

Exámenes acceso a la universidad mayores de 25 años(año2021)

Contenido

1	EXAMEN 2021 A	2
2	EXAMEN 2021 B	9
3	EXAMEN 2021 C	17
4	EXAMEN 2021 D.....	23

1 Examen 2021 A

1. Ejercicio

Sea x_0, y_0, z_0 la solución del sistema $\begin{cases} x + y = 1; \\ x + z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$

Solución

Podríamos resolver el sistema de ecuaciones por cualquiera de los 3 métodos (igualación, reducción o sustitución) como es un sistema simple lo he resuelto de esta manera

$\begin{cases} x + y = 1; \text{despejamos } x = 1 - y; \\ x + z = 2; \text{sustituimos } x \Rightarrow 1 - y + z = 2 \text{ y } = z - 1; \text{igualamos valor de la 2ª y la 3ª ecuación} \\ y + z = 3, \text{despejamos } y = 3 - z; \end{cases}$

$y = z - 1 = 3 - z$; despejamos $2z = 4$; $z = 2$;

Sustituyo el valor de x en la 1ª ecuación; $x + z = 2 \Rightarrow x + 2 = 2$; $x = 0$;

Sustituyo el valor de z en la 1ª ecuación; $x + y = 1 \Rightarrow 0 + y = 1$; $y = 1$;

2. Ejercicio

Sean los polinomios $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ y $Q(x) = x + 1$;

Calcular el resto de dividir $P(x)$ entre $Q(x)$

Solución

La forma más simple es aplicar ruffini

	1	2	3	4	5
		-1	-1	-2	-2
-1	1	1	2	2	3

El resultado de la división es $x^3 + x^2 + 2x + 2$ y resto 3

Si hacemos la división

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \quad | \quad x + 1 \\
 \underline{-x^4 - x^3} \\
 0 + x^3 + 3x^2 \\
 \underline{-x^3 - x^2} \\
 0 + 2x^2 + 4x \\
 \underline{-2x^2 - 2x} \\
 0 + 2x + 5 \\
 \underline{-2x - 2} \\
 0 + 3
 \end{array}$$

3. Ejercicio

¿ Existe algun triangulo rectangulo cuyos catetos midan $2x$, $3x$ y la hipotenusa mida $5x$;

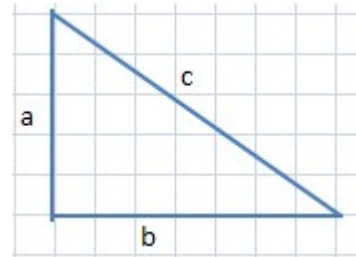
Solución

Si es un triangulo rectángulo ha de cumplirse el teorema de Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ lo que implica } (2x)^2 + (3x)^2 = (5x)^2$$

$$4x^2 + 9x^2 = 25x^2; 13x^2 \neq 25x^2 \text{ dado que } 13 \neq 25,$$

no existe ningun numero real que cumpla esto



4. Ejercicio

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Indicar el valor de $A * B - B * A$

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A * B = \begin{bmatrix} 1*0 + 1*1 & 1*1 + 1*0 \\ 1*0 + 0*1 & 1*1 + 0*0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = B * A = \begin{bmatrix} 0*1 + 1*1 & 0*1 + 1*0 \\ 1*1 + 0*1 & 1*1 + 0*0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A * B - B * A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Ejercicio

Determinar si existe un numero real tal $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$

Solución

Para hallar el determinante de una matriz aplicamos el siguiente método

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \text{suma de los productos de las flechas negras} - \text{suma de productos flechas rojas}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (1 * \alpha * 6 + 0 * 1 * 5 + 0 * 1 * 1) - (1 * \alpha * 5 + 0 * 0 * 6 + 1 * 1 * 1) = 6\alpha - 5\alpha - 1 = 0;$$

$$1\alpha = 1; \alpha = 1;$$

Al ser matriz cuadrada de 3X3 podemos usar el método de Sarrus(solo para este caso de matroces 3X3), es lo mismo pero de apariencia más fácil de entender

añadimos las dos filas primeras a la derecha de la matrtriz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \alpha \\ 5 & 1 & 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (1 * 0 * 1 + 0 * 1 * 5 + 1 * \alpha * 6) - (1 * \alpha * 5 + 1 * 1 * 1 + 0 * 0 * 6) =$$

$$6\alpha - 5\alpha - 1 = 0; \alpha = 1;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

6. Ejercicio

Calcular el valor de la integral $\int_0^1 6x^2 e^{2x^3} dx$

Solución

Integrales inmediatas, Funcion compuesta

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int_0^1 6x^2 e^{2x^3} dx = (e^{2x^3})_0^1 = e^{2 \cdot 1^3} - e^{2 \cdot 0^3} = e^2 - 1; \quad \int_0^1 6x^2 e^{2x^3} dx = e^2 - 1$$

7. Ejercicio

Calcular el valor del limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin(2x)}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin(2x)} = \frac{\ln(\cos(0))}{\sin(2 \cdot 0)}$$

$$= \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminado}$$

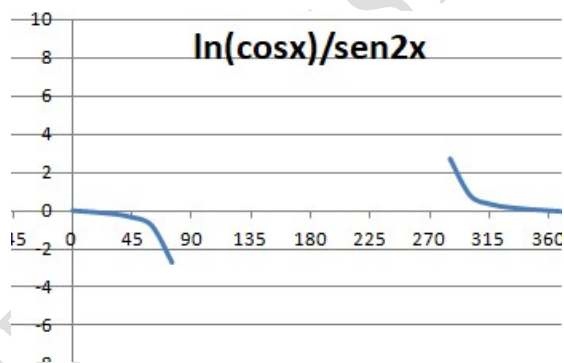
para resolver este tipo de indeterminacion

aplicamos la regla l'hospital:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2(\cos 2x)} = \frac{\frac{-\sin 0}{\cos 0}}{2(\cos 2 \cdot 0)} = \frac{\frac{-0}{1}}{2(\cos 2 \cdot 0)} = \frac{0}{2 \cdot 1} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\sin 0,00001}{\cos 0,00001}}{2(\cos 2 \cdot 0,00001x)} = 0,000005 \Rightarrow 0$$

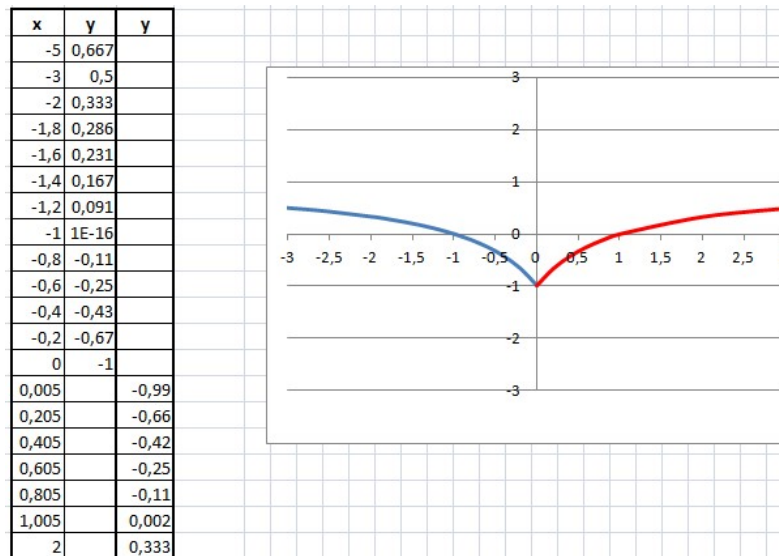


8. Ejercicio

La función $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ determinar si la función es continua, discontinua y definida $x = 0$

Solución

Damos valores a x y definimos la función



D dominio de la función $= \mathbb{R}$.

