

Exámenes acceso a la universidad mayores de 25 años (año2022)

Contenido

1	EXAMEN 2022 A	2
2	EXAMEN 2022 B	9
3	EXAMEN 2022 C	15
4	EXAMEN 2022 D	21
5	EXAMEN 2022 E	28

1 Examen 2022 A

1. Ejercicio

Se considera el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro m :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + my + 2z = 6 - m \\ x - y + mz = 6 \end{cases}$$

a) Discutir según los valores de m

b) Resolver el sistema para $m = 0$;

Solución

a) Discutir según los valores de m

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & +1 & +1 & 2 \\ 2 & +m & +2 & 6-m \\ 1 & -1 & +m & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 = E_2 - 2E_1 \\ E_3 = E_3 - E_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & +1 & +1 & 2 \\ 0 & +m-2 & 0 & 2-m \\ 0 & -2 & +m-1 & 4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & +1 & +1 & 2 \\ 0 & +m-2 & 0 & 2-m \\ 0 & -2 & +m-1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow (m-2)y = 2-m; y = \frac{2-m}{m-2} \Rightarrow$$

para $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado y

para $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado

$$\text{para } m = 2 \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + my + 2z = 6 - m \\ x - y + mz = 6 \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 6 - 2 \\ x - y + 2z = 6 \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 6 \end{cases} \text{ sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas; Indeterminado}$$

b) Resolver el sistema para $m = 0$;

$$\text{para } m = 0 \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + my + 2z = 6 - m \\ x - y + mz = 6 \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 0 + 2z = 6 \\ x - y + 0 = 6 \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 6; z = \frac{6-2x}{2} \\ y = x - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 3 - x \\ y = x - 6 \end{cases} \text{ sustituyo en } E_1 \quad x + y + z = 2 \Rightarrow x + (x - 6) + (3 - x) = 2; x - 3 = 2; x = 5;$$

$$x = 5 \begin{cases} z = 3 - x; z = -2; \\ y = x - 6; y = -1; \end{cases} \text{ Solucion } x = 5, y = -1, z = -2;$$

Prueba

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 0 + 2z = 6; x = 5, y = -2, z = -1 \\ x - y + 0 = 6 \end{cases} = \begin{cases} 5 - 1 - 2 = 2 \\ 2 * 5 + 2(-2) = 6 \\ 5 - (-1) = 6 \end{cases} \text{ se Cumple}$$

2. Ejercicio

Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 0; \\ \frac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

a) Calcular el valor de a para que f sea continua en 0

b) Calcular la ecuación de la recta tang a f en $x_0 = \pi/2$

Solución

a) Calcular el valor de a para que f sea continua en 0

$$\text{para que sea continua se ha de cumplir } \lim_{x \rightarrow -0} (x^2 + a) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin x}{x} \right);$$

dado que ; $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -0} (x^2 + a) = 1 \Rightarrow a = 1$;

b) Calcular la ecuación de la recta tang a f en $x_0 = \pi/2$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}; f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = m \text{ en } \frac{\pi}{2} = 90$$

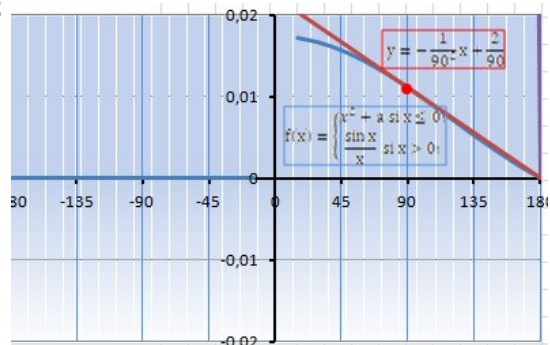
$$\Rightarrow m = f'(x) = \frac{90 \cdot 0 - 1}{90^2} = -\frac{1}{90^2}$$

La recta tang será $y = mx + n$;

como ha de pasar por el punto de la curva

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ en } \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{90} = -\frac{1}{90^2} \cdot 90 + n;$$

$$n = \frac{2}{90}; \text{ la recta tangente sera } y = -\frac{1}{90^2}x + \frac{2}{90}$$



3. Ejercicio

Dada la función $f(x) = xe^{-x}$;

a) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcula el área comprendida entre el eje horizontal y la curva $f(x)$ entre $x = 0$ y $x = 1$;

Solución

a) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}; f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

igualando $f'(x) = 0$ nos dará los máximos o mínimos; $\frac{1-x}{e^x} = 0$; habla un máximo o mínimo en $x = 1$

Si hallo valores menores y mayores a $x=1$ me dará si es máximo o mínimo

0	0
1	0,367879
2	0,270671

por lo que en $x = 1$ habla un máximo. Función creciente de $-\infty$ a 1 y decreciente de 1 a $+\infty$

b) Calcula el área comprendida entre el eje horizontal y la curva $f(x)$ entre $x = 0$ y $x = 1$;

$$\int_0^1 (xe^{-x}) dx \text{ integración por partes}$$

Aplicamos la fórmula $\int u dv = uv - \int v du$

$$u = x; du = 1 dx = dx$$

$$dv = e^{-x} dx; v = -e^{-x};$$

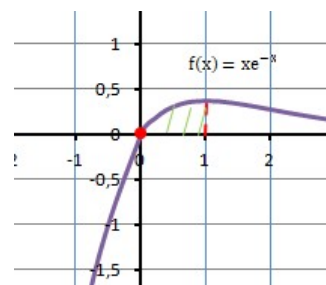
$$\int (xe^{-x}) dx = x(-e^{-x}) - e^{-x} \cdot 1 =$$

$$-xe^{-x} - \int -e^{-x} \cdot 1 = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$$

$$\text{area} = \int_0^1 \left(\frac{x}{e^x} \right) dx = -|e^{-x}(1+x)|_0^1$$

$$= -\left(\frac{1}{e^1} \cdot (1+1) - \left(\frac{1}{e^0} \cdot (1+0) \right) \right) = -\left(\frac{2}{e} - 1 \right) = 0,264$$

$$\text{area} = +0,264 u;$$



4. Ejercicio

Considera el punto $P \equiv (6,3,2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+z=4 \\ y+z=3 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación de la recta s paralela a la recta r que pasa por el punto P .

b) Calcula la ecuación del plano que contiene la recta r el punto P ;

Solución

a) Calcula la ecuación de la recta paralela a la recta r que pasa por el punto P .

$$r \equiv \begin{cases} x+z=4 \\ y+z=3 \end{cases} \text{ vector director de la recta: restamos domos a } x \lambda \begin{cases} x = \lambda; \\ y = 3 - (4 - \lambda) \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

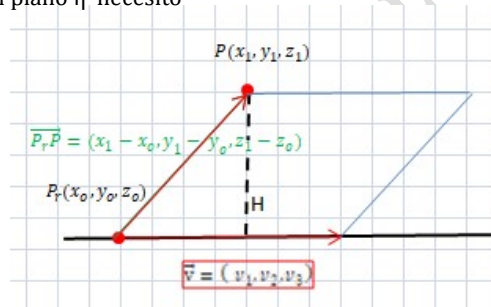
$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda; \\ y = -1 + \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}; r \equiv \begin{cases} x = \lambda; \\ y = \lambda - 1 \\ z = -\lambda + 4 \end{cases} \quad \text{Vector } \vec{d}_r (1, 1, -1)$$

la recta paralela s tendrá el mismo vector director y pasará por el punto $P \equiv (6,3,2)$

$$s \equiv \begin{cases} x = a\lambda + x_0; \\ y = b\lambda + y_0 \\ z = c\lambda + z_0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = \lambda + 6; \\ y = \lambda + 3; \\ z = -\lambda + 2; \end{cases}$$

b) Calcula la ecuación del plano que contiene la recta r el punto P ;

Para hallar la ecuación del plano η necesito



- Un Punto P del plano que ya me dan $(6,3,2)$
- $\vec{d}_r$ = vector director de la recta $(1,1,-1)$
- $\vec{PP}_r$ = otro vector director ej el que pase por P y un punto de la recta

$\vec{PP}_r$ = será otro vector paralelo al plano

$P(6,3,2)$, P_r (punto de paso de la recta) Punto de la recta lo hallo haciendo $\lambda = 0$; $P_r(0, -1, 4)$

$$\vec{PP}_r = (0 - 6, -1 - 3, 4 - 2) = (-6, -4, 2)$$

$$\eta = \begin{cases} P(6,3,2) \\ \vec{d}_r = (1,1,-1) \\ \vec{PP}_r = (-6,-4,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -6 & x-6 \\ 1 & -4 & y-3 \\ -1 & 2 & z-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(z-2)(-4) + (x-6)2 + (y-3)6 - (x-6)4 - (z-2)(-6) - (y-3)2 = 0$$

$$-4z + 8 + 2x - 12 + 6y - 18 - 4x + 24 + 6z - 12 - 2y + 6 = 0;$$

$$-2x + 4y + 2z - 4 = 0; \eta = -2x + 4y + 2z - 4 = 0$$

5. Ejercicio

El grosor (a la altura del pecho) del pino alepensis sigue una distribución normal $\mu = 64\text{cm}$ y desviación típica $\sigma = 4\text{cm}$. Si esto es cierto,

a) Calcula la proporción de individuos que superan los 72cm de diámetro a la (altura del pecho)

b) ¿A partir de que valor está el diámetro (a la altura del pecho) del 10% de los pinos mas gruesos?

Solución

a) Calcula la proporción de individuos que superan los 72cm de diámetro a la (altura del pecho)

$$P(X > 72) = P\left(Z > \frac{72 - 64}{4}\right) = P(Z > 2) \text{ como es mayor que 72 en la tabla de distribucion normal}$$

$$P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228 \Rightarrow 2,28\%$$

b) ¿A partir de que valor está el diametro (a la altura del pecho) del 10% de los pinos mas gruesos?

$$1 - P(Z \leq A) = 1 - 0,9015 = 0,0985 \sim 10\% \text{ donde } A = 1,29$$

$$Z = \frac{x - 64}{4} = 1,29; X = 1,29 * 4 + 64 = 69,16 \text{ cm}$$

Prueba: calculamos el % de individuos que estan por encima de 69,16cm

$$P(X > 71,6) = P\left(Z > \frac{69,16 - 64}{4}\right) = P(Z > 1,29)$$

como queremos el valor mayor que 71,6 en la tabla de distribucion normal

$$P(Z > 1,29) = 1 - P(Z \leq 1,29) = 1 - 0,9015 = 0,0985 \Rightarrow 9,85\%$$

6. Ejercicio

Se considera el sistema de ecuaciones lineales en funcion del parametro m:

$$\begin{cases} mx + y = 0 \\ x + y + (m-1)z = -1 \\ x + y + 2mz = 1 + 2m \end{cases}$$

a) Discutir segun valores de m

b) Resolver para m = -1

Solución

a) Discutir segun valores de m

$$A = \begin{pmatrix} m & +1 & 0 \\ 1 & +1 & + (m-1) \\ 1 & +1 & + 2m \end{pmatrix} \text{ matriz ampliada } B = \left(\begin{array}{ccc|c} m & +1 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & + (m-1) & -1 \\ 1 & +1 & + 2m & 1 + 2m \end{array} \right)$$

El maximo rango que pueden tener las matrices es 3.

