

Prueba de EBAU 2022

Contenido

1	EXAMEN 2022 A.....	2
2	EXAMEN 2022 B.....	11
3	EXAMEN 2022 C.....	20
4	EXAMEN 2022 D	29

1 Examen 2022 A

1. Ejercicio

Tres amigas Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores, todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcular cuántos seguidores tiene cada una

Solución

	Seguidores	
Sara	X	2000
Cristina	Y	5000
Jimena	Z	8000
	15000	

Enunciado:

Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores : $0,75 * Z = 3X$

$$\frac{X}{2} + \frac{1}{5}Y = \frac{1}{4}Z; \quad 10X + 4Y = 5Z;$$

$$\begin{cases} X + Y + Z = 15000 \\ 0,75Z = 3X \\ 10X + 4Y = 5Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X + Y + Z = 15000 \\ 0,75Z - 3X = 0 \\ 10X + 4Y - 5Z = 0 \end{cases}$$

$$0,75Z - 3X = 0; X = \frac{0,75}{3}Z; X = 0,25Z$$

$$\text{sustituimos } \begin{cases} 0,25Z + Y + Z = 15000 \\ 10 * 0,25Z + 4Y - 5Z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,25Z + Y = 15000; Y = 15000 - 1,25Z; \\ -2,5Z + 4Y = 0; Y = \frac{2,5Z}{4} \end{cases}$$

$$15000 - 1,25Z = \frac{2,5Z}{4}; 60000 = 7,5Z; Z = 8000 \text{ seguidores}$$

$$X = 0,25Z \text{ sustituimos } \Rightarrow X = 2000 \text{ seguidores}$$

$$Y = \frac{2,5Z}{4} = 5000 \text{ seguidores}$$

2. Ejercicio

Calcular en caso de existir los siguientes límites

$$a1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x}; \quad a2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin \frac{1}{x}} \right)$$

Use el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ cuando sea necesario

b) Calcule las siguientes integrales

$$b1) \int \frac{x}{x^2-1} dx; \quad b2) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x} = \frac{0^2(1-2*0)}{0-2*0^2-\sin 0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminado; Aplicamos L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1-2x)-2x^2}{1-4x-\cos x} = \frac{2*0(1-2x)-2*0^2}{1-4*0-\cos 0} = \frac{0}{1-0-1} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

Aplicamos L'Hopital $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1-2x) + 2 * 2x - 4x}{-4 + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 4x + 4x - 4x}{-4 + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 4x}{-4 + \operatorname{sen} x} = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x - 2x^2 - \operatorname{sen} x} = -\frac{1}{2};$$

a2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{\infty} \left(\frac{3}{\infty} - \frac{2}{\operatorname{sen} \frac{1}{\infty}} \right) = (0 - 0) \text{ indeterminado; hacemos cambio de variable}$

$\frac{1}{x} = t \Rightarrow$ si es para $x \rightarrow \infty$ ahora será para $x \rightarrow 0$; $\lim_{t \rightarrow 0} t \left(3t - \frac{2}{\operatorname{sen} t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(3t^2 - \frac{2t}{\operatorname{sen} t} \right) =$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{3t^2 \operatorname{sen} t - 2t}{\operatorname{sen} t} \right) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminado ;}$$

Aplicamos L'Hopital $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{(6t \operatorname{sen} t + \cos t(3t^2) - 2)}{\cos t} \right) = -\frac{2}{1} = -2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}} \right) = -2;$$

b) Calcule las siguientes integrales

b1) $\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + C$; Integral directa

b2) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ Aplicamos integracion por partes

(ILATE) Aplicamos la formula $\int u dv = uv - \int v du$

$$\Rightarrow \int x^2 e^{-x} dx = \begin{cases} x^2 = u; & 2x dx = du \\ e^{-x} dx = dv; & -e^{-x} = v \end{cases} \int x^2 e^{-x} dx = x^2(-e^{-x}) - \int -e^{-x} * 2x dx$$

integraremos por partes; $-2 \int -e^{-x} * x dx \left\{ \begin{array}{l} x = u; \quad 1 dx = du \\ -e^{-x} dx = dv; \quad e^{-x} = v \end{array} \right. = -2((x(e^{-x}) - \int e^{-x} * 1 dx))$

$$-2 \int -e^{-x} * 2x dx = -2x(e^{-x}) - 2e^{-x}$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = [x^2(-e^{-x}) - (2x(e^{-x}) - 2e^{-x}) + C]_0^1 =$$

$$(-1^2(e^{-1}) - 2 * 1e^{-1} - 2e^{-1}) - (-0^2(e^{-1}) - 2 * 0e^{-1} - 2e^{-0}) =$$

$$= -1^2(e^{-1}) - 2 * 1e^{-1} - 2e^{-1} + 2 = e^{-1}(-1 - 2 - 2) + 2 = -5e^{-1} + 2 = -\frac{5}{e} + 2$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\frac{5}{e} + 2;$$

3. Ejercicio

Dado el punto $A(1,0,-1)$ y la recta $r: x - 1 = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi: x + y - z = 6$. Se pide:

- Hallar el ángulo que forma el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A .
- Determinar la distancia entre el plano π y la recta r
- Calcula una ecuación de la recta que pasa por A , forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π

Solución

- Hallar el ángulo que forma el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A .

El plano perpendicular a la recta r tendrá como vector normal el vector director de la recta

$$r: x - 1 = y + 1 = \frac{z-2}{2} \begin{cases} \overrightarrow{Vd_r} = (1,1,2) \\ P_r = (1,-1,2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{Vn_\pi} = (1,1,2) \quad \mu: Ax + By + Cz + D = 0; \text{ sustituyo } \Rightarrow \mu: 1x + 1y + 2z + D = 0; \mu: x + y + 2z + D = 0$$

Como ha de pasar por $A(1,0,-1)$ debe cumplir la ecuación: $\mu: x + y + 2z + D = 0; 1 + 0 - 2 + D = 0$

$$D = 1; \mu: x + y + 2z + 1 = 0$$

El ángulo que formaran los planos lo hallamos con el producto escalar

$$\overrightarrow{Vn_\pi} * \overrightarrow{Vn_\mu} = |\overrightarrow{Vn_\pi}| * |\overrightarrow{Vn_\mu}| \cos \alpha; \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{Vn_\pi} * \overrightarrow{Vn_\mu}}{|\overrightarrow{Vn_\pi}| * |\overrightarrow{Vn_\mu}|}$$

$$\overrightarrow{Vn_\pi} * \overrightarrow{Vn_\mu} = (1,1,-1)(1,1,2) = 1 + 1 - 2 = 0;$$

$$|\overrightarrow{Vn_\pi}| * |\overrightarrow{Vn_\mu}| = \sqrt{(1+1+1)} * \sqrt{(1+1+4)} = \sqrt{3} * \sqrt{6} = \sqrt{18};$$

$$\cos \alpha = \frac{0}{\sqrt{18}} = 0; \text{ los planos son perpendiculares}$$

- Determinar la distancia entre el plano π y la recta r

$$\text{Comprobamos si la recta corta al plano } r: x - 1 = y + 1 = \frac{z-2}{2}; \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda - 1 \\ z = 2\lambda + 2 \end{cases}$$

$$\text{Sustituimos en el plano } \pi: x + y - z = 6 \Rightarrow \lambda + 1 + \lambda - 1 - (2\lambda + 2) = 6; -2 = 6;$$

Como no se cortan ni está contenida en el plano, la distancia se calcula hallando distancia de

un punto de la recta (por ejemplo $P_r = (1,-1,2)$) al plano $\pi: x + y - z = 6$

Distancia de un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y el plano $\lambda = Ax + By + Cz + D = 0$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \lambda) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{Distancia de } (P_r \text{ a } \pi) = \frac{|1 * 1 + 1 * (-1) - 1 * 2 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

- Calcula una ecuación de la recta que pasa por $A(1,0,-1)$, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π

$$\text{Buscamos un plano que contenga a una recta } s \text{ perpendicular a } r: x - 1 = y + 1 = \frac{z-2}{2} \begin{cases} \overrightarrow{Vd_r} = (1,1,2) \\ P_r = (1,-1,2) \end{cases}$$

que pase por A y sea paralelo al plano $\pi: x + y - z = 6$

Si la recta s es perpendicular a r su producto escalar $= 0$;

$$\Rightarrow (\overrightarrow{Vd_r} = (1,1,2)) * (\overrightarrow{Vd_s} = (a,b,c)) = 0; 1a + 1b + 2c = 0$$

Por otro lado el $\overrightarrow{Vd_s}$ ha de ser perpendicular al vector normal del plano $\overrightarrow{Vn_\pi} = (1,1,-1)$

$$\text{Producto escalar} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{Vd_s} = (a,b,c)) * (\overrightarrow{Vn_\pi} = (1,1,-1)) = 0; a + b - c = 0;$$

$$\begin{cases} 1a + 1b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \text{ dos ecuaciones con tres incógnitas; hacemos } a = \beta$$

$$\begin{cases} \beta + b + 2c = 0 \\ \beta + b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0; \\ b = -\beta \\ c = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \beta \\ b = -\beta \\ c = 0; \end{cases} \text{ La recta s: será } \begin{cases} x = \beta + x_0 \\ y = -\beta + y_0 \\ z = 0 + z_0; \end{cases}$$

Si la recta s: ha de pasar por $A(1,0,-1) \Rightarrow s: \begin{cases} x = \beta + 1 \\ y = -\beta + 0 \\ z = 0 + (-1); \end{cases}$

La recta pedida será s: $\begin{cases} x = \beta + 1 \\ y = -\beta \\ z = -1; \end{cases}$

4. Ejercicio

En una urna hay dos bolas blancas y cuatro negras. Se extrae una al azar. Si la bola extraída es blanca se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra no se devuelve a la urna.

A continuación se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

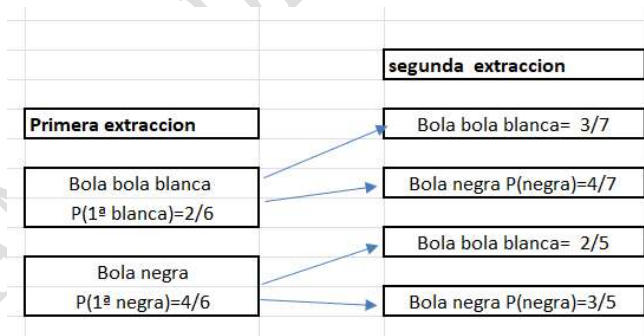
- Cual es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color
- Cual es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color
- Cual es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda a sido blanca

Solución

- Cual es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

$$P(\text{las dos bolas blancas}) = \frac{2}{6} * \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

$$P(\text{las dos bolas negras}) = \frac{4}{6} * \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$



$$P(\text{las dos bolas del mismo color}) = P(\text{las dos bolas blancas}) \cup P(\text{las dos bolas negras}) = \frac{1}{7} + \frac{2}{5} = \frac{19}{35}$$

- Cual es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.

$$P(\text{la } 1^a \text{ sea blanca y la segunda negra}) = \frac{2}{6} * \frac{4}{7} = \frac{8}{42}$$

$$P(\text{la } 1^a \text{ sea negra y la segunda sea blanca}) = \frac{4}{6} * \frac{2}{5} = \frac{8}{30}$$

$$P(\text{las dos bolas de distinto color}) = \frac{8}{42} + \frac{8}{30} = \frac{240}{1260} + \frac{336}{1260} = \frac{576}{1260}$$

- Cual es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca

Probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso al que denominamos A, como consecuencia de que haya tenido lugar otro evento llamado B;

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(\text{la } 1^a \text{ sea negra y la segunda sea blanca}) = \frac{4}{6} * \frac{2}{5} = \frac{8}{30}$$

$$P(B) = P(\text{la 2ª bola sea blanca}) = \begin{cases} P(\text{la 1ª y la 2ª sea blanca}) = \frac{2}{6} * \frac{3}{7} = \frac{6}{42} \\ P(\text{la 1ª sea negra y la 2ª sea blanca}) = \frac{4}{6} * \frac{2}{5} = \frac{8}{30} \end{cases}$$

$$P(2ª \text{ sea blanca}) = \frac{6}{42} + \frac{8}{30} = \frac{180}{1260} + \frac{336}{1260} = \frac{516}{1260}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{8}{30}}{\frac{516}{1260}} = \frac{10080}{15480} = 0,65116$$