Para comprobar si la función es continua debe cumplirse

$$\text{Limite por la izquierda } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \text{Limite por la derecha } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\text{Limite por la izquierda } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

$$\text{Limite por la derecha } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

La función es continua en $x=0$

9. Ejercicio

Cuanto vale la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ en el punto $x = 2$

Solución

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3}; f(x) = (x^2 - 3)^{\frac{1}{2}}; f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3)^{\frac{1}{2}-1} * 2x = x(x^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}};$$

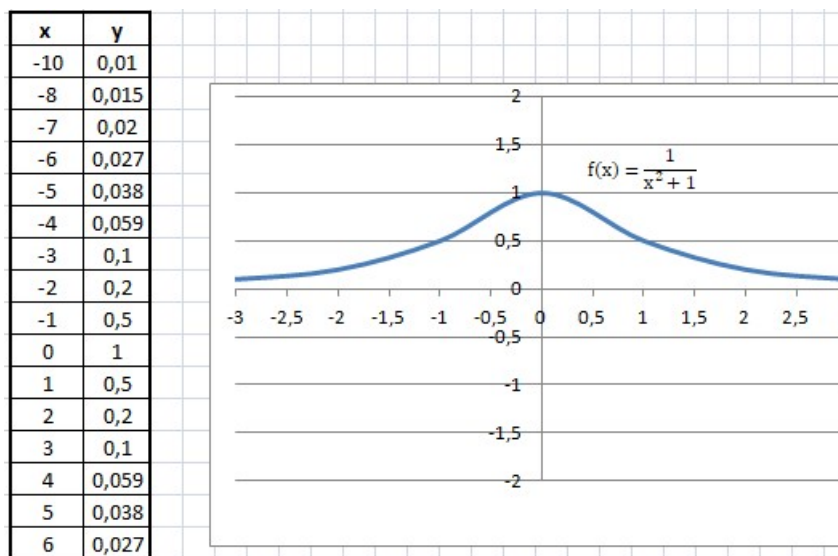
$$\text{para } x = 2; f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 - 3}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 - 3}} = \frac{2}{1} = 2;$$

10. Ejercicio

En el punto 0,1 la función $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

Solución

Damos valores a x, y definimos la función



Graficamente vemos que hay un máximo .

La forma de calcularlo es hallando la derivada de la función

primero comprobamos que la función $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ pasa por el punto (0,1);

$$y = \frac{1}{0^2 + 1} = \frac{1}{1} \Rightarrow \text{la función pasa por el punto } (0,1)$$

$$\text{Hallamos la 1ª derivada; } f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}; f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2};$$

tendremos un máximo o un mínimo en el punto que haga 0 la primera derivada

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0; \text{ máximo o mínimo; } f'(x) = m \text{ pendiente de la recta} = 0;$$

$$\frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0; -2x = 0; x = 0; \text{ en el punto } x = 0 \text{ hay un máximo o un mínimo}$$

$$\text{Hallamos la 2ª derivada; } f(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}; f''(x) = \frac{-2((x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1)2x)}{(x^2 + 1)^4};$$

Comprobamos su valor para $x=0$;

$$f''(x) = \frac{-2((x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1)2x)}{(x^2 + 1)^4} \text{ para } x = 0; f''(x) = \frac{-2((0^2 + 1)^2 - 2(0^2 + 1)2 \cdot 0)}{(0^2 + 1)^4} =$$

$$\frac{-2(1)^2}{1^4} = -\frac{2}{1} = -2 \text{ como } f''(x) < 0 \text{ tendremos un máximo relativo}$$

11. Ejercicio

En $x = 0$, la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen } x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Determinar si la función es

- a) continua y derivable
- b) continua y no derivable
- c) no es continua ni derivable

Solución

Una función es continua en todo el dominio de la función.

Una función es derivable en todo el dominio de la derivada.

Dominio de la función: El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$

La función es continua $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen } x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Comprobamos la continuidad en $x = 0$ $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{para } x = 0; y = 0 \\ \text{sen } x & \text{para } x = 0; y = 0 \end{cases}$

Hallamos la derivada de la función $f'(x) = \begin{cases} 6x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $\text{para } x = 0; f'(x) = -2$
 $\text{Para } x = 0; f'(x) = 1$

b) continua y no derivable

12. Ejercicio

Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2 + 1$ entonces la composición $g \circ f(x)$ será:

Solución

Para hallar $g \circ f(x)$ = sustituyo $f(x)$ por la x de la función $g(x)$

$$g \circ f(x) = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 1 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 2;$$

$g \circ f(x) = x^2 + 2x + 2$

13. Ejercicio

Calcular límite por la izquierda de

$$x = 1 \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 5}}$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 5}} = \sqrt{\frac{0}{6}} = 0$$

límite por la izquierda de $x = 1$

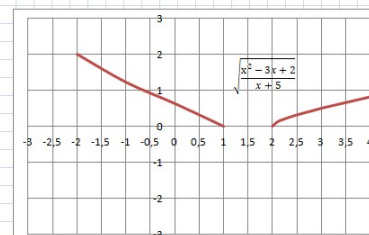
$$\lim_{x \rightarrow 0,999999} \sqrt{\frac{0,999999^2 - 3 \cdot 0,999999 + 2}{0,999999 + 5}}$$

$$= \sqrt{\frac{0,999998 - 2,999997 + 2}{0,999999 + 5}} = \sqrt{\frac{0,000001}{5,999999}} = 0,00004 \text{ límite por la izquierda en } x = 1; \text{ es } 0$$

límite por la derecha en $x = 1$; es indeterminado

La función $\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 5}}$ no está definida entre (1,2)

x	y
-2	2
-1	1,224744871
0	0,632455532
0,999999	0,000408249
1	0
1,000001	
1,100001	
1,300001	
1,500001	
1,600001	
1,700001	
2	0
2,000001	0,000377965
2,100001	0,124471381
2,200001	0,182574706
2,300001	0,231138204
2,400001	0,275092546
2,500001	0,316228167
3	0,5
3,1	0,534027326
4	0,816496581



14. Ejercicio

En $x = 0$, la función $f(x) = x^2 + \cos x$. ver si hay un punto de inflexión

Solución

Si damos valores a la función $f(x) = x^2 + \cos x$ hallamos que hay un mínimo

Comprobamos que la función

$f(x) = x^2 + \cos x$ esta definida en $x = 0$;

$y = 0^2 + \cos 0 = 1$; la función pasa por $(0,1)$

Hallamos la derivada $f(x) = x^2 + \cos x$;

$f'(x) = 2x - \sin x$ vemos el valor que hace 0;

$2x - \sin x = 0$; en $x = 0$ $f(x) = 0$

en ese punto habrá un máximo o mínimo

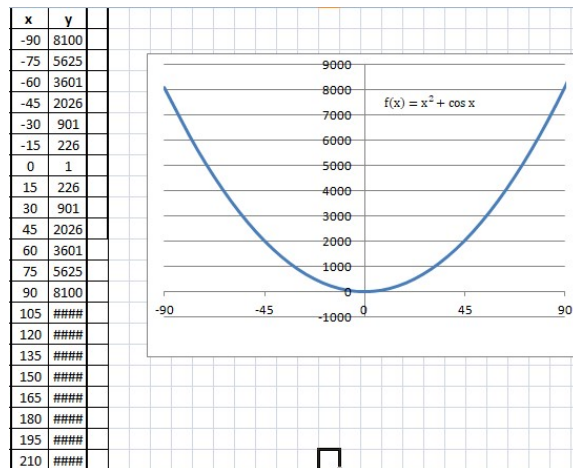
Hallamos la segunda derivada

$f(x) = x^2 + \cos x$;

$f'(x) = 2 - \cos x$; para $x = 0$;

$f''(x) = 2 - \cos 0$;

$f''(x) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$ habrá un mínimo en $(0,1)$



15. Ejercicio

¿Cuál es el valor de la integral $\int_2^6 \frac{1}{x} dx$?