Calculo el determinante para ver que valores es 0 y en esos caso el rango de A sera < 3

Si rango de A < 3 para esos valores de m el sistema será compatible indeterminado

$$\begin{vmatrix} m & +1 & 0 \\ 1 & +1 & + (m-1) \\ 1 & +1 & + 2m \end{vmatrix} = 2m^2 + m - 1 - (2m) - (m^2 - m) = 2m^2 + m - 1 - 2m - m^2 + m =$$

$$m^2 - 1; |a| = 0 \text{ para } m = 1 \text{ y } m = -1 \Rightarrow \text{el sistema será compatible indeterminado}$$

para m = 1 y m = -1; para el resto de valores será compatible determinado.

b) Resolver para m = -1

$$\text{para } m = -1 \begin{cases} -x + y = 0 \\ x + y - 2z = -1 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases} \begin{cases} -x + y = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases} \text{ dos ecuaciones con tres incognitas}$$

Compatible Indeterminado.

7. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$

- a) Calcular su dominio
b) Calcular su función inversa

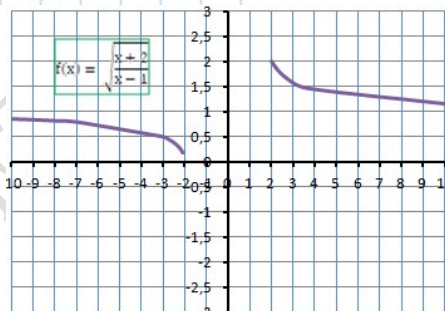
Solución

- a) Calcular su dominio

La función existe para $\frac{x+2}{x-1} \geq 0$

	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$x+2$	-		+	+	+	+	
$x-1$	-		-	-	-	+	+
$\frac{x+2}{x-1}$	+	-	-	-	-	+	+

El dominio de la función será $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$



- b) Calcular su función inversa

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}; y = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}; \text{cambio variables } x^2 = \frac{y+2}{y-1} = 1 + \frac{3}{y-1}; y-1 = \frac{3}{x^2-1};$$

$$y = \frac{3}{x^2-1} + 1; y = \frac{3}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x^2-1} = \frac{3+x^2-1}{x^2-1} = \frac{x^2+2}{x^2-1}; y = \frac{x^2+2}{x^2-1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$$

8. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

- a) Calcular sus extremos relativos
b) Calcular su primitiva

Solución

- a) Calcular sus extremos relativos

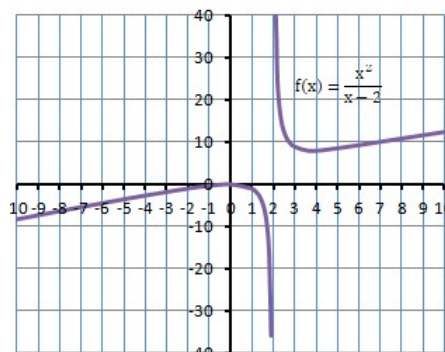
$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ hallamos la derivada

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - 1 \cdot x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

Iguamos a 0 para hallar máximos y mínimos

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0; x^2 - 4x = x(x-4) = 0;$$

$f'(x) = x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 4$ en esos puntos halla máximos o mínimos



Hallamos valores inferiores y superiores a 0
y vemos que en 0 hay un maximo relativo

x	y
-2	-1
-1	-0,33
0	0
1	-1

Hallamos valores inferiores y superiores a 4
y vemos que en 4hay un minimo relativo

x	y
3	9
4	8
10	12,5

b) Calcular su primitiva

$$\text{funcion } f(x) = \frac{x^2}{x-2} = \text{dividimos} = x + 2 + \frac{4}{x-2}$$

$$\int \left(\frac{x^2}{x-2} \right) dx = \int \left(x + 2 + \frac{4}{x-2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 4 \ln(x-2) + C$$

9. Ejercicio

Dados los puntos P (2,1,3) , Q(3,2,4) y al recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases}$

a) Determinar la recta que pasa por los dos puntos

b) Determinar distancia entre P y Q

b)Hallar el haz de planos que contiene a la recta r

Solución

a) Determinar la recta que pasa por los dos puntos

$$s \equiv \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases}$$

Hallamos el vector director de la recta $\vec{v} = (3 - 2, 2 - 1, 4 - 3) = (1, 1, 1)$;

Tomamos como punto de paso uno de los puntos de la recta P o Q ; Hallamos el vector

$$\text{Tomando } P \text{ } s \equiv \begin{cases} x = 2 + 1t \\ y = 1 + 1t \\ z = 3 + 1t \end{cases} \quad \text{La recta será } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

b) Determinar distancia entre P y Q

$$\text{Distancia entre dos puntos} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\text{Distancia } PQ = \sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - 1)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}u$$

$$\text{Distancia } PQ = \sqrt{3}u$$

b)Hallar el haz de planos que contiene a la recta r

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases} \quad \text{pasamos la recta de parametrica a continua} \quad \begin{cases} \lambda = x - 1 \\ \lambda = y - 2 \\ \lambda = -z + 3 \end{cases} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{-z+3}{1}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow x - 1 = y - 2; x - y + 1 = 0$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{-z+3}{1}; x - 1 = -z + 3; x + z - 4 = 0;$$

El haz de planos viene definido por ; $\eta = \mu(x - y + 1) + \beta(x + z - 4) = 0$;

10. Ejercicio

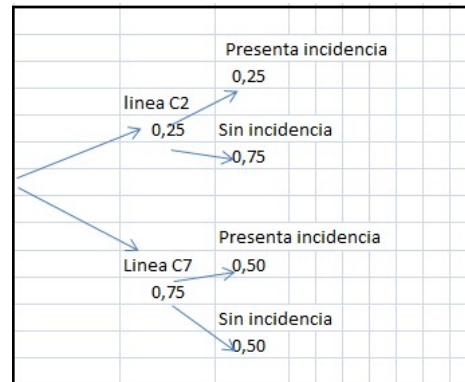
A Alcalá de Henares llegan 2 líneas de trenes de cercanías, las líneas C2 y C7. Supongamos que de todos los trenes, el 25% son de la línea C2 y el resto de la C7.

La línea C2 de cercanías presenta incidentes 1 de cada 4 trenes, y la línea C7 uno sí, uno no. Con esos datos:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de un tren de los que llega a Alcalá tenga un incidente?
- b) Sabiendo que un tren ha sufrido un incidente, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la línea C2

Solución

- a) ¿Cuál es la probabilidad de un tren de los que llega a Alcalá tenga un incidente?



$$P(\text{tren que llege tenga un incidente}) = 0,25 * 0,25 + 0,75 * 0,50 = 0,4375$$

- b) Sabiendo que un tren ha sufrido un incidente, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la línea C2

$$P(\text{tren con incidencia} | \text{incidencia en C2}) = \frac{0,25 * 0,25}{0,25 * 0,25 + 0,75 * 0,50} = \frac{0,0625}{0,4375} = 0,1429 = 14,29\%$$

2 Examen 2022 B

1. Ejercicio

Tres amigos que se han aficionado a la montaña deciden equiparse, y acuden para ello a una tienda especializada, donde escogen para los tres el mismo modelo de mochila, de anorak y de saco de dormir y dividen después el importe total de la compra equitativamente.

Se sabe que un saco de dormir cuesta tanto como un anorak y una mochila. También que el precio del anorak es el doble que el de la mochila. Si el importe total abonado por los tres amigos es de 900 euros, a) ¿Cuál es el precio de cada uno de los artículos que han adquirido?

Solución

a) ¿Cuál es el precio de cada uno de los artículos que han adquirido?

Saco de dormir = x ; Mochila = y ; Anorack = z

$$\begin{cases} x = y + z \\ z = 2y \end{cases} \quad x = y + 2y = 3y$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ 900 = 3x + 3y + 3z \text{ sustituyo } z \text{ por su valor } 900 = 3x + 3y + 3(2y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ 900 = 3x + 3y + 3(2y) \end{cases} \text{ sustituyo } x \Rightarrow 900 = 3(3y) + 3y + 3(2y); 900 = 9y + 3y + 6y = 18y;$$

$$y = \frac{900}{18} = 50; \quad x = 3 * 50 = 150; \quad z = 2 * 50 = 100; \quad \begin{cases} x = \text{Saco de dormir } 150\text{€} \\ y = \text{Mochila } 50\text{€} \\ z = \text{Anorak } = 100\text{€} \end{cases}$$

prueba ; $900 = 3 * 150 + 3 * 50 + 3 * 100 = 900\text{€}$

2. Ejercicio

Dada la función $f(x) = |x|\sin x$ se pide

a) Estudiar continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$

b) Decidir si $f(x)$ tiene en $x = 0$ un extremo local

c) calcular $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$

Solución

a) Estudiar continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$

$f(x) = |x|\sin x$ la función es continua en $\mathbb{R}$

$$f(x) = |x|\sin x = \begin{cases} -x * \sin x & \text{para } x < 0 \\ x \sin x & \text{para } x \geq 0 \end{cases};$$

Calculamos límites por la derecha e izquierda

$$\lim_{x \rightarrow -0} (-\sin x - x * \cos x) = 0$$

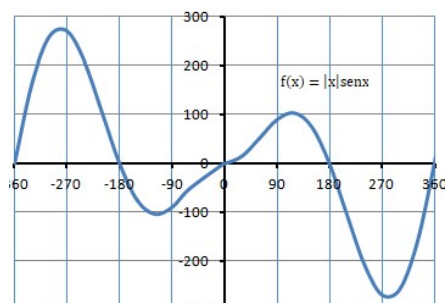
$$\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x + x * \cos x) = 0$$

Límite por la izquierda y la derecha en 0 coinciden

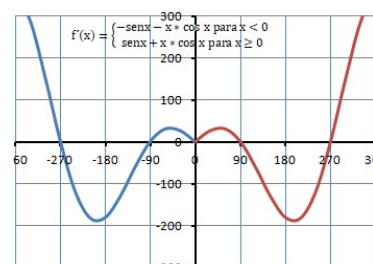
Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$;

$$f(x) = |x|\sin x = \begin{cases} -x * \sin x & \text{para } x < 0 \\ x \sin x & \text{para } x \geq 0 \end{cases};$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 * \sin x + (-x) * \cos x & \text{para } x < 0 \\ 1 * \sin x + (x) * \cos x & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$



-1	-0,01745
0	0
1	0,017452



$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x - x * \cos x & \text{para } x < 0 \\ \operatorname{sen} x + x * \cos x & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Comprobamos si la derivada coincide por la izquierda y derecha l

$$f'(0^-) = (-\operatorname{sen} x - x * \cos x) = -0 - 0 * 1 = 0$$

$$f'(0^+) = (\operatorname{sen} x + x * \cos x) = 0 - 0 * 1 = 0;$$

-0,05	0,050873	
0		0
0,05		0,051

b) Decidir si $f(x)$ tiene en $x = 0$ un extremo local

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x - x * \cos x & \text{para } x < 0 \\ \operatorname{sen} x + x * \cos x & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

$f'(x) = \operatorname{sen} x + x * \cos x = 0$ tiene un mínimo en $x = 0$

c) calcular $\int_0^{\pi/2} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} (x \operatorname{sen} x) dx$

Lo hacemos mediante la integral por partes $\int u dv = uv - \int v du$

$$u = x \Rightarrow du = 1;$$

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$$

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du; \quad \int x \operatorname{sen} x \, dx = x * (-\cos x) - \cos x * 1 \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (x \operatorname{sen} x) dx &= [-x \cos x + \operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = \left(-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) - (0 \cos 0 + \operatorname{sen} 0) = \\ &= (-90 * 0 - 1) - (0 * 1 + 0) = 1; \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} (x \operatorname{sen} x) dx = 1;$$

3. Ejercicio

Consideramos el plano de ecuación $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$ y los puntos $A(-1, 0, -1)$, $B(-1, 1, 0)$,

$C(0, 2, -1)$ pertenecientes al plano π :

a) Calcule el área del triángulo de vértices A, B, C

b) Obtenga una ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a la recta r que pasa por B y por C

c) Calcule la distancia de A a dicha recta r

Solución

a) Calcule el área del triángulo de vértices A, B, C

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo $= \frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}}{2}$.

