

Exámenes acceso a la universidad mayores de 25 años (año2020)

Contenido

1	EXAMEN 2020 A	2
2	EXAMEN 2020 B	8
3	EXAMEN 2020 C	16
4	EXAMEN 2020 D.....	24

1 Examen 2020 A

1. Ejercicio

Si a y b son números reales tales que tanto a como b son distintos de 0 estudiar si la siguiente matriz es invertible y en su caso calcular la matriz inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Solución

a) Hallar en el caso de que exista la matriz inversa de A cuando $m = 0$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + a * b + 0 - 0 - 0 - 0 = ab$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} +0 & -(-a) & +0 \\ -(0) & +(-a) & -(-ab) \\ +(b) & -(0) & +(-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & -a & ab \\ b & 0 & -b \end{pmatrix}; (A^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & -a & 0 \\ 0 & ab & -b \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t = \frac{1}{ab} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & -a & 0 \\ 0 & ab & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/a \\ 1/b & -1/b & 0 \\ 0 & 1 & -1/a \end{pmatrix}$$

2. Ejercicio

Hallar la posición relativa de los planos definidos por las siguientes ecuaciones:

$$\pi_1 = 2x - y - z + 1 = 0;$$

$$\pi_2 = x - 2y + z - 1 = 0;$$

$$\pi_3 = x + y - 2z - 1 = 0$$

Solución

$$\pi_1 = 2x - y - z = -1;$$

$$\pi_2 = x - 2y + z = 1;$$

$$\pi_3 = x + y - 2z = 1$$

r = rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \text{ hallo el determinante } \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 1 - 1 - 2 - 2 - 2 = 0; r = 2$$

r' = rango de la matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 1 - 1 - 2 - 2 + 1 = -9; \text{ Rango de } r' = 3$$

Al ser $r = 2 < r' = 3$ El sistema es rango de la matriz de los coeficientes el sistema es incompatible:

Comprobamos si hay dos planos paralelos:

Si son paralelos los vectores directores serán proporcionales

$$\begin{cases} \pi_1 = 2x - y - z + 1 = 0 \\ \pi_2 = x - 2y + z = 1 \end{cases} (2, -1, -1) = K(1, -2, 1) \begin{cases} 2 = 1 * K; K = 2 \\ -1 = -2K; k = \frac{1}{2} \\ -1 = 1 * K; K = -1 \end{cases} = \text{son secantes}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = 2x - y - z + 1 = 0 \\ \pi_3 = x + y - 2z = 1 \end{cases} (2, -1, -1) = K(1, 1, -2) \begin{cases} 2 = 1 * K; K = 2 \\ -1 = 1K; k = -1 \\ -1 = -2 * K; K = \frac{1}{2} \end{cases} = \text{son secantes}$$

$$\begin{cases} \pi_2 = x - 2y + z = 1 \\ \pi_3 = x + y - 2z = 1 \end{cases} (1, -2, 1) = K(1, 1, -2) \begin{cases} 1 = 1 * K; K = 1 \\ -2 = 1 * K; k = -2 \\ 1 = -2 * K; K = -1/2 \end{cases} = \text{son secantes}$$

Los tres planos son secantes:

3. Ejercicio

Estudiar la continuidad de la funcion definida por :

$$\begin{cases} 2xe^x + 5x^3 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - e^x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 5x^4 - 3x^3 - xe^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución

Los puntos criticos serán 0 y el 1

Calculamos limites 0 por la derecha e izquierda

Izquierda tomamos el valor de $x = -0,00002$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2xe^x + 5x^3 - 1 = -1,0000004$$

derecha tomamos el valor de $x = 0,000002$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - e^x = 0,99999998$$

Funcion continua

Calculamos limites 1 por la derecha e izquierda

Izquierda tomamos el valor de $x = 0,9999991$

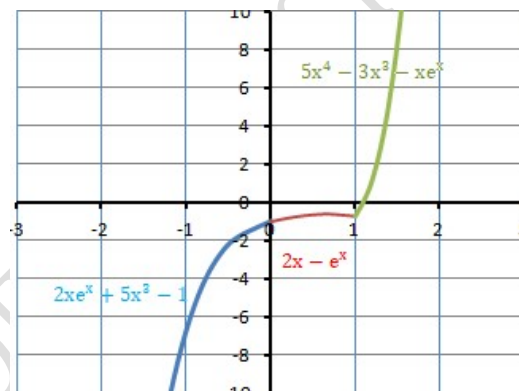
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x - e^x = -0,718281828$$

por la derecha tomamos el valor de $x = 1,000002$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - e^x = -0,718222$$

Funcion continua

La funcion es continua en todo R



4. Ejercicio

Descomponer el numero 124 en dos sumandos de forma que la suma de sus raices cudradas sea maxima

Solución

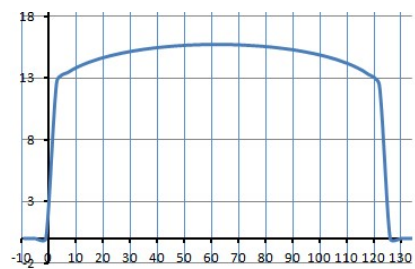
Un numero será x y el otro $124 - x$;

Se ha de cumplir $y = \sqrt{x} + \sqrt{124 - x}$ sea maxima

Derivamos $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{124 - x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{124 - x}} \text{ igualamos a 0}$$

$$\frac{2\sqrt{124 - x}}{(2\sqrt{x})(2\sqrt{124 - x})} + \frac{2\sqrt{x}}{(2\sqrt{x})(2\sqrt{124 - x})} = 0;$$



$$-2\sqrt{124-x} + 2\sqrt{x} = 0; \quad 2\sqrt{x} = 2\sqrt{124-x} \text{ elevamos al cuadrado los dos miembros}$$

$$4x = 4(124-x); x = 124-x; x = 62 \text{ esto será un máximo o mínimo;}$$

Doy valores a x por la derecha e izquierda y da que es un máximo

$$x = 55; y = 15,72282; x = 62; y = 15,74802; x = 70; y = 15,71507$$

5. Ejercicio

Determinar el valor o valores del parametro a para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible

$$\begin{cases} x & + y & = a + 1 \\ (a+1)x + y & - z & = 2 \\ x & + y & - az = 2 \end{cases}$$

Solución

Sistema Compatible Determinado (SCD): posee una única solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & +1 & 0 & a+1 \\ a+1 & +1 & -1 & 2 \\ 1 & +1 & -a & 2 \end{array} \right) \text{ para que quede una estructura escalonada } \begin{matrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & +1 & 0 & a+1 \\ a+1 & +1 & -1 & 2 \\ 1 & +1 & -a & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[E_3 = E_3 - E_1]{E_2 = E_2 - (a+1)E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & +1 & 0 & a+1 \\ 0 & -a & -1 & 2 - (a+1)^2 \\ 0 & 0 & -a & 2 - (a+1) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & +1 & 0 & a+1 \\ 0 & -a & -1 & 2 - (a+1)^2 \\ 0 & 0 & -a & 2 - a - 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & +1 & 0 & a+1 \\ 0 & -a & -1 & 2 - (a+1)^2 \\ 0 & 0 & -a & 1 - a \end{array} \right)$$

calculo los valores que hacen 0 $-a$ y el valor es $a = 0$; el sistema es incompatible

para $a \neq 0$ el sistema es compatible determinado.

Sistema Incompatible: no tiene solución

para $a = 0$ el sistema es incompatible;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & +1 & 0 & a+1 \\ 0 & -a & -1 & 2 - (a+1)^2 \\ 0 & 0 & -a & 1 - a \end{array} \right) \text{ la ecuación será } \Rightarrow \begin{cases} x & + y & = a+1 \\ 0 - ay & - z & = 2 - (a+1)^2 \\ 0 & 0 & -az = 1 - a \end{cases}$$

despejo en la tercera ecuación $-az = 1 - a; z = \frac{1-a}{-a} = \frac{a-1}{a}; z = \frac{a-1}{a}$ a no puede valer 0

Sistema Compatible Indeterminado (SCI): posee infinitas soluciones. El determinante será $(0 \ 0 \ 0 \ n)$

6. Ejercicio

Calcular los siguientes límites

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{(x-1)^2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2)}$$

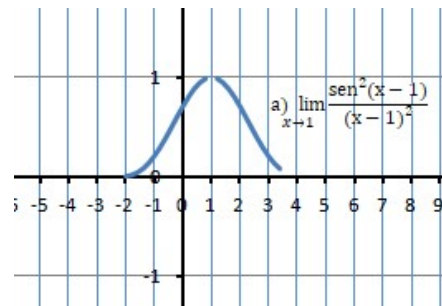
Solución

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{\sin^2(1-1)}{(1-1)^2} =$$

$$\frac{\sin^2 0}{0^2} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

$$\text{Aplicamos regla d'hopital; } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin(x-1) * \cos(x-1)}{2(x-1) * 1}$$

según propiedades trigonometría $2 \sin(x-1) * \cos(x-1) = \sin 2(x-1)$



$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2x-2)}{2(x-1)} \text{ derivo de nuevo } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cos(2x-2)}{2 \cdot 1} = ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cos(2 \cdot 1 - 2)}{2} = \frac{2 \cos(0)}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2)}$$

$$\text{Aplicamos regla d'hopital ; } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2x/x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2/x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{2} = 0;$$

7. Ejercicio

Calcular los siguientes limites

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 2x}$$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4}) = \infty - \infty$$

$$\frac{(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4})(\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 4})}{(\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 4})} = \frac{(\sqrt{x^2 + 4})^2 - (\sqrt{x^2 - 4})^2}{(\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 4})} = \frac{(x^2 + 4) - (x^2 - 4)}{(\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 4})}$$

$$\frac{x^2 + 4 - x^2 + 4}{(\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 4})} = \frac{8}{(\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 4})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{(\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 4})} = \frac{8}{\infty} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 2x} = \frac{0^3 + 0^2}{0^2 - 2 \cdot 0} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x-2} = \frac{0(0+1)}{0-2} = \frac{0}{-2} = 0;$$