5. Ejercicio

- a) Encuentra un unico sisema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y que tenga como solucion $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$
- b) Encuentra un sisema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y, z cuyas soluciones sean en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$;
- c) Encuentra un sisema de tres ecuaciones lineales con dos incognitas x e y que solo tengan como solucion $\{x = 1, y = 2\}$

Solución

- a) Encuentra un unico sisema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y que tenga como solucion $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$

dos ecuaciones lineales $\begin{cases} \text{Para que tenga solución } x = 0 \text{ e } y = 0 \text{ sera de la forma } x + y = 0 \\ \text{Para que tenga solución } x = 1 \text{ e } y = 2 \text{ sera de la forma } 2x + y = 0 \end{cases}$

- b) Encuentra un sisema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y, z cuyas soluciones sean en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$;

Dos ecuaciones con tres incógnitas será la ecuación de una recta intersección de dos planos

ejemplo: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ hacemos $x = \lambda \Rightarrow \begin{cases} y + z = 3 - \lambda \\ 3y - z = 1 - 2\lambda \end{cases}$

- c) Encuentra un sisema de tres ecuaciones lineales con dos incognitas x e y que solo tengan como solucion $\{x = 1, y = 2\}$

$\begin{cases} \text{Para que tenga solución } x = 1 \text{ e } y = 2 \text{ sera de la forma } 2x - y = 0 \\ \text{Otra podría ser } 6x - 3y = 0 \\ \text{otra podría ser } 8x - 4y = 0; \end{cases}$

6. Ejercicio

Sea la funcion $f(x) = x^3 - |x| + 2$

- a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $x = 0$;
- b) Determine los extremos relativos de f(x) en la recta real
- c) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica delimitada por la grafica f, el eje de abscisa $y = 0$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$;

Solución

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en

$x = 0$;

$f(x) = x^3 - |x| + 2$ definimos función a trozos =

$$\begin{cases} x^3 - x + 2 & \text{para } x \geq 0 \\ x^3 + x + 2 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - x + 2 & \text{para } x \geq 0 \\ x^3 + x + 2 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Comprobamos continuidad de la función $f(x)$ en

$x = 0$:

$$f(x) = x^3 - x + 2; f(0) = 2$$

Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 + x + 2 = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - x + 2 = 2;$$

Dado que $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 + x + 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - x + 2 = f(0) = 2$ la función es continua en $x = 0$;

Comprobamos derivabilidad

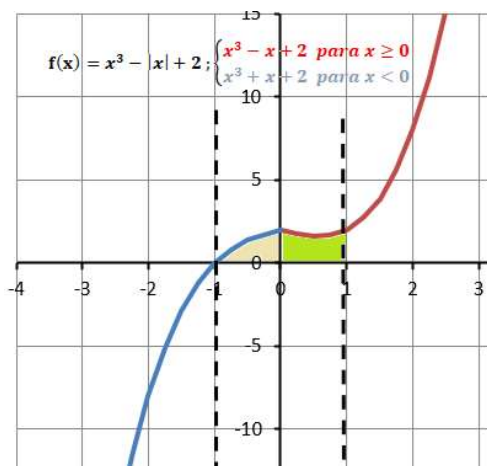
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{para } x \geq 0 \\ 3x^2 + 1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 + 1 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 - 1 = -1;$$

Dado que $\lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 + 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 - 1$ la función no es derivable en $x = 0$;



b) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 = 0 & \text{para } x \geq 0 \\ 3x^2 + 1 = 0 & \text{para } x < 0 \end{cases} \text{ habrá un máximo o mínimo en } \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{3}} & \text{para } x \geq 0 \\ x = -\sqrt{\frac{1}{3}} & \text{para } x < 0 \end{cases} \text{ No hay}$$

Hallamos valores de f próximos a $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$;

$f(x)$ para $x=0$	$f(x)$ para $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$	$f(x)$ para $x=1$
$f'(0) = 3x^2 - 1 = -1$ Negativo (decreciente)	Hay un mínimo relativo	$f'(1) = 3 - 1$ siempre + Positivo (creciente)

c) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica delimitada por la gráfica f , el eje de abscisas

$y = 0$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$;

$$\int_{-1}^1 (x^3 - |x| + 2) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 2) dx + \int_0^1 (x^3 - x + 2) dx$$

$$\int_{-1}^0 (x^3 + x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{5}{4}$$

$$\int_0^1 (x^3 - x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4};$$

$$\int_{-1}^1 (x^3 - |x| + 2) dx = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

7. Ejercicio

Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}$ $s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$

a) Escribir una ecuación de la recta perpendicular común a r y s

b) Calcular la distancia entre las rectas r y s

Solución

a) Escribir una ecuación de la recta perpendicular común a r y s

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}; r: \begin{cases} \vec{Vd}_r = (1, 1, -3) \\ P_r = (2, -1, -4) \end{cases} r: \begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = \lambda - 1 \\ z = -\lambda - 4 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}; \text{Dos ecuaciones con tres incógnitas}$$

$$s: \begin{cases} \text{hacemos } x = \beta \text{ y sustituimos} \\ x+z=2 \Rightarrow \beta+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \Rightarrow -2\beta+y-2z=1 \end{cases} = \begin{cases} x = \beta \\ z = -\beta + 2 \\ -2\beta + y - 2(-\beta + 2) = 1 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = \beta \\ y = 5 \\ z = -\beta + 2 \end{cases} \begin{cases} \vec{Vd}_s = (1, 0, -1) \\ P_s = (0, 5, 2) \end{cases}$$

Calculamos un plano μ que contiene a r y la recta t

Para calcular el plano μ necesito $\begin{pmatrix} \vec{Vd}_1 \\ \vec{Vd}_2 \\ P_\mu \end{pmatrix}$ como el plano contiene a r y t

$$\mu \begin{cases} \vec{Vd}_1 = \vec{Vd}_r = (1, 1, -3) \\ \vec{Vd}_2 = \vec{Vd}_t \text{ es perpendicular a los vectores } (\vec{Vd}_r \text{ y } \vec{Vd}_s) \\ P_\mu = P_r = (2, -1, -4) \end{cases}$$

$$\vec{Vd}_t = \vec{Vd}_r \times \vec{Vd}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i - 3j - k + j = -i - 2j - k = (-1, -2, -1)$$

$$\mu \begin{cases} \vec{Vd}_r = (1, 1, -3) \\ \vec{Vd}_t = (-1, -2, -1) \\ P_\mu = (2, -1, -4) \end{cases}; \mu = \begin{vmatrix} x-2 & y-(-1) & z-(-4) \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\mu = -7x + 4y - z + 14 = 0;$$

$$\pi \begin{cases} \vec{Vd}_1 = \vec{Vd}_s = (1, 0, -1) \\ \vec{Vd}_2 = \vec{Vd}_t \text{ es perpendicular a los vectores } (\vec{Vd}_r \text{ y } \vec{Vd}_s) = (-1, -2, -1) \\ P_\pi = P_s = (0, 5, 2) \end{cases}$$

$$\pi \begin{cases} \vec{Vd}_s = (1, 0, -1) \\ \vec{Vd}_t = (-1, -2, -1) \\ P_\pi = (0, 5, 2) \end{cases}; \pi = \begin{vmatrix} x-0 & y-5 & z-2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2z + 4 + y - 5 + y - 5 - 2x = 0;$$

$$\pi = -2x + 2y - 2z - 6 = 0; \pi = -x + y - z - 3 = 0;$$

Recta perpendicular común a r y s : $\begin{cases} \mu = -7x + 4y - z + 14 = 0; \\ \pi = -x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$

b) Calcular la distancia entre las rectas r y s

Comprobamos la posición relativa de ambas rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}; r: \begin{cases} Vd_r = (1, 1, -3) \\ P_r = (2, -1, -4) \end{cases} r: \begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = \lambda - 1 \\ z = -\lambda - 4 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + z = 2 \\ -2x + y - 2z = 1 \end{cases}; \text{Dos ecuaciones con tres incógnitas}$$

$$s: \begin{cases} \text{hacemos } x = \beta \text{ y sustituimos} \\ x + z = 2 \Rightarrow \beta + z = 2 \\ -2x + y - 2z = 1 \Rightarrow -2\beta + y - 2z = 1 \end{cases} = \begin{cases} x = \beta \\ z = -\beta + 2 \\ -2\beta + y - 2(-\beta + 2) = 1 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = \beta \\ y = 5 \\ z = -\beta + 2 \end{cases} \begin{cases} Vd_s = (1, 0, -1) \\ P_s = (0, 5, 2) \end{cases}$$

Los vectores directores no son proporcionales $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{-3}{-1}$; por lo que no son paralelos ni coincidentes

comprobamos si se cruzan o se cortan

$$\begin{cases} Vd_r = (1, 1, -3) \\ Vd_s = (1, 0, -1) \end{cases} \begin{cases} Vd_r = (1, 1, -3) \\ Vd_s = (1, 0, -1) \end{cases} \begin{cases} \text{vector } P_s P_r = (0, 5, 2) - (2, -1, -4) \\ \text{vector } P_s P_r = (-2, 6, 6) \end{cases}$$

$$\text{vemos si son coplanarios } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -18 + 2 - 6 + 6 = -16 \text{ no se cortan;}$$

Las rectas se cruzan

Distancia entre dos rectas

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_s P_r} * (\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s})|}{||\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s}||}$$

$$(\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i - 3j - k + j = -i - 2j - k = (-1, -2, -1)$$

$$\overrightarrow{P_s P_r} * (\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s}) = P_s P_r = (-2, 6, 6) * (-1, -2, -1) = (2 - 12 - 6) = -16;$$

$$|\overrightarrow{P_s P_r} * (\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s})| = 16$$

Calcular el módulo del producto vectorial $|\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s}|; |(-1, -2, -1)|$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_s P_r} * (\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s})|}{||\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s}||} = \frac{16}{\sqrt{6}}$$

8. Ejercicio

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45% de los días.

Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los últimos 50 años.

a) Expresar como calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal

Solución

Aplicamos la fórmula de la aplicación binomial $P(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{n-k}$;

$$P(X = 40) = \binom{100}{40} (0,45)^{40} (0,55)^{100-40} = \binom{100}{40} (0,45)^{40} (0,55)^{60}$$

$$\binom{100}{40} (0,45)^{40} (0,55)^{60} = \frac{100!}{40! (100 - 40)!} (0,45)^{40} (0,55)^{60} = \frac{100!}{40! (60)!} (0,45)^{40} (0,55)^{60}$$

b) Calcule dicha probabilidad aproximandola mediante una normal

Pasamos (μ es la media y σ es la desviacion tipica) ; en otra Z que siga una distribucion $N(0,1)$

aplicando la formula $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

La media $\mu = n * p = 100 * 0,45 = 45$;

La varianza $\sigma^2 = n * p * q = 100 * 0,45 * 0,55 = 24,75$;

σ es la desviacion tipica $= \sqrt{\text{La varianza}} \quad \sigma^2 = \sqrt{24,75} = 4,97494$

Aplicamos la correccion y consideramos el intervalo $[39,5, 40,5] \Rightarrow P(39,5 \leq X \leq 40,5)$

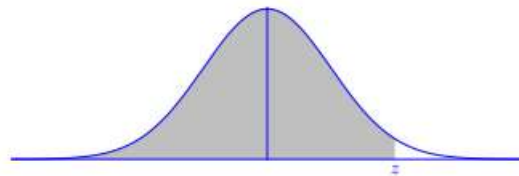
Aplicamos la correccion y consideramos el intervalo $[39,5, 40,5] \Rightarrow$

Estandarizamos valores, $\begin{cases} \text{Para } X = 39,5; Z_1 = \frac{39,5 - 45}{4,97494} \approx -1,11559 \\ \text{Para } X = 40,5; Z_1 = \frac{40,5 - 45}{4,97494} \approx -0,90453 \end{cases}$