Calculamos el producto vectorial $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}$;

$$\overrightarrow{AB} = ((-1 - 1), (1 - 0), (0 - (-1))) = (0, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = ((0 - (-1)), (2 - 0), ((-1) - (-1))) = (1, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} k = -2i - 1j - 1k$$

$$\text{Area} = \frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+1+1}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

b) Obtenga una ecuación de la recta s que pasa por A y es perpendicular a la recta r que pasa por B y por C

r que pasa por B y por C: vector director = $\vec{d}_r = \overrightarrow{BC} = (0 - (-1), 2 - 1, (-1) - 0) = (1, 1, -1)$

$$\begin{cases} \vec{d}_r = (1, 1, -1) \\ A(-1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow r = \begin{cases} x = -1 + 1\lambda \\ y = 1 + 1\lambda \\ z = 0 - 1\lambda \end{cases}; r = \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

para hallar la recta s perpendicular a r hallo el plano que contenga a s:

{ Un Punto sería el punto A que esta en la recta perpendicular a r $(-1, 0, -1)$
 $\vec{d}_r$ = vector director de la recta = vector normal del plano = $\vec{vn} (1, 1, -1)$

la ecuacion general de un plano es $AX + BY + CZ + D = 0$;

donde A B y C son los parametros del vector normal del plano

$1x + 1y + 1z + D = 0 \Rightarrow x + y + z + d = 0$; como ha de pasar por A se cumplirá

$-1 + 0 - (-1) + d = 0$; $-1 + 1 + d = 0$; $d = 0$; el plano será $x + y - z = 0$

Hallamos el punto D interseccion de la recta y el plano sustituyo :

$x + y - z = 0$; $(-1 + \lambda) + (1 + \lambda) - \lambda = 0$; $-1 + \lambda + 1 + \lambda - \lambda = 0$; $3\lambda = 0$; $\lambda = 0$;

como el punto pertenece a r = sustituyo $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ El punto D será $(-1, 1, 0)$

s que es perpendicular a r y pasa por A y D tendra vector director = $\vec{d}_r = \overrightarrow{AD}$;

$= (-1 - (-1), 1 - 0, 0 - (-1)) = (0, 1, 1)$

$$s = \begin{cases} \vec{d}_r = (0, 1, 1) \\ D(-1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} x = -1 + 0\lambda \\ y = 1 + 1\lambda \\ z = 0 + 1\lambda \end{cases}; s = \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = +\lambda \end{cases}$$

4. Ejercicio

Una asociación cultural se plantea organizar un viaje. Se están considerando dos posibles destinos A y B y se consulta a los socios que deben votar por uno de los dos destinos.

El resultado es que un 60% de los socios prefiere el destino A, frente a un 40% que prefiere el destino B. Entre los socios que tienen a lo sumo 40 años, que son el 70% del total de socios, la preferencia por el destino A es del 80%

a) Si se escoge al azar un socio, ¿qué probabilidad hay de que sea mayor de 40 años y desee viajar a B?

b) Si se ha elegido un socio al azar y prefiere el destino A, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 40 años?

Solución

Sabemos que el 60% elige destino A y el 40% destino B

Cuantos mayores de 40 años eligen destino A o B

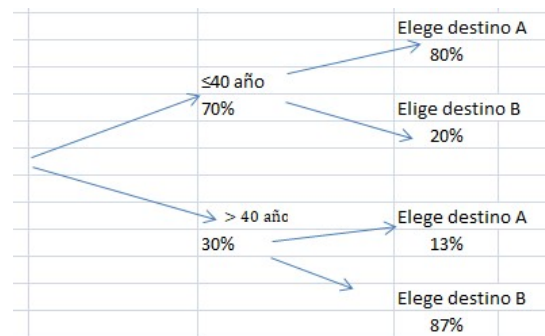
Sabemos que el total es x:

$$0,7x * 0,8 + 0,3 * x * A = 0,6x$$

$$0,56x + 0,3 * x * A = 0,6x; A = \frac{0,04}{0,3} = 0,1333$$

$$0,7x * 0,2 + 0,3 * x * B = 0,4x$$

$$0,14x + 0,3 * x * B = 0,4x; B = \frac{0,26}{0,3} = 0,8666;$$



a) Si se escoge al azar un socio, ¿qué probabilidad hay de que sea mayor de 40 años y desee viajar a B?

$$P(\text{mayor de 40 y viaje a B}) = \frac{0,3 * 0,8666}{0,3 * 0,8666 + 0,7 * 0,2} = \frac{0,25998}{0,39998} = 0,64998 \sim 0,65; 65\%$$

b) Si se ha elegido un socio al azar y prefiere el destino A, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 40 años?

$$P(\text{socio al azar prefiere destino A} | \text{tenga mas de 40 años}) = \frac{0,30 * 0,13333}{0,70 * 0,80 + 0,30 * 0,13333} =$$

$$P(\text{socio al azar prefiere destino A} | \text{tenga mas de 40 años}) = \frac{0,03999}{0,59999} = 0,0666 = 6,6666\%$$

5. Ejercicio

Dadas las matrices $A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ se pide:

a) Determinar para que valores del parametro real a existe la inversa de $A * B$ y calcular para $a = -1$;

b) Para $a = -1$, calcular el determinante de la matriz $|(A * B)^t|^3$, donde $(A * B)^t$ es la matriz transpuesta de $(A * B)$

c) Estudiar en funcion del valor del parametro a el rango de la matriz $A * B$

Solución

a) Determinar para que valores del parametro real a existe la inversa de $A * B$ y calcular para $a = -1$;

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = A * B = \begin{pmatrix} 1 * 1 + 0 * (-1) + 1 * 1 & 1 * 1 + 0 * (-1) + 1 * a \\ 0 * 1 + 1 * (-1) + 0 * 1 & 0 * 1 + 1 * (-1) + 0 * a \end{pmatrix}$$

$$A * B = C = \begin{pmatrix} 2 & 1+a \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{La matriz Inversa } C^{-1} = \frac{1}{|C|} * (C^*)^t ;$$

$$|C| = (-1 * 2) - ((-1) * (1 + a)) = -2 + 1 + a = -1 + a$$

El determinante es distinto de 0 para $a \neq 1$; => **para todo $a \neq 1$ existe inversa**

$$\text{para } a = -1; |C| = (-1 * 2) - ((-1) * (1 - 1)) = -2$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(C^*)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{La matriz Inversa } C^{-1} = \frac{1}{|C|} * (C^*)^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

b) Para $a = -1$, calcular el determinante de la matriz $|(A * B)^t|^3$, donde $(A * B)^t$ es la

matriz transpuesta de $(A * B)$

$$\text{para } a = -1; C = \begin{pmatrix} 2 & 1+a \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A * B)^t = (C)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$|(A * B)^t| = -2;$$

$$|(A * B)^t|^3 = |(C)^t|^3 = (-2)^3 = -8$$

c) Estudiar en funcion del valor del parametro a el rango de la matriz $A * B$

$$|A * B| = (-1 * 2) - ((-1) * (1 + a)) = -2 + 1 + a = -1 + a$$

$$\text{para } a \neq 1 \text{ el rango de la matriz } A * B = \begin{pmatrix} 2 & 1+a \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ será } 2$$

$$\text{Para } a = 1 \text{ el rango } |A * B| = (-1 * 2) - ((-1) * (1 + 1)) = -2 + 2 = 0 \text{ rango} = 1$$

6. Ejercicio

Dadas las funciones $f(x) = \ln x$ definida para $x > 0$ y $g(x) = x^2 - 2x + 5$ definida para toda la recta $\mathbb{R}$; Se pide

- Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$;
- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función $g(x)$
- Determinar los puntos c tales que la tangente a la gráfica $g(x)$ en $(c, g(x))$ forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje X

Solución

- Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2 - 2x + 5} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indeterminado. Si aplico l'Hopital } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2 - 2x} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función $g(x)$

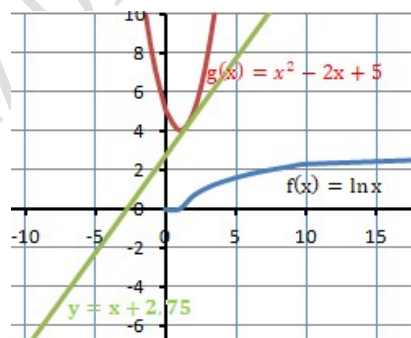
$$g(x) = x^2 - 2x + 5$$

Hallamos la derivada $g'(x) = 2x - 2$;

igualamos a 0; $2x - 2 = 0$; $x = 1$ en $x = 1$;

habrá un máximo o mínimo, hallamos valores cercanos

X	f(x)
2	5
1	4
2	5



en $x = 1$ tenemos un mínimo. La función es decreciente $(-\infty, 1)$ y creciente $(1, \infty)$

- Determinar los puntos c tales que la tangente a la gráfica $g(x)$ en $(c, g(x))$ forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje X

$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ la tangente que forma un ángulo de 45° con la horizontal, su pendiente $m = \tan 45^\circ = 1$

$m = 1$ a la derivada de la función $= g'(x) = 2x - 2$; Si ha de ser $= 1 \Rightarrow 2x - 2 = 1$; $x = 3/2$

para $x = \frac{3}{2}$; $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) + 5 = 2,25 - 3 + 5 = 4,25$;

La tangente será $y = mx + n$; como $m = 1 \Rightarrow y = x + n$;

como la recta toca a la función en $\left(\frac{3}{2}, 4,25\right)$ se ha de cumplir; $4,25 = \frac{3}{2} + n$; $n = 2,75$

La tangente será $y = x + 2,75$

7. Ejercicio

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v}$; en el espacio vectorial euclideo donde $\vec{u} = (1,0,1)$ y $\vec{v} = (0,1,0)$ se pide:

- determinar los vectores $\vec{c}$ = cuyo modulo sea 2 y que sean ortogonales tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$
- Determinar el coseno del angulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$;
- Calcular $\vec{a} \times \vec{b}$;

Solución

- determinar los vectores $\vec{c}$ = cuyo modulo sea 2 y que sean ortogonales tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$

Siendo $\vec{c} (x, y, z)$; Si son ortogonales su producto escalar será 0

$$\begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{u} = (x, y, z) \cdot (1, 0, 1) = 0; \Rightarrow x + z = 0; z = -x \\ \vec{c} \cdot \vec{v} = (x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = 0; \Rightarrow y = 0 \\ |\vec{c}| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2} = 2; \end{cases} \quad \text{sustituimo } \sqrt{(x)^2 + (0)^2 + (-x)^2} = 2;$$

$$(x)^2 + (0)^2 + (-x)^2 = 2^2; x^2 + x^2 = 4; 2x^2 = 4; x = \sqrt{2}, \text{ El vector } \vec{c} \text{ pedido será } (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$$

- Determinar el coseno del angulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$;

$$\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v} = 2(1, 0, 1) - (0, 1, 0) = (2, 0, 2) - (0, 1, 0) = (2, -1, 2)$$

$$\vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v} = (1, 0, 1) + 2(0, 1, 0) = (1, 0, 1) + (0, 2, 0) = (1, 2, 1)$$

$$\cos \widehat{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(2, -1, 2) \cdot (1, 2, 1)}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} \cdot \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2}} = \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1}{\sqrt{4 + 1 + 4} \cdot \sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{6}}; \cos \widehat{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \frac{2}{3\sqrt{6}}; \alpha = \arccos \frac{2}{3\sqrt{6}} = 74,2068$$

- Calcular $\vec{a} \times \vec{b}$;

$$\text{Producto vectorial de dos vectores } \vec{a} \times \vec{b} \text{ es otro vector} = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{z} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{u}(-5) - \vec{v}(0) + \vec{z}(5);$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -5\vec{u} + 5\vec{z}$$