8. Ejercicio

Determinar el valor o valores del parametro a para los que el sistema es compatible determinado, y resolver el sistema para dichos valores

$$\begin{cases} +y + 2z = -1 \\ x + y + 2z = a + 1 \\ 2x + 2y + 3z = a + 1 \end{cases}$$

Solución

Sistema Compatible Determinado (SCD): posee una única solución.

$$\begin{cases} +y + 2z = -1 \\ x + y + 2z = a + 1 \\ 2x + 2y + 3z = a + 1 \end{cases} \text{ cambiamos filas } \begin{cases} x + y + 2z = a + 1 \\ +y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = a + 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +1 & +1 & +2 & a+1 \\ +1 & +2 & & -1 \\ +2 & +2 & +3 & a+1 \end{array} \right) \text{ para que quede una estructura escalonada } \begin{matrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +1 & +1 & +2 & a+1 \\ +1 & +2 & & -1 \\ +2 & +2 & +3 & a+1 \end{array} \right) \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 = E_3 - 2E_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} +1 & +1 & +2 & a+1 \\ +1 & +2 & & -1 \\ 0 & 0 & +4 & a+1 \end{array} \right)$$

Para $a = -1$ el sistema es indeterminado y para $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ +y + 2z = -1 \\ +4z = 0 \end{cases} \text{ } z \text{ es indeterminado sistema incompatible}$$

$$\text{ej Para } a = 3 \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ +y + 2z = -1 \\ +4z = 4 \end{cases} \text{ } z = 1;$$

$$\text{sustituyo } z \Rightarrow +y + 2z = -1; +y + 2 * 2 = -1; y = -5;$$

$$\text{sustituyo } y, z \Rightarrow x + y + 2z = 4; x - 5 + 2 * 2 = 4; x = 5;$$

9. Ejercicio

Dados los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 = x - y - z - 2 = 0;$$

$$\pi_2 = \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = 2 + \lambda + \mu \end{cases}$$

a) estudiar si ambos planos son paralelos o se cortan entre si.

b) si r es la recta perpendicular al primer plano que pasa por el punto $(1,1,1)$.

calcular el punto de corte de la recta r con el primer plano

Solución

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (u_1, u_2, u_3)\lambda + (v_1, v_2, v_3)\mu; \begin{cases} x = x_0 + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = y_0 + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = z_0 + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases}$$

$$\pi_2 = \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = 2 + \lambda + \mu \end{cases} = \begin{cases} x + 1 = -\lambda \\ y = \lambda + 3\mu \\ z - 2 = \lambda + \mu \end{cases}; \begin{vmatrix} x + 1 & -1 & 0 \\ y & +1 & +3 \\ z - 2 & +1 & +1 \end{vmatrix} =$$

$$(x + 1)(1 - 3) - y(-1) + (z - 2)(-3) = -2x - 2 + y - 3z + 6 = -2x + y - 3z + 4 = 0$$

$$\pi_2 = -2x + y - 3z + 4 = 0$$

Si fueran paralelos sus vectores directores serian proporcionales

$$\begin{cases} \pi_1 = x - y - z - 2 = 0 \\ \pi_2 = -2x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases}; (1, -1, -1) = k(-2, +1 - 3); \begin{cases} 1 = -2k; K = -\frac{1}{2} \\ -1 = 1k; K = -1 \\ -1 = -3K; K = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ se cortan}$$

b) si r es la recta perpendicular al primer plano que pasa por el punto $(1,1,1)$.

calcular el punto de corte de la recta r con el primer plano

Si r es perpendicular al plano $\pi_1 = x - y - z - 2 = 0$; su vector director será $(1, -1, -1)$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (v_1, v_2, v_3)t; \begin{cases} x = x_0 + v_1t \\ y = y_0 + v_2t \\ z = z_0 + v_3t \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (1,1,1) + (1, -1, -1)t; \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + (-1)t \\ z = 1 + (-1)t \end{cases}; r = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Interseccion recta y plano ;

sustituyo en el plano los valores de la recta $\pi_1 = x - y - z - 2 = 0$;

$$(1 + t) - (1 - t) - (1 - t) - 2 = 0; 1 + t - 1 + t - 1 + t - 2 = 0; 3t - 3 = 0; t = 1;$$

$$\text{el punto de corte será para } t = 1; \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}; x = 2; y = 0; z = 0; \text{ Punto de corte } (2,0,0)$$

Comprobacion de que ese punto pertenece a la recta y al plano:

$$r = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ (punto } (2,0,0)) \begin{cases} 2 = 1 + t; t = 1 \\ 0 = 1 - t; t = 1; \text{ Ok} \\ 0 = 1 - t; t = 1; \end{cases}$$

$$\pi_1 = x - y - z - 2 = 0 \text{ (punto } (2,0,0)) = 2 - 0 - 0 - 2 = 0; \text{ Ok}$$

10. Ejercicio

Dados las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores de a que hacen $A * B = I_{2 \times 2}$.

b) Calcular los valores de a que hacen $B^2 = A$

Solución

a) Calcular los valores de a que hacen $A * B = I_{2 \times 2}$.

$$A * B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a * 1 + 1 * 1) & (a * 1 + 1 * 0) \\ (1 * 1 + (a-1) * 1) & (1 * 1 + (a-1) * 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{para que } A * B = I_{2 \times 2} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Por lo que } a = 0;$$

b) Calcular los valores de a que hacen $B^2 = A$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 * 1 + 1 * 1 & 1 * 1 + 1 * 0 \\ 1 * 1 + 0 * 1 & 1 * 1 + 0 * 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{para que } B^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2$$

11. Ejercicio

Estudiar los valores de a y b para que la siguiente funcion sea continua y derivable en todo su dominio

$$f(x) = \begin{cases} x - a & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(x) - \frac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución

El punto critico donde la funcion cambio es en $x = 1$ compruebo continuidad en ese punto

$$f(x) \text{ Para } x = 1 \begin{cases} x - a & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(x) - \frac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} f(1) = 1 - a$$

para ver si es continua calculo limite por la izquierda y derecha:

$$\text{por la izquierda } f(1) = (x - a) = 1 - a$$

$$\text{por la derecha } f(1) = \ln(x) - \frac{b}{x} = \ln(1) - \frac{b}{1} = 0 - b = -b$$

para que sea continua se ha de cumplir $1 - a = -b$; $b = a - 1$;

Para ver si es derivable calculo por la izquierda y derecha:

$$\text{por la izquierda } f'(x) = 1; f'(1) = 1;$$

$$\text{por la derecha } f'(x) = \frac{1}{x} - \left(-\frac{b}{x^2}\right); f'(1) = \frac{1}{1} - \left(-\frac{b}{1^2}\right) = 1 + \frac{b}{1} = 1 + b;$$

para que sea derivable en 1 ha de cumplirse:

$$f'(1) \text{ por la izquierda} = f'(1) \text{ por la derecha} \Rightarrow 1 = 1 + b; b = 0;$$

$$\text{para que la funcion sea continua y derivable } b = 0; a = 1;$$

2 Examen 2020 B

1. Ejercicio

Se considera el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro a

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ 3x + y - mz = 3 \end{cases}$$

a) Discutir según los valores de m

b) resolver el sistema para $m = 0$;

Solución

Sistema Compatible Determinado (SCD): posee una única solución.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ 3x + y - mz = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +2 & +1 & -1 & 1 \\ +1 & +m & +1 & 2 \\ +3 & +1 & -m & 3 \end{array} \right) \text{ para que quede una estructura escalonada}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +2 & +1 & -1 & 1 \\ +1 & +m & +1 & 2 \\ +3 & +1 & -m & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{E_1 = 2E_2 - E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} +2 & +1 & -1 & 1 \\ 0 & + (2m-1) & +3 & 3 \\ 0 & -1 & -2m+3 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{E_3 = 2E_3 - 3E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} +2 & +1 & -1 & 1 \\ 0 & + (2m-1) & +3 & 3 \\ 0 & -1 & -2m+3 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{E_2 = E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} +2 & +1 & -1 & 1 \\ 0 & + (2m-1) & +3 & 3 \\ 0 & -1 & -2m+3 & 3 \end{array} \right)$$

$$E_3 = (2m-1)E_3 + E_2 \left(\begin{array}{ccc|c} +2 & +1 & -1 & 1 \\ 0 & + (2m-1) & +3 & 3 \\ 0 & +0 & (2m-1)(-2m+3) + 3 & 3(2m-1) + 3 \end{array} \right)$$

$$(2m-1)(-2m+3) + 3 = -4m^2 + 8m - 3 + 3 = -4m^2 + 8m = 4m(-m+2); \begin{cases} m=0; \\ m=2 \end{cases}$$

para $m \neq 0$ y $m \neq 2$ el sistema es Compatible determinado

b) resolver el sistema para $m = 0$;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +2 & +1 & -1 & 1 \\ 0 & + (2m-1) & +3 & 3 \\ 0 & +0 & (2m-1)(-2m+3) + 3 & 3(2m-1) + 3 \end{array} \right) \text{ Para } m=0;$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +2 & +1 & -1 & 1 \\ 0 & + (2*0-1) & +3 & 3 \\ 0 & +0 & (2*0-1)(-2*0+3) + 3 & 3(2*0-1) + 3 \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +2 & +1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & +3 & 3 \\ 0 & +0 & (-1)(+3) + 3 & 3(-1) + 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} +2 & +1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & +3 & 3 \\ 0 & +0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ Indeterminado}$$

2. Ejercicio

Considera la función $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x-2}$

a) Calcula sus asíntotas

b) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

Solución

Vemos para que valores la función es indeterminada $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x-2}$

será indeterminada para; $x^2 + x - 2 = 0$;