$P(39,5 \leq X \leq 40,5); P(-1,11559 \leq Z \leq -0,90453)$;

Obtenemos valores en la tabla $\begin{cases} P(-1,1156) = 0,8686 \\ P(-0,90453) = 0,8159 \end{cases}$ Probabilidad $0,8686 - 0,8159 = 0,0527$

Probabilidad 5,27%



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

2 Examen 2022 B

1. Ejercicio

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 € que corresponden a tres empresas A, B, C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano

Solución

Ponemos en una tabla los datos del problema;

x = acciones de la empresa B; y = acciones empresa A

	Empresas			
	A	B	C	TOTAL
N de acciones	$y=360$	$x=120$	$x/2=60$	540
Precio por acción	3 €	1 €	6 €	
Total	$3y=1080€$	$x=120€$	$3x=360€$	1.560 €

$$\begin{cases} y + x + \frac{x}{2} = 540; \\ 3y + x + 3x = 1560 \end{cases} \begin{cases} 2y + 2x + x = 1080; \\ 3y + x + 3x = 1560 \end{cases} \begin{cases} 2y + 3x = 1080; \\ 3y + 4x = 1560 \end{cases} \quad x = 120; y = 360$$

Importe economico que recibirá cada hermano = 520 €

$$\text{Acciones que recibirá cada hermano: } \begin{cases} \text{de la empresa A} = \frac{360}{3} = 120 \text{ acciones} \\ \text{De la empresa B} = \frac{120}{3} = 40 \text{ acciones} \\ \text{De la empresa C} = \frac{60}{3} = 20 \text{ acciones} \end{cases}$$

2. Ejercicio

Calcular el area delimitada por las graficas de las funciones $f(x) = 2 + x - x^2$ y $g(x) = 2x^2 - 4x$;

Solución

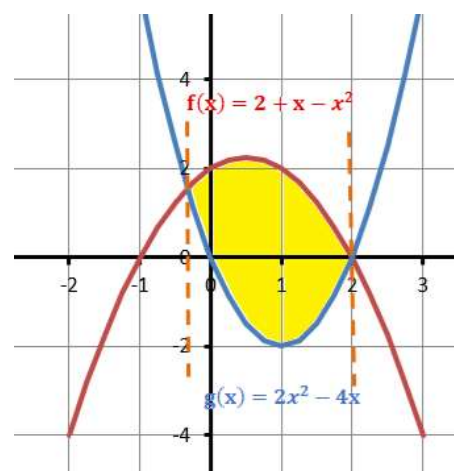
Calculamos punto de corte de las funciones

$$\begin{cases} f(x) = 2 + x - x^2 \\ g(x) = 2x^2 - 4x \end{cases} \quad 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0;$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} =$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 \text{Area} &= \int_{-\frac{1}{3}}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^2 (2 + x - x^2 - (2x^2 - 4x)) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^2 (-3x^2 + 5x + 2) dx = \\
 & \left[-x^3 + 5\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-\frac{1}{3}}^2 = 2^3 + 5\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 5\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{2} + 2\left(-\frac{1}{3}\right) \right) = \\
 & 8 + 10 + 4 - \left(-\frac{1}{27} + \frac{5}{18} - \frac{2}{3} \right) = 22 + \frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} = \frac{343}{54} \\
 \text{Area} &= \frac{343}{54}
 \end{aligned}$$

3. Ejercicio

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0; \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$; se pide:

- Calcular el ángulo que forman r y π
- Hallar el punto simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$;
- Determina la proyección ortogonal de la recta y el plano

Solución

- Calcular el ángulo que forman r y π

$$r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0; \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad r \equiv \begin{cases} x = \lambda; \\ -\lambda - y + z = 0; \\ 2\lambda + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \lambda; \\ -y + z = \lambda; \\ 3y - z = -2\lambda - 1; \end{cases}$$

$$\text{sumamos las dos ecuaciones } \begin{cases} -y + z = \lambda; \\ 3y - z = -2\lambda - 1; \end{cases} \quad 2y = -\lambda - 1; \quad y = -\frac{\lambda + 1}{2}$$

$$\text{sustituimos en una de las ecuaciones; } -x - y + z = 0 \Rightarrow -\lambda - \left(-\frac{\lambda + 1}{2}\right) + z = 0; \quad z = \frac{\lambda - 1}{2}$$

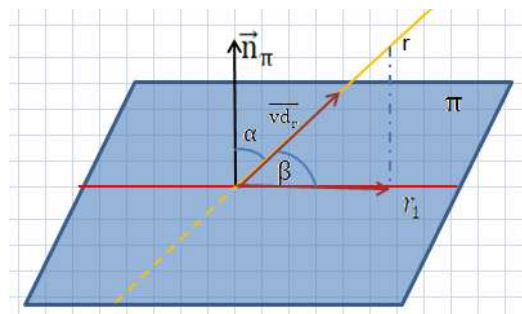
$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda; \\ y = -\frac{\lambda + 1}{2} \\ z = \frac{\lambda - 1}{2} \end{cases} = \begin{cases} x = \lambda; \\ y = -\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \\ z = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}_{d_r} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2, -1, 1) \\ P_r = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{sustituimos en el plano } \pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0 \Rightarrow 2\lambda + \left(-\frac{\lambda + 1}{2}\right) - \frac{\lambda - 1}{2} + 3 = 0; \quad \lambda = -3$$

$$\text{Punto de intersección } \begin{cases} x = -3; \\ y = -2 \\ z = -2 \end{cases} \quad (-3, -2, -2)$$

El ángulo que forma un plano π con una recta r es igual al ángulo formado por el vector director de la recta r y el vector director de la recta proyectada sobre el plano π

El ángulo β es el complementario del ángulo α ;
 $\sin \beta = \cos \alpha$;



$$\sin \beta = \cos(\vec{v}_{d_r}, \vec{v}_{N_{\pi}}) = \frac{|\vec{v}_{d_r} \cdot \vec{v}_{N_{\pi}}|}{|\vec{v}_{d_r}| |\vec{v}_{N_{\pi}}|} = \frac{|aa_1 + bb_1 + cc_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

$$\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0; \overrightarrow{vn_{\pi}} = (2, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{vd_r} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2, -1, 1)$$

$$\text{sen } \beta = \cos(\overrightarrow{vd_r}, \overrightarrow{vn_{\pi}}) = \frac{|\overrightarrow{vd_r} \cdot \overrightarrow{vn_{\pi}}|}{|\overrightarrow{vd_r}| |\overrightarrow{vn_{\pi}}|} = \frac{|aa_1 + bb_1 + cc_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{|\sqrt{6}\sqrt{6}|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{arc sen } \beta = 19,4712^\circ$$

b) Hallar el punto simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$;

Punto de intersección de la recta r y el plano $\pi \begin{cases} x = -3; \\ y = -2 \\ z = -2 \end{cases} P(-3, 1, -2)$

Plano de referencia $\mu: z - y = 0; \overrightarrow{vn_{\mu}} = (0, -1, 1)$

Recta t perpendicular a $\mu: z - y = 0$ y que pasa por $P(-3, 1, -2); t \equiv \begin{cases} x = 0\lambda - 3; \\ y = -1\lambda + 1 \\ z = 1\lambda - 2 \end{cases} \begin{cases} x = -3; \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$

Punto de intersección de la recta t y el plano $\mu \Rightarrow z - y = 0$ sustituimos $\begin{cases} x = -3; \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$

$\lambda - 2 - (-\lambda + 1) = 0; 2\lambda - 3 = 0; \lambda = \frac{3}{2}$; Punto de intersección $\begin{cases} x = -3; \\ y = -(\frac{3}{2}) + 1 \\ z = \frac{3}{2} - 2 \end{cases} \begin{cases} x = -3; \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Punto simétrico $(x, y, z) \Rightarrow \frac{(x, y, z) + (-3, 1, -2)}{2} = \text{punto medio } \left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right);$

$(x, y, z) = \left(-3 \cdot 2, -\frac{1}{2} \cdot 2, -\frac{1}{2} \cdot 2\right) - (-3, 1, -2) = (-6, -1, -1) - (-3, 1, -2) = (-3, -2, 1);$

Punto simétrico $(x, y, z) = (-3, -2, 1);$

c) Determina la proyección ortogonal de la recta y el plano

Tenemos el punto de intersección de la recta r y el plano $\pi (-3, 1, -2)$ y otro punto

de la recta r $P_r = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ Hallamos la proyección del punto en el plano π

$\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0; \overrightarrow{vn_{\pi}} (2, 1, -1); \text{recta perpendicular al plano por } P_r$

$n \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 0; \\ y = 1\lambda - \frac{1}{2} \\ z = -1\lambda - \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2\lambda; \\ y = \lambda - 1/2 \\ z = -\lambda - \frac{1}{2} \end{cases}$

La proyección del punto P_r plano π , será el punto de intersección de la recta n con el plano π

$2x + y - z + 3 = 0$ sustituimos $\Rightarrow 2(2\lambda + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) - \left(-\lambda - \frac{1}{2}\right) + 3 = 0; \lambda = -\frac{1}{2};$

Punto de intersección (proyección) = será $\begin{cases} x = 2\left(-\frac{1}{2}\right); \\ y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ z = -\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \end{cases} (-1, -1, 0)$

$$\text{Proyeccion ortogonal de } r \text{ en el plano } \pi \begin{cases} \overrightarrow{vd_r} = (-3, 1, -2) - (-1, -1, 0) = (-2, 2, -2) \\ P_n = (-1, -1, 0) \end{cases}$$

$$\text{Proyeccion ortogonal de } r \text{ en el plano } \pi: \begin{cases} x = -2\beta - 1; \\ y = 2\beta - 1 \\ z = -2\beta \end{cases}$$

4. Ejercicio

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8,8 y una desviación típica de 3 meses.

- ¿Qué porcentaje de esa especie superan los 10 meses? . ¿Qué porcentaje ha vivido entre 7 y 10 meses?
- Si se toma al azar 4 especímenes . ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses?
- ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8,8 - c, 8,8 + c)$ incluya el tiempo de vida (en meses) del 98% de los individuos de la especie?

Solución

- ¿Qué porcentaje de esa especie superan los 10 meses? . ¿Qué porcentaje ha vivido entre 7 y 10 meses?

¿Qué porcentaje de esa especie superan los 10 meses?.

Aplicando la formula $Z = \frac{10 - 8,8}{3} = 0,4$; $P(X > 10) = P(Z > 0,4)$

Comprobamos en la tabla para $z < 0,4 = 0,6554$; para $Z > 0,4 = 1 - 0,6554 = 0,3446$;

$$P(X > 10) = 34,46\%$$

¿Qué porcentaje ha vivido entre 7 y 10 meses? $P(7 < X < 10)$; $Z = \frac{7 - 8,8}{3} = -0,6$

$$P(7 < X < 10) = P(-0,6 < Z < 0,4) \Rightarrow P(Z < 0,4) - P(Z < -0,6) \text{ en tabla}$$

$$P(Z < 0,4) = 0,6554; \quad P(Z < -0,6) = 1 - 0,7257 = 0,2743$$

$$P(Z < 0,4) - P(Z < -0,6) = 0,6554 - 0,2743 = 0,3811 \Rightarrow P(7 < X < 10) = 38,11\%$$

- Si se toma al azar 4 especímenes . ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses?

La probabilidad de que uno supere los 10 meses = $P(X > 10) = P(Z > 0,4) = 0,3446$

La probabilidad de que 4 superen los 10 meses, como son independientes

$$P(Z > 0,4)^4 = (1 - 0,6554)^4 = (0,3446)^4 = 0,0141;$$

. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses?;

$$1 - P(\text{todos superen los 10 meses}) = 1 - 0,0141 = 0,9859 \Rightarrow 98,59\%$$

- ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8,8 - c, 8,8 + c)$ incluya el tiempo de vida (en meses) del 98% de los individuos de la especie?