8. Ejercicio

La duración de cierto tipo de electrodoméstico es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 10 años, y desviación típica 0.5 años

- Calcule la probabilidad de que uno de esos electrodomésticos dure menos de once años.
- Se toma una muestra de 5 electrodomésticos. Determine cuál es la probabilidad de que al menos 4 duren más de diez años

Solución

- Calcule la probabilidad de que uno de esos electrodomésticos dure menos de once años.

$$P(X < 11) = P\left(Z < \frac{11 - 10}{0,5}\right) = P\left(Z < \frac{1}{0,5} = 2\right) = 0,9772 = 97,72\%$$

- Se toma una muestra de 5 electrodomésticos. Determine cuál es la probabilidad de que al menos 4 duren más de diez años

$$P(X \geq 11) = 1 - P\left(Z \geq \frac{11 - 10}{0,5}\right) = 1 - P\left(Z \geq \frac{1}{0,5} = 2\right) = 1 - 0,9772 = 0,0228 = 2,28\%$$

p = probabilidad de que dure mas de 10 años ; p = 2,28;

q = probabilidad de que dure menos de 10 años ; q = 0,9772

P(almenos cuatro duren mas de 10 años)

$$= P(4 \text{ duren mas de 10 años }) + P(5 \text{ duren mas de 10 años })$$

$$= \binom{5}{4} (0,0228)^4 * (0,9772)^1 + \binom{5}{5} (0,0228)^5 =$$

$$5(0,0228)^4 * (0,9772)^1 + 1 (0,0228)^5 = 0,0000027 + 0,00000000616 = 0,000002$$

3 Examen 2022 C

1. Ejercicio

Se considera el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro m:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ ax + 0 + (2+a)z = 2 \\ y - z = -a \end{cases} \quad \text{Se pide}$$

a) Discutir según los valores del parámetro real a

b) Resolver el sistema para a = 1;

Solución

1. Discutir según los valores de a

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ ax + 0 + (2+a)z = 2 \\ y - z = -a \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2+a & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -a \end{array} \right) \xrightarrow[E_3]{E_2 - aE_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2a & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -a \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[E_2 + 2aE_3]{E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2a+2 & -2a^2+2 \end{array} \right) \Rightarrow (-2a+2)z = -2a^2+2; z = \frac{-2a^2+2}{-2a+2}$$

Es indeterminado para a = 1; -2a + 2 = 0; a = 1; para a = 1 el sistema es compatible indeterminado

Otro método es comprobar para que valores de a el rango de la matriz < 3

Si rango de A < 3 para esos valores de a el sistema será compatible indeterminado

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & 2+a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a + 2a - 2 - a = 0; 2a - 2 = 0; a = 1$$

b) Resolver el sistema para a = 1;

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ ax + 0 + (2+a)z = 2 \\ y - z = -a \end{cases} \quad \text{Para } a = 1 \quad \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 0 + 3z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases} \quad \text{Resto las dos primera}$$

$$\begin{cases} 0 + 2y - 2z - 2 \\ y - z = -1 \end{cases} \quad \text{las dos ecuaciones son iguales tendre 2 ecuaciones con 3 incógnitas}$$

Sistema compatible indeterminado

2. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x \cos(x^2) & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ Se pide

a) Estudiar la continuidad de f en x = 0;

b) Calcular f'(1);

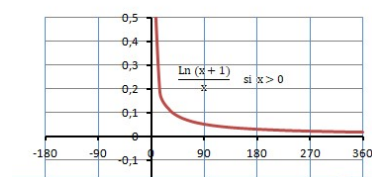
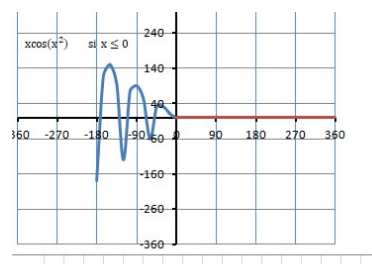
c) $\int_{-\sqrt{\pi}}^0 f(x) dx$

Solución

a) Estudiar la continuidad de f en x = 0;

Límite por la izquierda de 0 $\lim_{x \rightarrow -0} x \cos(x^2) = 0 * \cos 0 = 0 * 1 = 0$;

Límite por la derecha de 0 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(0+1)}{0} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}$ Indeterminado



Aplico L'hôpital $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0+1} = 1$

No coinciden los límites por la derecha e izquierda $\Rightarrow$ la función no es continua en 0

b) Calcular $f'(1)$; calcular la derivada de la función en $x = 1$;

$$f\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right); f\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - 1(\ln(x+1))}{x^2};$$

$$f\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = \frac{x - (\ln(x+1))(x+1)}{(x+1)x^2}; \text{ en } x = 1;$$

$$\frac{1 - (\ln(1+1))(1+1)}{(1+1)1^2} = \frac{1 - (\ln 2)2}{2} = \frac{1 - 2(\ln 2)}{2} = \frac{1}{2} - \ln 2 = 0,19315$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_{-\sqrt{\pi}}^0 f(x) dx; \int_{-\sqrt{\pi}}^0 x \cos(x^2) dx &= \left[\frac{1}{2} \sin(x^2) \right]_{-\sqrt{\pi}}^0 = \frac{1}{2} \sin(0^2) - \frac{1}{2} \sin(-\sqrt{\pi})^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \sin \pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}; \int_{-\sqrt{\pi}}^0 x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} u \end{aligned}$$

3. Ejercicio

Dados el punto $A(1, -1, 0)$ y el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$, se pide:

a) Determinar la ecuación de una recta perpendicular a π que pase por A;

b) Hallar el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ con los puntos de intersección del plano π con cada uno de los tres ejes

Solución

a) Determinar la ecuación de una recta perpendicular a π que pase por A;

La ecuación del plano será $\pi \equiv x + y - z - 2 = 0$;

El vector director de la recta perpendicular al plano $\vec{v}'(1, 1, -1)$

$$\text{Recta } \begin{cases} \vec{r} = \vec{A} + \lambda \vec{v}' \\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \cdot 1 \\ y = -1 + \lambda \cdot 1 \\ z = 0 + \lambda \cdot (-1) \end{cases} = \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

b) Hallar el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ con los puntos de intersección del plano π con cada uno de los tres ejes

$$\text{Puntos de intersección del plano con los ejes serán de la forma } \begin{cases} \text{corte con el eje X } (a, 0, 0) \\ \text{Corte con el eje Y } (0, b, 0) \\ \text{Corte con el eje Z } (0, 0, c) \end{cases}$$

$$\text{como estos puntos han de pertenecer al plano sustituyo } \begin{cases} a + 0 - 0 - 2 = 0; a = 2 \\ 0 + b - 0 - 2 = 0; b = 2 \\ 0 + 0 - c - 2 = 0; c = -2 \end{cases}$$

Los puntos de corte del plano con los ejes será $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, -2)$

La figura que nos da es la de un tetraedro "polígono regular que tiene cuatro caras iguales, triángulo equilátero

$$\text{El área del tetraedro es } = \frac{\text{Área de la base} \cdot \text{altura}}{3}$$

$$\text{Área de una cara} = \text{Área de la base} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}; \text{Área de una cara} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Area total del tetraedro} = 4\text{caras} * \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = l^2\sqrt{3}$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{\text{area de la base} * \text{altura de tetraedro}}{3} = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4} * \frac{l\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{l^3\sqrt{18}}{36} = \frac{l^33\sqrt{2}}{36} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{dado que el lado vale } 2 \Rightarrow \text{Volumen del tetraedro} = \frac{2^3\sqrt{2}}{12} = \frac{8\sqrt{2}}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,9428;$$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,9428$$

4. Ejercicio

Las calificaciones de una prueba de idioma extranjero siguen una distribución normal de media 90 y desviación típica 30

- Calcule la probabilidad de que un estudiante elegido al azar supere los 78 puntos;
- Una prestigiosa universidad exige a los estudiantes, para acceder, una nota mayor que 125 puntos calcule el porcentaje esperado de estudiantes admitidos.

Solución

- Calcule la probabilidad de que un estudiante elegido al azar supere los 78 puntos;

$$P(X > 78) = P\left(Z > \frac{78 - 90}{30}\right) = P\left(Z > \frac{-12}{30} = -0,4\right) =$$

$Z = -0,4$ negativo:

$P(Z > z)$; como la tabla es simétrica el área que queda por encima de $z = -0,4$

es igual al área que queda por debajo de $z = 0,4$;

$$P\left(Z > \frac{-12}{30} = -0,4\right) = 0,6554 = 65,54\%$$

- Una prestigiosa universidad exige a los estudiantes, para acceder, una nota mayor que 125 puntos calcule el porcentaje esperado de estudiantes admitidos

$$P(X > 125) = P\left(Z > \frac{125 - 90}{30}\right) = P\left(Z > \frac{35}{30} = 1,16666\right) = 0,9515; \text{ como queremos que sea mayor ;}$$

$$P(X > 125) = 1 - P\left(Z > \frac{35}{30} = 1,16666\right) = 1 - 0,9515 = 0,0485 = 4,85\%$$

5. Ejercicio

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Se pide:

- Justificar que admite inversa y calcular A^{-1} ;
- Calcula el determinante de la matriz $A^t * A$, donde A^t es la matriz transpuesta de A
- Obtener el rango de la matriz $A^2 - 2A$.

Solución

- Justificar que admite inversa y calcular A^{-1} ;

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ tendrá inversa si su determinante es distinto de 0

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ tiene inversa}$$

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t$$

$$\text{Hallamos la matriz adjunta } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{hallamos la transpuesta } (A^*)^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$I = A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Se cumple}$$

- Calcula el determinante de la matriz $A^t * A$, donde A^t es la matriz transpuesta de A

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}; A^t * A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4+1 & -2 \\ 0 & -2 & 4+4 \end{pmatrix}$$

$$A^t * A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}; |A^t * A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 32 - 4 = 4$$

- Obtener el rango de la matriz $A^2 - 2A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2-2 & 4 \\ 0 & 1 & -2-4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2A = 2 * \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A^2 - 2A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ el rango no es 3}$$

para ver si el rango es 2, elijo determinantes de 2×2 ; ej $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ por lo que el rango es 2

6. Ejercicio

Dada la función $f(t) = (t + 1)e^{-2t}$ se pide:

a) Calcular $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$;

b) Estudiar el crecimiento y valores maximos y minimos de $f(t)$ en $[-1, \infty)$

Solución

a) Calcular $\lim_{t \rightarrow \infty} (t + 1)e^{-2t}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t + 1)e^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t + 1)}{e^{2t}} = \frac{(\infty + 1)}{e^{2\infty}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indeterminado}$$

aplicamos regla L'Hopital

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t + 1)}{e^{2t}} = \text{derivamos numerador y denominador}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2t}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

b) Estudiar el crecimiento y valores maximos y minimos de $f(t)$ en $[-1, \infty)$

$$f(t) = (t + 1)e^{-2t} = \frac{(t + 1)}{e^{2t}}; f'(t) = \frac{1 * e^{2t} - 2e^{2t}(t + 1)}{(e^{2t})^2} = \frac{e^{2t} - 2e^{2t}(t + 1)}{e^{4t}} = \frac{1 - 2(t + 1)}{e^{2t}}$$

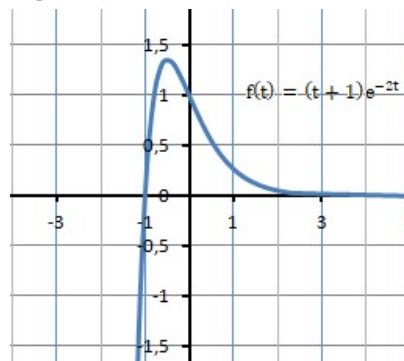
$$= \frac{1 - 2t - 2}{e^{2t}} = \frac{-2t - 1}{e^{2t}} = 0; -2t - 1 = 0; t = -\frac{1}{2} \text{ en este punto habra un máximo o mínimo}$$

Si hallo la segunda derivada o tomo valores menor

y mayor de $-0,5$ veo que hay un maximo

La funcion es creciente de $(-1 \text{ hasta } -0,5)$ y

de decreciente de $(-0,5 \text{ a } \infty)$



-0,6	1,328046769
-0,5	1,359140914
-0,3	1,27548316

7. Ejercicio

Se considera la recta r que pasa por el punto $P(1, 0, 3)$ y tiene vector director $\vec{u} = (2, 1, 1)$; y el plano

$\pi \equiv x + y + 2z = 6$. Se pide:

a) Determinar la posicion relativa de r y π ;

b) Hallar la ecuacion de un plano μ perpendicular a π y que contenga a r . Determinar la distancia del punto $A(2, 0, 2)$ al plano μ .

