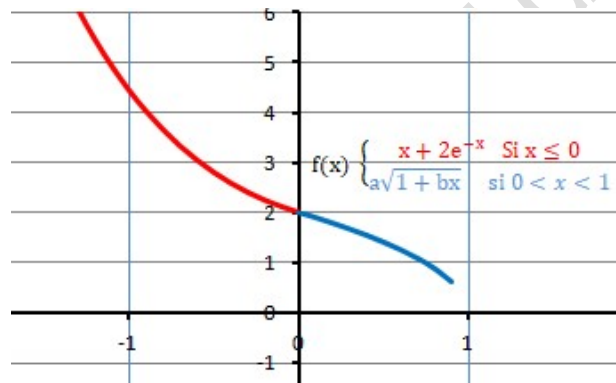
dado que el límite por derecha e izquierda es igual, la función es continua

b) Calcular para que valores de a y b la función es derivable en $x = 0$

$$\text{hallamos la derivada de la función } f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{Si } x \leq 0 \\ a\sqrt{1+bx} & \text{Si } 0 < x < 1 \end{cases};$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{en } x = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{1} = -1 \\ \frac{ab}{2\sqrt{1+bx}} & \text{en } x = 0; \frac{ab}{2\sqrt{1}} = \frac{ab}{2} \Rightarrow \frac{ab}{2} = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ \frac{ab}{2} = -1; ab = -2; \Rightarrow b = -\frac{2}{2}; b = -1 \end{cases} \text{ la función es derivable en } a = 2 \text{ y } b = -1$$



4. Ejercicio

Calcular los límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)e^x}{x + \cos x}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 2x^2 + 6}{x^4 + 2019}$$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)e^x}{x + \cos x} = \frac{(2+0)e^0}{0 + \cos 0} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 4}{2^2 - 4} = \frac{4 - 8 + 4}{4 - 4} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x+2)} = \frac{0}{4} = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4}{2}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 2x^2 + 6}{x^4 + 2019} = \text{indeterminado} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^4}{x^4} - \frac{2x^2}{x^4} + \frac{6}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4} + \frac{2019}{x^4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^4}}{1 + \frac{2019}{x^4}} = 5$$

5. Ejercicio

Si a y b son números reales, se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ b^2 + 1 & a \end{pmatrix}$

a) para qué valores de a y b es inversible la matriz A

b) calcular la inversa de A para $a = 1$ y $b = -1$;

Solución

a) para qué valores de a y b es inversible la matriz A

La matriz Inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 \\ b^2 + 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + (b^2 + 1) = 0; a^2 + b^2 + 1 = 0; a^2 + b^2 = -1.$$

La matriz tiene inversa para cualquier valor de a y b pues nunca puede valer -1

b) calcular la inversa de A para $a = 1$ y $b = -1$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ (-1)^2 + 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; (A^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

6. Ejercicio

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) calcular A^2 ; A^3 ; A^5

b) calcular A^1 ; Es inversible la matriz A^{2019} ¿

Solución

a) calcular A^2 ; A^3 ; A^5

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) calcular A^{-1} ; Es inversible la matriz A^{2019}

La matriz Inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t$;

$$|A| = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Prueba} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Es inversible la matriz A^{2019} Si es inversible pues es la matriz identidad

7. Ejercicio

Dada la funcion $f(x) \begin{cases} ax^2 + b & \text{Si } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

a) Calcular valores de a y b para que la funcion se derivable en $x = 3$;

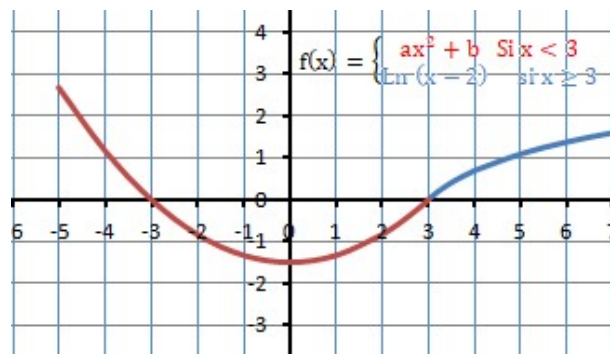
Solución

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{Si } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad x = -bax^2 + b \quad \text{Si } x < 3$$

$$\text{comprobamos si es continua } f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax^2 + b) = 9a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x-2) = 0; \end{cases} \quad \text{para que sea continua } 9a + b = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + b; f'(x) = 2ax; \text{ para } x = 3; f'(x) = 6a \\ f(x) = \ln(x-2); f'(x) = \frac{1}{x-2} \text{ para } x = 3; f'(x) = 1 \end{cases} \quad \text{será derivable para } a = 1/6$$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ 9a + b = 0 \end{cases} \quad \frac{9}{6} + b = 0; \quad b = -9/6; \quad \text{valores } a = \frac{1}{6}; b = -\frac{9}{6}$$