Para un nivel de confianza del 98% el valor de z se encuentra buscando el área de 0,99

ya que el $1 - 0,98 = 0,02$; para 0,98 central tendremos $(0,98 - 0,01, 0,98 + 0,01) \Rightarrow (0,97, 0,99)$

Para un nivel de confianza 0,98 en la tabla 0,99 corresponde a $\approx 2,33$

5. Ejercicio

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases} ax - 2y + (a - 1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los valores de a

b) Resolver el sistema para a = 1

Solución

a) Discutir el sistema según los valores de a

Comprobamos el rango de la matriz de coeficientes $\begin{cases} ax - 2y + (a - 1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{vmatrix} = -18a - 12a - 2a + 2 + 3a^2 - 3a + 24 + 6a = 0; 3a^2 - 29a + 26 = 0;$$

$$a = \frac{29 \pm \sqrt{(29)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 26}}{2 \cdot 3}; a = a = \frac{29 \pm 23}{6} \begin{cases} a = \frac{26}{3} \\ a = 1; \end{cases}$$

Para $a \neq \frac{26}{3}$ y $a \neq 1$ Rango matriz A = rango matriz A ampliada = nº de incógnitas =>

Sistema Compatible determinado; tiene una solución A

$$\text{Estudiamos el sistema para } a = \frac{26}{3}; \begin{vmatrix} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & \frac{26}{3} - 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ 6 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & \frac{23}{3} \\ 2 & 3 & -6 \\ 6 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 72 + \frac{46}{3} - 72 - \frac{414}{3} - 24 + 24 = -\frac{368}{3} \neq 0; \text{rango } 3$$

Para $a = \frac{26}{3}$; Rango de la matriz coeficientes = 2 y Rango de la ampliada = 3; Sistema incompatible

$$\text{Estudiamos el sistema para } a = 1; \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{vmatrix} = 72 - 72 + 24 - 24 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -6 & 2 \\ -1 & -6 & 6 \end{vmatrix} = -36 + 48 - 24 + 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 4 - 8 + 12 - 2 - 24 = 0;$$

Para a = 1; Rango de la matriz coeficientes = 2 y Rango de la ampliada = 2;

Sistema compatible indeterminado

b) Resolver el sistema para a = 1

$$\begin{cases} ax - 2y + (a - 1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases} \text{ sustituimos por } a = 1 \begin{cases} x - 2y + 0z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -1x + y - 6z = 6 \end{cases} \begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -x + y - 6z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -x + y - 6z = 6 \end{cases}; \begin{cases} x = 2y + 4 \\ -2(2y + 4) + 3y - 6z = 2 \\ -(2y + 4) + y - 6z = 6 \end{cases} \begin{cases} -4y - 8 + 3y - 6z = 2 \\ -2y - 4 + y - 6z = 6 \end{cases} \begin{cases} -y - 6z = 10 \\ -y - 6z = 10 \end{cases} \text{ son iguales}$$

Como las dos ecuaciones son iguales el sistema queda $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -y - 6z = 6 \end{cases} \begin{cases} x = 2\lambda + 4 \\ y = \lambda \\ z = -\frac{\lambda}{6} - 1; \end{cases}$

sistema compatible indeterminado $\begin{cases} x = 2\lambda + 4 \\ y = \lambda \\ z = -\frac{\lambda}{6} - 1; \end{cases}$

6. Ejercicio

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudiar continuidad y derivación de la función en $x = 0$;

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f restringido a $(-\pi, 2)$

Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$;

c) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) d(t)$

Solución

a) Estudiar continuidad y derivación de la función en $x = 0$;

Hallamos el $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ por la izquierda y la derecha;

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^x = 0 \end{cases} \text{ sistema es continuo en } x = 0;$$

Para ver si es derivable en $x = 0$ su derivada debe coincidir por derecha e izquierda

$$f(x) = \sin x; f'(x) = \cos x; \text{ Para } x = 0; f'(x) = 1$$

$$f(x) = xe^x; f'(x) = e^x + x * e^x; \text{ Para } x = 0; f'(x) = 1$$

El sistema es derivable en $x = 0$;

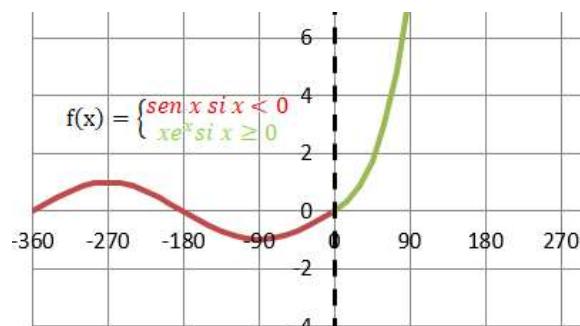
b) Estudiar los intervalos de crecimiento y

decrecimiento de la función f restringido a $(-\pi, 2)$

Damos valores a $f'(x)$; si es positivo es creciente

y si es negativo es decreciente

$$\begin{cases} \text{Entre } -2\pi \text{ y } -\frac{3}{2}\pi \text{ la función es creciente} \\ \text{Entre } -\frac{3}{2}\pi \text{ y } -\frac{\pi}{2} \text{ la función es decreciente} \\ \text{Entre } -\frac{\pi}{2} \text{ y } 0 \text{ la función es creciente} \\ \text{Entre } 0 \text{ e infinito la función es creciente} \end{cases}$$



Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$;

$$f(x) = xe^x \text{ para } x \geq 0; \begin{cases} f(0) = 0e^0 = 0; \\ f(1) = 1e^1 = e; \text{ dado que } e > 2 \end{cases}$$

Como la función es creciente y continua en $[0, 1]$ habrá algún x_0 tal que $f(x_0) = 2$

c) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) d(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) d(x) + \int_0^1 f(x) d(x);$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) d(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \text{sen} x d(x) + \int_0^1 x e^x d(x)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \text{sen} x d(x) = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -1 - 0 = -1$$

$$\int_0^1 x e^x d(x) \text{ aplicamos la integración por partes } \int u dv = u v - \int v du$$

Una forma de saber cual debemos elegir como u o como dv es con la palabra

I L A T E (Tipo de funcion que tendremos) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Inversa} \\ \text{Logaritmica} \\ \text{Aritmetica} \\ \text{Trigonimetrica} \\ \text{Exponencial} \end{array} \right.$

$$\int_0^1 x e^x d(x); \text{Integramos por partes } \int e^x x d(x) \left\{ \begin{array}{l} u = x; \text{derivamos } du = d(x) \\ e^x d(x) = d(v) \text{ Integramos; } v = e^x \end{array} \right.$$

$$\text{sustituimos en la formula } \Rightarrow x e^x - \int e^x d(x) = x e^x - e^x$$

$$\int_0^1 x e^x d(x) = [x e^x - e^x]_0^1 = e^x - e^x - (0 * e^0 - e^0) = 1;$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) d(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \text{sen} x d(x) + \int_0^1 x e^x d(x) = -1 + 1 = 0;$$

7. Ejercicio

Sean los planos $\pi \equiv x + y = 1$ y $\mu \equiv x + z = 1$;

a) Hallar los planos paralelos a $\pi \equiv x + y = 1$, tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2

b) Hallar la recta que pasa por el punto (0,2,0) y es perpendicular al plano $\mu \equiv x + z = 1$

c) Hallar la distancia entre los puntos de interseccion del plano $\pi \equiv x + y = 1$ con los ejes x e y

Solución

a) Hallar los planos paralelos a $\pi \equiv x + y = 1$, tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2

Los planos paralelos tendran el mismo vector normal $\overrightarrow{vn}_{\pi}(1,1,0)$

Planos paralelos $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow x + y + D = 0$; si la distancia al origen es 2 $\Rightarrow$

$$\text{Distancia de un punto a un plano} = \frac{|Ax_0 + B y_0 + C z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{Distancia del punto } (0,0,0) \text{ al plano } x + y + D = 0; d = \frac{|A * 0 + B * 0 + C * 0 + D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + C^2}} = \frac{D}{\sqrt{2}} = 2; D = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Planos paralelos } \begin{cases} x + y + 2\sqrt{2} = 0; \\ x + y - 2\sqrt{2} = 0; \end{cases}$$

b) Hallar la recta que pasa por el punto (0,2,0) y es perpendicular al plano $\mu \equiv x + z = 1$

Una recta perpendicular al plano $\mu \equiv x + z = 1$ tendra un vector directo $\overrightarrow{vd}_r = \text{al } \overrightarrow{vn}_{\mu}$;

$$\overrightarrow{vd}_r = \overrightarrow{vn}_{\mu} = (1,0,1): \text{recta } r \begin{cases} \overrightarrow{vd}_r(1,0,1); \\ P_r(0,2,0) \end{cases} \text{ Recta } r \equiv \begin{cases} x = \lambda; \\ y = 2; \\ z = \lambda \end{cases}$$

c) Hallar la distancia entre los puntos de interseccion del plano $\pi \equiv x + y = 1$ con los ejes x e y

Puntos de intersección del plano $\pi \equiv x + y = 1$ con los ejes $x =$ recta $\begin{cases} x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Punto de intersección (1,0,0)

Puntos de intersección del plano $\pi \equiv x + y = 1$ con los ejes $y =$ recta $\begin{cases} 0 \\ y \\ 0 \end{cases}$ Punto de intersección (0,1,0)

Distancia entre dos puntos $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

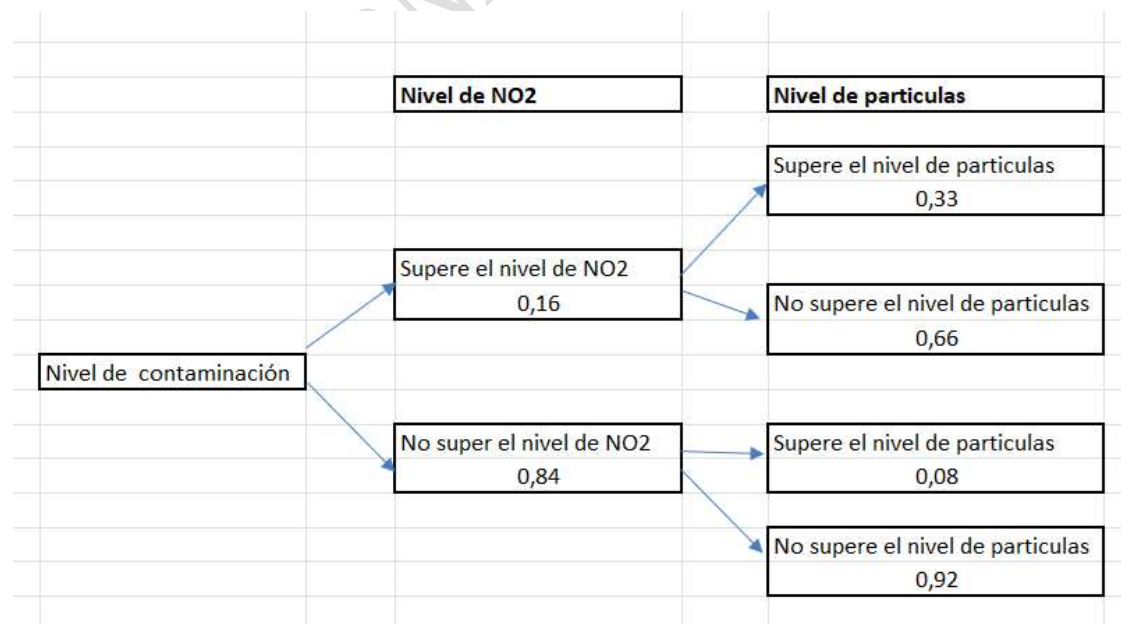
Distancia entre los puntos (1,0,0) y (0,1,0) $= \sqrt{(0 - 1)^2 + (1 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{2}$

8. Ejercicio

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es de 0,16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2 , la probabilidad de que supere el nivel permitido de partículas es de 0,33. En los días en que no se supera el nivel de NO_2 la probabilidad de que supere el nivel de partículas es 0,08.

- Calcula la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos.
- Calcula la probabilidad de que se supere al menos uno de ellos.
- ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2 y en un día se supera el nivel permitido de partículas"?
- ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2 sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Solución



- Calcula la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos.