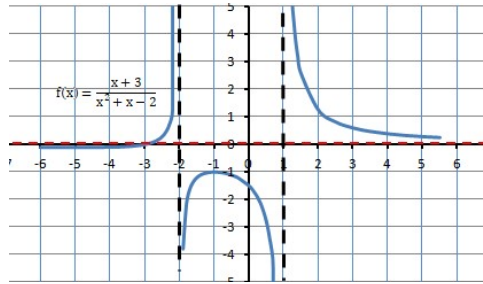
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 * 1 * (-2)}}{2 * 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}; x = \frac{-1+3}{2} = 1; x = \frac{-1-3}{2} = -2$$

la función es discontinua en $x = 1$ y $x = -2$;

1. – Asintotas verticales:

$$\text{vemos } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{1+3}{1^2+1-2} = \frac{4}{0} = \infty \text{ Asintota vertical en } x = 1;$$

$$\text{vemos } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{-2+3}{(-2)^2+(-2)-2} = \frac{1}{0} = \infty \text{ Asintota vertical en } x = -2;$$



1. – Asintotas horizontales:

$$\text{vemos } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{\infty+3}{\infty^2+\infty-2} = \frac{\infty}{\infty}; \text{ dividido numerador y denominador por } x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{3}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}} = \frac{0}{1+0-0} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\text{vemos } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{-\infty+3}{(-\infty)^2-\infty-2} = \frac{\infty}{\infty}; \text{ dividido numerador y denominador por } x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{-\infty} + \frac{3}{-\infty}}{1 + \frac{1}{-\infty} - \frac{2}{-\infty}} = \frac{0}{1+0-0} = \frac{0}{1} = 0;$$

Tiene asintota horizontal por la izquierda y derecha. Al tener asintota Horizontal no tiene oblicua

b) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

Hallamos la derivada de la funcion $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x-2}$;

$$f'(x) = \frac{1(x^2+x-2) - (2x+1)(x+3)}{(x^2+x-2)^2} \text{ igualamos a 0 para ver los maximos y minimos}$$

$$\frac{1(x^2+x-2) - (2x+1)(x+3)}{(x^2+x-2)^2} = 0; (x^2+x-2) - (2x+1)(x+3) = 0;$$

$$x^2+x-2 - (2x^2+7x+3) = -x^2-6x-5 = 0;$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{-2};$$

$$x = \frac{6+4}{-2} = -5; x = \frac{6-4}{-2} = -1$$

Habr  maximos o minimos en $x = -5$ y $x = -1$;

Damos valores proximos a $x = -5$ y $x = -1$

para $x = -5$ hay un minimo

Para $x = -1$ hay un máximo

x	f(x)
-8	-0,0926
-5	-0,1111
-3	0
-1,5	-1,2
-1	-1
0	-1,5

3. Ejercicio

Dada la funcion $f(x) = x \cos x$

a) Calcula la recta tangente a f en $x = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

b) Calcula su primitiva (o integral de la funcion dada)

Solución

$$f(x) = x \cos x; f'(x) = 1 \cos x + (-\sin x)x = \cos x - x \sin x;$$

$$f'(x) = m \text{ pendiente de la tangente} = \cos x - x \sin x$$

recta tangente; $y - y_0 = m(x - x_0)$;

$$y - y_0 = (\cos x - x \sin x)(x - x_0);$$

La tangente en el punto $x = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$, pasa por el punto $x_0 = 45$; $y_0 = f(x_0) = 45 \cos 45 = 31,8198$

Punto (x_0, y_0) será igual a $(45, 31,8198)$; $m = (\cos 45 - 45 \sin 45) = (0,707107 - 31,8198)$
 $m = -31,112698$

la tangente será $y - 31,8198 = (0,707107 - 31,8198)(x - 45) = -31,112698(x - 45)$;

$$y = -31,112698x + 1.400,0714169 + 31,8198; y = -31,112698x + 1.431,89121$$

la normal será $y - 31,8198 = 1/(0,707107 - 31,8198)(x - 45) = 1/31,112698(x - 45)$;

$$y = \frac{1}{31,112698}x - \frac{1}{31,112698} * 45 + 31,8198$$

b) Calcula su primitiva (o integral de la función dada)

Consiste en hallar la función cuya derivada es $F(x) = x \cos x$;

$$\int x \cos x \, dx$$

Lo hacemos mediante la integral por partes $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

Si usamos la regla ALPES lo primero es un polinomio $\Rightarrow u = x$ y dv será $\cos x$;

$$u = x \Rightarrow du = 1;$$

$$dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du; \int x \cos x \, dx = x * \sin x - \int \sin x * 1 \, dx = x \sin x - (-\cos x) + C;$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

4. Ejercicio

Considera el punto P y el plano η dados por:

$$P = (6, 3, 1) \quad \eta = \begin{cases} x = \lambda + \beta + 3 \\ y = \lambda - \beta + 2 \\ z = -\lambda + \beta + 1 \end{cases}$$

a) Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano η y que pasa por P.

b) determinar la distancia entre el plano η y el punto P.

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-3 \\ 1 & -1 & y-2 \\ -1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 1 * (-1) * (z-1) + (-1) * 1 * (y-2) + 1 * 1 * (x-3) - ((-1)(-1)(x-3))$$

$$-(1 * 1 * (z-1) - (1 * 1 * (y-2))) = -z + 1 - y + 2 + x - 3 - x + 3 - z + 1 - y + 2 =$$

$$\eta = -2y - 2z + 6;$$

a) Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano η y que pasa por P.

$$\text{La recta será } \begin{cases} P(6, 3, 1) \\ \text{vector director } \vec{v}(0, -2, -2) \end{cases} \quad r = \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

b) determinar la distancia entre el plano η y el punto P.

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \eta) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \eta) = \frac{|0 * 6 - 2(3) - 2 * 1 + 6|}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{4 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{8}}$$

5. Ejercicio

Una empresa produce anillas para identificación de tortugas marinas en tres fábricas A, B y C.

El volumen de producción diario es de 500, 1000 y 2000 unidades respectivamente. Se sabe que la fracción de producción defectuosa de las tres fábricas es de 0.005, 0.008, 0.010 respectivamente

a) Calcular la probabilidad de que al tomar una anilla al azar ésta sea defectuosa.

b) Si se selecciona una anilla al azar y es defectuosa, calcular la probabilidad de que venga de la fábrica C.

Solución

a) Calcular la probabilidad de que al tomar una anilla al azar ésta sea defectuosa.

Segun el teorema de probabilidad total La probabilidad de que la anilla sea defectuosa

$$P_{\text{Defectuosa}} = P_{\text{DefectuosaA}} + P_{\text{DefectuosaB}} + P_{\text{DefectuosaC}};$$

$$P_{\text{Defectuosa}} = 500 * 0,005 + 1000 * 0,008 + 2000 * 0,010 = 2,5 + 8 + 20 = 30,5$$

$$P_{\text{Defectuosa}} = \text{del total 3500 anillas producidas en el dia puede haber defectuoso } 30,5$$

$$\text{la Probabilidad de coger una defectuosa} = P_{\text{Defectuosa}} = \frac{30,5}{3500} = 0,0087; P_{\text{Defectuosa}} = 0,87\%$$

b) Si se selecciona una anilla al azar y es defectuosa, calcular la probabilidad de que venga de la fábrica C.

$$P(\text{Defectuo}|fábrica C) = \frac{P(C|\text{defectuosa})}{P(A|\text{defectuosa}) + P(B|\text{defectuosa}) + P(C|\text{defectuosa})} =$$

$$P(\text{Defectuo}|fábrica C) = \frac{2000 * 0,01}{500 * 0,005 + 1000 * 0,008 + 2000 * 0,01} = \frac{20}{30,5} = 0,65574 = 65,574\%$$

6. Ejercicio

Se considera un sistema de ecuaciones lineales en funcion del parametro m

$$\begin{cases} x + my + z = m - 1 \\ (m-1)x + y + 2mz = m + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discutir segun los valores de m.

b) resolver para m = 0.

Solución

a) Discutir segun los valores de m.

$$\begin{cases} x + my + z = m - 1 \\ (m-1)x + y + 2mz = m + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +1 & +1 & +1 & 1 \\ +1 & +m & +1 & m-1 \\ (m-1) & +1 & +2m & m+1 \end{array} \right) \text{ para que quede una estructura escalonada } \begin{matrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +1 & +1 & +1 & 1 \\ +1 & +m & +1 & m-1 \\ (m-1) & +1 & +2m & m+1 \end{array} \right) \begin{matrix} E_1 \\ E_2 = E_2 - E_1 \\ E_3 = E_3 - E_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} +1 & +1 & +1 & 1 \\ 0 & +m-1 & 0 & m-2 \\ m & +0 & +(2m-1) & m \end{array} \right)$$

para m = 1 el sistema es incompatible m ≠ 1 es compatible determinado

Calculamos para m = 1 el sistema es incompatible

$$\begin{cases} x + my + z = m - 1 \\ (m-1)x + y + 2mz = m + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \text{ para } m = 1 \begin{cases} x + 1y + z = 1 - 1 \\ (1-1)x + y + 2 * 1z = 1 + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0x + y + 2 * 1 * z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ +y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 = E_3 - E_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ +y + 2z = 2 \\ 0 + 0 + 0 = 1 \end{cases}$$

b) resolver para $m = 0$.

$$\begin{cases} x + my + z = m - 1 \\ (m-1)x + y + 2mz = m + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \text{ para } m = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 0y + z = 0 - 1 \\ (0-1)x + y + 2 \cdot 0z = 0 + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 0 + z = -1 \\ -1x + y + 0z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = -1 \\ -x + y = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 = E_2 + E_1 \\ E_3 = E_3 - E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 0 + y = 2 \\ 0 + y + 0 = 1 \end{cases}$$

Sustituyo en las ecuaciones :

$$0 + y + 0 = 1, y = 1;$$

$$0 + y + z = 2; 1 + z = 2; z = 1;$$

$$x + z = 0; x + 1 = 0; x = -1;$$

$$\text{Para } m = 0; x = -2, y = 1, z = 1;$$

7. Ejercicio

Dada la funcion $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x - 1}}$

a) Calcular su dominio

b) Calcular los intervalos de concavidad y convexidad de $(f(x))^2$.