Solución

a) Determinar la posicion relativa de r y π ;

Pueden darse tres posiciones: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Que la recta y el plano sean paralelos: } \vec{u} \text{ perpendicular a } \vec{v} \\ \text{Que la recta esté contenida en el plano: } \vec{u} \text{ perpendicular a } \vec{v} \text{ y } P \in \pi \\ \text{Que la recta corte el plano: } \vec{u} \text{ no perpendicular a } \vec{v} \text{ Secantes} \end{array} \right.$

$$\text{Recta } r \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = (2, 1, 1) \\ P(1, 0, 3) \end{array} \right.; \text{Plano } \pi \left\{ \begin{array}{l} \text{vector normal del plano } \vec{v} = (1, 1, 2) \\ P(1, 0, 3) \end{array} \right.$$

Si son perpendiculare, su producto escalar sera = 0;

$$\vec{u} * \vec{v} = (1, 1, 2) * (2, 1, 1) = 2 + 1 + 2 = 5 \text{ no es 0 luego no son perpendiculares } \Rightarrow \text{seran secantes}$$

$$\text{Para ver el punto de corte pongo la recta en parametrica } r \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 + 1\lambda \\ z = 3 + 1\lambda \end{array} \right.$$

Como el punto de la recta pertenecerá al plano sustituy en $x + y + 2z = 6$:

$$(1 + 2\lambda) + (0 + 1\lambda) + 2(3 + 1\lambda) = 6; 1 + 2\lambda + \lambda + 6 + 2\lambda = 6; 5\lambda = -1; \lambda = -\frac{1}{5}$$

para hallar el punto de corte sustituyo en la recta $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 + 1\lambda \\ z = 3 + 1\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 - 2/5 \\ y = -1/5 \\ z = 3 - 1/5 \end{cases}$; $(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{14}{5})$

Compruebo que el punto pertenece al plano sustituyo en la ecuacion del plano $\pi \equiv x + y + 2z = 6$.

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} + 2 * \frac{14}{5} = \frac{30}{5} = 6;$$

b) Hallar la ecuación de un plano μ perpendicular a π y que contenga a r . Determinar la distancia del punto $A(2, 0, 2)$ al plano μ .

Como quiero hallar un plano μ , que sea perpendicular a π ; Tendré el vector normal del plano

$\pi \equiv x + y + 2z = 6$ estara contenido en el plano π

por otro lado el vector director de la recta r tambien estará contenido en el plano μ

$\begin{cases} \text{vector normal al plano } \pi (1,1,2) \\ \text{vector director de la recta } r (2,1,1) \end{cases}$ Un vector normal del plano μ es igual

al producto vectorial de los dos vectores. que contiene el plano

Vector normal del plano μ es igual al producto vectorial de $\vec{u} \times \vec{v} = (1,1,2) \times (2,1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$\text{de } \vec{u} \times \vec{v} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} k = -1i + 3j - 1k;$$

Vector normal del plano será $(-1,3,-1)$

El plano pedido será $Ax + By + Cz + D = 0$; sustituyo los valores: $-x + 3y - z + D = 0$

Por otro lado tenemos que el punto $P(1, 0, 3)$, pertenece a la recta que está contenida en el plano.

$$-x + 3y - z + D = 0 \text{ sustituyo en el plano } \Rightarrow -1 + 3 * 0 - 3 + D = 0; D = 4;$$

la ecuacion del plano será $-x + 3y - z + 4 = 0$

Determinar la distancia del punto $A(2, 0, 2)$ al plano μ

Compruebo si el punto pertenece al plano: sustituyo A en la ecuacion del plano μ ; $-x + 3y - z + 4 = 0$

$$\Rightarrow -2 + 3 * 0 - 2 + 4 = 0; -4 + 4 = 0 \text{ distancia } 0 \text{ pue el punto pertenece al plano}$$

8. Ejercicio

En la flota de vehículos de una empresa de alquiler hay 75 vehículos compactos y 36 SUV.

Se sabe que el 25% de los compactos y el 15% de los SUV son híbridos.

Alquilamos un vehículo y la empresa nos lo asigna al azar de entre toda su flota. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que sea híbrido;

b) Si nos ha correspondido un vehículo híbrido, determinar la probabilidad de que sea un SUV

Solución

a) Calcular la probabilidad de que sea híbrido;

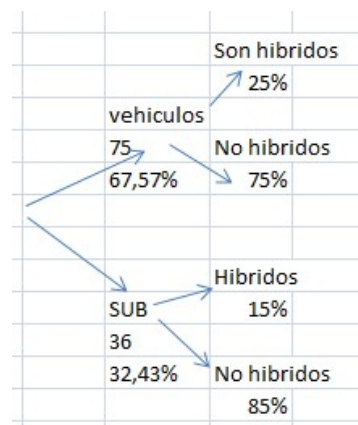
$$P(\text{híbrido}) = 0,6757 * 0,25 + 0,3243 * 0,15 = 0,21757; 21,757\%$$

b) Si nos ha correspondido un vehículo híbrido, determinar

la probabilidad de que sea un SUV

$$P(\text{SUB}|\text{Híbrido}) = \frac{0,3243 * 0,15}{0,6757 * 0,25 + 0,3243 * 0,15}$$

$$= \frac{0,048645}{0,21757} = 0,22358; 22,358\%$$



4 Examen 2022 D

1. Ejercicio

Si se tiene el sistema de ecuaciones lineales siguiente se pide:

$$\begin{cases} 4x + 5y + 2z = -1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ a^2x + 3y + z = 3a \end{cases} \text{ Se pide}$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a

b) Resolver el sistema para $a = 1$;

Solución

$$\begin{cases} 4x + 5y + 2z = -1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ a^2x + 3y + z = 3a \end{cases} \text{ para simplificar el sistema cambio el orden } \begin{cases} 5y + 2z + 4x = -1 \\ 2y + z + 3x = 2 \\ 3y + z + a^2x = 3a \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & +2 & +4 & -1 \\ 2 & +1 & +3 & 2 \\ 3 & +1 & +a^2 & 3a \end{array} \right) \xrightarrow{E_2 = 5E_2 - 2E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & +2 & +4 & -1 \\ 0 & +1 & +7 & 12 \\ 3 & +1 & +a^2 & 3a \end{array} \right) \xrightarrow{E_3 = 5E_3 - 3E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & +2 & +4 & -1 \\ 0 & +1 & +7 & 12 \\ 0 & -1 & +5a^2 - 12 & 15a + 3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & +2 & +4 & -1 \\ 0 & +1 & +7 & 12 \\ 0 & -1 & +5a^2 - 12 & 15a + 3 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3 = E_3 + E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & +2 & +4 & -1 \\ 0 & +1 & +7 & 12 \\ 0 & 0 & +5a^2 - 12 + 7 & 15a + 3 + 12 \end{array} \right)$$

$$(5a^2 - 12 + 7)x = 15a + 3 + 12; x = (15a + 15)x = 5a^2 - 5; x = \frac{5a^2 - 5}{15a + 15} = \frac{a^2 - 1}{3a + 3}$$

El sistema será compatible indeterminado para $3a + 3 = 0; a = -1$;

para $a = -1$ será compatible indeterminado

$$\text{Prueba } a = -1 \begin{cases} 4x + 5y + 2z = -1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ a^2x + 3y + z = 3a \end{cases} \text{ sustituyo } \begin{cases} 4x + 5y + 2z = -1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ x + 3y + z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 5y + 2z = -1 & E_1 \\ 3x + 2y + z = 2 & E_2 = 4E_2 - 3E_1 \\ x + 3y + z = -3 & E_3 = 4E_3 - E_1 \end{cases} \begin{cases} 4x + 5y + 2z = -1 \\ 0 - 7y - 2z = 11 & E_2 = E_3 \\ 0 + 7y + 2z = -11 \end{cases}$$

para $a = -1$ dos ecuaciones con tres incógnitas será compatible indeterminado

b) Resolver el sistema para $a = 1$;

$$\text{Prueba } a = 1 \begin{cases} 4x + 5y + 2z = -1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ a^2x + 3y + z = 3a \end{cases} \text{ sustituyo } \begin{cases} 4x + 5y + 2z = -1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 5y + 2z = -1 & E_1 \\ 3x + 2y + z = 2 & E_2 = 4E_2 - 3E_1 \\ x + 3y + z = 3 & E_3 = 4E_3 - E_1 \end{cases} \begin{cases} 4x + 5y + 2z = -1 & E_1 \\ 0 - 7y - 2z = 11 & E_2 \\ 0 + 7y + 2z = 13 & E_3 = E_3 + E_2 \end{cases} \begin{cases} 4x + 5y + 2z = -1 \\ 0 - 7y - 2z = 11 \\ 0 & 0 + 0 = 24 \end{cases}$$

$0 = 24$ el sistema es incompatible

2. Ejercicio

Determinar la posición relativa de dos planos μ y π dados por las siguientes ecuaciones :

$$\mu \equiv 3x + 2y - 6z = 7; \quad \pi \equiv 4x - y + z + 2 = 0$$

Solución

posición relativa $\begin{cases} \text{sean paralelos sus vectores normales son paralelos} \\ \text{sean coincidentes sus vectores normales son paralelos} \\ \text{Sean secantes, sus vectores normales no son paralelos} \end{cases}$

vectores normales $\left\{ \begin{matrix} \vec{\mu}(3, 2, -6) \\ \vec{\pi}(4, -1, 1) \end{matrix} \right. \frac{3}{4} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{-6}{1}$ los vectores no son proporcionales $\Rightarrow$ *secantes*

Se cortarán en una recta $\begin{cases} 3x + 2y - 6z - 7 = 0 \\ 4x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$ 2 ecuación 3 incógnitas;

Hago una variable igual un parámetro $x = \lambda$ y sustituyo $\begin{cases} 3\lambda + 2y - 6z - 7 = 0 \\ 4\lambda - y + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 6z = 7 - 3\lambda \\ -y + z = -2 - 4\lambda \end{cases}$

$$E_2 = 2E_1 + E_1 \begin{cases} 2y - 6z = 7 - 3\lambda \\ 0 - 4z = 3 - 11\lambda \end{cases}; -4z = 3 - 11\lambda; z = \frac{3 - 11\lambda}{-4}; z = \frac{-3 + 11\lambda}{4}$$

Sustituyo en E_1 $2y - 6z = 7 - 3\lambda \Rightarrow 2y - 6\left(\frac{-3 + 11\lambda}{4}\right) = 7 - 3\lambda; 2y = 7 - 3\lambda + 6\left(\frac{-3 + 11\lambda}{4}\right)$

$$8y = 28 - 12\lambda + 6(-3 + 11\lambda) = 28 - 12\lambda - 18 + 66\lambda = 10 + 54\lambda; y = \frac{10 + 54\lambda}{8}$$