Solución

Integrales inmediatas tipo 2º $\int x^{-1} dx = \ln |x| + C$; $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$

Es una integral inmediata función logarítmica $\int_2^6 \frac{1}{x} dx = (\ln |x| + C)_2^6 = \ln 6 - \ln 2 = \ln \frac{6}{2} = \ln 3$

$$\int_2^6 \frac{1}{x} dx = \ln 3$$

2 Examen 2021 B

1. Ejercicio

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Se pide:

a) Calcular la matriz inversa de A

b) Calcular el determinante de la matriz $2A^tB$ donde A^t es la matriz transpuesta de A

c) Calcular el determinante de la matriz $(A^{-1}B)^7$

Solución

a) Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Aplicamos método Gaus $\begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 1 & 0 \\ 3 & 2 & : & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Convertimos el 3 en 0; dejamos sin tocar F_1 y $F_2 = -3F_1 + F_2$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -3 & -6 & : & -3 & 0 \\ 3 & 2 & : & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad -4 : -3 \quad 1 \Rightarrow A_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 1 & 0 \\ 0 & -4 & : & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 1 & 0 \\ 0 & -4 & : & -3 & 1 \end{pmatrix}$ Convertimos el 2 en 0; dejamos sin tocar F_2 y $F_1 = F_1 + 1/2F_2$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 1 & 0 \\ 0 & -4/2 & : & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} = 1 \quad 0 : -1/2 \quad 1/2 \Rightarrow A_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -4 & : & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -4 & : & -3 & 1 \end{pmatrix}$ Convertimos el -4 en 1; dejamos sin tocar F_1 y $F_2 = -F_2/4$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & : & -3 & 1 \\ -4 & -4 & : & -3 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad 1 : \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow A_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & : & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{pmatrix} = 1/4 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Prueba } A^{-1} * A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2*1 + 2*3 & -2*2 + 2*2 \\ 3*1 - 1*3 & 3*2 - 1*2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Otro método

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \text{ La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t;$$

$$|A| = 2 - 6 = -4$$

$$\text{La conjugada de A; } A^* = \begin{pmatrix} +2 & -3 \\ -2 & +1 \end{pmatrix};$$

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcular el determinante de la matriz $2A^tB$ donde A^t es la matriz transpuesta de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2A^tB = 2 * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1(-1) + 1*0 & 3(-1) + 2*0 \\ 1*0 + 2*2 & 3*0 + 2*2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2A^tB = \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = -16 + 48 = 32$$

c) Calcular el determinante de la matriz $(A^{-1} B)^7$

$$|A*B| = |A|*|B|$$

$$|(A^{-1} * B)| = |A^{-1}| * |B| = \left| -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right| * \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{2}{4} & +\frac{2}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \right| * \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right| =$$

$$-\frac{4}{16} * (-2) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$|(A^{-1} B)^7| = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$$

2. Ejercicio

Dados los puntos $A(1, -1, 2)$; $B(3, -2, 3)$ y $C(2, 1, 2)$. Determinar:

- Las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AC}$
- Comprobar que el triángulo de vértices ABC es rectángulo
- Comprobar que el triángulo de vértices A, B y C no es isósceles. identifica el lado menor

Solución

- Las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AC}$

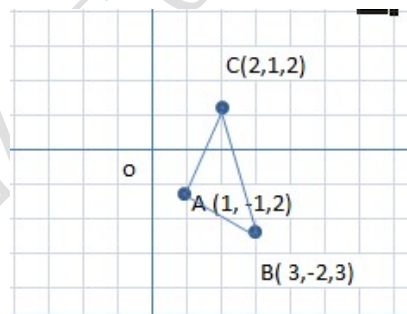
$$\text{Punto medio } \overline{AC} = \frac{(1+2), ((-1, 2) + (1, 2))}{2}$$

$$= \frac{3, 0}{2} = (1,5, 0)$$

$$M_x = \frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{1+2}{2} = 1,5$$

$$M_y = \frac{Y_1 + Y_2}{2} = \frac{-1, 2 + 1, 2}{2} = 0$$

$$\text{Punto medio}(M_x, M_y) = (1,5, 0)$$



- Comprobar que el triángulo de vértices ABC es rectángulo

Para que el triángulo sea rectángulo las recta AC debe ser perpendicular a AB

Las pendientes de las recta serán $m = a$ y $m' = -\frac{1}{a}$

$$\text{Pendiente recta } AB ; m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-2, 3) - (-1, 2)}{3 - 1} = \frac{-1, 1}{2} = -0,55$$

$$\text{Pendiente recta } AC ; m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(1, 2) - (-1, 2)}{2 - 1} = \frac{2, 4}{1} = 2,4$$

No son perpendiculares

- Comprobar que el triángulo de vértices A, B y C no es isósceles. identifica el lado menor

Comprobamos la medida de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$

$$\text{La distancia entre dos puntos} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1, 2 - (-1, 2))^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{(2, 4)^2 + (1)^2} = 2,6$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2, 3 - (-1, 2))^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{(1, 1)^2 + (2)^2} = 2,283$$

$$\overline{AC} > \overline{AB}$$

3. Ejercicio

Dada la función $f(x) = -3 + \frac{4}{x-2} - \frac{4}{x+1}$ Hallar:

a) Determinar el dominio y sus asíntotas

b) calcular $f'(x)$ y comprobar que tiene un extremo relativo ¿maximo o minimo?

Solución

a) Determinar el dominio y sus asíntotas

El dominio de la función es todo $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$

Asíntotas:

Asíntotas verticales son los valores de x que hacen indeterminada la función $x = 2$ y $x = -1$

Asíntotas horizontales:

Para hallar estas asíntotas hallamos el límite de la función cuando x tiende a infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x); \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-3 + \frac{4}{x-2} - \frac{4}{x+1}\right) = -3 + \frac{4}{\infty-2} - \frac{4}{\infty+1} = -3 + 0 - 0 = -3$$

Asíntota horizontal $y = -3$;

b) calcular $f'(x)$ y comprobar que tiene un extremo relativo ¿maximo o minimo

$$f(x) = -3 + \frac{4}{x-2} - \frac{4}{x+1}; f'(x) = 0 + \frac{-1 \cdot 4}{(x-2)^2} - \frac{-1 \cdot 4}{(x+1)^2}; f'(x) = \frac{-4}{(x-2)^2} - \frac{-4}{(x+1)^2};$$

Para ver el punto en que la función tiene un maximo o minimo igualamos $f'(x)$ a 0;

$$0 = \frac{-1 \cdot 4}{(x-2)^2} - \frac{-1 \cdot 4}{(x+1)^2} = \frac{(-4)(x+1)^2}{(x+1)^2 \cdot (x-2)^2} - \frac{(-4)(x-2)^2}{(x+1)^2 \cdot (x-2)^2} = 0$$

$$0 = \frac{(-4)(x+1)^2 - (-4)(x-2)^2}{(x+1)^2 \cdot (x-2)^2}; (-4)(x+1)^2 - (-4)(x-2)^2 = 0$$

$$(-4)((x^2 + 1 + 2x) - (x^2 + 4 - 4x)) = (-4)(x^2 + 1 + 2x - x^2 - 4 + 4x)$$

$$0 = (-4)(-3 + 6x) = 12 - 24x = 0; x = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}; \text{ en } x = 0,5 \text{ habra un maximo o minimo relativo}$$

Para ver si es maximo o minimo hallo la segunda derivada

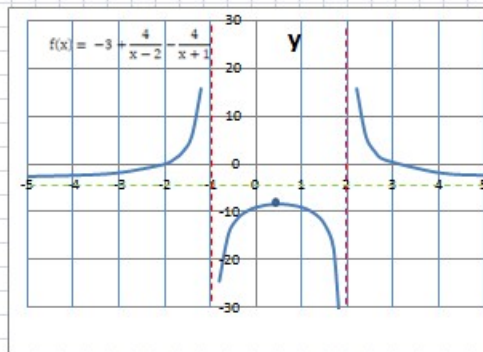
$$f'(x) = \frac{-4}{(x-2)^2} - \frac{-4}{(x+1)^2}; f''(x) = \frac{-(-4)2(x-2)}{(x-2)^4} - \frac{-(-4)2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{8(x-2)}{(x-2)^4} - \frac{8(x+1)}{(x+1)^4}; f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3} - \frac{8}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3} - \frac{8}{(x+1)^3} \text{ para } x = 0,5 \Rightarrow f''(x) = \frac{8}{(0,5-2)^3} - \frac{8}{(0,5+1)^3} = \frac{8}{-3,375} - \frac{8}{3,375}$$

$$f''(x) \left(\text{para } x = \frac{1}{2} = 0,5 \right) = -\frac{16}{3,375} < 0 \text{ luego hay un maximo relativo}$$

x	y
-5	-2,6
-4	-2,3
-3	-1,8
-2	0
-1,8	0,95
-1,6	2,56
-1,4	5,82
-1,2	15,8
-1	
-0,8	-24
-0,6	-15
-0,4	-11
-0,2	-9,8
0	-9
0,2	-8,6
0,4	-8,4
0,5	-8,3
0,7	-8,4
0,9	-8,7
1,1	-9,3
1,3	-10
1,5	-13
1,7	-18
1,9	-44
2	
2,2	15,8
2,4	5,82
2,6	2,56
2,8	0,95
4	-18



4. Ejercicio

Dos expertos en valoración de siniestros, A y B, realizan peritaciones para una compañía de seguros. El experto A realiza el triple de peritaciones que el experto B. En los casos en que interviene A la probabilidad de que el asunto se resuelva con una indemnización es 0.8, mientras que si interviene B la probabilidad de indemnización es 0.9. Se pide:

a) ¿Qué porcentaje de siniestros termina en indemnización?

b) Si un siniestro se ha resuelto con el pago de una indemnización, ¿qué probabilidad hay de que la peritación haya sido realizada por B?