P se superen los dos niveles $= 0,16 * 0,33 = 0,0528$

b) Calcula la probabilidad de que se supere al menos uno de ellos

La probabilidad de que al menos un suceso ocurra se halla restando de la unidad la probabilidad de que ninguno de los dos sucesos ocurra $P(\text{al menos uno ocurra}) = 1 - P(\text{ningun suceso ocurra})$

$$P(\text{ninguno de los dos sucesos ocurra}) = 0,84 * 0,92 = 0,7728;$$

$$P(\text{de que al menos un suceso ocurra}) = 1 - 0,7728 = 0,2272;$$

c) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO₂ y en un día se supera el nivel permitido de partículas?"

Dos sucesos son independientes cuando la ocurrencia de uno no afecta a la posibilidad de que ocurra el otro

*Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$*

$$P(\text{NO}_2 \text{supere} \cap \text{Partsupere}) = \text{Probabilidad de que sucedan los dos} = 0,16 * 0,33 = 0,0528$$

$$P(\text{supere NO}_2) = 0,16;$$

$$P(\text{superen las partículas}) = 0,16 * 0,33 + 0,84 * 0,08 = 0,0528 + 0,0672 = 0,12;$$

$$P(\text{no superen las partículas}) = 1 - 0,12 = 0,88$$

$$\text{Si son independientes } P(A \cap B) = P(A) * P(B) \Rightarrow 0,0528 \text{ debería ser igual a } 0,16 * 0,12;$$

Dado que $0,0528 \neq 0,0192$ los sucesos no son independientes

d) Cual es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO₂ sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas

Probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso A como consecuencia de haber tenido lugar otro B; $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$

$$P(\text{NO}_2 \text{supere} | \text{sabiendo que no se ha superado el numero de partículas}) =;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{NO}_2 \text{ Probabilidad de que supere} \\ \bar{P} = \text{Probabilidad de que no superen las partículas} \end{array} \right. P(\text{NO}_2 | \bar{P}) = \frac{P(\text{NO}_2 \cap \bar{P})}{P(\bar{P})} = \frac{P(\text{NO}_2) - P(\text{NO}_2 \cap P)}{1 - P(P)} =$$
$$\frac{0,16 - 0,16 * 0,33}{1 - 0,12} = \frac{0,16 - 0,0528}{0,88} = 0,1218;$$

$$P(\text{NO}_2 \text{supere} | \text{sabiendo que no se ha superado el numero de partículas}) = 0,1218$$

3 Examen 2022 C

1. Ejercicio

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro m :

$$\begin{cases} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1; \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los valores de m

b) Resolver el sistema para $m = \frac{1}{2}$

Solución

Comprobamos el rango de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \end{vmatrix} = 2 + 2m - m - 2 - 1 + 2m^2 = 2m^2 + m - 1 = 0;$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

Para $m \neq -1$ y $m \neq \frac{1}{2}$ el sistema será compatible determinado con una única solución

Estudiamos el rango de la matriz ampliada $\begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Para $m = -1$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 1 - 2 - 1 + 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 - 1 - 2 - 1 + 2 = 0$$

Rango de la matriz ampliada = 2; Para $m = -1$ el sistema es compatible indeterminado

Para $m = \frac{1}{2}$ estudiamos la matriz ampliada $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 1 - 2 - 1 - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 1 & 1 & +1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + \frac{1}{2} + 1 + 1 - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \end{vmatrix} = 2 - \frac{1}{2} + 1 - 2 - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

Rango de la matriz ampliada = 2; Para $m = \frac{1}{2}$ el sistema es compatible indeterminado

b) Resolver el sistema para $m = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \frac{1}{2}x + 2y - z = -1; \text{ Como la primera y tercera son iguales quedará } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ \frac{1}{2}x + 2y - z = -1; \end{cases} \text{ sumamos} \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$\frac{3}{2}x + y = 0$; Hacemos $y = \lambda \Rightarrow x = -\frac{2}{3}\lambda$ sustituimos en la otra ecuación

$$x - y + z = 1 \Rightarrow -\frac{3}{2}\lambda - \lambda + z = 1; z = \frac{5}{3}\lambda + 1;$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{5}{3}\lambda + 1 \end{cases}$$

2. Ejercicio

Sea la función : $f(x) \begin{cases} x^3 e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)$ en $x = 0$;

b) Estudiar si presenta algún tipo de simetría par o impar

c) Calcular la siguiente integral $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}$

Solución

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)$ en $x = 0$;

Hallamos el $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

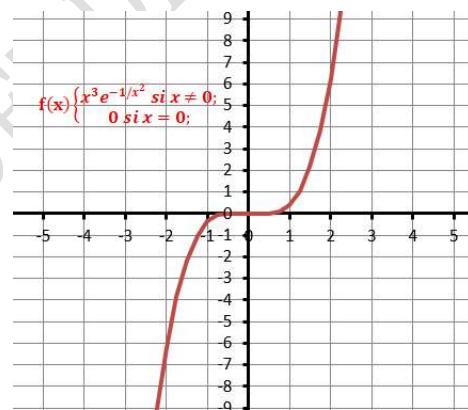
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = x^3 e^{-\frac{1}{x^2}}; \text{hacemos un cambio de variable}$$

$$y = \frac{1}{x^2}; x = \frac{1}{y^{1/2}}; \text{cuando } x \rightarrow 0 \text{ } y \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \frac{e^{-y}}{\frac{3}{y^2}} =$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \frac{1}{y^2 \cdot e^y} = 0;$$

El sistema es continuo en $x = 0 = f(0)$;



Comprobamos si la función es derivable en $x = 0$;

Se utiliza la definición de derivada $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$; donde $f(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 e^{-\frac{1}{h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \frac{0}{\infty}$$

Hacemos un cambio de variable $\frac{1}{h^2} = y; h \rightarrow 0 \text{ } y \rightarrow \infty; h^2 = \frac{1}{y}$ Sustituimos $\Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{y}}{e^y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y e^y} = 0$;

La función es derivable en $x = 0$ y su derivada $f'(0) = 0$

b) Estudiar si presenta algún tipo de simetría par o impar

Una función presenta simetría par si $f(-x) = f(x)$

Una función presenta simetría impar si $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = x^3 e^{-\frac{1}{x^2}}; f(-x) = f(x) \Rightarrow x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} = (-x)^3 e^{-\frac{1}{(-x)^2}} = -x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ No presenta simetría par}$$

$$f(x) = x^3 e^{-\frac{1}{x^2}}; f(-x) = -f(x) \Rightarrow (-x)^3 e^{-\frac{1}{(-x)^2}} = -x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} = -\left(x^3 e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$$

Presenta simetría impar

c) Calcular la siguiente integral $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx = \int_1^2 \frac{x^3 e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} dx = \int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx = \int_1^2 e^{-\frac{1}{x^2}} x^{-3} dx$

Hacemos un cambio de variables $-\frac{1}{x^2} = u$; $du = \frac{2x}{x^4} dx = \frac{2}{x^3} dx \Rightarrow dx = \frac{x^3}{2} du$

$\int e^{-\frac{1}{x^2}} x^{-3} dx = \int e^u x^{-3} dx = \int e^u x^{-3} \frac{x^3}{2} du = \frac{1}{2} \int e^u du$; hay que ajustar los límites de integración

Para $x = 1 \Rightarrow u = -1$; Para $x = 2 \Rightarrow u = -\frac{1}{4}$

$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-1}^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} (e^{-\frac{1}{4}} - e^{-1})$

3. Ejercicio

Con un dispositivo laser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula

que se desplaza sobre una recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$;

a) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando la trayectoria incide con el plano $z = 0$;

b) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo laser

b) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r .

Solución

a) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando la trayectoria incide con el plano $z = 0$;

$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 10 \\ z = \lambda + 90 \end{cases} \begin{cases} \vec{v}_r(1,2,1) \\ P_r(0, -10, 90) \end{cases}$

La posición de la partícula será el punto de intersección entre $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 10 \\ z = \lambda + 90 \end{cases}$ y el plano $z = 0$;

$z = \lambda + 90 = 0$; $\lambda = -90$ sustituimos $\begin{cases} x = -90 \\ y = 2(-90) - 10 = -190 \\ z = 0 \end{cases}$

La posición de la partícula $(-90, -190, 0)$

b) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo laser

Para hallar la distancia, definimos un plano perpendicular a la recta que contenga el punto P .

Un plano perpendicular a la recta tendrá $\vec{v}_r = \vec{v}_n$; el plano pedido será $Ax + By + Cz + D = 0$;

sustituyo $\vec{v}_r = (1,2,1) \Rightarrow x + 2y + z + D = 0$ y ha de contener a $P(1,1,1) \Rightarrow$

$1 + 2 + 1 + D = 0$; $D = -4$;

Plano buscado $= x + 2y + z - 4 = 0$;

Intersección del plano $x + 2y + z - 4 = 0$; y la recta $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 10 \\ z = \lambda + 90 \end{cases} \Rightarrow$

$\lambda + 2(2\lambda - 10) + \lambda + 90 - 4 = 0$; $6\lambda = -66$; $\lambda = -11$

Punto de intersección $= \begin{cases} x = -11 \\ y = 2(-11) - 10 = -32 \\ z = (-11) + 90 = 79 \end{cases}$ Posición de la Partícula $(-11, -32, 79)$

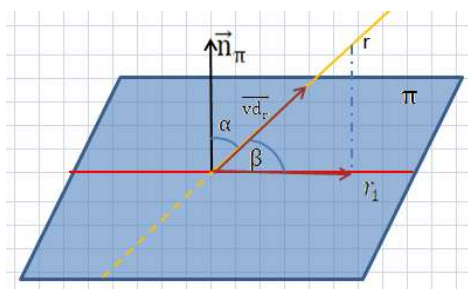
b) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r .

Vector normal del plano $x + y = 2$; $\vec{v}_{N_{\pi}} (1,1,0)$

Vector director de la recta r $\vec{v}_{d_r} (1,2,1)$;

normal del plano $x + y = 2$; $\vec{v}_N (1,1,0)$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \cos(\vec{v}_{d_r}, \vec{v}_{N_{\pi}}) = \frac{|\vec{v}_{d_r} \cdot \vec{v}_{N_{\pi}}|}{|\vec{v}_{d_r}| |\vec{v}_{N_{\pi}}|} \\ &= \frac{|aa_1 + bb_1 + cc_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \end{aligned}$$



$$\sin \beta = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{6} \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

4. Ejercicio

Según el Instituto Nacional de Estadísticas, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecían al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex - 35 fue del 27,7%.