Solución

a) Calcular su dominio $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x - 1}}$

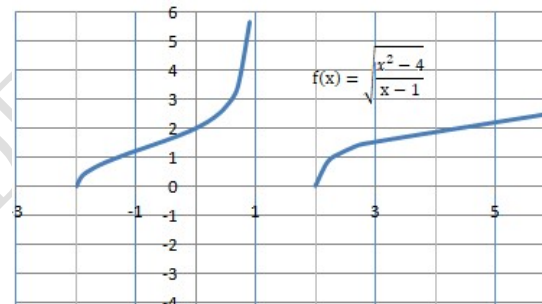
La funcion existe para todos los valores

positivos de $\frac{x^2 - 4}{x - 1} > 0$; $(-2) < x < 1$

Es indeterminado para $x = 1$

Existe para valores mayores de 2; $x > 2$

Dominio $(-2, 1) \cup (2, \infty)$



b) Calcular los intervalos de concavidad y convexidad de $(f(x))^2$.

$$g(x) = (f(x))^2 = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

Una funcion es concava si $f''(x) > 0$

Una funcion es convexa si $f''(x) < 0$

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

$$g'(x) = \frac{2x(x-1) - 1(x^2 - 4)}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$$

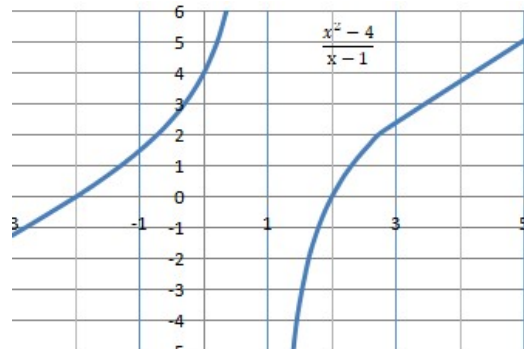
$$g''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1) \cdot 1(x^2 - 2x + 4)}{(x-1)^4}$$

$$g''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1) \cdot 1(x^2 - 2x + 4)}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x-1) - 2 \cdot 1(x^2 - 2x + 4)}{(x-1)^3}$$

$$g''(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 4x - 8}{(x-1)^3} = \frac{-6}{(x-1)^3};$$

Para $x = 0$; $g''(0) = \frac{-6}{(0-1)^3} = \frac{-6}{-1} = 6 > 0$ Concava de $-\infty$ a $1 \Rightarrow (-\infty, 1)$

Para $x = 3$; $g''(3) = \frac{-6}{(3-1)^3} = \frac{-6}{8} < 0$ Convexa 1 a $+\infty \Rightarrow (1, +\infty)$



8. Ejercicio

Considera la función; $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$

a) Calcular sus asíntotas

b) Calcular su primitiva

Solución

Vemos para que valores la función es indeterminada $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$

será indeterminada para; $x^2 + x - 2$;

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}; x = \frac{-1 + 3}{2} = 1; x = \frac{-1 - 3}{2} = -2$$

la función es discontinua en $x = 1$ y $x = -2$;

1. – Asíntotas verticales:

$$\text{vemos } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = \frac{1^2}{1^2 + 1 - 2} = \frac{1}{0} = \infty \text{ Asíntota vertical en } x = 1;$$

$$\text{vemos } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(-2)^2}{x^2 + x - 2} = \frac{4}{(-2)^2 + (-2) - 2} = \frac{4}{0} = \infty \text{ Asíntota vertical en } x = -2;$$

1. – Asíntotas horizontales:

$$\text{vemos } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = \frac{\infty}{\infty^2 + \infty - 2} = \frac{\infty}{\infty}; \text{divido numerador y denominador por } x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}} = \frac{1}{1 + 0 - 0} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\text{vemos } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = \frac{+\infty}{(-\infty)^2 - \infty - 2} = \frac{\infty}{\infty}; \text{divido numerador y denominador por } x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{-\infty} - \frac{2}{-\infty}} = \frac{1}{1 + 0 - 0} = \frac{1}{1} = 1;$$

Tiene asíntota horizontal por la izquierda y derecha. Al tener asíntota Horizontal no tiene oblicua

b) Calcular su primitiva $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$

Resolvemos por fracciones parciales; Factorizamos

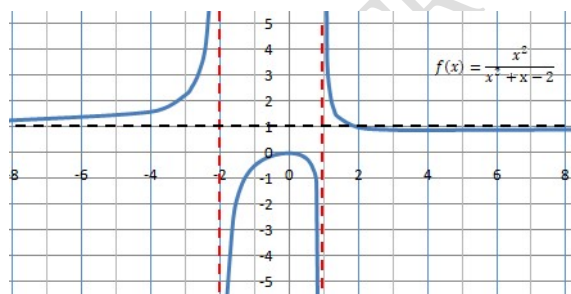
$$\frac{x^2}{x^2 + x - 2} = \frac{x^2}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x + 2)} = \frac{A(x + 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)}$$

$$\frac{x^2}{x^2 + x - 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} \Rightarrow x^2 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

Calculamos los valores de A y B para las raíces del denominador ;

$$\text{Para } x = 1; x^2 = A(x + 2) + B(x - 1) \Rightarrow A(1 + 2) + B(1 - 1) \Rightarrow 1^2 = A \cdot 3; A = \frac{1}{3}$$

$$\text{Para } x = -2; (-2)^2 = A((-2) + 2) + B(-2 - 1) \Rightarrow 4 = -3B; B = -\frac{4}{3};$$



$$\int f(x)dx = \int \frac{x^2}{x^2+x-2} d(x) = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} d(x) - \frac{4}{3} \int \frac{1}{x+2} d(x)$$

$$\int f(x)dx = \int \frac{x^2}{x^2+x-2} d(x) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{1}{x-1} \right) - \frac{4}{3} \ln \frac{1}{x+2} + C$$

9. Ejercicio

Dado el punto P y la recta r definidos por:

$$P = (2,1,3) \quad r = \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases}$$

a) Determinar el plano que contiene al punto y a la recta

b) Determinar la distancia del punto a la recta

Solución

a) Determinar el plano que contiene al punto y a la recta

Para hallar la ecuación del plano η necesito

$$\begin{cases} \text{Un Punto P del plano que ya me dan } (2,1,3) \\ \vec{d}_r = \text{vector director de la recta } (1,1,-1) \\ \vec{PP}_r = \text{otro vector director ej el que pase por P y un punto de la recta} \end{cases}$$

$\vec{PP}_r$ = sera otro vector paralelo al plano

$P(2,1,3)$, P_r (punto de paso de la recta) Punto de la recta lo hallo haciendo $\lambda = 0$; $P_r(1,2,3)$

$$\vec{PP}_r = (1-2, 2-1, 3-3) = (-1, 1, 0)$$

$$\eta = \begin{cases} P(2,1,3) \\ \vec{d}_r = (1,1,-1) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-2 \\ 1 & 1 & y-1 \\ -1 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0; = (z-3) + (y-1) - (-x+2) - (-z+3) \\ \vec{d}_r = (-1,1,0) \end{cases}$$

$$z-3+y-1+x-2+z-3 = x+y+2z-9=0$$

$$\eta = x+y+2z-9=0$$

b) Determinar la distancia del punto a la recta

Lo calculamos por el metodo del paralelogramo

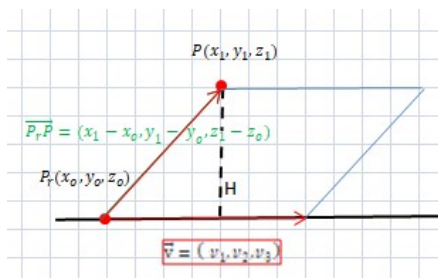
$$\text{Distancia } (P, r) = \frac{\text{modulo producto vectorial } |\vec{PP}_r * \vec{d}_r|}{\text{modulo } |\vec{d}_r|};$$

$$\vec{PP}_r = (-1, 1, 0); \vec{d}_r = (1, 1, -1)$$

$$\text{Producto vectorial } \vec{PP}_r * \vec{d}_r$$

$$\vec{PP}_r * \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{k} - \vec{k} - \vec{j} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} = (-1, -1, -2)$$

$$\text{Distancia } (P, r) = \frac{|\vec{PP}_r * \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2};$$



10. Ejercicio

Se dispone de un test para el diagnóstico del Alzheimer. El test se ha probado en una muestra aleatoria de 450 pacientes diagnosticados con Alzheimer y otra muestra aleatoria de 500 pacientes que no presentan síntomas. Los resultados del ensayo son:

		Padecen Alzheimer	
		Si	No
Resultado del test			
	Positivo	436	5
	Negativo	14	495

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un sujeto esté enfermo y haya dado negativo en el test?
- b) Sabiendo que un sujeto ha dado positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que este enfermo?
- c) Porque son diferentes ambos valores

Solución

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un sujeto esté enfermo y haya dado negativo en el test?

$$P(\text{sujeto enfermo y ha dado negativo}) = \frac{\text{Negativos 14}}{\text{enfermos 450}} = 0,03 \Rightarrow 3\%$$

- b) Sabiendo que un sujeto ha dado positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que este enfermo?

$$P(\text{positivo en el test y este enfermo}) = \frac{\text{Enfermos 436 positivo en test}}{\text{Total de positivos en test 441}} = 0,989 \Rightarrow 98,9\%$$