8. Ejercicio

Calcular los limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{\sin(x-1)}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{\sin(x-1)} = \frac{(1-1)^2}{\sin(1-1)} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminado}$$

$$\text{Aplicamos regla del l'Hopital} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{\sin(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cdot 1 \cdot (x-1)}{1 \cdot \cos(x-1)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} = \frac{(\infty+1)}{\sqrt{\infty}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indeterminado}$$

$$\text{Aplicamos regla del l'Hopital} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x)^{\frac{1}{2}}}{x+1}$$

como el exponente del denominador crece mas rapido que el numerado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} = 0;$$

9. Ejercicio

Dados los planos de ecuacione $\mu_1 = 2x + y - z + 2 = 0$ y $\mu_2 = 2x + 2y + 2z - 2 = 0$

a) Hallar las ecuaciones parametricas de la recta interseccion entre ambos planos

b) Calcular la ecuacion del plano paralelo al plano μ_1 que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$

Solución

$$\mu_1 = 2x + y - z + 2 = 0 \quad \mu_2 = 2x + 2y + 2z - 2 = 0$$

hallo los vector normal $\vec{\mu}_1(2, 1, -1)$; vector normal al plano $\vec{\mu}_2(2, 2, 2)$

$$\text{producto vectorial de los vectores normales } \vec{r} = \vec{\mu}_1 * \vec{\mu}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2i - 2j + 4k - 2k - 4j + 2i = 4i - 6j + 2k; \text{vector director de la recta } \vec{r} = (4, -6, 2)$$

para hallar la recta necesito un punto P de la misma; como pertenece a los planos hallo un punto de ellos, para un valor de la variable por ejemplo $x = 0$;

$$x = 0; \begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + y - z + 2 = 0 \\ 0 + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z = -2 \\ 2y + 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} E_1 = 2E_1 \\ E_2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2y - 2z = -4 \\ 2y + 2z = 2 \end{cases} \quad 4y = -2; y = -\frac{1}{2}; \text{sustituyo en } y - z = -2; -\frac{1}{2} - z = -2, z = \frac{3}{2}; P(0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

$$\text{la ecuacion de la recta será } \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -6\lambda - \frac{1}{2} \\ z = 2\lambda + \frac{3}{2} \end{cases}$$

La ecuación de la recta puede ser distinta pero el vector director tiene que ser el mismo

b) Calcular la ecuación del plano paralelo al plano μ_1 que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$

Calcular la ecuación del plano paralelo al plano $\mu_1 = 2x + y - z + 2 = 0$ y que pasa por el punto

$P(2, -1, 1)$

para ello hallo el vector normal al plano dado que será el mismo que el del plano pedido

El vector normal será $\vec{\mu}_1 = (2, 1, -1)$; $P_0(2, -1, 1)$ y un punto cualquiera $P_x(x, y, z)$

$$\overrightarrow{P_0P_x} = (x - 2, y + 1, z - 1)$$

El vector pedido será $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_x} * \vec{\mu}_1 = (x - 2, y + 1, z - 1)(2, 1, -1) = 0$

$$\vec{v} = 2(x - 2) + 1 * (y + 1) - 1(z - 1) = 2x - 4 + y + 1 - z + 1 = 0$$

$$\vec{v} = 2x + y - z - 4 = 0;$$

4 Examen 2019 D

1. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 5}{3 + x}$

- Determinar sus asíntotas
- Determinar sus extremos relativos

Solución

- Determinar sus asíntotas

Asíntota vertical

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{3 + x}; \text{ la función se anula en } x = -3$$

Asíntota vertical en $x = -3$

Asíntota Horizontal

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{3 + x}; \text{ para calcularlo hallamos}$$

el límite de la función cuando x tiende a $\pm \infty$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5}{3 + x} = -\infty; \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{3 + x} = +\infty \text{ luego no hay asíntotas horizontales}$$