Se reunieron 10 de estos consejos:

a) Hallar la probabilidad de que la mitad fueran mujeres

b) Calcule la probabilidad de que hubiera al menos un hombre

c) Determine, aproximando mediante distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de 200 consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35% de representación femenina

Solución

a) Hallar la probabilidad de que la mitad fueran mujeres

Aplicamos la fórmula de la aplicación binomial $P(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{n-k}$;

$$P(X = 10) = \binom{10}{5} (0,277)^5 (1 - 0,277)^{10-5} = \binom{10}{5} (0,277)^5 (0,723)^5$$

$$\binom{10}{5} (0,277)^5 (0,723)^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} (0,277)^5 (0,723)^5 = \frac{10!}{5!(5)!} (0,277)^5 (0,723)^5$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (0,277)^5 (0,723)^5 = 252 \cdot 0,0016 \cdot 0,19756 = 0,07965 \Rightarrow 7,965\%$$

b) Calcule la probabilidad de que hubiera al menos un hombre

Hallamos la probabilidad de que todas fueran mujeres

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} (0,277)^{10} = \binom{10}{10} (0,277)^{10} = \frac{10!}{10!(10-10)!} (0,277)^{10} = \frac{10!}{10!(0)!} (0,277)^{10}$$

$$\text{Dado que } 0! = 1 \Rightarrow P(X = 10) = 1(0,277)^{10} = 0,00000266$$

La probabilidad de que haya al menos un hombre = $1 -$ la probabilidad de que todas sean mujeres

$$\text{La probabilidad de al menos un hombre} = 1 - 0,00000266 = 0,99999734 \approx 99,99\%$$

c) Determine, aproximando mediante distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de 200 consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35% de representación femenina

Aplicamos la fórmula $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$;

La media $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,277 = 55,4$;

La varianza $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 200 \cdot 0,277 \cdot 0,723 = 40,05$;

σ es la desviación típica $= \sqrt{\text{La varianza } \sigma^2} = \sqrt{40,05} = 6,3288$

$$Z = \frac{200 - 55,4}{6,3288} = 25,273$$

b) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal

Pasamos (μ es la media y σ es la desviación típica); en otra Z que siga una distribución $N(0,1)$

aplicando la fórmula $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

La media $\mu = n * p = 100 * 0,45 = 45$;

La varianza $\sigma^2 = n * p * q = 100 * 0,45 * 0,55 = 24,75$;

σ es la desviación típica $= \sqrt{\text{La varianza } \sigma^2} = \sqrt{24,75} = 4,97494$;

$P(X \geq 35\% \text{ de } 200); P(X) \geq 70$

Aplicamos la corrección y consideramos el intervalo $[70,5, 69,5] \Rightarrow P(69,5 \leq X \leq 70,5)$

Aplicamos la corrección y consideramos el intervalo $X \geq 69,5$

Para $X = 69,5; Z = \frac{69,5 - 55,4}{6,3288} \approx 2,2279$

Obtenemos valores en la tabla para $2,2279 \Rightarrow 0,9887$;

$P(Z \geq 2,2279 \Rightarrow \text{Probabilidad } 1 - 0,9887 = 0,0113 \Rightarrow 1,13\%$

5. Ejercicio

Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 € de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420€ más que Alicia. Calcule la edad de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Solución

El reparto es directamente proporcional a las edades $\Rightarrow \frac{9450}{45} = 210 \text{ €/año}$

	Primos			
	Pablo	Alejandro	Alicia	TOTAL
Edades	a=16 años	b=15 años	c=14 años	45
Importe del premio	$(9450/45) * a$	$(9450/45) * b$	$(9450/45) * c$	
Dinero recibido	3.360 €	3.150 €	2.940 €	9.450 €

$$\begin{cases} \text{suma de edades; } a + b + c = 45 \\ \text{suma de edades (pablo + Alejandro)} = 3 + 2 \text{ edad de Alicia; } \\ \text{Pablo recibe 420€ mas que alicia; } 210a = 210c + 420; \end{cases} \begin{cases} a + b + c = 45 \\ a + b = 3 + 2c \\ 210a = 210c + 420; \end{cases} \begin{cases} a + b + c = 45 \\ a + b - 2c = 3 \\ a - c = 2; \end{cases}$$

$$a = c + 2 \text{ Sustituimos en } \begin{cases} a + b + c = 45 \\ a + b - 2c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c + 2 + b + c = 45 \\ c + 2 + b - 2c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + 2c = 45 - 2 \\ b - c = 3 - 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2c = 43 \\ b - c = 1; \end{cases} \text{ restamos } 3c = 42; c = 14; b = 15; a = 16$$

$$\text{Dinero recibido por cada primo} \begin{cases} a = 210 * 16 = 3360€ \\ b = 210 * 15 = 3150€ \\ c = 210 * 14 = 2940€ \end{cases} = 9450€$$

6. Ejercicio

Sea la función : $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

a) Comprobar si $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$

b) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$

c) Determina el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$

Solución

a) Comprobar si $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$

Teorema de Bolzano:

Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$

y cambia de signo, existe un punto c en el intervalo

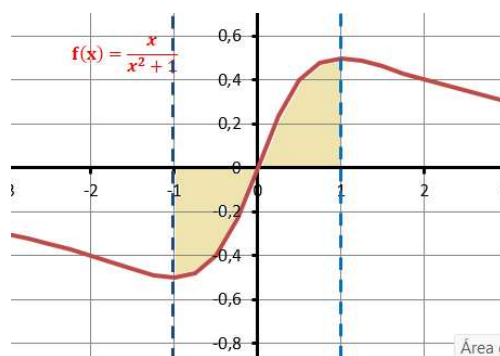
abierto (a, b) donde $f(c) = 0$;

$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ es continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

Existe un punto C donde $f(c) = 0$; Cumple el teorema



b) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - 2x \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0; (-x^2 + 1) = 0; x^2 = 1; x = \pm 1$$

La primera derivada nos indica que hay un máximo o un mínimo en $x = \pm 1$

Calculamos la segunda derivada para hallar los puntos de inflexión

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}; f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1)(2x)(-x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2x(x^2 + 1) - 2(2x)(-x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$= \frac{-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = 0; \Rightarrow 2x^3 - 6x = x(2x^2 - 6) = 0$$

$$\text{una solución } x = 0; x = \pm \sqrt{\frac{6}{2}} = \pm \sqrt{3}$$

$$\text{Calculamos } f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} \text{ Para } \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f''(x) = \frac{2 \cdot 1^3 - 6(1)}{(1^2 + 1)^3} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} < 0 \text{ máximo} \\ x = -1 \Rightarrow f''(x) = \frac{2 \cdot (-1)^3 - 6(-1)}{((-1)^2 + 1)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0 \text{ mínimo} \end{cases}$$

c) Determina el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; \text{ hallamos } \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \ln(1^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln((-1)^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 = 0;$$

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_{-1}^0 = \frac{1}{2} \ln((0)^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln((-1)^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \ln(2) = -\frac{1}{2} \ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln((1)^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln((0)^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\text{Área} = 2\left(\frac{1}{2} \ln 2\right) = \ln 2$$

7. Ejercicio

Sea el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases}$ y el punto $P(0,1,0)$

- Verifica que la recta esta contenida en el plano y el punto pertenece al plano
- Hallar la ecuación de una recta t contenida en el plano π que pase por P y que sea perpendicular a r
- Calcular una ecuación de la recta s que pase por P y sea paralela a r . Hallar el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre la recta s y t ;

Solución

- Verifica que la recta esta contenida en el plano y el punto pertenece al plano

Si la recta r está contenida en el plano cumplirá la ecuación del plano

Sustituyo los valores de $r \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases}$ en el plano $\pi \equiv x + y + z = 1 \Rightarrow 1 + \lambda + 1 - \lambda - 1 = 1; 1 = 1;$

Se cumple para todo valor de λ ;

Si el punto $P(0,1,0)$ está contenido en el plano cumplirá la ecuación del plano

Sustituyo los valores de $P(0,1,0)$ en el plano $\pi \equiv x + y + z = 1 \Rightarrow 0 + 1 + 0 = 1; 1 = 1$

El punto está contenido en el plano

- Hallar la ecuación de una recta t contenida en el plano π que pase por P y que sea perpendicular a r

$t \begin{cases} \vec{v}_{d_t} = (a, b, c) \\ P_t = (0, 1, 0) \end{cases}$ si ha de ser perpendicular a $r \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = -1 \end{cases} \begin{cases} \vec{v}_{d_r} = (1, -1, 0) \\ P_r = (1, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{d_t} \cdot \vec{v}_{d_r} = 0;$

$$\cos(\vec{v}_{d_r}, \vec{v}_{d_t}) = \frac{|\vec{v}_{d_r} \cdot \vec{v}_{d_t}|}{|\vec{v}_{d_r}| |\vec{v}_{d_t}|} = \frac{|aa_1 + bb_1 + cc_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = 0 \text{ por ser perpendiculares}$$

$$|a \cdot 1 + b(-1) + c \cdot 0| = a - b = 0; \Rightarrow a = b; \vec{v}_{d_t} = (a, b, c) = (a, a, 0) = (1, 1, 0)$$

$t \begin{cases} \vec{v}_{d_t} = (1, 1, c) \\ P_t = (0, 1, 0) \end{cases} \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 0 + c\lambda \end{cases}$ si ha de estar contenida en el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ cumplirá la ecuación

$$(0 + \lambda) + (1 + \lambda) + (0 + c\lambda) = 1; 2\lambda + c\lambda + 1 = 1;$$

$$-2\lambda = c\lambda \Rightarrow c = -2;$$

$$t \begin{cases} \vec{v}_{d_t} = (1, 1, c) \\ P_t = (0, 1, 0) \end{cases} \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 0 + c\lambda \end{cases}$$

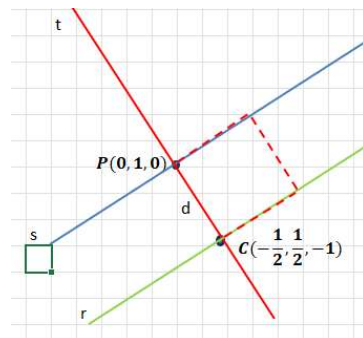
$$\text{Sustituyo } c = -2 \Rightarrow t = \begin{cases} \vec{v}_{d_t} = (1, 1, -2) \\ P_t = (0, 1, 0) \end{cases} \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

- Calcular una ecuación de la recta s que pase por P y sea paralela a r . Hallar el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre la recta s y t ;

Si s es paralela a r tendrá el mismo vector director que r ; $s = \begin{cases} \vec{v}_{d_s} = \vec{v}_{d_r} = (1, -1, 0) \\ P_s = (0, 1, 0) \end{cases} \begin{cases} x = \beta \\ y = 1 - \beta \\ z = 0 \end{cases}$

Hallar el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre la recta r y t ;

Hallamos el punto de intersección de la recta $t = \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$ y $r \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases}$



$$\text{Si se cortan } \begin{cases} \alpha = 1 + \lambda \\ 1 + \alpha = 1 - \lambda \\ 2\alpha = -1; \end{cases} \alpha = -\frac{1}{2}; \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -1 \end{cases} \text{ Punto de corte } C(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$$

$$\text{Distancia entre P y C} = \sqrt{(-\frac{1}{2} - 0)^2 + (\frac{1}{2} - 1)^2 + (0 - (-1))^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Area del cuadrado} = l * l = \sqrt{\frac{3}{2}} * \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} u^2$$

8. Ejercicio

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco se toma , al azar un pañuelo de un cajon que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro se elige al azar un pañuelo de otro cajon que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 de cuadros blancos y negros. Se pide

- Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca un color que no sea el del sombrero
- Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero, pañuelo) aparezca el color negro
- Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros

Solución

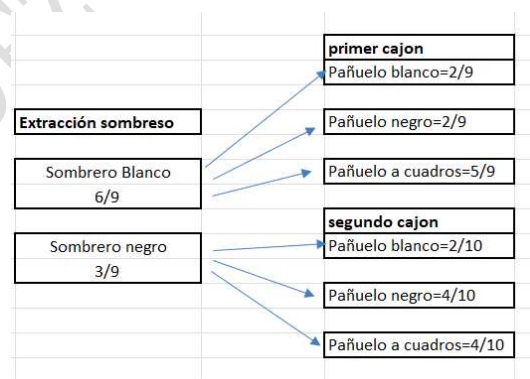
- Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca un color que no sea el del sombrero

$$P(\text{sombrero blanco}) = \frac{6}{9} * (\frac{2}{9} + \frac{5}{9}) = \frac{42}{81}$$

$$P(\text{sombrero negro})_{\text{negro}} = \frac{3}{9} * (\frac{2}{10} * \frac{4}{10}) = \frac{18}{90}$$

$$P(\text{no coincidan los colores}) = \frac{42}{81} + \frac{18}{90} = \frac{5238}{7290}$$

$$P(\text{no coincidan los colores}) = \frac{97}{135} = 71,85\%$$



- Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero, pañuelo) aparezca el color negro

$$P(\text{todos los complementos sean blancos}) = \frac{6}{9} * \frac{2}{9} = \frac{12}{81}$$

$$P(\text{almenos en uno aparezca el negro}) = 1 - \frac{12}{81} = \frac{69}{81} = \frac{23}{27} = 85,19\%$$

- Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros

Probabilidad condicionada , es la posibilidad de que ocurra un suceso A como consecuencia de ha

$$\text{tenido lugar otro B; } P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$P(\text{Pañuelo a cuadros}) = \frac{6}{9} * \frac{5}{9} + \frac{3}{9} * \frac{4}{10} = \frac{30}{81} + \frac{12}{90} = \frac{3672}{7290} =$$

$$P(\text{Sombrero negro y pañuelo a cuadro}) = \frac{3}{9} * \frac{4}{10} = \frac{12}{90}$$