3 Examen 2020 C

1. Ejercicio

- a) Hallar la distancia del punto $P(2,1,-2)$ al plano η $2x - y + 2z = 5$
 b) Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(4,1,1)$ y $P_3(-2,1,2)$
 c) Halle el volumen del tetraedro con vértice en $Q_1(1,0,0)$, $Q_2(0,1,0)$, $Q_3(0,0,1)$ y $Q_4(1,1,1)$

Solución

- a) Hallar la distancia del punto $P(2,1,-2)$ al plano $2x - y + 2z = 5$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \eta) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \eta) = \frac{|2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|4 - 1 - 4 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|-6|}{\sqrt{9}}$$

$$\text{Como es en valor absoluto } \frac{|-6|}{\sqrt{9}} \Rightarrow \frac{6}{3} = 2;$$

- b) Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(4,1,1)$ y $P_3(-2,1,2)$

Para hallar la ecuación del plano necesito $\begin{cases} P \text{ Un Punto } P \text{ del plano } (1,3,-1) \\ \overrightarrow{P_1P_2} = \text{vector director del plano} \\ \overrightarrow{P_1P_3} = \text{otro vector director del plano} \end{cases}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = ((4-1), (1-3), (1-(-1))) = (3, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (((-2-1), (1-3), (2-(-1))) = (-3, -2, 3)$$

$$\eta = \begin{cases} P(1,3,-1) \\ \overrightarrow{P_1P_2} = (3, -2, 2) \\ \overrightarrow{P_1P_3} = (-3, -2, 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -3 & x-1 \\ -2 & -2 & y-3 \\ 2 & 3 & z-(-1) \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x-1 \\ -2 & -2 & y-3 \\ 2 & 3 & z-(-1) \end{vmatrix} = -6(z+1) - 6(y-3) - 6(x-1) - (-4(x-1) + 6(z+1) + 9(y-3))$$

$$-6z - 6 - 6y + 18 - 6x + 6 + 4x - 4 - 6z - 6 - 9y + 35 = -2x - 15y - 12z + 35;$$

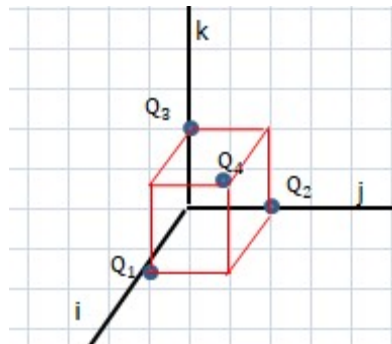
$$\eta = -2x - 15y - 12z + 35 = 0; \quad \eta, \quad -2x - 15y - 12z = -35$$

- c) Halle el volumen del tetraedro con vértice en

$$Q_1(1,0,0), Q_2(0,1,0), Q_3(0,0,1) \text{ y } Q_4(1,1,1)$$

$$\text{Area de la base} = 1 \cdot 1 = 1;$$

$$\text{Volumen} = \text{Area de la base} \cdot \text{altura} = 1 \cdot 1 = 1;$$



2. Ejercicio

a) Hallar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 2\cos 2x}{3 \sin 3x}$

b) Hallar los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{3e^x}{x^2}$

c) Halle $\int (9x^2 + 2) \ln x \, dx$.

Solución

a) Hallar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 2\cos 2x}{3 \sin 3x}$ límite de la función seno y coseno no existe en el infinito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 2\cos 2x}{3 \sin 3x} \text{ Aplico L'Hopital } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 2\cos 2x}{3 \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\sin 2x}{9\cos 3x}$$

dado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\cos x} = 0$

Lo transform $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\sin 2x}{9\cos 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\sin 2x}{1} \cdot \frac{1}{9\cos 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \cdot 4\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{3x \cdot 9\cos 3x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x \sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{27x \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{27x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\cos 3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{27x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\cos 3x} = \frac{8}{27} \cdot 0 \cdot 0 = 0;$$

b) Hallar los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{3e^x}{x^2}$

Dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{3e^x}{x^2}; f'(x) = \frac{3e^x \cdot x^2 - 2x \cdot 3e^x}{x^4} = 0;$$

$$3e^x \cdot x^2 - 2x \cdot 3e^x = 0; x e^x (3x - 6) = 0; \Rightarrow 3x - 6 = 0;$$

$x = 2$ habrá un mínimo o un máximo

Lo averiguo sin necesidad de hallar la segunda derivada.

Hallo $f(x)$ para un valor anterior y posterior a 2

1	8,154845
2	5,541792
3	6,695179

Por lo que en $x = 2$ habrá un mínimo

c) Halle $\int (9x^2 + 2) \ln x \, dx$ para calcularlo hago una integración por partes

Aplicamos la fórmula $\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$

$$u = \ln x; du = \frac{1}{x} dx$$

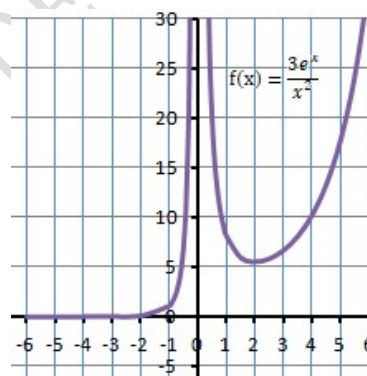
$$dv = 9x^2 + 2; v = \frac{9x^3}{3} + 2x$$

$$\int (9x^2 + 2) \ln x; \text{ Sustituyo en la fórmula } \Rightarrow (\ln x) \left(\frac{9x^3}{3} + 2x \right) - \int \left(\frac{9x^3}{3} + 2x \right) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$(\ln x) \left(\frac{9x^3}{3} + 2x \right) - \int \frac{3x^3}{x} + 2 \frac{x}{x} dx = (\ln x) \left(\frac{9x^3}{3} + 2x \right) - \int 3x^2 + 2 dx =$$

$$(\ln x) \left(\frac{9x^3}{3} + 2x \right) - \frac{3x^3}{3} + 2x + C =$$

$$\int (9x^2 + 2) \ln x = (\ln x) \left(\frac{9x^3}{3} + 2x \right) - x^3 + 2x + C$$



3. Ejercicio

a) Hallar una matriz B tal que $B \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Discua la resolución del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ según los valores de λ

c) resuelva el sistema del apartado anterior para $\lambda = 1$.

Solución

a) Hallar una matriz B tal que $B \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a + 1c & 7b + 1d \\ 6a + 1c & 6b + 1d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 7a + 1c = 1 \\ 6a + 1c = 0 \end{cases} \text{ restamos } a = 1; \text{ sustituimos } c = -6$$

$$\begin{cases} 7b + 1d = 0 \\ 6b + 1d = 1 \end{cases} \text{ restamos } b = -1; \text{ sustituimos } d = 7$$

La matriz B será $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$

b) Discua la resolución del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ según los valores de λ

$$\begin{pmatrix} x & 0 & \lambda z \\ 0 & 2y & z \\ x & 2y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & 0 & \lambda z & 2 \\ 0 & 2y & z & 1 \\ x & 2y & 0 & 5 \end{array} \right) \text{ intercambiamos fila } \left(\begin{array}{ccc|c} x & 2y & 0 & 5 \\ 0 & 2y & z & 1 \\ x & 0 & \lambda z & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3 = E_3 - E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3 = E_3 + E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 & -2 \end{array} \right)$$

$(\lambda + 1)z = -2$; $z = -\frac{2}{\lambda + 1}$; Es sistema es indeterminado para $\lambda = -1$;

$\lambda \neq -1$ el sistema es compatible determinado

c) resuelva el sistema del apartado anterior para $\lambda = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 & -2 \end{array} \right) \text{ para } \lambda = 1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$2z = -2$; $z = -1$;

Sustituyo en la segunda $2y + z = 1$; $2y - 1 = 1$; $y = 1$;

Sustituyo en la primera $1x + 2y = 5$; $x + 2 = 5$; $x = 3$;

Comprobacion $\begin{cases} x + \lambda z = 2 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \text{ para } \lambda = 1 \begin{cases} x + z = 2 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \text{ comprobamos para los valores de } x, y, z$

$$\begin{cases} 3 - 1 = 2 \\ 2 - 1 = 1 \\ 3 + 2 = 5 \end{cases} \text{ se cumple}$$

4. Ejercicio

- a) Halle la probabilidad de obtener al menos dos caras en cuatro lanzamientos de una moneda equilibrada.
- b) Si X es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros 3 y 0,2 (es decir, $\text{Bin}(3, 0,2)$) halle la probabilidad de que $X = 2$.
- c) Si X es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros 100 y 0,2 (es decir, $\text{Bin}(100, 0,2)$), utilice la aproximación normal para hallar la probabilidad de que X sea mayor o igual que 50 .

Solución

- a) Halle la probabilidad de obtener al menos dos caras en cuatro lanzamientos de una moneda
Al lanzarla 4 veces puede salir: XXXX, XXXO, XXOX, XOOX, OXXX, **OOOO, OOOX, OOXO, OXOO, XOOO**

$$P(\text{lanzar cuatro veces una moneda salgan al menos 2 caras}) = \frac{5}{10} = 0,5$$

- b) Si X es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros 3 y 0,2 (es decir, $\text{Bin}(3, 0,2)$) halle la probabilidad de que $X = 2$.