Asíntota Oblicua

La asíntota oblicua es una recta $y = mx + n$

$$\text{Ha de cumplirse que } m = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}; n = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} f(x) - mx;$$

$$m = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{x^2 - 5}{3 + x}}{x} = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 + 3x} \text{ dividimos numerador y denominador por } x^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{1 + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}} = 1; m = 1$$

$$n = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} f(x) - mx; n = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2 - 5}{3 + x} - 1x \right) = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{(x^2 - 5) - x^2 - 3x}{x + 3} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2 - 5 - x^2 - 3x}{x + 3} \right) = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{-3x - 5}{x + 3} \right) = \text{divido numerador y denominador por } x$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{-3 - \frac{5}{x}}{1 + \frac{3}{x}} \right) = -3;$$

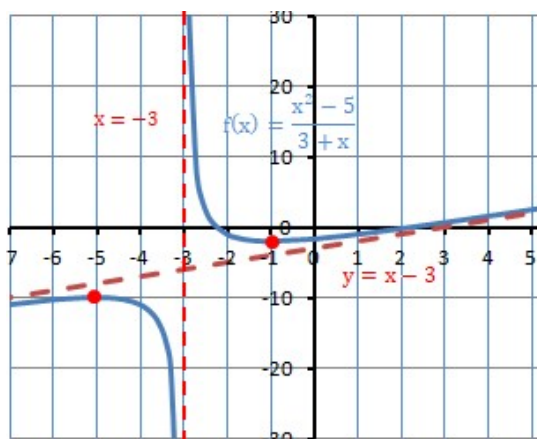
La asíntota oblicua es una recta $y = x - 3$

- Determinar sus extremos relativos

$f(x) = \frac{x^2 - 5}{3 + x}$ hallamos la derivada e igualamos a 0 para ver los puntos críticos

$$f'(x) = \frac{2x(x + 3) - 1(x^2 - 5)}{(x + 3)^2} = 0; 2x(x + 3) - 1(x^2 - 5) = 0; 2x^2 + 6x - x^2 + 5 = 0$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0; x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2}; x = -1 \text{ y } x = -5;$$



pueden ser máximos o mínimos para $x = -5; y = -10$

Calculo a la izquierda y derecha para $x = -5$

para $x = -6; y = -10,33333$; para $x = -4; y = -11 \Rightarrow$ que este punto es un máximo

Calculo a la izquierda y derecha para $x = -1; y = -2 \Rightarrow$ que este punto es un mínimo

2. Ejercicio

a) Resuelva el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x + 2y - mz = 4 \\ 2x + my - 2z = m + 1 \end{cases}$$

b) Encuentre el valor o valores de m para los cuales el sistema es incompatible

Solución

a) Resuelva el sistema de ecuaciones para $m = 1$;
$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x + 2y - mz = 4 \\ 2x + my - 2z = m + 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 1+1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2 = E_2 + E_1, E_3 = E_3 - 2E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array} \right);$$

$$3y = 6; y = 2;$$

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases} \text{ sustituyo el valor de } y = 2; \begin{cases} -x + 2 + z = 2 \\ x + 4 - z = 4 \end{cases} \begin{cases} -x + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} x = z$$

Se cumple para todo valor de R $x = z; y = 2$; sistema compatible indeterminado;

b) Encuentre el valor o valores de m para los cuales el sistema es incompatible

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x + 2y - mz = 4 \\ 2x + my - 2z = m + 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -m & 4 \\ 2 & m & -2 & m+1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1-m & 6 \\ 0 & 2+m & 0 & 4+m+1 \end{array} \right)$$

$$(2+m)y = 4+m+1; y(2+m) = 5+m; y = \frac{5+m}{2+m}$$

Para $m \neq -2$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -m & 4 \\ 2 & m & -2 & m+1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1-m & 6 \\ 0 & 2+m & 0 & 4+m+1 \end{array} \right)$$

$$\text{Sustituyo en } E_3 \quad (2+m)y = m+5; y = \frac{m+5}{m+2}$$

$$\text{Sustituyo en } E_2 \quad 3y + (1-m)z = 6; \text{ sustituyo } y \Rightarrow 3 \frac{m+5}{m+2} + (1-m)z = 6$$

$$y \Rightarrow 3 \frac{m+5}{m+2} + (1-m)z = 6; z = 6 - \frac{3 \frac{m+5}{m+2}}{(1-m)} = 6 - 3 \frac{m+5}{(m+2)(1-m)};$$

