

Prueba de EBAU 2023

Contenido

1	EXAMEN 2023 A.....	2
2	EXAMEN 2023 B.....	11
3	EXAMEN 2023 C.....	22

1 Examen 2023 A

1. Ejercicio

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$ se pide

a) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro a

b) Calcular en caso de que exista, la inversa de A para a = 0;

c) Resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Para el caso a = 1;

Solución

a) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro a

$$\begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{vmatrix} = 6a^2 + a - 6a - 6 - 3a - 3 + 12a - a^2 = 5a^2 + 4a - 9 = 0;$$

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-9)}}{2 \cdot 5} = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{10} = \frac{-4 \pm 14}{10}; a = \begin{cases} a = 1; \\ a = -\frac{18}{10} \end{cases}$$

El rango de la matriz A es 3 para $a \neq 1$ y $a \neq -\frac{18}{10}$;

El rango de la matriz A es 2 para $a = 1$ y $a = -\frac{18}{10}$

b) Calcular en caso de que exista, la inversa de A para a = 0;

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ para } a = 0; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para ver si tiene inversa calculamos si el determinante |A| es distinto de 0;

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 - 3 = -9;$$

La matriz Inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t$;

|A| = Determinante de la matriz; $(A^*)^t$ = Matriz transpuesta de la adjunta

$$A^* \text{ matriz adjunta } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -9 \\ -6 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & 1 & -9 \\ -6 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-9} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{9} & -\frac{1}{9} & 1 \\ \frac{6}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{3}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

c) Resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Para el caso a = 1;

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ para } a = 1; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & y & z \\ x & 3y & -6z \\ 2x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 3y - 6z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Dado que la primera y tercera ecuación son iguales tendremos $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 3y - 6z = 0 \end{cases}$

tendré 2 ecuaciones con tres incógnitas. Para resolverlo doy a una el valor de un parámetro

$$x = \lambda \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + y + z = 0 \\ \lambda + 3y - 6z = 0 \end{cases} \begin{cases} y + z = -2\lambda \\ 3y - 6z = -\lambda \end{cases} \text{ resolvemos por igualación } \begin{cases} y = -2\lambda - z \\ y = -\frac{\lambda}{3} + \frac{6z}{3} \end{cases}$$

$$-2\lambda - z = -\frac{\lambda}{3} + \frac{6z}{3}; -6\lambda - 3z = -\lambda + 6z; -5\lambda = 9z; z = -\frac{5\lambda}{9}$$

$$\text{sustituimos en } y = -2\lambda - z; y = -2\lambda - \left(-\frac{5\lambda}{9}\right); y = -\frac{23\lambda}{9}$$

$$\text{Solución del sistema } \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{23\lambda}{9} \\ z = -\frac{5\lambda}{9} \end{cases}$$

2. Ejercicio

Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$ se pide:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ con mínima pendiente

b) Calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica y la recta $y = x$;

Solución

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ con mínima pendiente

$$f(x) = x^3 + x^2 + x; f'(x) = 3x^2 + 2x + 1;$$

pendiente de la tangente a la curva

será un mínimo o un máximo en $f'(x) = 6x + 2$;

$$\text{igualamos a 0; } 6x + 2 = 0; x = -\frac{1}{3}$$

La pendiente de la recta tangente en $x = -\frac{1}{3}$

se halla sustituyendo en $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = m$;

$$m = f'(x) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 3 * \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{3}{9} - \frac{6}{9} + \frac{9}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; m = \frac{2}{3}$$

Hallamos el valor de $y = f(x) = x^3 + x^2 + x$ en el punto $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{7}{27}$

Ecuación de la recta $y - y_0 = m * (x - x_0) \Rightarrow$

$$y - \left(-\frac{7}{27}\right) = \frac{2}{3} * \left(x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right); y + \frac{7}{27} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}; y - \frac{2}{3}x + \frac{1}{27} = 0;$$

b) Calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica y la recta $y = x$;

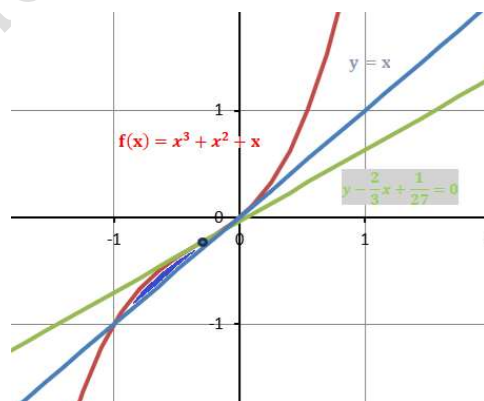
Para calcular el área hallamos los puntos de corte de la recta $y = x$ y la curva $f(x) = x^3 + x^2 + x$

sustituimos el valor de $y = x$ en $f(x) = y = x^3 + x^2 + x \Rightarrow x = x^3 + x^2 + x; 0 = x^3 + x^2$;

Puntos de corte $x^3 + x^2 = x^2(x + 1) = 0$; $\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

$$\text{Area} = \int_{-1}^0 (x^3 + x^2 + x - x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x^2) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3} \right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{12} u^2$$