La recta intersección de los planos será: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{10}{8} + \frac{54\lambda}{8} \\ z = -\frac{3}{4} + \frac{11\lambda}{4} \end{cases}; \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{5}{4} + \frac{27\lambda}{4} \\ z = -\frac{3}{4} + \frac{11\lambda}{4} \end{cases}; \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = \frac{5}{4} + 27\lambda \\ z = -\frac{3}{4} + 11\lambda \end{cases}$

Otra forma:

Vector director de la recta producto vectorial vectores normales a los planos

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 2, -6) \times (4, -1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -6 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4i - 27j - 11k;$$

$\vec{v}$ de la recta $(-4, -27, -11)$;

Suponemos que $x = 0$; $\begin{cases} 3x + 2y - 6z - 7 = 0 \\ 4x - y + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 6z = 7 \\ -y + z = -2 \end{cases}; 0 - 4z = 3; z = -\frac{3}{4}$

Sustituyo, $2y - 6z = 7 \Rightarrow 2y - 6\left(-\frac{3}{4}\right) = 7; 2y = 7 - \frac{18}{4} = \frac{10}{4}; y = \frac{5}{8}$ Punto de la recta $(0, \frac{5}{8}, -\frac{3}{4})$

$$\begin{cases} x = 0 - 4\lambda \\ y = \frac{5}{8} - 27\lambda \\ z = -\frac{3}{4} - 11\lambda \end{cases} = \begin{cases} x = 0 - 4\lambda \\ y = \frac{10}{4} - 27\lambda \\ z = -\frac{3}{4} - 11\lambda \end{cases}$$

3. Ejercicio

Dada la función variable real:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{Si } x \leq 0 \\ e^{-a} & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

a) Estudiar para que valores de a la función $f(x)$ es continua en todo su dominio.

b) Estudiar para que valores de a la función $f(x)$ es derivable en todo su dominio.

Solución

a) Estudiar para que valores de a la función $f(x)$ es continua en todo su dominio.

para que la función sea continua en todo el dominio $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{Si } x \leq 0 \\ e^{-a} & \text{Si } x > 0 \end{cases}$: ha de cumplirse

$$\lim_{x \rightarrow -0} e^{ax} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{-ax};$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} e^{ax} = e^{a \cdot 0} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{-ax} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{e^{ax}} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$$

La función es continua para cualquier valor de a

b) Estudiar para que valores de a la función $f(x)$ es derivable en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{Si } x \leq 0 \\ e^{-a} & \text{Si } x > 0 \end{cases}; f'(x) = \begin{cases} ae^{ax} & \text{Si } x \leq 0 \\ -ae^{-ax} & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(e^{a0-}) = ae^{ax} = ae^{a \cdot 0} = a \cdot 1 = a$$

$$f'(e^{a0+}) = \frac{-a}{e^{ax}} = \frac{-a}{e^{a \cdot 0}} = \frac{-a}{1} = -a$$

La función es derivable en $x = 0$; solo para el valor de $a = 0$;

4. Ejercicio

Calcular los límites de la función:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x-7}$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \frac{0 - 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2x} =$$

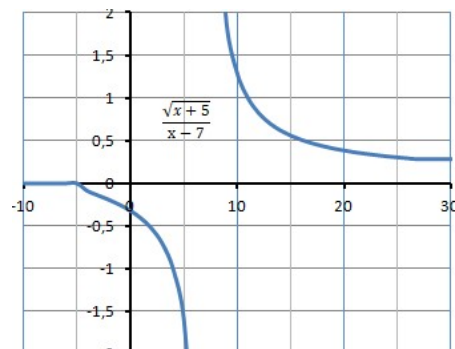
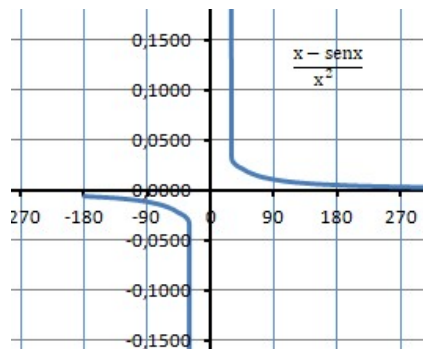
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} = \infty + \frac{0}{2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x-7} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indeterminado}$$

$$\text{Aplico regla de l'hopital } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x-7} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+5)^{-\frac{1}{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{x+5}} = \frac{1}{\infty} = 0$$



5. Ejercicio

Considerando la siguiente matriz :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores de a que hacen que la matriz C sea inversible

b) Estudiar el rango de C en funcion de los valores de a

Solución

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t$$

Para que C tenga inversa su determinante será distinto de 0

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 * 1 * (a-1) - ((a-1) * 1 * (a+1)) = (a-1) - (a-1) * (a+1) =$$

$$a-1 - (a^2 - 1^2) = a-1 - a^2 + 1 = a - a^2 \text{ igualamos a } 0; a - a^2 = 0; a(1-a) = 0;$$

La matriz no tendra inversa para valores de $a = 0$ y $a = 1$

b) Estudiar el rango de C en funcion de los valores de a

La matriz tendra rango 3 para valores de a distintos de $a = 0$ y $a = 1$

Para $a = 0$; inversa para valores de $a = 0$ y $a = 1$

$$\text{para } a = 0; \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow; \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - (-1) = 0 \text{ no rango 3}$$

veamos si es de rango 2; si será de rango 2 pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$;

$$\text{para } a = 1; \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow; \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0 \text{ no rango 3}$$

veamos si es de rango 2; si será de rango 2 pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$;

6. Ejercicio

Determinar la posicion relativa del plano π y la recta r dados por las siguientes ecuaciones:

$$\pi \equiv x - z - 1 = 0; \text{ y la recta } r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Solución

posicion relativa $\begin{cases} \text{recta y plano paralelos; vector director de la recta y el normal al plano son perpendiculares} \\ \text{recta contenida en el plano; vector director de la recta y el normal al plano son perpendiculares} \\ \text{y cualquier punto de la recta pertenece al plano} \\ \text{Sean secantes; vector director de la recta y el normal al plano no son perpendiculares} \end{cases}$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ vector director } \vec{d}_r(-1, -1, 1)$$

$$\pi \equiv x - z - 1 = 0; \text{ Vector normal del plano } \vec{n}_\pi (1, 0, -1)$$

Para ver si son perpendiculares hallo el producto escalar; si da 0 son perpendiculares

$$\vec{d}_r * \vec{n}_\pi = (-1, -1, 1) * (1, 0, -1) = -1 * 1 + (-1) * 0 + 1 * (-1) = -1 + 0 - 1 = -2$$

no son perpendiculares luego son secantes

Como son secantes la recta cortara al plano en un punto, luego habra un punto que pertenece a la recta y al plano

$$\text{sustituyo los valores de la recta en el plano } r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \pi \equiv x - z - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(1 - \lambda) + 0(2 - \lambda) - \lambda - 1 = 0; 1 - \lambda + 0 - \lambda - 1 = 0; -2\lambda = 0; \lambda = 0;$$

$$\text{el punto de corte será sustituyendo en } r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} = \begin{cases} x = 1 - 0 \\ y = 2 - 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (1, 2, 0)$$

este punto también pertenece al plano $\pi \equiv x - z - 1 = 0$; Sustituyo $1 - 0 - 1 = 0$

7. Ejercicio

Se tiene la matriz cuadrada $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores de m para los que la matriz anterior es invertible

b) calcular, si es posible, la matriz inversa cuando $m = 0$;

Solución:

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t$$

Para que C tenga inversa su determinante será distinto de 0

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - (m + m + m) = m^3 - 3m + 2 = 0; \text{ para } m = 1 \text{ el determinante es } 0$$

Para $m = 1$ la matriz no tiene inverso

b) calcular, si es posible, la matriz inversa cuando $m = 0$;

$$\text{para } m = 0 \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; (A^*)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Prueba; } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Ejercicio

Calcular el área de la región encerradas por las funciones $f(x) = 3$ y $g(x) = x^2 - 1$

Solución:

como $f(x)$ esta por encima de $g(x)$

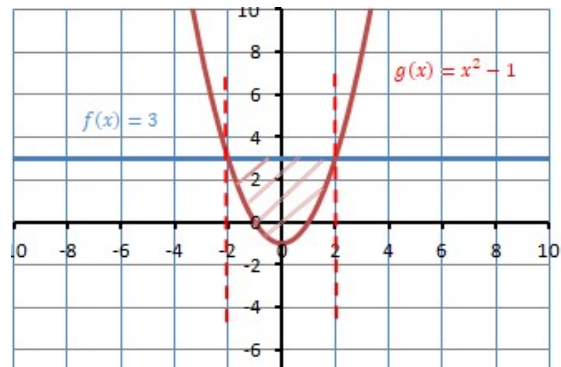
$$A = \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^2 (3 - (x^2 - 1)) dx =$$

$$\int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2;$$

$$A = \left(-\frac{2^3}{3} + 4 * 2 \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4 * (-2) \right) =$$

$$A = -\frac{8}{3} + 8 - \left(-\frac{-8}{3} - 8 \right) = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 =$$

$$-\frac{16}{3} + 16 = -\frac{16}{3} + \frac{48}{3} = \frac{32}{3}$$



$$A = \frac{32}{3} = 10,6666U$$

9. Ejercicio

Determinar el valor o valores de a para los que el sistema siguiente es compatible determinado,

compatible indeterminado ó incompatible y resolver el sistema cuando $a = 1$.

$$\begin{cases} x - y = 1; \\ x - 5ay + 2az = 3 \\ x + y + az = 0; \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -5a & 2a & 3 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} E_1 \\ E_2 = E_2 - E_1 \\ E_3 = E_3 - E_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-5a & 2a & 2 \\ 0 & 2 & a & -1 \end{array} \right) \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 = 2E_3 - E_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-5a & 2a & 2 \\ 0 & 3+5a & 0 & -4 \end{array} \right)$$

$(3 + 5a)y = -4$; si $3 + 5a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{5}$ el sistema es incompatible,

$a \neq -\frac{3}{5}$ el sistema es compatible determinado

$$a = -\frac{3}{5} \begin{cases} x - y = 1; \\ x - 5ay + 2az = 3 \\ x + y + az = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1; \\ x - 5 * (-\frac{3}{5})y + 2(-\frac{3}{5})z = 3 \\ x + y + (-\frac{3}{5})z = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1; \\ x + 3y - \frac{6}{5}z = 3 \\ x + y - \frac{3}{5}z = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1; \\ x + 3y - \frac{6}{5}z = 3 \\ x + y - \frac{3}{5}z = 0; \end{cases} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 = E_2 - E_1 \\ E_3 = E_3 - E_1 \end{matrix} \begin{cases} x - y = 1; \\ 0 + 4y - \frac{6}{5}z = 2 \\ 0 + 2y - \frac{3}{5}z = -1; \end{cases} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 = 2E_3 - E_2 \end{matrix} \begin{cases} x - y = 1; \\ 0 + 4y - \frac{6}{5}z = 2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 = -4; \end{cases}$$

Incompatible

$$\text{para } a = 1 \begin{cases} x - y = 1; \\ x - 5y + 2z = 3 \\ x + y + z = 0; \end{cases} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 = E_2 - E_1 \\ E_3 = E_3 - E_1 \end{matrix} \begin{cases} x - y = 1; \\ 0 - 4y + 2z = 2 \\ 0 + 2y + z = -1; \end{matrix} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 = 2E_3 - E_2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x - y = 1; \\ 0 - 4y + 2z = 2; \\ 0 + 8y + 0 = -4; \end{cases} y = -\frac{1}{2}; \text{ sustituyo en } E_1 \quad x - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1; \quad x = \frac{1}{2}$$