$$z = 6 - \frac{3(m+5)}{(m+2)(1-m)}$$

$$\text{Sustituyo en } E_1 \quad -x + y + z = 2; x = y + z - 2; x = -2 + \frac{m+5}{m+2} + 6 - \frac{3(m+5)}{(m+2)(1-m)};$$

$$x = 4 + \frac{m+5}{m+2} - \frac{3(m+5)}{(m+2)(1-m)}$$

Compruebo que estas formulas son correctas para $m = 1$; y dan el mismo resultado

$$\text{para } m = 1 \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + \frac{m+5}{m+2} - \frac{3(m+5)}{(m+2)(1-m)} \\ y = \frac{m+5}{m+2} \\ z = 6 - \frac{3(m+5)}{(m+2)(1-m)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + \frac{1+5}{1+2} - \frac{3(1+5)}{(1+2)(1-1)} \\ y = \frac{1+5}{1+2} \\ z = 6 - \frac{3(1+5)}{(1+2)(1-1)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 + \frac{1+5}{3} - \frac{3(1+5)}{3*0} \\ y = \frac{6}{3} \\ z = 6 - \frac{3(1+5)}{3*0} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + \frac{1+5}{3} - \infty \\ y = \frac{6}{3} = 2; \\ z = 6 - \infty \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = -\infty \\ y = 2; \\ z = -\infty \end{array} \right.$$

3. Ejercicio

Dados los puntos $A(-1,0,2)$; $B(-2,1,0)$ y $C(0,5,1)$ se pide:

- Calcular el area del triangulo que tiene por vertices los puntos ABC
- Comprobar que el triangulo que tiene por vertices los puntos ABC es rectangulo e identificar el angulo

Solución

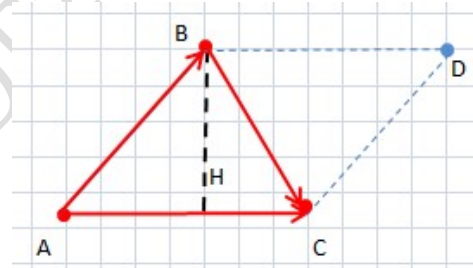
- Calcular el area del triangulo que tiene por vertices ABC

Calculo los vectores:

$$\overrightarrow{AB} (-2 - (-1), 1 - 0, 0 - 2) = (-1, 1, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} (0 - (-1), 5 - 0, 1 - 2) = (1, 5, -1)$$

$$\overrightarrow{BC} (0 - (-2), 5 - 1, 1 - 0) = (2, 4, 1)$$



Los vectores no son proporcionales luego no está alineados

El modulo del producto vectorial de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ = area del paralelogramo ABDC:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = i(-1 + 10) - j(1 + 2) + k(-5 - 1) = 9i - 3j - 6k$$

$$\text{El Area del triangulo ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{9^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{126} = \frac{1}{2} 11,225 = 5,6125$$

- Comprobar que el triangulo que tiene por vertices los puntos ABC es rectangulo e identificar el angulo

Si dos vectores forman un angulo recto su producto escalar ha de ser 0:

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| * |\overrightarrow{AC}| \cos \alpha; \text{ si } \alpha = 90; \cos \alpha = 0;$$

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} = (-1, 1, -2) * (1, 5, -1) = -1 + 5 + 2 = 6$$

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC} = (-1, 1, -2) * (2, 4, 1) = -2 + 4 - 2 = 0;$$

el angulo recto es el formado por $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC}$ en el punto B

$$\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{BC} = (1, 5, -1) * (-2, 4, 1) = -2 + 20 - 1 = 17$$

4. Ejercicio

En una sociedad deportiva el 60% de los socios son mujeres y el 40% hombres. Se están planteando la posibilidad de construir una nueva pista de tenis. El 70% de los hombres se declara favorable a la construcción, mientras que la opinión favorable desciende al 50% en el caso de las mujeres.

a) Se elige al azar un socio .

¿ Cual es la probabilidad de que sea favorable a la construccion?

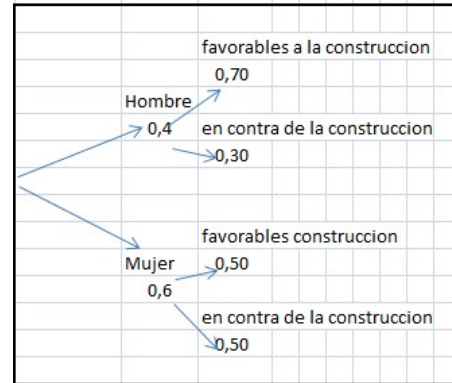
b) Si un socio es favorable a la construccion .