Solución

a) ¿Qué porcentaje de siniestros termina en indemnización?

$P(\text{termine en indemnización}) =$

$P(A) * P(A|\text{indemnización}) + P(B) * P(B|\text{indemnización})$

$P(\text{termine en indemnización}) = 0,75 * 0,8 + 0,25 * 0,9$

$= 0,6 + 0,225 = 0,825 \Rightarrow 82,5\%$

	realice peritación	indemnización
		0,8 indemnización
A	3/4	0,2 no indemnización
		0,9 indemnización
B	1/4	0,1 no indemnización

b) Si un siniestro se ha resuelto con el pago de una indemnización, ¿qué probabilidad hay de que la peritación haya sido realizada por B?

Aplicamos teorema de Bayes

$$P(B|\text{indemnización}) = \frac{P(B|\text{indemnización}) * P(B)}{P(A) * P(A|\text{indemnización}) + P(B) * P(B|\text{indemnización})}$$

$$P(B|\text{indemnización}) = \frac{0,9 * 0,25}{0,75 * 0,8 + 0,25 * 0,9} = \frac{0,225}{0,6 + 0,225} = \frac{0,225}{0,825} = 0,2727 \Rightarrow 27,27\%$$

5. Ejercicio

Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 3x + 2y + mz = 6 \\ 2x - 2y + 6z = -2 \end{cases}$$

- a) Discutir la compatibilidad del sistema en función de los valores del parámetro m
 b) Resolver el sistema cuando $m = 0$;

Solución:

Se dice que un sistema es compatible determinado si tiene una solución única

- a) Discutir la compatibilidad del sistema en función de los valores del parámetro m

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & m & 6 \\ 2 & -2 & 6 & -2 \end{array} \right) \text{ para que quede una estructura escalonada } \begin{array}{ccc} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & m & 6 \\ 2 & -2 & 6 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[E_3 = E_3 - 2E_1]{E_2 = E_2 - 3E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & m & 0 \\ 0 & -10 & 6 & -6 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & m & 0 \\ 0 & -10 & 6 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow[E_3 = E_3 - E_2]{E_2 = E_2 \cdot (-1/10)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -m/10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 - m & -6 \end{array} \right);$$

Tendremos $6 - m = -6$; Si $m = 6$ es un sistema incompatible pues $6 - 6 = 0$, es distinto de -6

- b) Resolver el sistema cuando $m = 0$;

$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 3x + 2y + mz = 6 \\ 2x - 2y + 6z = -2 \end{cases} \text{ Para } m = 0; \begin{cases} x + 4y = 2 \\ 3x + 2y + z = 6 \\ 2x - 2y + 6z = -2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array} \right)$$

Tendremos $6z = -6$; $z = -1$;

$$-10y = 0; \quad y = 0;$$

$$x + 4y = 2; \text{ Para } z = -1; y = 0; \quad x = 2;$$

6. Ejercicio

Se consideran los planos $\eta_1: x - y + z = 3$ y $\eta_2: -2x + y + 2z = 2$;

y el punto del plano $P(9, -2, -7)$ Hallar.

- a) Vector director de la recta intersección de los planos
 b) Al proyectar el punto P sobre el plano η_2 en qué punto se atraviesa el plano η_1 ?

Solución

- a) Vector director de la recta intersección de los planos

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ -2x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \text{ si sumo las ecuaciones}$$

$$x + (-2x) - y + y + z + 2z - 3 - 2 = -x + 3z - 6 = 0; \quad x = 3z - 6$$

Sustituyo en una de las ecuaciones $x - y + z - 3 = 0 \Rightarrow 3z - 6 - y + z - 3 = 0; \quad 4z - 9 = y;$

$$\text{La recta de intersección será } \begin{cases} 4z - 9 = y \\ 3z - 6 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t - 9 = y \\ 3t - 6 = x \\ t = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{y+9}{4} \\ t = \frac{x+6}{3} \\ t = z \end{cases}$$

El vector director será $\vec{v} = (4, 3, 1)$

b) Al proyectar el punto P sobre el plano η_2 en que punto se atraviesa el plano η_1

El vector director perpendicular al plano $\eta_2 = -2x + y + 2z = 2$, será $\vec{v} = (-2, 1, 2)$

La ecuación de la recta será la que tiene el vector director $\vec{v}(-2, 1, 2)$

y pasa por el punto P(9, -2, -7)

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{v_1} \\ t = \frac{y - y_0}{v_2} \\ t = \frac{z - z_0}{v_3} \end{cases} \quad t = \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}; \quad \frac{x - 9}{-2} = \frac{y - (-2)}{1} = \frac{z - (-7)}{2};$$

$$\text{recta perpendicular al plano que pasa por P; } \begin{cases} t = \frac{x - 9}{-2} \\ t = \frac{y + 2}{1} \\ t = \frac{z + 7}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -2t + 9 \\ y = t - 2 \\ z = 2t - 7 \end{cases}$$

Hallamos la intersección de la recta $\begin{cases} x = -2t + 9 \\ y = t - 2 \\ z = 2t - 7 \end{cases}$ y el plano $\eta_2 = -2x + y + 2z = 2$

Sustituimos los valores en el plano y el plano $\eta_2 = -2(-2t + 9) + t - 2 + 2(2t - 7)$

$$4t - 18 + t - 2 + 4t - 14 = 2; 9t = 37; t = \frac{36}{9} = 4$$

$$\text{El punto de corte será } \begin{cases} x = -2t + 9 \\ y = t - 2 \\ z = 2t - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2(4) + 9; x = 1 \\ y = 4 - 2; y = 2 \\ z = (2 * 4) - 7; z = 1 \end{cases} \quad (1, 2, 1)$$

Hallamos la recta que pase por los puntos P(9, -2, -7) y P'(1, 2, 1)

$$\vec{v} = (a' - a), (b' - b), (c' - c); \quad \vec{v} \begin{cases} v_1 = (1 - 9) \\ v_2 = (2 - (-2)) \\ v_3 = (1 - (-7)) \end{cases} \quad \vec{v} \begin{cases} v_1 = -8 \\ v_2 = 4 \\ v_3 = 8 \end{cases} \quad \vec{v} = (-8, 4, 8)$$

$$\begin{cases} t = \frac{x - 9}{-8} \\ t = \frac{y + 2}{4} \\ t = \frac{z + 7}{8} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -8t + 9 \\ y = 4t - 2 \\ z = 8t - 7 \end{cases}$$

Hallamos la intersección de la recta $\begin{cases} x = -8t + 9 \\ y = 4t - 2 \\ z = 8t - 7 \end{cases}$ y el plano $\eta_1 = x - y + z = 3$

Sustituimos los valores en el plano $\eta_1 = (-8t + 9) - (4t - 2) + (8t - 7) = 3;$

$$-8t + 9 - 4t + 2 + 8t - 7 = 3; -4t + 4 = 3; t = \frac{1}{4};$$

$$\text{El punto de corte será } \begin{cases} x = -8t + 9 \\ y = 4t - 2 \\ z = 8t - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -8 * 1/4 + 9 \\ y = 4 * 1/4 - 2 \\ z = 8 * 1/4 - 7 \end{cases} \quad (7, -1, -5)$$