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{12}{90}}{\frac{3672}{7290}} = \frac{87480}{330480} = \frac{9}{34} = 26,47\%$$

ANGEL HERNANDEZ DE CASTRO

4 Examen 2022 D

1. Ejercicio

En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías, Tres de cada 16 libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían 105 libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería

Solución

$x =$ Ensayos; $y =$ Novelas; $z =$ biografías

$$\begin{cases} \text{Tres de cada 16 libros de la estantería son ensayos} & (x + y + z) \frac{3}{16} = x; \\ \text{Las biografías junto con la tercera parte de ensayos exceden en dos a las novelas} & z + \frac{1}{3}x = 2 + y \\ \text{Si se retiran la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían 105 libros} & x - \frac{x}{2} + y - \frac{1}{5}y + z = 105 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x + 3y + 3z) = 16x; \\ 3z + x = 6 + 3y \\ 10x - 5x + 10y - 2y + 10z = 1050 \end{cases} \begin{cases} 13x - 3y - 3z = 0; \\ x - 3y + 3z = 6 \\ 5x + 8y + 10z = 1050 \end{cases} \begin{cases} 13x - 3y - 3z = 0; \\ x - 3y + 3z = 6 \\ 5x + 8y + 10z = 1050 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} E_1 \\ E_2 = E_2 + E_1 \\ E_3 = 3E_3 + 10E_1 \end{matrix} \begin{cases} 13x - 3y - 3z = 0; \\ 14x - 6y + 0 = 6 \\ 145x - 6y + 0 = 3150 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 = E_3 - E_2 \end{matrix} \begin{cases} 13x - 3y - 3z = 0; \\ 14x - 6y + 0 = 6 \\ 131x + 0 + 0 = 3144 \end{cases}$$

$$x = \frac{3144}{131} = 24 \text{ Ensayos;}$$

$$\text{Sustituimos } x \text{ en } 14x - 6y + 0 = 6 \Rightarrow 14 * 24 - 6y = 6; y = \frac{330}{6} = 55 \text{ Novelas}$$

$$\text{Sustituimos } x \text{ y } y \text{ en } 13x - 3y - 3z = 0; \Rightarrow 13 * 24 - 3 * 55 - 3z = 0; z = \frac{147}{3} = 49 \text{ biografías}$$

2. Ejercicio

$$\text{Sea la función } f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & \text{si } x < 0; \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \geq 0; \end{cases}$$

a) Estudias la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$

b) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$?

c) Calcule si existen las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

d) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtener la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

En el punto obtenido ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo clasifíquelo.

Solución

a) Estudias la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$

$$\text{Calculamos el valor de la función en } x = 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3; f(0) = 3;$$

Hallamos límites laterales por la izquierda y derecha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x^2 - 4x + 3 = 3;$$

La función no es continua en $x = 0$;

b) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$?

Para una función sea derivable en un punto ha de ser continua en ese punto.

Como la función no es continua en $x = 0$; no será derivable.

c) Calcule si existen las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

Asíntota vertical : Estará en el punto donde el denominador sea 0;

Para $x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{x}$ en $x = 0$; es una asíntota vertical

Asíntota Horizontal : Hallamos los límites de la función $f(x)$ cuando $x \Rightarrow -\infty$ y $x \Rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2x+1}{x} = 2; \text{ Cuando } x \rightarrow -\infty,$$

hay una asíntota horizontal en $y = 2$;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = x^2 - 4x + 3 = \infty;$$

Cuando $x \rightarrow +\infty$ no hay asíntota horizontal,

d) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

En el punto obtenido ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo?

En caso afirmativo clasifíquelo.

En el intervalo para $x \in (0, \infty)$ hallamos la derivada de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$;

$$f'(x) = m = \text{pendiente} = 2x - 4 = 0;$$

La pendiente es 0 en $x = 2$; en ese punto habrá un máximo o mínimo relativo

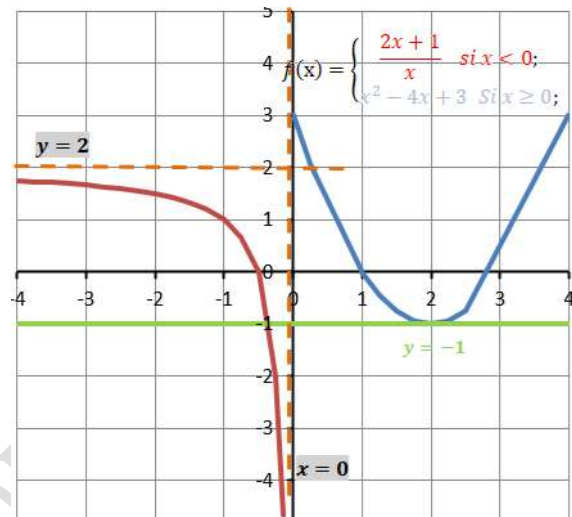
$f''(x) = -4$; en ese punto habrá un mínimo relativo.

Valores de la función en $x = 2 \Rightarrow x = 2, y = -1$;

Ecuación de la recta tangente

$$y - y_0 = m(x - x_0); y - (-1) = 0(x - 2);$$

$$y = -1$$



3. Ejercicio

Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ pertenecen al plano π

a) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentran en el plano π , encuentre los posibles puntos C y D

b) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π . Determine los otros dos vértices

Solución

$$\pi \equiv z = x \Rightarrow x - z = 0;$$

a) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentran en el plano π , encuentre los posibles puntos C y D

$$\overrightarrow{AB} = B(0, 1, 0) - A(0, -1, 0) = (0, 2, 0);$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2;$$

Dado que los puntos D y C pertenecen al plano π y son lados de un cuadrado serán de la forma

$$C(a, 1, a) \quad D(b, -1, b)$$

$$\overrightarrow{BC} = C(a, 1, a) - B(0, 1, 0) = (a, 0, a)$$

$$\text{Dado que } |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}| = 2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{a^2 + 0^2 + a^2} = \sqrt{2a^2};$$

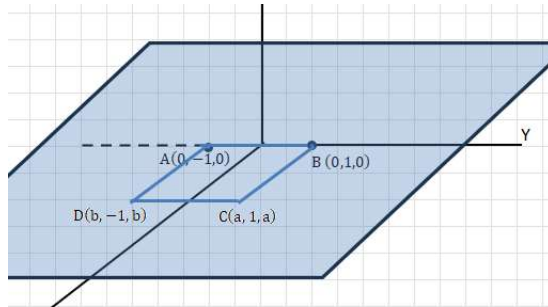
$$4 = 2a^2; a = \sqrt{2}; C(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$$

$$\overrightarrow{AD} = D(b, -1, b) - A(0, -1, 0) = (b, 0, b)$$

$$\text{Dado que } |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}| = 2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{b^2 + 0^2 + b^2} = \sqrt{2b^2};$$

$$4 = 2b^2; b = \sqrt{2}; D(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$$



b) Si los puntos A y B son vertices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π . Determine los otros dos vértices

El punto medio M de A B será

$$\frac{B(0, 1, 0) + A(0, -1, 0)}{2} \Rightarrow M(0, 0, 0);$$

El vector que une los puntos A y B

$$\overrightarrow{AB} = B(0, 1, 0) - A(0, -1, 0) = (0, 2, 0);$$

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y dado que este vector pertenece al plano, será un vector normal al plano

$$\pi \equiv z = x \Rightarrow x - z = 0; \vec{v}_{n\pi} = (1, 0, -1);$$

El vector $\vec{w}$ perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y contenido en el plano $\pi \equiv z = x \Rightarrow x - z = 0$; será

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2k + 2i; \vec{w}(2, 0, 2)$$

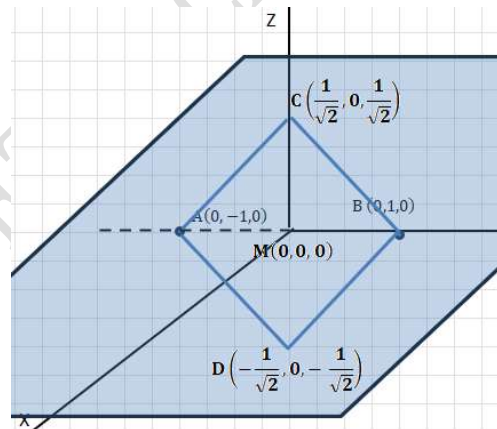
$$\text{El modulo del } |\vec{w}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{El vector unitario } \vec{u} \text{ de } \vec{w} \text{ será } \frac{(2, 0, 2)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{Queremos hallar el vector } \overrightarrow{MC} \text{ que sabemos que tiene de modulo } 1 \Rightarrow \vec{u} * 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{El punto C pedido será añadiendo al punto medio } M(0, 0, 0) \text{ el vector } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{El punto C pedido será } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y el punto D será } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



4. Ejercicio

En una comunidad autonoma tres de cada 5 alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en Matematicas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de 2º de Bachillerato

- Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos esten matriculados en Matematicas II
- Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esten matriculados en Matematicas II
- Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos , calcular aproximando la distribucion binomial mediante distribución normal la probabilidad de que mas de 60 de estos alumnos esten matriculados en Matematicas II

Solución

- Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos esten matriculados en Matemáticas II

Aplicamos la fórmula de la aplicación binomial $P(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{n-k}$;

$p = 3 \text{ de } 5 \Rightarrow$ Probabilidad de que un alumno esté matriculado en matemáticas II 60% ;

$p = 0,6$; $q = 0,4$

Número de alumnos seleccionados = 6;

Probabilidad de que 4 de 6 estén matriculado

$$P(X = 4) = \binom{6}{4} (0,6)^4 (0,4)^{6-4} = \binom{6}{4} (0,6)^4 (0,4)^2 = \frac{6!}{4!(6-4)!} (0,6)^4 (0,4)^2 = \frac{30}{2} (0,6)^4 (0,4)^2$$

$$P(X = 4) = 15 * 0,1296 * 0,16 = 0,31104$$

- Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esten matriculados en Matematicas II

$P(X \geq 1)$; Calculamos la probabilidad de que ningun alumno esté matriculado $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} (0,6)^0 (0,4)^{6-0} = \binom{6}{0} (0,6)^0 (0,4)^6 = \frac{6!}{0!(6-0)!} (0,6)^0 (0,4)^6 = 1 * 1 * (0,4)^6$$

$$P(X = 0) = 0,004096;$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,004096 = 0,995904$$

- Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos , calcular aproximando la distribucion binomial mediante distribución normal la probabilidad de que mas de 60 de estos alumnos esten matriculados en Matematicas II

$n = 120$ y $p = 0,6$; $P(Y > 60)$

Calculamos la media $\mu = 120 * 0,6 = 72$;

Calculamos la variación $\sigma^2 = n * p * q = 120 * 0,6 * 0,4 = 28,8$; $\sigma = \sqrt{28,8} = 5,36656$

Aplicamos la formula $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$;

$$P(Y > 60) \approx P\left(Z > \frac{60,5 - 72}{5,36656}\right) = P(Z > -2,1428997)$$

Calculamos en la tabla de distribución binomial $N(0,1)$

$$P(Z > -2,1428997) = P(Z < 2,1428997) = 0,9838;$$

5. Ejercicio

Se consideran las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Calcule para que valores de k tiene inversa la matriz AB . Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$;
- Calcule BA y discuta el rango en función del parámetro real k
- En el caso de $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA .

Solución

- Calcule para que valores de k tiene inversa la matriz AB . Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$;

$$AB = A_{2 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} * B_{3 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = AB_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1-1+k & 1+1+0 \\ k+1-1 & k-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix};$$

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t$$

$|A|$ = Determinante de la matriz; $(A^*)^t$ = Matriz transpuesta de la adjunta

Para que haya matriz inversa su determinante ha de ser distinto de 0 $\Rightarrow \begin{vmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{vmatrix} = k^2 - k - 2k = 0$

$$k^2 - 3k = 0; \begin{cases} k = 0 \\ k = 3 \end{cases}; \text{ Tiene inversa para valores de } k \neq 0 \text{ y } k \neq 3;$$

Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$;

$$AB = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix} \text{ para } k = 1 \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz Inversa } AB^{-1} = \frac{1}{|AB|} * (AB^*)^t \begin{cases} |AB| = -2 \\ AB^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ (AB^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}; \text{ La matriz Inversa } AB^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-2}$$

$$\text{La matriz Inversa } AB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Prueba } AB * AB^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcule BA y discuta el rango en función del parámetro real k

$$BA = B_{3 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * A_{2 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} = BA_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango de la matriz } BA \begin{vmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = -2k - 2k^2 + k^2 + 1 - 2k + 2k - 2 + k^2 + 1 + 2k = 0$$

El rango de la matriz $BA \leq 2$;

Tomo un determinante cualquiera $\begin{vmatrix} 1+k & 0 \\ 1-k & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2k = 0$; Para $k \neq -1$; el rango de la matriz es 2;

- En el caso de $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA .

$$\text{Para } k = 1 \text{ la } \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & -2 & 2 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{vmatrix}$ calculamos para que el rango sea 3 y

así tendremos un sistema incompatible

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & b & 2 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 2b + 2a - 4c \neq 0; b + a - 2c \neq 0; 2c \neq a + b;$$

$$\begin{cases} 2x = a; \\ -2y + 2z = b; \\ x - y + z = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1; \\ -2y + 2z = 1; \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

6. Ejercicio

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0; \\ x \ln(x) & \text{si } x > 0; \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$;

b) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ así como los máximos y mínimos relativos

c) Calcule $\int_1^2 f(x) dx$;

Solución

Comprobamos continuidad de la función $f(x)$ en

$x = 0$:

$$f(x) = x; f(0) = 0$$

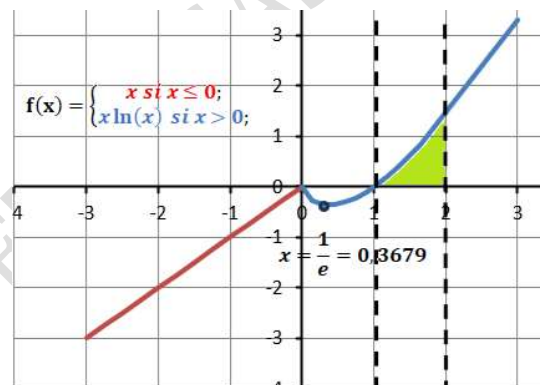
Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 * \infty \text{ indeterminado};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \text{aplicamos L'hôpital}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0;$$



Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = 0$ La función es continua en $x = 0$;

Comprobamos derivabilidad de la función $f(x)$ en $x = 0$;

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0; \\ x \ln(x) & \text{si } x > 0; \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0; \\ \ln(x) + \frac{1}{x} & \text{si } x > 0; \end{cases} f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0; \\ \ln(x) + 1 & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 1) = -\infty + 1 = -\infty$$

Al ser distinto el límite por la derecha e izquierda la función no es derivable en $x = 0$;

b) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ así como los máximos y mínimos relativos

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0; \\ \ln(x) + 1 & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

$f'(x) = 1$ si $x \leq 0$; dado que $f'(x) = 1$; la función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0]$

$f'(x) = \ln(x) + 1$ si $x > 0$; igualamos a 0 para hallar máximos y mínimos $\Rightarrow \ln(x) + 1 = 0$;

$\ln(x) = -1$; $x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,3679$; en el intervalo $(0, \infty)$ habrá un máximo o mínimo

Entre $(-\infty, 0)$;	$f(x) = x \ln(x)$; Para $x = 0,3$	$f(x) = x \ln(x)$; Para $x = \frac{1}{e}$	Entre $(0, \infty)$ $f(x) = x \ln(x)$; $f(x)$ par $x=1$
	$f'(0,3) = -0,203$ Negativo decreciente	$f'(\frac{1}{e}) = 0$ minimo	$f'(1) = 1$ Positivo (creciente)

b) Calcule $\int_1^2 f(x) dx$; $\Rightarrow \int_1^2 f(x \ln(x)) dx$;

$$\int_1^2 f(x \ln(x)) dx; \text{ hacemos una integracion por partes } \int u dv = u v - \int v du$$

Una forma de saber cual debemos elegir como u o como dv es con la palabra

I L A T E (Tipo de funcion que tendremos) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Inversa} \\ \text{Logaritmica} \\ \text{Aritmetica} \\ \text{Trigonometrica} \\ \text{Exponencial} \end{array} \right.$

$$\int u dv = u v - \int v du; \int f(x \ln(x)) dx \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \text{ derivamos } du = \frac{1}{x} d(x) \\ x d(x) = d(v) \text{ Integramos; } v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{sustituimos en la formula } \Rightarrow \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} d(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} d(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} d(x) =$$

$$\left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2} \ln 2 - \frac{2^2}{4} \right) - \left(\frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1^2}{4} \right) = (2 \ln 2 - 1) - \left(\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} \right) = 0,38629 + \frac{1}{4} = 0,63629$$

$$\int_1^2 f(x \ln(x)) dx = 0,63629$$

7. Ejercicio

$$\text{Sean las rectas } r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0; \\ x - 2z + 1 = 0; \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t; \\ y = 5 + 2t; \\ z = t \end{cases}$$

- Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas
- Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s
- Sean los puntos P y Q los puntos de las rectas r y s respectivamente, que están contenidos en el plano $z = 0$. Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q

Solución

- Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0; \\ x - 2z + 1 = 0; \end{cases} \text{ ponemos en forma paramétrica } \begin{cases} x = \beta; \\ y = -\beta - 2; \\ z = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}; r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{vd_r} = (1, -1, \frac{1}{2}); \\ P_r = (0, -2, \frac{1}{2}); \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t; \\ y = 5 + 2t; \\ z = t \end{cases}; s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{vd_s} = (-2, 2, 1); \\ P_s = (2, 5, 0); \end{cases}$$

$$\text{Comprobamos si las rectas son paralelas o coincidentes } \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{1} \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$$

Las rectas r y s no son paralelas ni coincidentes; veamos si se cortan

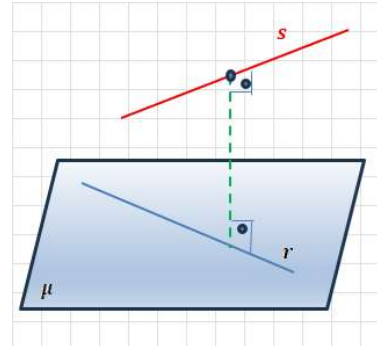
$$\begin{cases} x = \beta; \\ y = -\beta - 2; \\ z = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} x = 2 - 2t; \\ y = 5 + 2t; \\ z = t \end{cases} \text{ igualamos } \begin{cases} x = \beta = 2 - 2t; \\ y = -\beta - 2 = 5 + 2t; \\ z = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} = t \end{cases} \begin{cases} \beta = 2 - 2t; \\ \beta = -2 - 5 - 2t; \\ \beta = 2t - 1 \end{cases} \begin{cases} \beta = 2 - 2t; \\ \beta = -7 - 2t; \\ \beta = 2t - 1 \end{cases}$$

$= 2 - 2t \neq 2t - 1 \neq -7 - 2t; \Rightarrow r \text{ y } s \text{ no se cortan luego se cruzan}$

Para hallar la distancia entre dos rectas que se cruzan en el espacio hago lo siguiente:

- trazo un plano que contenga a una de las rectas y sea paralelo a la otra recta
- Dado que la recta s y el plano μ son paralelos, todos los puntos de la recta s están a la misma distancia del plano

Para definir el plano μ necesitaría dos vectores de dirección y un punto



Como contiene a la recta r y es paralelo a s

$$\begin{cases} \vec{v}_r = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right) = (2, -2, 1) = \vec{v}_\mu; \\ P_r = \left(0, -2, \frac{1}{2}\right); \\ \vec{v}_s = (-2, 2, 1) \text{ al ser paralelos } \vec{v}_\mu; \end{cases}$$

El plano será $\begin{vmatrix} x-0 & y-(-2) & z-\frac{1}{2} \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2x - 2y - 4 + 4z - 2 - 4z + 2 - 2x - 2y - 4 =$

$$\mu = -4x - 4y - 8 = 0;$$

Distancia de r a s será igual a cualquier punto de la recta s por ejemplo $P_s = (2, 5, 0)$

al plano $\mu = -4x - 4y - 8 = 0$;

Distancia de un punto a un plano $D_{s \text{ a } \mu} = \frac{|\mathbf{Ax}_0 + \mathbf{By}_0 + \mathbf{Cz}_0 + \mathbf{D}|}{\sqrt{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2}};$

$$D_{s \text{ a } \mu} = \frac{|-4 \cdot 2 - 4 \cdot 5 + 0 \cdot 0 - 8|}{\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{|-8 - 20 - 8|}{\sqrt{16 + 16}} = \frac{36}{\sqrt{32}}$$

b) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s

Dos rectas que se cruzan en el espacio;

No son paralelas ni secantes no se puede hallar un plano que contenga a las dos

c) Sean los puntos P y Q los puntos de las rectas r y s respectivamente, que están contenidos en el plano $z = 0$. Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q

Para hallar los puntos P y Q tengo que hallar los puntos de corte de las rectas con el plano

Punto de intersección de la recta $r \equiv \begin{cases} x = \beta; \\ y = -\beta - 2; \\ z = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$ y el plano $z = 0; \beta = -1; P = \begin{cases} x = -1; \\ y = -1; \\ z = 0 \end{cases} P(-1, -1, 0)$

Punto de intersección de la recta $s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t; \\ y = 5 + 2t; \\ z = t \end{cases}$ y el plano $z = 0; t = 0; Q = \begin{cases} x = 2; \\ y = 5; \\ z = 0 \end{cases} Q(2, 5, 0)$

$\vec{v}_{PQ} = ((-1 - 2), (-1 - 5), 0 - 0) = (-3, -6, 0)$ Un punto de la recta PQ puede ser $P(-1, -1, 0)$

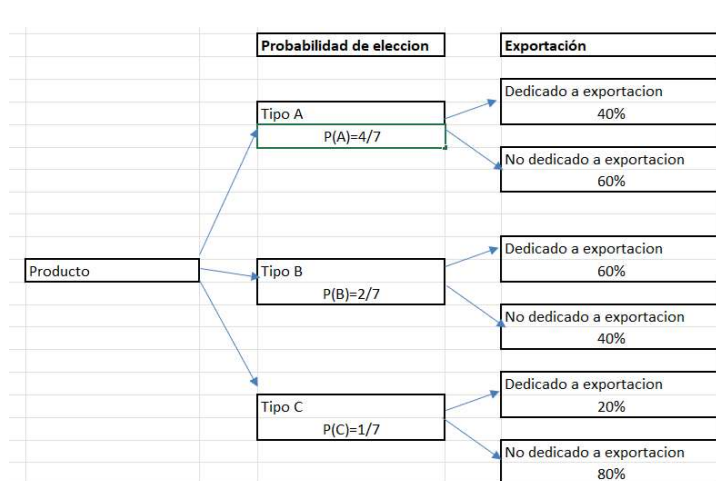
recta $PQ = \begin{cases} x = -1 - 3t; \\ y = -1 - 6t; \\ z = 0 \end{cases}$

8. Ejercicio

Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B, C. Cuatro de cada 7 productos son del tipo A, dos de cada siete son del tipo B y el resto son del tipo C

A la exportación se destinan un 40% de los productos del tipo A, un 60% del tipo B y un 20% de los productos del tipo C. Elegido un producto al azar pide:

- Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación
- Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación



- Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación

$$P = \frac{4}{7} * 0,4 + \frac{2}{7} * 0,6 + \frac{1}{7} * 0,2 = 0,22857 + 0,17143 + 0,02857 = 0,4286;$$

Probabilidad de producto dedicado a exportación = 42,86%

- Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación

$$\text{Probabilidad de que sea del tipo C dedicado a la exportación} = \frac{\text{Sea C } \frac{1}{7} * 0,2}{\text{sea dedicada a la exportación } 0,4286};$$

$$\text{Probabilidad de que sea del tipo C dedicado a la exportación} = \frac{0,02857}{0,4286} = 0,0667; 6,67\%$$