Formula de la probabilidad Binomial es $P(X = r) = \binom{n}{r} p^r * q^{n-r}$

X = Variable, numero de veces que sucede el evento definido

r = valor que toma la variable

n = numero de veces que se repite el evento

p = Probabilidad de que suceda X

q = Probabilidad de que no suceda X

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} 0,2^2 * 0,8^{3-2} = \frac{3!}{2! * (3-2)!} 0,2^2 * 0,8^1 = \frac{3 * 2 * 1}{(2 * 1) * 1} 0,2^2 * 0,8^1$$

$$P(X = 2) = 3 * 0,04 * 0,8 = 0,096; P(X = 2) = 9,6\%$$

- c) Si X es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros 100 y 0,2 (es decir, $\text{Bin}(100, 0,2)$), utilice la aproximación normal para hallar la probabilidad de que X sea mayor o igual que 40 .

la distribucion normal estandarizada $N(np, \sqrt{npq})$; media $\mu = np$; desviacion tipica $\sigma = \sqrt{npq}$;

para poder usar la tabla tengo que pasar mis datos a la distribucion normal para hallar Z

$$N(np, \sqrt{npq}) \Rightarrow N(100 * 0,2, \sqrt{100 * 0,2 * 0,8}) = N(50, 4)$$

Tengo probabilidad de X y quiero hallar Probabilidad de Z

$$Z = \frac{40 - 50}{4}; Z = -2,5$$

la $P(Z \geq -z)$ Esto es igual al area que queda por debajo de $Z \leq 2,5$;

$$P(Z \geq -z) = P(Z \leq z) = 0,9938$$

5. Ejercicio

a) Halle la ecuación del plano perpendicular al vector $(1,1,1)$ que contiene al punto $P(7,1,-1)$

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x + 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases}; r_2 \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \end{cases}$

c) Halle la distancia del origen a la recta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z-1}{1}$$

Solución

El vector normal del plano $\vec{u}(1,1,1)$

Por el punto de paso $P(7,1,-1)$.

elegimos un punto $X(x_0, y_0, z_0)$

cualquiera del plano y tendremos

el vector $\overrightarrow{PX}(x_0 - 7, y_0 - 1, z_0 - (-1))$

Si los dos vectores $\overrightarrow{PX}$ y $\vec{u}$ son perpendiculares, su producto escalar será 0

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{PX} = 0; (1,1,1) \cdot (x_0 - 7, y_0 - 1, z_0 + 1) = 0$$

$$1(x_0 - 7) + 1(y_0 - 1) + 1(z_0 + 1) = 0; x_0 - 7 + y_0 - 1 + z_0 + 1 = 0;$$

$$x_0 + y_0 + z_0 - 7 = 0; \text{ como el punto del plano puede ser cualquiera } \underline{x + y + z - 7 = 0};$$

Otra forma de hacerlo sería con la ecuación implícita del plano $ax + by + cz + d = 0$

(a, b, c) son las coordenadas del vector normal en nuestro caso $(1,1,1)$

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ Sustituyo y tendré } x + y + z + d = 0;$$

$$\text{como tengo un punto del plano } P(7,1,-1) \text{ sustituyo } 7 + 1 - 1 + d = 0; d = -7$$

El plano pedido será $x + y + z - 7 = 0$

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x + 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases}; r_2 \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \end{cases}$

Hallamos el vector director de las dos rectas calculando dos puntos por los que pasa la recta

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \text{ para } x = 0; \begin{cases} 0 + 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases} y = \frac{1}{2}; z = 3; \text{ Punto } A(0, \frac{1}{2}, 3)$$

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \text{ para } y = 0; \begin{cases} x + 0 = 1 \\ z = 3 \end{cases} x = 1; z = 3; \text{ Punto } B(1, 0, 3)$$

$$\text{vector director } \overrightarrow{AB} = (1, -\frac{1}{2}, 0)$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y - z = 3 \end{cases} \text{ para } x = 0; \begin{cases} 0 + 2y = 1 \\ y - z = 3 \end{cases} y = \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - z = 3 \quad z = -\frac{5}{2}; \text{ Punto } A(0, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y - z = 3 \end{cases} \text{ para } y = 0; \begin{cases} x + 0 = 1 \\ -z = 3 \end{cases} x = 1; z = -3; \text{ Punto } B(1, 0, -3)$$

$$\text{vector director } \overrightarrow{AB} = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

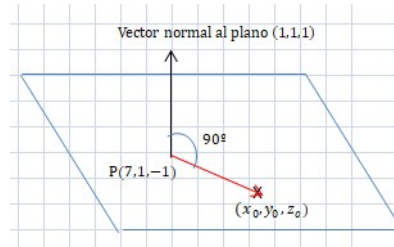
$$\text{Posiciones de las rectas segun los vectores directores } \overrightarrow{dr_2} = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \quad \overrightarrow{dr_1} = (1, -\frac{1}{2}, 0)$$

Como no son proporcionales no son rectas paralelas.

Comprobar si se cumple que se corten;

$$\text{Se cumplirá que el producto de los vectores } \overrightarrow{dr_1} \cdot \overrightarrow{dr_2} \cdot \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = 0;$$

$$\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = P_{r_2} - P_{r_1} = ((1,0,-3) - (1,0,3) = (0,0,-6); \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (0,0,-6)$$



$$\overrightarrow{dr_1} * \overrightarrow{dr_2} * \overrightarrow{P_{r_1} P_{r_2}} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = +3 - 3 = 0; \text{ se cortan en un punto}$$

Si se cortan en un punto habra un punto comun

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 1\lambda \\ y = 0 - \frac{1}{2}\lambda \\ z = 3 + 0\lambda \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + 1\mu \\ y = 0 - \frac{1}{2}\mu \\ z = -3 - \frac{1}{2}\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 1\lambda = 1 + 1\mu \\ y = 0 - \frac{1}{2}\lambda = 0 - \frac{1}{2}\mu \\ z = 3 + 0\lambda = -3 - \frac{1}{2}\mu \end{cases} \begin{cases} x = 1 + 1\lambda = 1 + 1\mu \\ y = -\frac{1}{2}\lambda = -\frac{1}{2}\mu \\ z = 3 + = -3 - \frac{1}{2}\mu \end{cases}$$

$$3 + = -3 - \frac{1}{2}\mu; \mu = -12,$$

$$0 - \frac{1}{2}\lambda = 0 - \frac{1}{2}\mu \text{ sustituyo } 0 - \frac{1}{2}\lambda = -\frac{1}{2}(-12); \lambda = -12;$$

$$\text{para } \lambda = -12 \begin{cases} x = 1 + 1\lambda \\ y = 0 - \frac{1}{2}\lambda \\ z = 3 + 0\lambda \end{cases} \begin{cases} x = 1 - 12 = -11 \\ y = 0 - \frac{1}{2}(-12) = 6 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\text{para } \mu = -12 \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + 1\mu \\ y = 0 - \frac{1}{2}\mu \\ z = -3 - \frac{1}{2}\mu \end{cases} \begin{cases} x = 1 + 1(-12) = -11 \\ y = 0 - \frac{1}{2}(-12) = 6 \\ z = -3 - \frac{1}{2}(-12) = 3 \end{cases}$$

Punto de cruce $(-11, 6, 3)$

6. Ejercicio

a) Halle el dominio de la funcion $f(x) = [\ln(x+3)]^2$

b) Determine si f tienen extremos absolutos o extremos relativos y en su caso obtengalos

c) Halle $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln(x+3)]^2}{x^2 + 3x + 7}$ y $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{[\ln(x+3)]^2}{x^2 + 3x + 7}$

Solución

a) Halle el dominio de la funcion

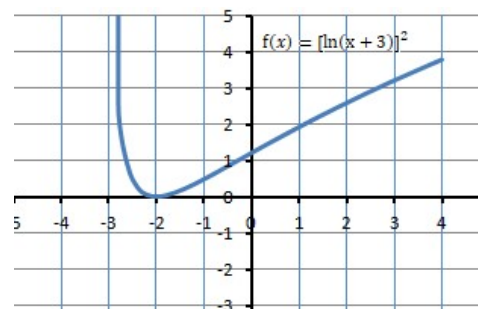
$$f(x) = [\ln(x+3)]^2; \text{ Dominio } (-3, \infty)$$

b) Determine si f tienen extremos absolutos o extremos relativos y en su caso obtengalos

Extremos absolutos no tiene maximos ni

minimos absolutos

Extremos relativos



$$f(x) = [\ln(x+3)]^2; f'(x) = 2 * \ln(x+3) * \frac{1}{x+3} = 0;$$

para que sea 0 $\ln(x+3) = 0 \Rightarrow x = -2$;

si calculo valores antes y despues de -2 veo que este punto es un minimo

-2,8	2,5902904
-2	0
-1	0,480453

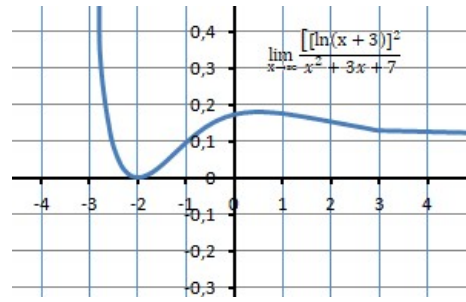
c) Halle $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln(x+3)]^2}{x^2 + 3x + 7}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(x+3)]^2}{x^2 + 3x + 7}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln(x+3)]^2}{x^2 + 3x + 7}$ = si sustituyo es indeterminado

si aplico L'hôpital $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(x+3) * \frac{1}{x+3}}{2x+3}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(x+3)}{2x^2 + 9x + 9} = \text{derivo de nuevo } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{1}{x+3}}{x+9}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(x+9)(x+3)} = \frac{2}{\infty} = 0;$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(x+3)]^2}{x^2 + 3x + 7}$ sustituyo $\frac{[\ln(0+3)]^2}{0^2 + 3*0 + 7} = \frac{[\ln(3)]^2}{7} = 0,1724$



7. Ejercicio

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ \lambda & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Halle el determinante de A

b) Halle el valor o valores de λ para los que A no tiene inversa

c) Halle la inversa de A para $\lambda = 1$;

Solución

a) Halle el determinante de A

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ \lambda & 2 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 12\lambda + 12 + 10\lambda + 18 - 12 = 3 - 2\lambda$

b) Halle el valor o valores de λ para los que A no tiene inversa

La matriz Inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t$; para que exista $|A| \neq 0$;

dado que $|A| = 3 - 2\lambda \neq 0$; $\lambda \neq \frac{3}{2}$

c) Halle la inversa de A para $\lambda = 1$;

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$

La adjunta $A^* = \begin{pmatrix} -27 & -3 & 11 \\ 10 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; (A^*)^t = \begin{pmatrix} -27 & 10 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 11 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz Inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -27 & 10 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 11 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 10 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 11 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Prueba, se ha de cumplir $A * A^{-1} = I$;

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -27 & 10 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 11 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 + 6 + 22 & 10 - 2 - 8 & -2 + 0 + 2 \\ -81 + 15 + 66 & 30 - 5 - 24 & -6 + 6 \\ -27 - 6 + 33 & 10 + 2 - 12 & -2 + 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ correcto}$

8. Ejercicio

En un espacio de probabilidades los sucesos A, B, C tienen las probabilidades siguientes:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}; P(A|B) = \frac{1}{4}; P(A|C) = \frac{1}{2}; P(B|C) = \frac{1}{4}; P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{16}$$

a) Son A y C sucesos independientes? . Por que?

b) Halle $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$

c) Halle $P(B|A)$ ¿ Son A y B sucesos independientes ¿ por que?;

Solución

a) Son A y C sucesos independientes? . Por que?