7. Ejercicio

En una region remota se ha producido una epidemis contagiosa pero de facil curacion aunque lenta
Un modelo matematico estima que el porcentaje de personas que estan enfermas en funcion de los

dias transcurridos desde la aparicion de la epidemia vien dado por $P(t) = \frac{80t}{25 + t^2}$;

t = dias transcurridos; $P(t)$ porcentaje de enfermos

a) ¿ Que porcentaje de poblacion se estima que está enferma a los 4 dias de declararse la epidemia?

b) ¿ A cuantos dias el porcentaje de personas enferma es maximo?

c) cuantos dias han de pasar para que el numero de personas enfermas descienda al 2%

Solución

a) ¿ Que porcentaje de poblacion se estima que está enferma a los 4 dias de declararse la epidemia?

$$P(t) = \frac{80t}{25 + t^2} \text{ a los 4 dias } P(t) = \frac{80 \cdot 4}{25 + 4^2} = \frac{320}{41} = 7,8$$

b) ¿ A cuantos dias el porcentaje de personas enferma es maximo?

calculamos donde hay un maximo o minimo $P(t) = \frac{80t}{25 + t^2}$;

$$P'(t) = \frac{80(25 + t^2) - 2t(80t)}{(25 + t^2)^2} = 0; 80(25 + t^2) - 2t(80t) = 0; 2000 + 80t^2 - 160t^2 = 0;$$

$$2000 - 80t^2 = 0; t^2 = \frac{2000}{80} = 25 \text{ hay un maximo a los 5 dias; } P'(5) = \frac{80 \cdot 5}{25 + 5^2} = \frac{40}{50} = 0,8 \Rightarrow 8\%$$

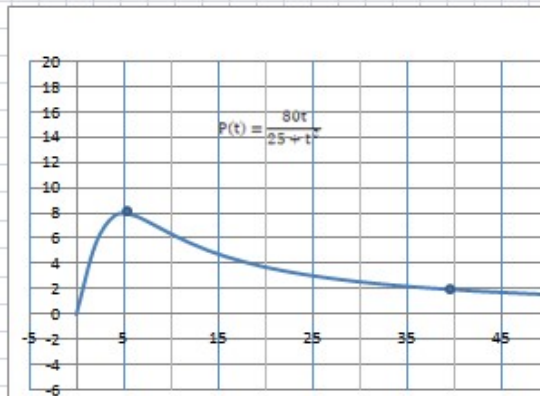
c) Cuantos dias han de pasar para que el numero de personas enfermas descienda al 2%

$$P(t) = \frac{80t}{25 + t^2} = 2; 80t = 50 + 2t^2; 2t^2 - 80t + 50 = 0;$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x = \frac{80 \pm \sqrt{(-80)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 50}}{2 \cdot 2} = \frac{80 \pm \sqrt{(-80)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 50}}{2 \cdot 2} = \frac{80 \pm 77,46}{4}$$

$$x = 39,365$$

x	y
0	0
2	5,5
4	7,8
6	7,9
8	7,2
10	6,4
12	5,7
14	5,1
16	4,6
18	4,1
20	3,8
22	3,5
24	3,2
26	3
28	2,8
30	2,6
32	2,4
34	2,3
36	2,2
38	2,1
40	2
42	1,9



8. Ejercicio

En una atracción de feria se consigue un osito derribando un bote con una pelota de goma.

Cada jugador dispone de tres intentos, de modo que puede ganar en el primero, segundo o tercer lanzamiento.

a) ¿Qué probabilidad tiene de conseguir el osito un jugador que en cada lanzamiento tiene una probabilidad de acertar igual a 0.4?

b) Sabiendo que el jugador del apartado anterior ha conseguido el osito, ¿Cuál es la probabilidad de que no haya necesitado el tercer intento?

Solución

a) ¿Qué probabilidad tiene de conseguir el osito un jugador que en cada lanzamiento tiene una probabilidad de acertar igual a 0.4?

$$P(1^{\circ} \text{ intento no consiga el premio}) = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$P(2^{\circ} \text{ intento no consiga el premio}) = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$P(3^{\circ} \text{ intento no consiga el premio}) = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$P(\text{no conseguir el premio}) = 0,6 * 0,6 * 0,6 = 0,216$$

$$P(\text{de conseguir el premio}) = 1 - 0,216 = 0,784$$

ganar con el lanzamiento		
primero	segundo	tercero
acierto 0,4		
fallo 0,6	acierto 0,4	acierto 0,4
	fallo 0,6	fallo 0,6

b) Sabiendo que el jugador del apartado anterior ha conseguido el osito, ¿Cuál es la probabilidad de que no haya necesitado el tercer intento?

$$P(\text{gane el premio en el primer o segundo intento}) = \frac{0,4 + 0,6 * 0,4}{0,784} = 0,8163$$

3 Examen 2021 C

1. Ejercicio

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Hallar:

a) determinante de A y de B

b) Las matrices A^{-1} y de B^{-1}

c) Matrices X e Y tales que $AX = B$ e $YA = B$

Solución

El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa

a) determinante de A y de B

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-2) = 4;$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 5;$$

b) Las matrices A^{-1} y de B^{-1}

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t ;$$

$$\text{Adjunta } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -(-2) \\ -(-1) & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} ; (A^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adjunta } B^* = \begin{pmatrix} 2 & -(-1) \\ -(-3) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} ; (B^*)^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz Inversa } B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Matrices X e Y tales que $AX = B$ e $YA = B$

$$X = B * A^{-1}; X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} * \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1*1+3*2 & 1*(-1)+3*2 \\ -1*1+2*2 & -1*(-1)+2*2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{4} + \frac{32}{\sqrt{x^2 - 9}}$; Hallar:

a) Su Dominio

b) La derivada de $f(x)$

c) Estudiar las asíntotas

Solución

$$a) x^2 - 9 > 0; x^2 > 9; |x| > 3 \text{ Dominio} = R - (-3, 3) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$b) \text{ La derivada de } f(x) f(x) = \frac{2x^2 + 5}{4} + \frac{32}{\sqrt{x^2 - 9}};$$

$$f'(x) = \frac{4x * 4}{16} + \frac{1}{2} \frac{-32 * 2x}{(\sqrt{x^2 - 9})(x^2 - 9)} = x - \frac{32x}{\sqrt{(x^2 - 9)^3}} = x - \frac{32x}{\sqrt{(x^2 - 9)^3}}$$

$$\text{La derivada de } \left[\sqrt{x^2 - 9} = (x^2 - 9)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2} 2x (x^2 - 9)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} 2x (x^2 - 9)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

c) Estudiar las asíntotas

Asíntotas verticales son los valores de x que hacen indeterminada la función $x = -3$ y $x = 3$

Asíntotas horizontales:

Para hallar estas asíntotas hallamos el límite de la función cuando x tiende a infinito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 5}{4} + \frac{32}{\sqrt{x^2 - 9}} \right) = \infty \quad y \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 5}{4} + \frac{32}{\sqrt{x^2 - 9}} \right) = \infty$$

No hay asíntota horizontal

3. Ejercicio

Dados los puntos $P(3,1,2)$, $Q(1,3,-3)$ se pide hallar:

a) La distancia entre P y Q :

b) La ecuación del plano que contiene el punto P y es perpendicular a la recta que une P y Q ;

c) La distancia del origen al plano $4x + y - 4z = 18$

Solución

a) La distancia entre P y Q :

$$\text{Distancia entre dos puntos} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\text{Distancia PQ} = \sqrt{(1-3)^2 + (3-1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{33} = 5,745$$

b) La ecuación del plano que contiene el punto P y es perpendicular a la recta que une P y Q ;

Sean los puntos $P(a, b, c)$ y $P'(a', b', c')$ su vector director

$$\vec{v} = (a' - a, b' - b, c' - c); \begin{cases} v_1 = (a' - a) \\ v_2 = (b' - b) \\ v_3 = (c' - c) \end{cases}$$

$$\vec{v} = (1-3, 3-1, -3-2); \begin{cases} v_1 = (1-3) = -2 \\ v_2 = (3-1) = 2 \\ v_3 = (-3-2) = -5 \end{cases} \quad \text{vector director } \vec{v} = (-2, 2, -5)$$

Si es perpendicular a la recta tendrá el mismo vector director $\vec{v} = (-2, 2, -5)$

$-2x + 2y - 5z + C = 0$ como ha de contener al punto $P(3,1,2)$. Cumplirá la ecuación del plano

$$-2(3) + 2(1) - 5(2) + C = 0; -6 + 2 - 10 + C = 0; C = 14$$

El plano será $-2x + 2y - 5z + 14 = 0$

c) La distancia del origen $P(0,0,0)$ al plano $4x + y - 4z = 18$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \lambda) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \lambda) = \frac{|4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 - 18|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \frac{18}{\sqrt{33}}$$

4. Ejercicio

En un país en vías de desarrollo el 10 % de las cabras tiene tuberculosis y el 12 % tiene brucelosis. Se sabe que ambas enfermedades aparecen de forma independiente. Si se elige al azar una cabra de este país:

a) ¿Cual es la probabilidad de que tenga ambas enfermedades?

b) ¿Cual es la probabilidad de que no tengan ninguna de las dos enfermedades?

c) Si se sabe que la cabra elegida tiene tuberculosis. ¿Cual es la probabilidad de que también tenga brucelosis?