¿ Cual es la probabilidad de que sea mujer?

Solución

a) Se elige al azar un socio .

¿ Cual es la probabilidad de que sea favorable a la construccion?



$$P(\text{sea favorable a la construccion}) = P(H) * P(H|\text{construccion}) + P(M) * P(M|\text{construccion})$$

$$P(\text{sea favorable a la construccion}) = 0,4 * 0,7 + 0,5 * 0,6 = 0,28 + 0,3 = 0,58; 58\%$$

c) Si un socio es favorable a la construccion .

¿ Cual es la probabilidad de que sea mujer?

$$P(M|\text{construccion}) = \frac{P(M|\text{construccion}) * P(M)}{P(H) * P(H|\text{construccion}) + P(M) * P(M|\text{construccion})}$$

$$P(M|\text{construccion}) = \frac{0,5 * 0,6}{0,7 * 0,4 + 0,5 * 0,6} = \frac{0,3}{0,28 + 0,3} = \frac{0,3}{0,58} = 0,52 \Rightarrow 51,72\%$$

5. Ejercicio

Un pequeño agricultor quiere vender su cosecha de manzanas a un hipermercado. El gerente del hipermercado solamente quiere adquirir 1000 kilos y pagar por ello 1000 euros. Pero está dispuesto a comprar una cantidad mayor a cambio de que el agricultor acepte una pequeña rebaja en el precio. Amigablemente, se ponen de acuerdo en aplicar la siguiente fórmula que expresa la cantidad de euros (y) que recibirá el agricultor en función de la cantidad de kilos (x) que excedan de los 1000 kilos suministrados:

$$y = 1000 + x - \frac{x^2}{500}$$

a) ¿Qué cantidad recibirá el agricultor si suministra 1100 kilos? ¿Y si suministra 1200? ¿Y si suministra 1300?

b) ¿Cuál es la máxima cantidad de euros que puede obtener el agricultor?

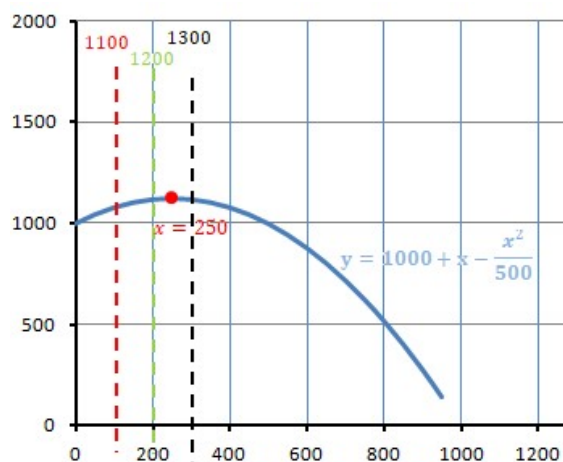
¿Cuántos kilos debe suministrar para obtener dicha cantidad máxima

Solución

a) ¿Qué cantidad recibirá el agricultor si suministra 1100 kilos?

¿Y si suministra 1200? ¿Y si suministra 1300

$$\text{Suministrando 1100; } y = 1000 + 100 - \frac{100^2}{500} = 1080$$



$$\text{Suministrando 1200; } y = 1000 + 200 - \frac{200^2}{500} = 1120$$

$$\text{Suministrando 1300; } y = 1000 + 300 - \frac{300^2}{500} = 1120$$

b) ¿Cuál es la máxima cantidad de euros que puede obtener el agricultor?

¿Cuántos kilos debe suministrar para obtener dicha cantidad máxima

$$y = 1000 + x - \frac{x^2}{500}; \text{ halla la derivada } y' = 1 - \left(\frac{2x * 500}{500^2}\right); 0 = 1 - \left(\frac{2x * 500}{500^2}\right);$$

$$1 = + \left(\frac{2x * 500}{500^2}\right); 500^2 = 2x * 500; x = \frac{500^2}{2 * 500} = 250; \text{ Habra un maximo o minimo en } x = 250$$

$$\text{Para } x = 250; y = 1000 + x - \frac{x^2}{500}; y = 1000 + 250 - \frac{250^2}{500} = 1125$$