*Dos sucesos son independientes si : $P(A|B) = P(A)$; $P(B|A) = P(B)$; $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$*

$$P(A|C) = \frac{1}{2} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}; P(A \cap C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} = \frac{1}{8};$$

$$P(A \cap C) = P(A) * P(C) \text{ comprobamos } \Rightarrow \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} * \frac{1}{4} \text{ luego no son sucesos independientes}$$

b) Halle $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$

$$P(A|B) = \frac{1}{4} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; P(A \cap B) = \frac{1}{4} * P(B) = \frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \frac{1}{16}; P(A \cap B) = \frac{1}{16}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{2}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}; P(A \cup B) = \frac{7}{16}$$

c) Halle $P(B|A)$ ¿ Son A y B sucesos independientes ¿ por que?;

$$P(A|B) = \frac{1}{4} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; P(A \cap B) = \frac{1}{4} * P(B) = \frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \frac{1}{16}; P(A \cap B) = \frac{1}{16}$$

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B) \text{ comprobamos } \Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{4} * \frac{1}{4} \text{ luego son sucesos independientes}$$

4 Examen 2020 D

1. Ejercicio

En una tienda de vinos se venden dos marcas A y B, cuyos precios respectivos son 5 euros la botella de la marca A y 8 euros la botella de la marca B. La tienda oferta una rebaja del 20% en el precio de la marca A y del 15% en el precio de la marca B a los clientes que compren al menos una botella de cada marca.

Un cliente acepta la oferta y se lleva el doble de botellas de la marca B que de la marca A. Al salir calcula que si hubiese comprado el mismo número de botellas, pero el doble de la A que de la B se habría ahorrado 8.4 euros. ¿Cuántas botellas compró de cada marca? ¿Cuánto pagó?

Solución

lleva doble numero de botellas de B que de A ; Precio = $5 * 0,80X + 8 * 0,85(2X) = y$

$$4X + 13,6X = Y; \quad 17,6X = Y$$

Si hubiera llevado lleva doble numero de botellas de A que de B ;

$$\text{Precio} = 5 * 0,80(2X) + 8 * 0,85X = y - 8,4; \quad 8X + 6,8X = y - 8,4; \quad 14,8 = y - 8,4;$$

resuelvo las dos ecuaciones $\begin{cases} 17,6X = Y \\ 14,8X = y - 8,4 \end{cases}$ Resto la segunda de la primera $2,8X = 8,4; X = 3$

$$\text{Prueba } \begin{cases} 17,6X = Y \\ 14,8X = y - 8,4 \end{cases} \begin{cases} 17,6 * 3 = 52,8 \\ 14,8 * 3 = 44,4 \end{cases} \text{ Resto la primera de la segunda} = 8,4$$

2. Ejercicio

Dados los puntos A(3, -1, 2), B(5,1,1) y C (2, 2,-3) se pide

a) hallar el volumen del prisma que tiene por vertice los tres puntos y el origen de coordenadas

b) Obtener la ecuacion del plano que contiene al punto A y es perpendicular al vector $\overrightarrow{BC}$

c) Calcular las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AC}$

Solución

a) hallar el volumen del prisma que tiene por vertice los tres puntos y el origen de coordenadas

El area del triangulo ABC es la mitad del area del paralelogramo $\frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}}{2}$

$$\overrightarrow{AB} = ((5 - 3), (1 - (-1)), (1 - 2)) = (2, 2, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = ((2 - 3), (2 - (-1)), (-3 - 2)) = (-1, 3, -5)$$

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} k = -7i - 11j + 8k$$

$$\text{Area} = \frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\sqrt{(-7)^2 + (-11)^2 + (8)^2}}{2} = \frac{\sqrt{49 + 121 + 64}}{2} = \frac{\sqrt{234}}{2} = \frac{15,3}{2} = 7,65$$

Distancia del certice O al plano ABC

Hallamos el plano que contiene los tres puntos A, B, C

$$\lambda \begin{pmatrix} P(B(5,1,1)) \\ \overrightarrow{AB} = (2,2,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,3,-5) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & x-5 \\ 2 & 3 & y-1 \\ -1 & -5 & z-1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & x-5 \\ 2 & 3 & y-1 \\ -1 & -5 & z-1 \end{vmatrix} = 6(z-1) - 10(x-5) + 1(y-1) + 3(x-5) + 2(z-1) + 10(y-1) =$$

$$6z - 6 - 10x + 50 + y - 1 + 3x - 15 + 2z - 2 + 10y - 10 = -7x + 11y + 8z + 16 = 0$$

$$\lambda = -7x + 11y + 8z + 16$$

Distancia de un punto P(0,0,0) y el plano $\lambda = -7x + 11y + 8z + 16 = 0$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \lambda) = \frac{|-7 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 16|}{\sqrt{(-7)^2 + 11^2 + 8^2}} = \frac{16}{\sqrt{234}} = 1,05$$

$$\text{Area de la piramide} = \frac{\text{Area de la base} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{7,65 \cdot 1,05}{3} = 2,678$$

c) Calcular las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AC}$

$$\text{Punto medio del segmento } \overline{AC} = \left(\frac{3+2}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{2-3}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right) = (2,5, 0,5, -0,5)$$

3. Ejercicio

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $-x^2 + 2x + 3$ y cuya pendiente es $m = -6$

b) Halla el área de la región limitada por la parábola anterior y la parábola $y = x^2 + 2x - 5$

Solución

$$y = -x^2 + 2x + 3; y' = -2x + 2;$$

$$\text{es la pendiente} \Rightarrow -2x + 2 = -6; x = 4;$$

el punto de la curva donde queremos

hallar la tangente de pendiente $m = -6$

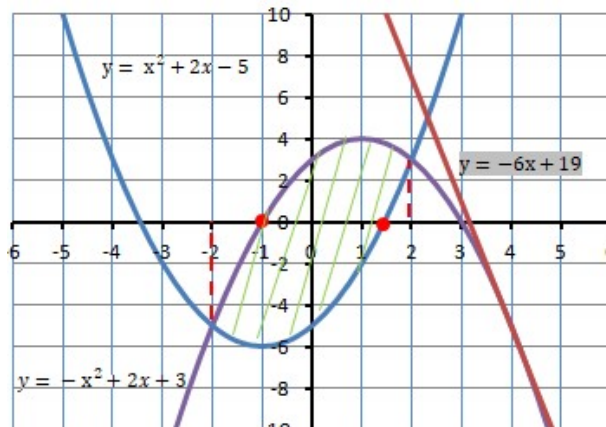
$$\text{es } x = 4; y = -4^2 + 2 \cdot 4 + 3 = -5;$$

$$\text{la recta tangente en } (4, -5) \text{ será } y = -6x + n;$$

como ha de pasar por el punto $(4, -5) \Rightarrow$

$$-5 = -6 \cdot 4 + n; n = 19;$$

la recta tangente será $y = -6x + 19$



b) Halla el área de la región limitada por la parábola anterior y la parábola $y = x^2 + 2x - 5$

$$\text{Hallamos los puntos de corte de las curvas } -x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x - 5; 2x^2 - 8 = 0; x = \pm 2$$

$$\text{Puntos de corte al eje X de la curva; } y = -x^2 + 2x + 3; y = 0; -x^2 + 2x + 3 = 0; x = -1 \text{ y } x = 3;$$

Hallamos segunda derivada $y'' = -2$; curva convexa cuernos hacia abajo

$$\text{Puntos de corte al eje X de la curva; } y = x^2 + 2x - 5; y = 0; x^2 + 2x - 5 = 0; x = \frac{-2 + \sqrt{24}}{2} = 1,5$$

$$x = \frac{-2 - \sqrt{24}}{2} = -3,5$$

Hallamos segunda derivada $y'' = 2$; curva convexa cuernos hacia arriba

El área pedida será la integral de las curvas entre $x = -2$ y $x = 2$

Hallamos el área por partes:

$$A = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 2x + 3)] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^2 = \left(-\frac{8}{3} + \frac{8}{2} + 6 \right) - \left(-\frac{-1}{3} + \frac{2}{2} - 3 \right) = \frac{-16 + 24 + 36}{6} - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = \frac{44}{6} - \frac{1 - 6}{3} = \frac{44}{6} - \frac{-5}{3} = \frac{44}{6} + \frac{10}{6} = \frac{54}{6} = 9;$$

$$B = \int_{-2}^{-1} [(-x^2 + 2x + 3)] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x \right]_{-2}^{-1} = \left(-\frac{-1}{3} + \frac{2}{2} - 3 \right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{2} - 6 \right) = \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{2} - 6 \right) = -\frac{5}{3} - \left(\frac{16 + 24 - 36}{6} \right) = -\frac{10}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{14}{6}$$