Solución :

a) ¿ Cual es la probabilidad de que tenga ambas enfermedades?

*Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$*

$P(\text{tuberculosis}) = 0,1$; $P(\text{brucelosis}) = 0,12$

$P(\text{tengan las dos enfermedades}) = P(A \cap B) = P(A) * P(B)$; $P(A \cap B) = 0,1 * 0,12 = 0,012$

b) ¿ Cual es la probabilidad de que no tengan ninguna de las dos enfermedades?

$P(\text{no tengan tuberculosis}) = 1 - 0,1 = 0,9$; $P(\text{no tengan brucelosis}) = 1 - 0,12 = 0,88$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) * P(\bar{B})$

$P(\text{no tenga ninguna de las dos enfermedades}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,9 * 0,88 = 0,792$

c) Si se sabe que la cabra elegida tiene tuberculosis. ¿ Cual es la probabilidad de que tambien tenga brucelosis?

Al ser eventos independiente

$P(\text{tenga brucelosis} | \text{teniendo tuberculosis}) = P(\text{tenga brucelosis}) = 0,12$

5. Ejercicio

Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + 2z = -3 \\ x + 2y + 3z = -6 \\ 2x - y + \lambda z = 2 \end{cases}$$

a) Escribir el sistema en forma matricial

b) Discutir su resolucioen en funcion de los valores del parametro λ

b) Resolver el sistema cuando $\lambda = 2$;

Solución:

a) Escribir el sistema en forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & \lambda & 2 \end{array} \right)$$

a) Discutir la compatibilidad del sistema en funcion de los valores del parametro λ

Se dice que un sistema es compatible determinado si tiene una solución única

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el metodo de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & \lambda & 2 \end{array} \right) \text{ para que quede una estructura escalonada } \begin{matrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & \lambda & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} E_1 \\ E_2 = E_2 - E_1 \\ E_3 = E_3 - 2E_1 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & (4-\lambda) & 8 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & (4-\lambda) & 8 \end{array} \right) \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 = E_3 + 3E_2 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & (4-\lambda-3) & -1 \end{array} \right)$$

Tendremos $1 - \lambda = -1$; $\Rightarrow$ *que* $\lambda \neq 1$ para que sea un sistema compatible y determinado;

b) Resolver el sistema cuando $\lambda = 2$;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & (4-\lambda-3) & -1 \end{array} \right) \text{ para } \lambda = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$z = -1$; $z = -1$;

Sustituyo en la 2ª para $z = -1$; $0x + y + z = -3 \Rightarrow 0 + y - 1 = -3$; $y = -2$;

Sustituyo en la 1ª para $z = 1$ e $y = -2$; $x + y + 2z = -3 \Rightarrow x - 2 - 2 = -3$; $x = 1$;

6. Ejercicio

Dada la función $f(x) = (x-1)^3 - 3(x-1) + 2$ se pide:

- hallar sus extremos relativos
- hallar ecuación de la recta tangente a la gráfica en $x = 3$
- hallar $\int_0^2 f(x) dx$

Solución

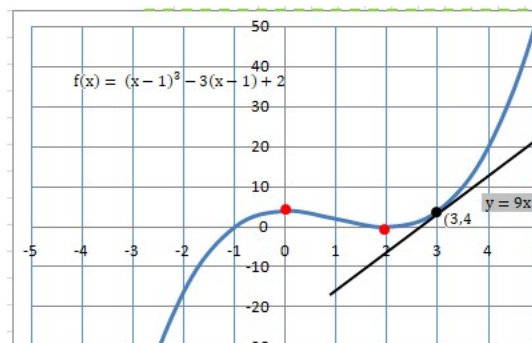
- hallar sus extremos relativos

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^3 - 3(x-1) + 2; f'(x) \\ &= 3(x-1)^2 - 3 = 3(x^2 + 1 - 2x) - 3 = \\ &= 3x^2 - 6x + 3 - 3 = f'(x) = 3x^2 - 6x; \end{aligned}$$

Igualemos a 0; $3x^2 - 6x = 0$;

y hallamos raíces que serán puntos extremos

$3x(x-2) = 0$; las raíces son $x = 0$ y $x = 2$



- hallar ecuación de la recta tangente a la gráfica en $x = 3$

En el punto $x = 3$; $f(x) = (3-1)^3 - 3(3-1) + 2 = 8 - 6 + 2 = 4$ el punto es $(3, 4)$

La tangente a la curva será $m = f'(x) = 3x^2 - 6x$; en $x = 3 \Rightarrow m = 9$;

La recta será $y = mx + C$; si pasa por $(3, 4) \Rightarrow 4 = 9 \cdot 3 + C$; $C = -23$;

La tangente a $f(x) = (x-1)^3 - 3(x-1) + 2$ en $(3, 4)$ es $y = 9x - 23$;

$$c) \text{ hallar } \int_0^2 f(x) dx = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 - \frac{3}{2}(x-1)^2 + 2x \right]_0^2 =$$

$$\left(\frac{1}{4}(2-1)^4 - \frac{3}{2}(2-1)^2 + 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1}{4}(0-1)^4 - \frac{3}{2}(0-1)^2 + 2 \cdot 0 \right)$$

$$\left(\frac{1}{4}(1)^4 - \frac{3}{2}(1)^2 + 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{3}{2}(-1)^2 \right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 4 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = 4;$$

$$\int_0^2 ((x-1)^3 - 3(x-1) + 2) dx = 4$$

7. Ejercicio

Dadas las rectas $r \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ y $u \begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = 4 + 4s \\ z = 3 - 4s \end{cases}$ se pide:

- determinar su posición relativa
- hallar distancia entre ambas rectas
- hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r_1 y el punto $(1, 2, -1)$

Solución

$$r \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} P_r = \text{punto de la recta } r (5, 3, 1) \quad \vec{d}_r = (1, -2, 2)$$

$$y \ u \begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = 4 + 4s \\ z = 3 - 4s \end{cases} P_u = \text{punto de la recta } u (3, 4, 3) \quad \vec{d}_u = (-2, 4, -4)$$

vemos si los vectores directores son proporcionales $\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{2}{-4}$

Son rectas paralelas o coincidentes

Si fueran coincidentes cualquier punto de r estaria en u :

si tomo el punto ej 5,3,1 y sustituyo en la recta u $\begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = 4 + 4s \\ z = 3 - 4s \end{cases} \left\{ -\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{4} = -\frac{z-3}{4} \right.$

sustituyo $\left\{ -\frac{5-3}{2} \neq \frac{3-4}{4} \neq -\frac{1-3}{4} \right.$ no son coincidentes

b) Hallar distancia entre ambas rectas

$$\text{Distancia de } (P \text{ a } u) = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}|}$$

$\vec{u}$ = vector directos de la recta u $(-2, 4, -4)$

$\overrightarrow{AB}$ = vector director de la recta, perpendicular a u , que une los puntos AB