La maxima contidad en eueos que puede conseguir $y = 1125$

6. Ejercicio

$$\text{Dadas las matrices } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz inversa de B

b) Sabiendo que el determinante de la matriz $AB = a - 9$, Calcular el valor de A

c) Determinar le rango de la matriz A en función del parámetro a

Solución

a) Calcular la matriz inversa de B

$$\text{La matriz Inversa } B^{-1} = \frac{1}{|B|} * (B^*)^t$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1;$$

$$B^* = \begin{pmatrix} 2 & +3 \\ +3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(B^*)^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz Inversa } B^{-1} = \frac{1}{|B|} * (B^*)^t, B^{-1} = \frac{1}{1} * \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Sabiendo que el determinante de la matriz AB es igual a $a - 9$. Calcular el valor de a

$$A * B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 3 & -6 + 2 \\ 15 - 3a & -9 + 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 15 - 3a & -9 + 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 15 - 3a & -9 + 2a \end{vmatrix} = -9 = -63 + 14a + 60 - 12a = -63 + 60 + 14a - 12a;$$

$$-9 = -3 + 2a; -6 = 2a; a = -\frac{6}{2} = -3; a = -3$$

c) Determinar le rango de la matriz A en función del parámetro a

$$\text{Calculo el determinante de la matriz } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 2a - 3; \text{ igualo a 0 para ver el rango en funcion que esto valga } 0; 2a - 3 = 0;$$

$$2a = 3; a = \frac{3}{2};$$

Discriminacion :

Si $a \neq \frac{3}{2} \Rightarrow 2a - 3 \neq 0$; lo cual indica que el rango de la matriz $A = 2$

Si $a = \frac{3}{2} \Rightarrow 2a - 3 = 0$; lo cual indica que el rango de la matriz $A < 2$

para $a = \frac{3}{2}$ El rango de la matriz es 1

7. Ejercicio

Dados los vectores $\vec{u} = (0,4,3)$ y $\vec{v} = (2,-1,2)$. Se pide

a) Hallar el producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definidos como $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$;

b) Hallar el producto vectorial de $\vec{b} \times \vec{c}$ donde $\vec{c} = 2\vec{u}$

Solución

a) Hallar el producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definidos como $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$;

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}; \vec{a} = (0,4,3) + (2,-1,2) = (2,3,5); \vec{a} = (2,3,5)$$

$$\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}; \vec{b} = (0,4,3) - (2,-1,2) = (-2,5,1); \vec{b} = (-2,5,1)$$

$$\text{Producto escalar } \vec{a} \cdot \vec{b} = (2 * (-2) + 3 * 5 + 5 * 1 = -4 + 15 + 5 = 16;$$

b) Hallar el producto vectorial de $\vec{b} \times \vec{c}$ donde $\vec{c} = 2\vec{u}$

$$\vec{b} = (-2,5,1);$$

$$\vec{c} = 2\vec{u} = 2((0,4,3) = (0,8,6); \vec{c} = (0,8,6);$$

$$\text{Producto vectorial } \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \end{vmatrix} = (30 - 8)i - 12j + (-16k) = 22i + 12j - 16k;$$

el vector $\vec{b} \times \vec{c}$ será (22,12,16)

8. Ejercicio

En un experimento aleatorio se conocen los siguientes datos relativos a los sucesos A y B:

$P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 0,8$. Se pide:

a) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(\bar{A} | \bar{B})$;

b) ¿Son independientes los sucesos A y B?;

c) ¿Son incompatibles los sucesos A y B?;

Solución

a) Calcular $P(A \cap B)$; $P(\bar{A} | \bar{B})$;

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B); P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,8 = 0,3; \mathbf{P(A \cap B) = 0,3};$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; P(A|B) = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}; P(B|A) = \frac{0,3}{0,6} = 0,5$$

$$P(\bar{A} | \bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

b) ¿Son independientes los sucesos A y B?;

Si fueran independientes se cumpliría que $P(A|B) = P(A)$;

Dado que $0,6 \neq 0,6 \Rightarrow$ son independientes

Comprobamos para $P(B|A) = P(B)$;

Dado que $0,5 \neq 0,5 \Rightarrow$ son independientes

c) ¿Son incompatibles los sucesos A y B?;

Dos sucesos son incompatibles si $P(A \cap B) = 0$;

Como en nuestro caso $P(A \cap B) = 0,3$ no son incompatibles

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}; \text{ Al ser dos sucesos independientes se cumplirá } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) * P(\bar{B})$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) * P(\bar{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 0,4 * 0,5 = 0,2 ;$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4;$$