3. Ejercicio

Sean los planos $\pi_1: y = x$; $\pi_2: y = x + 1$; $\pi_3: z = -1$; $\pi_4: z = 1$;

- Compruebe que son paralelos los planos π_1 y π_2 ; y los planos π_3 y π_4
- Compruebe que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4
- Hallar una recta que sea paralela a los 4 planos y pase por el punto $(1,0,2)$
- Hallar los planos perpendiculares a π_1, π_2, π_3 y π_4 que cumpan que el volumen del paralelepípedo comprendido entre los seis planos sea 1;

Solución

- Compruebe que son paralelos los planos π_1 y π_2 ; y los planos π_3 y π_4

Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos

$$\begin{cases} \pi_1: y = x; y - x = 0; \vec{vn}_{\pi_1}(-1,1,0) \\ \pi_2: y = x + 1; y - x - 1 = 0; \vec{vn}_{\pi_2}(-1,1,0) \end{cases} \text{ Dado que } \vec{vn}_{\pi_1} = \vec{vn}_{\pi_2} \text{ los planos son paralelos}$$

$$\begin{cases} \pi_3: z = -1; z + 1 = 0; \vec{vn}_{\pi_3}(0,0,1) \\ \pi_4: z = 1; z - 1 = 0; \vec{vn}_{\pi_4}(0,0,1) \end{cases} \text{ Dado que } \vec{vn}_{\pi_3} = \vec{vn}_{\pi_4} \text{ los planos son paralelos}$$

- Compruebe que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4

Dado que π_1 y π_2 son paralelos y π_3 y π_4 son paralelos, para ver si π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4 , compruebo si son perpendiculares los planos π_1 y π_3

Dos planos son perpendiculares si lo son sus vectores directores,

Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es 0 $\Rightarrow \vec{vn}_{\pi_1}(-1,1,0) * \vec{vn}_{\pi_3}(0,0,1)$

$$\vec{vn}_{\pi_1} * \vec{vn}_{\pi_3} = -1 * 0 + 1 * 0 + 0 * 1 = 0 \text{ Por lo que los planos } \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ son perpendiculares}$$

Se cumple que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4

- Hallar una recta que sea paralela a los 4 planos y pase por el punto $(1,0,2)$

Para que una recta que sea paralela a los 4 planos su vector director a de ser perpendicular a los vectores normales de los planos

$$\begin{cases} \vec{vn}_{\pi_1}(-1,1,0) \\ \vec{vn}_{\pi_3}(0,0,1) \end{cases} \text{ su vector director } \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + j \Rightarrow \vec{v}_r(1,1,0)$$

Una recta viene definida por su vector director y un punto de la misma $\begin{cases} \vec{v}_r(1,1,0) \\ P(1,0,2) \end{cases}$

$$r: \begin{cases} x = 1\lambda + 1 \\ y = 1\lambda + 0 \\ z = 0\lambda + 2 \end{cases}; r: \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

- Hallar los planos perpendiculares a π_1, π_2, π_3 y π_4

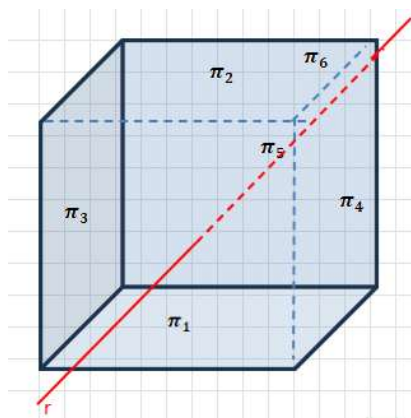
que cumpan que el volumen del paralelepípedo comprendido entre los seis planos sea 1;

El plano π_5 y π_6 será perpendicular a π_1 y π_3 y a los planos π_2 y π_4

Los planos buscados tendrán un vector normal igual al vector director de la recta perpendicular a los cuatro planos

$$\vec{v}_r(1,1,0) \Rightarrow \pi_5: x + y + 0 = D_1 \quad \pi_5: x + y - D_1 = 0$$

$$\pi_6: x + y + 0 = D_2 \quad \pi_6: x + y - D_2 = 0;$$



- La distancia entre planos π_5 y π_6 dado que son paralelos,

Calculamos la distancia de un punto de π_5 al plano π_6

Un punto de π_5 : $\pi_5: x + y - D_1 = 0$; tenemos una ecuación con dos incógnitas grado de libertad uno;

doy valores a x ejemplo $x = 0$; $\Rightarrow y = D_1$; Un punto será $P_{\pi_5}(0, D_1, 0)$.