Sustituyo en $E_3 \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + z = 0; \quad z = 0; \text{ Solucion } x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}; z = 0;$

10. Ejercicio

Calcular los siguientes

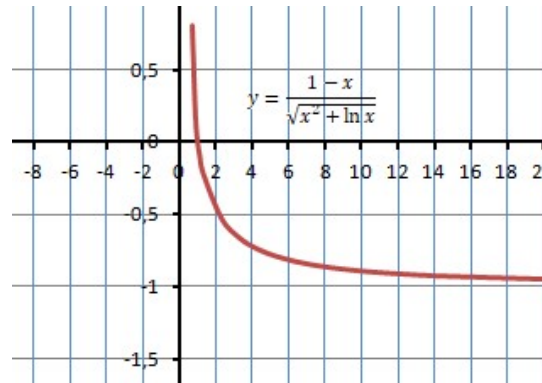
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{\sqrt{x^2 + \ln x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{\sqrt{x^2 + \ln x}} = \frac{-\infty}{\infty} \text{ dividimos por } x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + \ln x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}}} =$$

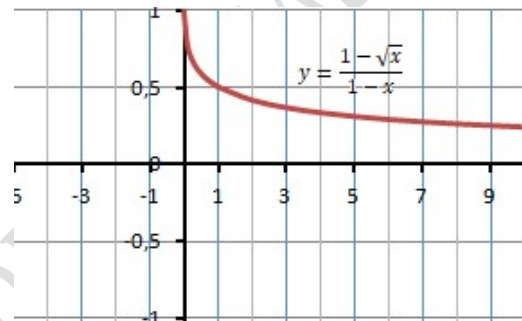
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\ln x}{x^2}}} = \frac{\frac{1}{\infty} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\ln \infty}{\infty^2}}} = \frac{-1}{1} = -1$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \frac{1-\sqrt{1}}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\text{Aplico l'hopital } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$



Si hallo limite por la izquierda y detrecha de 1
compruebo hallando limites laterales

x	y
0,999999	0,50000012
1	
1,000001	0,49999988

5 Examen 2022 E

1. Ejercicio

a) Tres facturas de un supermercado tienen totales de 14, 21 y 7 euros. La primera coreponde a 2 kg de cerezas y 4 kg de peras; la segunda 3kg de cerezas y 2 kg de uvas; la tercera 2 kg de uvas y 1 kg de peras.

Hallar el precio del Kg de cada fruta.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Se pide

b) Indicar que productos de AB y BA estan definidos y, en su caso hallarlos.

c) Hallar A^{-1}

Solución:

a) precio de las cerezas x ; precio de las uvas y y precio de las peras z;

$$\begin{cases} 2x + 4z = 14; \\ 3x + 2y = 21 \\ +2y + 1z = 7; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{14-4z}{2} \\ x = \frac{21-2y}{3} \\ +2y + 1z = 7; \end{cases} \begin{cases} \frac{14-4z}{2} = \frac{21-2y}{3}; 4y = -52 + 12z + 21; \\ +2y + 1z = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-42 + 12z + 42}{4}; y = 3z; \\ +2y + 1z = 7; \end{cases} \text{ sustituyo}$$

$$+2y + 1z = 7 \Rightarrow 6z + z = 7; z = 1; y = 3; x = \frac{14-4z}{2} = 5;$$

Precio de las cerezas x = 5 ; precio de las uvas y = 3; y precio de las peras z = 1;

b) Indicar que productos de AB y BA estan definidos y, en su caso hallarlos.

Podremos multiplicar matrices A que tenga

el mismo numero de columnas que filas tenga B

Si multiplicamos $A(2 \times 2)XB(2 \times 1) = C(2 \times 1)$

$$AXB = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 5+9 \\ -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$$

$$BXA = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = B(2 \times 1)XA(2 \times 2) \text{ no se pueden multiplicar}$$

c) Hallar A^{-1}

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t$$

$$|A| = 8; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; (A^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}; \Rightarrow \text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}{8} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

$$\text{prueba: } A * A^{-1} = I; \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} + \frac{3}{8} & -\frac{15}{8} + \frac{15}{8} \\ -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} & \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Ejercicio

Sea $f(x) = 3x - 7 + \frac{12}{x-5}$ se pide:

a) Hallar las asintotas a su grafica; b) Hallar su funcion derivada;

c) Hallar sus maximos y minimos locales.

Solución:

a) Hallar las asíntotas a su gráfica;

$$\text{Asíntotas horizontales } \lim_{x \rightarrow \infty} 3x - 7 + \frac{12}{x-5} = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x - 7 + \frac{12}{x-5} = -\infty$$

Al no ser igual a una constante **No tiene asíntotas Horizontales;**

Dado que no pose asíntotas horizontales puede tener asíntotas oblicuas

Asíntotas Verticales Como hay un punto de discontinuidad en $x = 5$ compruebo si hay asíntota vertical

$$\text{Limite por la derecha } \lim_{x \rightarrow 5^+} 3x - 7 + \frac{12}{x-5} = 3 * 5,000001 - 7 + \frac{12}{5,000001 - 5} = \infty \text{ y}$$

$$\text{Limite por la izquierda } \lim_{x \rightarrow 5^-} 3x - 7 + \frac{12}{x-5} = 3 * 4,999999 - 7 + \frac{12}{4,999999 - 5} = -\infty$$

Tiene asíntota vertical $x = 5$

Asíntotas Oblicuas

La asíntota oblicua será de la forma $y = mx + n$ donde :

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 7 + \frac{12}{x-5}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x} - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2 - 5x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2 - 5x} \right) = 3 - 0 + 0 = 3; m = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3x - 7 + \frac{12}{x-5} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-7 + \frac{12}{x-5} \right) = -7;$$

La asíntota oblicua será de la forma $y = 3x - 7$;

b) Hallar su función derivada;

$$f(x) = 3x - 7 + \frac{12}{x-5}; \text{ la derivada } f'(x) = 3 - \frac{1 * 12}{(x-5)^2}; f'(x) = 3 - \frac{12}{(x-5)^2}$$

c) Hallar sus máximos y mínimos locales.

Igualo a 0 la derivada para hallar máximos

$$\text{y mínimos } f'(x) = 3 - \frac{12}{(x-5)^2} = 0;$$

$$\frac{3(x-5)^2 - 12}{(x-5)^2} = 0;$$

$$3(x-5)^2 - 12 = 0; 3(x^2 + 25 - 10x) - 12 = 0;$$

$$3x^2 - 30x + 75 - 12 = 0;$$

$$3x^2 - 30x + 63 = 0;$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 * 63 * 3}}{2 * 3} =$$

$$\frac{30 \pm \sqrt{900 - 756}}{6} = \frac{30 \pm 12}{6}, x = 7; x = 3$$

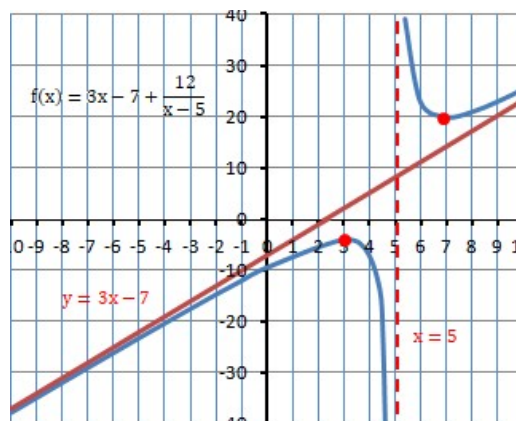
Calculo valores anteriores y posteriores

$x = 3$ habrá un máximo

y $x = 7$ un mínimo

X	Y
0	-9,4
3	-4
4	-7

X	Y
6	23
7	20
8	21



3. Ejercicio

Dada la recta $r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}$ se pide:

- Hallar un vector director y un punto de la recta;
- Hallar la intersección con el plano $3x - 3y + 2z = 10$;
- Hallar la distancia de r al origen $(0,0,0)$

Solución

- Hallar un vector director y un punto de la recta;

$$r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5} = \lambda = \begin{cases} x = \lambda + 3 \\ y = 3\lambda + 1 \\ z = 5\lambda + 1 \end{cases} \text{ vector director } \vec{d}_r (1,3,5) \text{ Punto de la recta } (3,1,1)$$

- Hallar la intersección con el plano $3x - 3y + 2z = 10$;

$$\text{vector normal del plano} = \vec{vn} = (3, -3, 2)$$

Si he de hallar la intersección del plano y la recta tendrán un punto común

$$\text{Sustituyo valores de la recta } \begin{cases} x = \lambda + 3 \\ y = 3\lambda + 1 \\ z = 5\lambda + 1 \end{cases} \text{ en el plano } 3x - 3y + 2z = 10 \Rightarrow$$

$$3(\lambda + 3) - 3(3\lambda + 1) + 2(5\lambda + 1) = 10; 3\lambda + 9 - 9\lambda - 3 + 10\lambda + 2 = 10; 4\lambda + 8 = 10; \lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\text{Punto de intersección} \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2} \\ y = 3 * \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2} \\ z = 5 * \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{2} \end{cases} \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right)$$

- Hallar la distancia de r al origen $(0,0,0)$

Busco un punto de la recta cuya distancia al origen sea mínimo.

Un punto genérico de la recta será $(\lambda + 3, 3\lambda + 1, 5\lambda + 1)$;

Hallo el vector que une el origen $(0,0,0)$ con este punto de la recta

$$((-\lambda + 3) - 0), ((3\lambda + 1) - 0), ((5\lambda + 1) - 0) \vec{GO} ((\lambda + 3, 3\lambda + 1, 5\lambda + 1))$$

Si ha de ser la menor distancia, este vector y el vector director de la recta serán perpendiculares

$$\text{Su producto escalar} = 0; \vec{GO} * \vec{d}_r = 0; ((\lambda + 3, 3\lambda + 1, 5\lambda + 1))((1, 3, 5)) = 0;$$

$$1(\lambda + 3) + 3(3\lambda + 1) + 5(5\lambda + 1) = \lambda + 3 + 9\lambda + 3 + 25\lambda + 5 = 0; 35\lambda + 11 = 0; \lambda = -\frac{11}{35};$$

$$\text{El vector } \vec{GO} \text{ será } \begin{cases} x = \lambda + 3 \\ y = 3\lambda + 1 \\ z = 5\lambda + 1 \end{cases} = \begin{cases} x = -\frac{11}{35} + 3 \\ y = -\frac{3 * 11}{35} + 1 \\ z = -\frac{5 * 11}{35} + 1 \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{94}{35} \\ y = \frac{2}{35} \\ z = -\frac{20}{35} \end{cases} \left(\frac{94}{35}, \frac{2}{35}, -\frac{20}{35} \right)$$

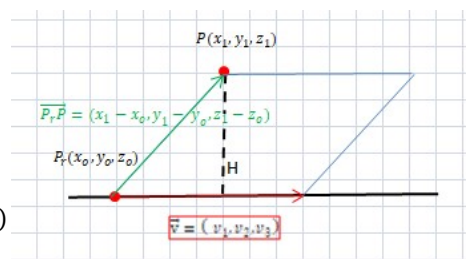
$$\text{La distancia será} = \sqrt{\left(\frac{94}{35}\right)^2 + \left(\frac{2}{35}\right)^2 + \left(-\frac{20}{35}\right)^2} = \sqrt{7,2131 + 0,239 + 0,75593} = 2,86496$$

Otra forma de calcularlo por el metodo del paralelogramo:

$$|\vec{P_r P} * \vec{v}| = |\vec{v}| * H \Rightarrow H = \frac{|\vec{P_r P} * \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

P_r = al punto propio de la recta $(3,1,1)$ y el punto

$$P = (0,0,0) \Rightarrow$$



$$\overrightarrow{P_r P} = (0 - 3, 0 - 1, 0 - 1) = (-3, -1, -1)$$

$\vec{v}$ = vector director de la recta = (1,3,5)

$$\overrightarrow{P_r P} * \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -5i - j - 9k + k + 15j + 3i = (-2i + 14j - 8k) = (-2, +14, -8)$$

$$|\overrightarrow{P_r P} * \vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (14)^2 + (-8)^2} = 16,248$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (5)^2} = 5,916$$

$$\text{Altura} = \text{distancia de } P \text{ a la recta} = H \frac{|\overrightarrow{P_r P} * \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{16,248}{5,916} = 2,746$$

4. Ejercicio

En un estanque de aguas turbias hay una poblacion muy grande de carpas de las cuales el 40% son blancas y el 60% son rojas.