$A(5, 3, 1); B = (3, 4, 3); \overrightarrow{AB} = (3 - 5), (4 - 3), (3 - 1) = (-2, 1, 2)$

$$\text{Distancia de } (P \text{ a } u) = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{-4i - 4j - 8k - (-2k + 8i + 8j)}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{-4i - 4j - 8k + 2k - 8i - 8j}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{-12i - 12j - 6k}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}}$$

$$\text{Distancia de } (P \text{ a } u) = \frac{\sqrt{(-12)^2 + (-12)^2 + (-6)^2}}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{144 + 144 + 36}}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{\sqrt{324}}{\sqrt{36}} = \frac{18}{6} = 3$$

Distancia de $(s \text{ a } u) = 3$

c) Hallar la ecuacion del plano que contiene a la recta r_1 y el punto $(1, 2, -1)$

$$\text{ecuacion del plano } \begin{cases} x = x_0 + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = y_0 + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = z_0 + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases}; \text{ tenemos el punto } P \text{ y la recta } \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

para definir un plano necesito un punto y los vectores directores de dos rectas

$P(1, 2, -1); \vec{d}_r = (1, -2, 2)$

Otro vector puede ser el de una recta que pase por P y por un punto de la recta

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ un punto } P' \text{ de la recta puede sers para } t = 0 \Rightarrow (5, 3, 1)$$

$$\overrightarrow{PP'} = (5 - 1), (3 - 2), (1 - (-1)) = (4, 1, 2)$$

Para calcular la ecuacion de un plano hallo el determinante y lo igualo a 0;

los datos del punto serán $(x - x_1; y - y_1; z - z_1) \Rightarrow x - 1, y - 2, z - (-1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ -2 & 1 & y-2 \\ 2 & 2 & z-(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ -2 & 1 & y-2 \\ 2 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$= z + 1 - 4x + 4 + 8y - 16 - 2x + 2 + 8z + 8 - 2y + 4 = 0; -6x + 6y + 9z + 3 = 0$$

El plano pedido será: $-6x + 6y + 9z + 3 = 0$;

8. Ejercicio

Una empresa fruticola embala naranjas en cajas grandes .Sabe que la probabilidad de que al abrir una caja en el destino aparezca al menos una naranja dañada es de 0,12

a) Si el cliente recibe dos cajas ,¿ Cual es la probabilidad de que haya almenos una naranja dañada en cada caja?

b) Si el cliente recibe 10 cajas ,¿ Cuan es la probabilidad de que ninguna de las cajas tenga una naranja dañada

Solución

a) Si el cliente recibe dos cajas ,¿ Cual es la probabilidad de que haya almenos una naranja dañada en cada caja?

Regla de la multiplicación La regla de la multiplicación es un proceso que se utiliza cuando se quiere calcular la probabilidad de que 2 o más sucesos independientes pasen al mismo tiempo.

$$P(A) = P(a) * P(b) * P(c) \dots \dots * P(n)$$

Al ser independientes $P(\text{una naranja mala en cada caja}) = 0,12 * 0,12 = 0,0144$

b) Si el cliente recibe 10 cajas ,¿ Cuan es la probabilidad de que ninguna de las cajas tenga una naranja dañada

Al ser independientes $P(\text{de que ninguna caja tenga una naranja mala en cada caja})$

$$P(\text{una naranja mala en cada caja}) = (0,12)^{10} = 0,000000000619$$

$$P(\text{ninguna naranja mala en cada caja}) = (1 - 0,12)^{10} = 0,2785$$

2. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$; definidas para $x \geq 0$ se pide:

- Comprobar que ambas funciones son crecientes en $(0, \infty)$ y hallar los puntos de corte de las curvas
- Calcular el área de la región comprendida entre las dos curvas
- Calcular la derivada de $h(x) = (f(x) + g(x))^2$

Solución

- Comprobar que ambas funciones son crecientes en $(0, \infty)$

y hallar los puntos de corte de las curvas

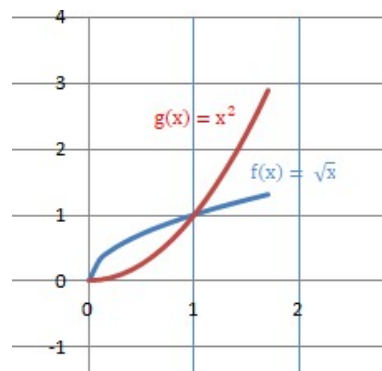
Damos valores y vemos que siempre son crecientes

Punto de corte

$$f(x) = \sqrt{x}; g(x) = x^2; y = \sqrt{x}; y = x^2$$

para que se crucen $\sqrt{x} = x^2 \Rightarrow$ Puntos que cumplen

$$x = 1; y = 1 \text{ e } x = 0; y = 0; \quad (0,0); (1,1)$$



- Calcular el área de la región comprendida entre las dos curvas

Calculamos las integrales entre 0 y 1 de $f(x) = \sqrt{x}$, y $g(x) = x^2$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^{1/2} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \text{ Área entre curva } f(x) = \sqrt{x} \text{ y eje } X$$

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ Área entre curva } g(x) = x^2 \text{ y eje } X$$

$$\text{El área comprendida entre las dos curvas es } = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

- Calcular la derivada de $h(x) = (f(x) + g(x))^2$

$$h'(x) = 2 \left(\frac{1}{x^2} + x^2 \right) * \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} + 2x \right) = (2\sqrt{x} + 2x^2) * \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \right) =$$

$$2\sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} * 2x + 2x^2 * \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x^2 * 2x = 1 + 4x^{3/2} + x^{3/2} + 4x^3 = 1 + 5x^{3/2} + 4x^3$$

3. Ejercicio

Desde el punto $P(1, -1, 0)$ y la recta $s = \begin{cases} -2x + z = 1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ Se pide:

- Determinar la ecuación del plano que contiene la recta s y el punto P .
- Hallar el seno del ángulo que forma el plano $\pi = 2x + y - z + 1 = 0$ y la recta s

Solución

- Determinar la ecuación del plano que contiene la recta s y el punto P .

- Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta s y el punto $(1, -1, 0)$

$$\text{ecuación del plano } \begin{cases} x = x_0 + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = y_0 + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = z_0 + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases} \text{ tenemos el punto } P \text{ y la recta } \begin{cases} -2x + z = 1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{z-1}{2} \\ y = \frac{z+3}{3} \end{cases}; \frac{z-1}{2} = \frac{y+3}{3} = x; \begin{cases} x = t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

para definir un plano necesito un punto y los vectores directores de dos rectas

$$P(1, -1, 0); \vec{d_s} = (1, 3, 2)$$

Otro vector puede ser el de una recta que pase por P y por un punto de la recta

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ un punto P' de la recta puede ser para } t = 0 \Rightarrow (0, -3, 1)$$

$$\overrightarrow{PP'} = (0 - 1), (-3 - (-1)), (1 - 0) = (-1, -2, 1)$$

Para calcular la ecuación de un plano hallo el determinante y lo igualo a 0;

los datos del punto serán $(x - x_1; y - y_1; z - z_1) \Rightarrow x - 1, y + 1, z - 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ 3 & -2 & y+1 \\ 2 & 1 & z-0 \end{vmatrix} = 0; \Rightarrow -2z - 2y - 2 + 3x - 3 + 4x - 4 - y - 1 + 3z = 0$$

$$= z - 3y + 7x - 10 = 0; \text{ El plano pedido será: } 7x - 3y + z - 10 = 0;$$

b) Hallar el seno del ángulo que forma el plano $\pi = 2x + y - z + 1 = 0$ y la recta s

El ángulo que forman un plano y una recta es igual al complementario del ángulo que forman el vector normal al plano y el vector director de la recta

Vector director de la recta normal al plano $\pi = 2x + y - z + 1 = 0$ es $\vec{n} = (2, 1, -1)$

Vector director de la recta s, $\vec{d}_s = (1, 3, 2)$

El producto escalar de dos vectores $= \vec{d}_s \cdot \vec{n} = |\vec{d}_s| |\vec{n}| \cos \alpha$

$$\vec{d}_s \cdot \vec{n} = |\vec{d}_s| |\vec{n}| \cos \alpha; (1, 3, 2) \cdot (2, 1, -1) = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} =$$

$$2 + 3 - 2 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{6} \cos \alpha; \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{84}} = 0,3733; \alpha = 70,8934;$$