Área de la otra curva

$$C = \int_{1,5}^2 [(x^2 + 2x - 5)] dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 5x \right]_{1,5}^2 = \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{2} - 10 \right) - \left(\frac{3,375}{3} + \frac{4,5}{2} - 7,5 \right) = \left(\frac{16}{6} + \frac{24}{6} - \frac{60}{6} \right) - \left(\frac{6,75}{6} + \frac{13,5}{6} - \frac{45}{6} \right) = -\frac{20}{6} - \frac{24,75}{6} = -\frac{4,75}{6}$$

$$D = \int_{-2}^{1,5} [(x^2 + 2x - 5)]dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 5x \right]_{-2}^{1,5} = \left(\frac{3,375}{3} + \frac{4,5}{2} - 7,5 \right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{8}{2} + 10 \right) =$$

$$\left(\frac{6,75}{6} + \frac{13,5}{6} - \frac{45}{6} \right) - \left(\frac{-16}{6} + \frac{24}{6} + \frac{60}{6} \right) = -\frac{24,75}{6} - \frac{68}{6} = -\frac{92,75}{6}$$

$$Area = A - B - C + D = \frac{34}{6} - \frac{14}{6} - \frac{4,75}{6} + \frac{92,75}{6} = \frac{108}{6} = 18$$

4. Ejercicio

Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,2$

a) ¿Son A y B independientes?

b) Calcula $P(A \cup B)$, $P(A|B)$

c) Si C es otro suceso independiente con A y B ¿es incompatible con $(A \cup B)$?

Solución

a) ¿Son A y B independientes?

Dos sucesos son independientes si : $P(A|B) = P(A)$; $P(B|A) = P(B)$; $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

$P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3 \neq P(A \cap B)$; $0,5 * 0,3 = 0,15 \neq 0,2$ No son independientes

b) Calcula $P(A \cup B)$, $P(A|B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,3 - 0,2 = 0,6$;

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$$

dado que $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$; $P(\bar{A} \cap B) = 0,3 - 0,2 = 0,1$;

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

c) Si C es otro suceso incompatible con A y B ¿es incompatible con $(A \cup B)$?

Si C es incompatible con A y B (no puede suceder cuando ocurra A y B) luego tampoco podrá ocurrir con su union

5. Ejercicio

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

a) Calcular las matrices AB y BA

b) Determinar el rango de las matrices A y B

c) Tiene solución el sistema $BX = C$ responde de manera razonada

Solución

a) Calcular las matrices AB y BA

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2+3 & 0-4+2 \\ 2+4-6 & 0+8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & 2+0 & -1+0 \\ 1-4 & -2+8 & 1-4 \\ 3-4 & -6+8 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & +6 & -3 \\ -1 & +2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Determinar el rango de las matrices A y B

Rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ comprobamos si hay determinantes distintos de 0

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0; \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \text{ Rango de A} = 1$$

Rango de la matriz $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ comprobamos si hay determinantes distintos de 0

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2 \text{ Rango de } B = 2$$

c) Tiene solución el sistema $BX = C$ responde de manera razonada

BX ; $B_{3,2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $X_{1,1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ No se pueden multiplicar estas matrices pues

número de Columnas de la primera $\neq$ número de filas de la segunda ;

6. Ejercicio

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x + z = 3 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ se pide:

a) Determinar la posición relativa de las dos rectas

b) Comprobar que el punto $A(4, 2, -1)$ pertenece a la recta S y encontrar otro punto B de la misma recta que diste tres unidades del punto A .

Solución

a) Determinar la posición relativa de las dos rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + z = 3 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x + z = 3 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \text{ para } x = 0; \begin{cases} 0 + z = 3; \\ 2y - z = 1 \end{cases} \begin{cases} z = 3; \\ 2y - 3 = 1 \end{cases} y = 2; \text{ punto } C(0, 2, 3);$$

$$r \equiv \begin{cases} x + z = 3 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \text{ para } y = 0; \begin{cases} x + z = 3; \\ 2 \cdot 0 - z = 1 \end{cases} \begin{cases} x + z = 3; \\ z = -1; \end{cases} \begin{cases} x - 1 = 3; \\ 2y - z = 1 \end{cases} x = 4; \text{ punto } D(4, 0, -1);$$

$$r \equiv \begin{cases} x + z = 3 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \text{ vector director } (D - C) = 4 - 0, 0 - 2, -1 - 3 = \vec{r} = (4, -2, -4)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \text{ vector director de } s \vec{s} = (-2, 1, 2)$$

vemos si los vectores $\vec{s}$ $\vec{r}$ son proporcionales $-\frac{2}{4} = \frac{1}{-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$ luego las rectas son paralelas

b) Comprobar que el punto $A(4, 2, -1)$ pertenece a la recta S y encontrar otro punto B de la misma recta que diste tres unidades del punto A .

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \text{ vemos si el punto } A(4, 2, -1) \text{ sustituyo } \begin{cases} 4 = 2 - 2\lambda & 4 - 2 = -2\lambda; & \lambda = \frac{2}{-2} = -1 \\ 2 = 3 + \lambda & 2 - 3 = +\lambda; & \lambda = -1 \\ -1 = 1 + 2\lambda & -1 - 1 = +2\lambda; & \lambda = -1 \end{cases}$$

El punto A pertenece a la recta otro punto será (x, y, z)

$$\text{Distancia entre dos puntos} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$3 = \sqrt{(4 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2 + ((-1) - z_1)^2}; 9 = (4 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2 + ((-1) - z_1)^2$$

$$\text{si pertenece a la recta } s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \text{ puedo sustituir } x, y, z \text{ por su valor}$$

$$; 9 = (4 - (2 - 2\lambda))^2 + (2 - (3 + \lambda))^2 + ((-1) - (1 + 2\lambda))^2; 9 = (2 + 2\lambda)^2 + (-1 - \lambda)^2 + (-2 - 2\lambda)^2$$

$$9 = 4 + 4\lambda^2 + 8\lambda + 1 + \lambda^2 + 2\lambda + 4 + 4\lambda^2 + 8\lambda = 9 + 9\lambda^2 + 18\lambda; 9\lambda^2 + 18\lambda = 0;$$

$$9(\lambda + 2) = 0; \lambda = -2; \begin{cases} x = 2 - 2(-2) = 6 \\ y = 3 + (-2) = 1 \\ z = 1 + 2(-2) = -3 \end{cases} \text{ El punto } B \text{ será } (6, 1, -3)$$

$$\text{prueba : Distancia} = \sqrt{(4 - 6)^2 + (2 - 1)^2 + ((-1) - (-3))^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (+2)^2} =$$

$$\sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3;$$

7. Ejercicio

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x < 0 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ Se pide:

- Determinar su asíntota horizontal
- Calcular la expresión de la función derivada $f'(x)$ en los puntos en que esté definida
- Calcular $\int_{-1}^4 f(x) dx$.

Solución

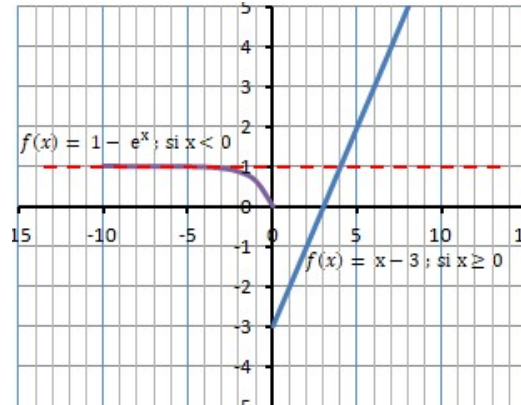
- Determinar su asíntota horizontal

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x < 0 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{vemos } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = (1 - e^{-\infty}) =$$

$$1 - \frac{1}{e^{\infty}} = 1 - 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = 1$$

la asíntota horizontal es $x = 1$



- Calcular la expresión de la función derivada $f'(x)$ en los puntos en que esté definida

$$f(x) = 1 - e^x \text{ si } x < 0; f'(x) = -e^x$$

$$f(x) = x - 3 \text{ si } x \geq 0; f'(x) = 1$$

- Calcular $\int_{-1}^4 f(x) dx$;

$$\int_{-1}^0 (1 - e^x) dx = [x - e^x]_{-1}^0 = (0 - e^0) - (-1 - e^{-1}) = -1 + 1 + \frac{1}{e} + C = \frac{1}{e} + C$$

$$\int_{-1}^0 (1 - e^x) dx = \frac{1}{e} + C$$

$$\int_0^4 (x - 3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^4 = \frac{4^2}{2} - 3 \cdot 4 - \left(\frac{0^2}{2} - 3 \cdot 0 \right) = \frac{16}{2} - 12 - 0 = -\frac{8}{2} = -4$$

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \frac{1}{e} - 4 + C$$

8. Ejercicio

El peso de los perros adultos de una cierta raza es una variable aleatoria de media 7,2 Kg

y una desviación típica de 0,6. Se pide:

- Calcular el porcentaje de perros que no superan los 6 kg de peso
- Calcular el peso mínimo de un perro sabiendo que se encuentra entre el 33% de los perros más pesados.

Solución

- Calcular el porcentaje de perros que no superan los 6 kg de peso

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}; Z = \frac{6 - 7,2}{0,6} = -2 \text{ miramos en la tabla, para } Z = -2 \text{ en la tabla } = -0,9772$$

como pide menores de 6 Kg el porcentaje será el 97,72%

- Calcular el peso mínimo de un perro sabiendo que se encuentra entre el 33% de los perros más pesados.

$$0,33 \text{ de } X \text{ es igual } 0,6293 \text{ de } Z; 0,6293 = \frac{X - 7,2}{0,6}; X = 7,57758 \text{ KG}$$