- Si se extraen al azar dos carpas ¿Cual es la probabilidad de que sean de distinto color
- Si se extraen al azar cuatro carpas ¿Cual es la probabilidad de que sean de mismo color
- Si se extraen al azar cuarenta carpas ¿Cual es la probabilidad de que almenos 20 sean blancas

Solucion:

- Si se extraen al azar dos carpas ¿Cual es la probabilidad de que sean de distinto color

$$P(\text{saque una carpa roja la primera y la segunda sea blanca}) = \frac{60}{100} * \frac{40}{99} = \frac{2400}{9900} = \frac{24}{99};$$

$$P(\text{saque una carpa blanca la primera y la segunda sea roja}) = \frac{40}{100} * \frac{60}{99} = \frac{2400}{9900} = \frac{24}{99};$$

$$P(\text{con dos extracciones sean de distinto color}) = \frac{24}{99} + \frac{24}{99} = \frac{48}{99} = 48,485\%$$

- Si se extraen al azar cuatro carpas ¿Cual es la probabilidad de que sean de mismo color

$$P(\text{las cuatro sean rojas}) = \frac{60}{100} * \frac{59}{99} * \frac{58}{98} * \frac{57}{97} = \frac{9918000}{95079600};$$

$$P(\text{las cuatro sean blancas}) = \frac{40}{100} * \frac{39}{99} * \frac{38}{98} * \frac{37}{97} = \frac{2193360}{95079600};$$

$$P(\text{las cuatro sean del mismo color}) = \frac{9918000}{95079600} + \frac{2193360}{95079600} = \frac{12111360}{95079600} = 0,12738; 12,74\%$$

- Si se extraen al azar cuarenta carpas ¿Cual es la probabilidad de que almenos 20 sean blancas

Para poder usar la tabla tengo que pasar mis datos a la distribucion normal para hallar Z

$$\mu = 40 * 0,4 = 16;$$

$$\sigma = \sqrt{40 * 0,4 * 0,6} = 3,098$$

$$N(np, \sqrt{npq}) = N(\mu, \sigma) \Rightarrow N(40 * 0,4, \sqrt{40 * 0,4 * 0,6}) = (16, 3,098);$$

Tengo probabilidad de X y quiero hallar probabilidad de Z

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}; Z = \frac{20 - 16}{3,098}; Z = 1,29; \text{ como quiero valores superiores a } 1,29 \Rightarrow Z = 1 - 1,29 = 0,29$$

En la tabla será 0.6141; $P(Z \geq 20) = 61,41\%$;

5. Ejercicio

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Se pide: a) Hallar determinante de A; b) Hallar A^{-1}

c) Resolver el sistema $A * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Solucion

a) Hallar determinante de A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 = 2;$$

b) Hallar A^{-1}

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t; A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; (A^*)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Prueba } A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 \end{pmatrix}$$

$$A * A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Resolver el sistema $A * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 * x + 1 * y + 1 * z \\ 1 * x + 0 * y + 1 * z \\ 1 * x + 1 * y + 0 * z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y + z \\ x + z \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = -4 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = 1; & z = 1 - y \\ x + z = -4; & \text{Sustituyo } z \Rightarrow x + (1 - y) = -4; x - y = -5; \\ x + y = -1 \end{cases} \begin{cases} x - y = -5 \\ x + y = -1 \end{cases} \begin{matrix} 2x = -6; x = -3; \end{matrix}$$

Sustituyo en $x + y = -1 \Rightarrow -3 + y = -1; y = 2;$

sustituyo en $y + z = 1 \Rightarrow 2 + z = 1; z = -1;$

Solución $x = -3; y = 2; z = -1;$

6. Ejercicio

Dada la funcion $f(x) \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 5x + \text{sen}x & 0 \leq x \end{cases}$

a) Estudiar continuidad en $x = 0$

b) Estudiar si es derivable en $x = 0;$

c) Hallar $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$

Solucion

a) Estudiar la continuidad en $x = 0$;

$$\text{Limite por la izquierda de } 0 \lim_{x \rightarrow -0} x^2 = 0 = 0;$$

$$\text{Limite por la derecha de } 0 \lim_{x \rightarrow +0} (5x + \sin x) = 0 + 0 = 0; \text{ Hay continuidad en } x = 0;$$

b) Estudiar si es derivable en $x = 0$;

Calculamos las derivadas laterales por izquierda y derecha

$$f(x) \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 5x + \sin x & 0 \leq x \end{cases}; f'(x) \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 5 + \cos x & 0 \leq x \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$f'(0^+) = 5 + \cos x = 5 + 1 = 6 \quad \text{la funcion no es derivable en } x = 0;$$

$$c) \text{ Hallar } \int_0^{\pi/2} f(x) dx$$

$$\text{valor de } x \geq 0; \int_0^{\pi/2} (5x + \sin x) dx = \left| \frac{5x^2}{2} - \cos x \right|_0^{\pi/2} = \left(\frac{5 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{5(0)^2}{2} - \cos 0 \right) =$$

$$\left(\frac{5 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2}{2} - 0 \right) - \left(\frac{5(0)^2}{2} - 1 \right) = \frac{5 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2}{2} - 1 = 6,1685 - 1 = 5,1685u$$

7. Ejercicio

Dado el plano $\pi \equiv 3x - 4z = 7$ Se pide:

a) Escribir las rectas parametricas perpendiculares al plano en el punto $P(1,3,-1)$;

b) Hallar la distancia del plano al punto $(1,-2,4)$

c) Hallar el coseno del angulo que forma el eje Z con el plano π

Solucion

a) Escribir las rectas parametricas perpendiculares al plano en el punto $P(1,3,-1)$;

la recta perpendicular al plano tendra el vector director $\vec{d}_r = \vec{v}_n$ vector normal del plano

$$\vec{d}_r = \vec{v}_n = (3, 0, -4)$$

$$\text{Ecuacion de la recta de } \vec{d}_r(3, 0, -4) \text{ y } P(1, 3, -1) = \begin{cases} x = 3\lambda + 1 \\ y = 3 \\ z = -4\lambda - 1 \end{cases}$$

b) Hallar la distancia del plano al punto $(1,-2,4)$

La ecuacion de la recta de $\vec{d}_r(3, 0, -4)$ perpendicular al plano y que pase por $P(1,-2,4)$

$$\text{Recta perpendicular al plano} = \begin{cases} x = 3\lambda + 1 \\ y = -2 \\ z = -4\lambda + 4 \end{cases}$$

$$\text{Punto de corte de la recta con el plano: } 3x - 4z = 7 \text{ sustituyo ; } 3(3\lambda + 1) + 0(-2) - 4(-4\lambda + 4) = 7$$

$$9\lambda + 3 + 0 + 16\lambda - 16 = 7; 25\lambda = 7 + 13; \lambda = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Punto de corte de la recta y el plano} \begin{cases} x = 3\frac{4}{5} + 1 = \frac{17}{5} \\ y = -2 \\ z = -4\frac{4}{5} + 4 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\text{distancia del punto } P(1, -2, 4) \text{ y Punto de interseccion } \left(\frac{17}{5}, -2, \frac{4}{5} \right)$$

$$\text{vector} = \left(1 - \frac{17}{5}, -2 - (-2), 4 - \frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{12}{5}, 0, \frac{16}{5}\right)$$

$$\text{Distancia} = \text{Modulo del vector} = \sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + (0)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2} = \sqrt{5,76 + 10,24} = 4$$

Otra forma es aplicando la formula Distancia de P (x_0, y_0, z_0) al plano $\pi = Ax + By + Cz + D$

$$\text{Distancia} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{Distancia de Punto } (1, -2, 4) \text{ al plano } \pi \equiv 3x - 4z = 7 \Rightarrow \frac{|3 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-4) \cdot 4 - 7|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2}}$$

$$\text{Distancia} = \frac{|3 - 16 - 7|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4;$$

8. Ejercicio

La siguiente tabla marca porcentajes de coche

de una ciudad segun su

de etiquetas de emision y tipo de

tipo de caja de cambios

a) Se elige al azar un coche de la ciudad

¿ Cual es la probabilidad de que tenga

etiqueta A?

b) Se elige al azar un coche de la ciudad ¿ Cual es la probabilidad de que no sea ECO?

c) Se elige al azar un coche de la ciudad. Si se sabe que es automatico ¿ Cual es la probabilidad de que tenga etiqueta ECO?

d) ¿ Es el tipo de caja de cambios independiente de la etiqueta de emision? razona la respuesta

Solucion

a) Se elige al azar un coche de la ciudad ¿ Cual es la probabilidad de que tenga etiqueta A?

$$P(\text{etiqueta A}) = \frac{0,3}{0,3 + 0,3 + 0,25 + 0,15} = 0,3; 30\%$$

b) Se elige al azar un coche de la ciudad ¿ Cual es la probabilidad de que no sea ECO?

$$P(\text{sea ECO}) = \frac{0,15}{0,3 + 0,3 + 0,25 + 0,15} = 0,15; 15\%$$

$$P(\text{no sea sea ECO}) = 1 - 0,15 = 0,85; 85\%$$

c) Se elige al azar un coche de la ciudad. Si se sabe que es automaticotico

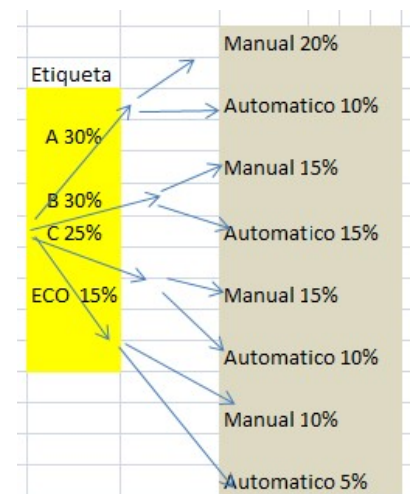
¿ Cual es la probabilidad de que tenga etiqueta ECO

$$P(\text{etiqueta ECO} | \text{Automatico})$$

$$= \frac{0,15 \cdot 0,5}{0,3 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,15 + 0,25 \cdot 0,1 + 0,15 \cdot 0,5} =$$

$$= \frac{0,075}{0,03 + 0,045 + 0,025 + 0,075} = \frac{0,075}{0,175} = 0,42857; 42,857\%$$

	A	B	C	ECO
Manual	20%	15%	15%	10%
Automatico	10%	15%	10%	5%
	30%	30%	25%	15%



d) ¿Es el tipo de caja de cambios independiente de la etiqueta de emisión? razona la respuesta

% de automáticos con etiqueta A = $\frac{1000}{30}$ es 33,33%

% de automáticos con etiqueta B = $\frac{1500}{30}$ es 50%

% de automáticos con etiqueta A = $\frac{1000}{25}$ es 40%%

% de automáticos con etiqueta A = $\frac{500}{15}$ es 33,33%

El tipo de cambio es independiente de la etiqueta de emisión

ANGEL HERNANDEZ DE CASTRO