Como lo que buscamos no es α si no el complementario,

en ángulo pedido será $\beta = 90 - 70,8934 = 19,1066; \text{sen} \beta = 0,32733$

4. Ejercicio

Para un suceso aleatorio se consideran los sucesos M y N tales que $P(\bar{M}) = \frac{3}{5}; P(N) = \frac{2}{5}; P(M|N) = \frac{2}{5};$

a) Comprobar que M y N son independientes y compatibles

b) Calcular $P(\bar{M} \cap N)$

Solución

a) Comprobar que M y N son independientes y compatibles

Dos sucesos son incompatibles si $(A \cup B) = (A) + (B)$ y $P(A \cap B) = 0$ Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Dados los sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$. Decimos que **son independientes si $A \cap B = \emptyset$; $\Rightarrow (A|B) = (B)$; o $(B|A) = (A)$; Dos sucesos son independientes si $(A \cap B) = (A) \cdot (B)$**

$$\text{Son independiente pues se cumple } P(M|N) = \frac{2}{5} = P(N) = \frac{2}{5};$$

$$P(M|N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)}; \Rightarrow P(M \cap N) = P(M|N) \cdot P(N) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25};$$

dado que $P(M \cap N)$ es distinto de 0 son compatibles

b) Calcular $P(\bar{M} \cap N)$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(\bar{M} \cap N) = P(N) - P(M \cap N) = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}$$

5. Ejercicio

Dada la recta $r = \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$; y el plano $\pi = x + y - 2z - 4 = 0$ se pide:

- Determinar el area formada por los puntos A(2,0,0); B(0,3,0) y C (interseccion del plano y la recta)
- Obtener un plano perpendicular a π y que contenga la recta

Solución

- Determinar el area formada por los puntos A(2,0,0); B(0,3,0) y C (interseccion del plano y la recta)

$$r = \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z = t;$$

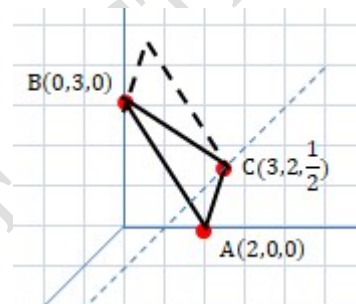
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

Interseccion recta r y el plano $\pi \Rightarrow (2 + 2t) + (1 + 2t) - 2t - 4 = 0; 2 + 2t + 1 + 2t - 2t - 4 = 0$

$$2t - 1 = 0; t = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Sustituyo} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 * \frac{1}{2} \\ y = 1 + 2 * \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Punto de corte } C(3, 2, \frac{1}{2})$$

Area formada por A(2,0,0); B(0,3,0); C(3,2, $\frac{1}{2}$)



El area del triangulo es la mitad del area del paralelogramo $\frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}}{2}$.

Calculamos el producto vectorial $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}$;

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 0), (0 - 3), (0 - 0) = (2, -3, 0);$$

$$\overrightarrow{AC} = (3 - 2), (2 - 0), (\frac{1}{2} - 0) = (1, 2, \frac{1}{2})$$

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}i - 1j + 7k$$

$$\text{Area} = \frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2 + (7)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{9}{4} + 1 + 49}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{4}{4} + \frac{196}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{209}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{209}}{4}$$

6. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ e^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ Se pide:

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad. Calcular la función derivada f' donde sea posible

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

c) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$

Solución

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad. Calcular la función derivada f' donde sea posible

función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ e^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ la función es continua en todo $\mathbb{R}$ dado que

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = x$ por la izquierda $\Rightarrow f(x) = 1$ es igual a

$\lim_{x \rightarrow +1} f(x) = e^{1-x}$ por la derecha $\Rightarrow f(x) = e^{1-x} = e^{1-1} = e^0 = 1$

Una función es derivable si es continua, si no es continua no es derivable

la derivada de la función $f'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ e^{1-x} & \text{si } x \geq 1; \end{cases}$; $f'(x) = 1$
 $f'(e^{1-x}) = -(e^{1-x})$

Hallamos las derivadas laterales por la derecha y por la izquierda del punto $x = 1$

Para hallar las derivadas laterales sustituyo

$\begin{cases} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = -(e^{1-1}) = -e^0 = -1 \end{cases}$ Dado que $f'(1^-) \neq f'(1^+)$

La función no es derivable en $x = 1$ La función es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{1-x}$ por la derecha $\Rightarrow f(x) = e^{1-x} = \frac{e^1}{e^\infty} = \frac{e^1}{\infty} = 0$

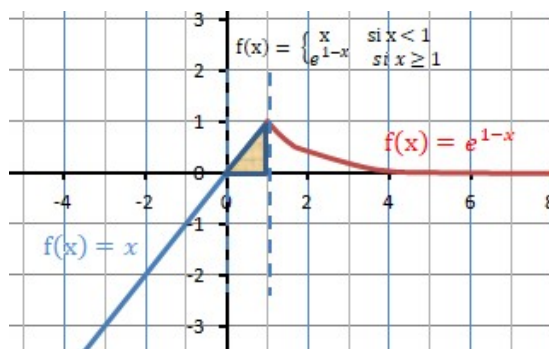
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = x$ por la izquierda $\Rightarrow f(x) = -\infty$;

c) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$

$\int_0^1 f(x) dx$; Hallamos la integral de la función $f(x) = x$; $\int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1$;

$= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} * 1^2 - \frac{1}{2} * 0^2 = \frac{1}{2}$;

$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$;



7. Ejercicio

Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Se pide:

a) Calcular el rango de la matriz $M - 2N$

b) Calcular en el caso de que exista la inversa de la matriz $A = M * N^2$

Solución:

a) Calcular el rango de la matriz $M - 2N$

$$2N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}; M - 2N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Hallo el determinante}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 8 + 16 = 6; \text{ es distinto de } 0 \text{ luego el rango es } 3$$

b) Calcular en el caso de que exista la inversa de la matriz $A = M * N^2$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = M * N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz Inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t$;

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 32 - 16 - 16 = 16;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & -8 \\ -8 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ 8 & 0 & -4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{16} * \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ 8 & 0 & -4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{16} * \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} * \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

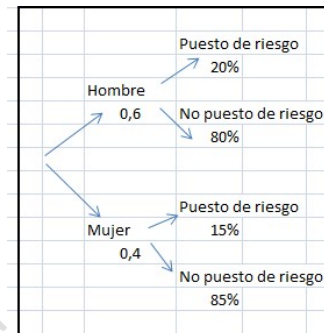
8. Ejercicio

En una empresa trabajan 180 hombres y 120 mujeres. Entre los hombres hay un 20% en puesto de riesgo y entre las mujeres un 15% en este tipo de puesto. Si elegimos al azar un empleado de la empresa. Se pide:

- probabilidad de que no ocupe puesto de riesgo
- sabiendo que ocupa puesto de riesgo, calcular la posibilidad de que sea mujer

a) Probabilidad de que no ocupe puesto de riesgo

Probabilidad no puesto de riesgo = $0,6 * 0,8 + 0,4 * 0,85 = 0,82$



b) sabiendo que ocupa puesto de riesgo, calcular la posibilidad de que sea mujer

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) * P(A_i)}{P(B)} \Rightarrow$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) * P(A_i)}{P(A_1) * P(B|A_1) + P(A_2) * P(B|A_2) + P(A_3) * P(B|A_3) + \dots + P(A_n) * P(B|A_n)}$$

$P(A_i)$ se denominan probabilidades iniciales a priori

$P(A_i/B)$ se denominan probabilidades finales a posteriori

$$P(\text{sea mujer}|\text{puesto de riesgo}) = \frac{P(\text{sea mujer}|\text{puesto de riesgo})P(\text{sea mujer})}{P(\text{sea mujer}|\text{puesto de riesgo}) * P(\text{sea mujer}) + P(\text{sea hombre}|\text{puesto de riesgo})P(\text{sea hombre})}$$

$$P(\text{sea mujer}|\text{puesto de riesgo}) = \frac{0,15 * 0,4}{0,15 * 0,4 + 0,6 * 0,20} = \frac{0,06}{0,06 + 0,12} = \frac{0,06}{0,18} = 33,33\%$$