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \lambda) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\text{Distancia de } P_{\pi_5} \text{ a } \pi_6 = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot D_1 + 0 \cdot 0 - D_2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{2}};$$

- Distancia entre los planos $\pi_1: y - x = 0$ y $\pi_2: y - x - 1 = 0$;

Hallo un punto de $\pi_1: y - x = 0$; para $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $P_{\pi_1}(0, 0, 0)$

$$\text{Distancia de } P_{\pi_1} \text{ a } \pi_2 = \frac{|0 - 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

- Distancia entre los planos $\pi_3: z + 1 = 0$ y $\pi_4: z - 1 = 0$;

Hallo un punto de $\pi_3: z + 1 = 0$; $z = -1$; $P_{\pi_3}(0, 0, -1)$

$$\text{Distancia de } P_{\pi_3} \text{ a } \pi_4 = \frac{|0 - 0 + 1 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{1^2}} = \frac{|-2|}{1} = 2;$$

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = 1; \Rightarrow D_1 - D_2 = 1; D_1 = D_2 + 1;$$

$$\text{Los planos serán } \begin{cases} \pi_5: x + y - D_1 = 0 \\ \pi_6: x + y - D_2 = 0 \end{cases} \text{ sustituyo } \begin{cases} \pi_5: x + y - (D_2 + 1) = 0 \\ \pi_6: x + y - D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Unos planos pueden ser para } D_2 = 0; \Rightarrow \begin{cases} \pi_5: x + y - (0 + 1) = 0 \\ \pi_6: x + y - 0 = 0 \end{cases}; \begin{cases} \pi_5: x + y - 1 = 0 \\ \pi_6: x + y = 0 \end{cases}$$

4. Ejercicio

En los juegos de rol, cada vez que se lanza un ataque este puede resultar en golpe crítico o no.

a) En cierto juego de rol, para determinar si un ataque es crítico o no, se tira una moneda.

Si se obtiene una cruz, el ataque no será crítico. Por el contra, si se obtiene una cara, entonces se lanza un dado de 10 caras numeradas del 1 al 10. Solo en el caso de que también se obtenga una puntuación mayor o igual a 9 en el dado el ataque es crítico. En caso contrario el ataque no será crítico. Calcular la probabilidad de que de entre 5 ataques lanzados, se obtengan 3 o menos golpes críticos.

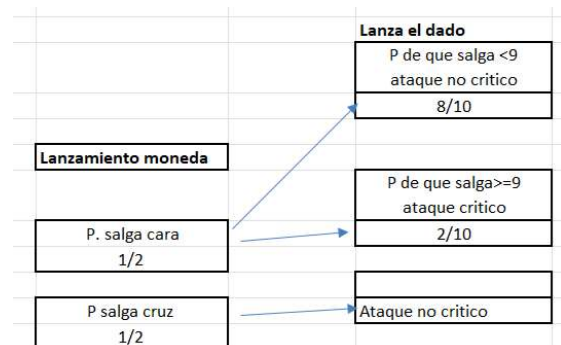
b) En otro juego de rol se sabe que la probabilidad de ataque crítico es del 20%. Aproximando mediante una distribución normal, calcule la probabilidad de que, de entre 100 ataques, se obtengan no menos de 15 y no más de 25 golpes críticos,

Solución

a) Probabilidad de que el golpe sea crítico:

$$\text{Probabilidad de que sea crítico} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{10} = 0,1;$$

$$P \text{ de que no sea crítico} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} = \frac{18}{20} = 0,9$$



Distribución binomial : Aplicamos la fórmula de la aplicación binomial $P(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{n-k}$

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{n-k}$$

Se obtengan 3 o menos ataques criticos : se puede obtener 0,1,2 o 3 ataques criticos

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} 0,1^0 * 0,9^{(5-0)} = \binom{5}{0} 0,1^0 * 0,9^5 = \frac{5!}{0!(5-0)!} 0,1^0 * 0,9^5 = 1 * 1 * 0,59 = 0,59$$

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} 0,1^1 * 0,9^{(5-1)} = \binom{5}{1} 0,1^1 * 0,9^4 = \frac{5!}{1!(5-1)!} 0,1^1 * 0,9^4 = 5 * 0,1 * 0,6561 = 0,328$$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} 0,1^2 * 0,9^{(5-2)} = \binom{5}{2} 0,1^2 * 0,9^3 = \frac{5!}{2!(5-2)!} 0,1^2 * 0,9^3 = 10 * 0,01 * 0,729 = 0,0729$$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} 0,1^3 * 0,9^{(5-3)} = \binom{5}{3} 0,1^3 * 0,9^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!} 0,1^3 * 0,9^2 = 10 * 0,001 * 0,81 = 0,0081$$

$$P \text{ de que obtengan 3 o menos ataque criticos} = 0,59 + 0,328 + 0,0729 + 0,0081 = 0,999 = 99,9\%$$

b) Probabilidad de que en 100 ataques se obtengan $\Rightarrow 15 < X < 25$

Pasamos (μ es la media y σ es la desviacion tipica) ; en otra Z que siga una distribucion $N(0,1)$

aplicando la formula $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

La media $\mu = n * p = 100 * 0,20 = 20$;

La varianza $\sigma^2 = n * p * q = 100 * 0,20 * 0,80 = 16$;

σ es la desviacion tipica $= \sqrt{\text{La varianza } \sigma^2} = \sqrt{16} = 4$

La probabilidad de que los ataque criticos estén $P(15 \leq X \leq 25)$

Aplicamos la correccion y consideramos el intervalo $[14,5, 25,5]$

$$\text{Estandarizamos valores, } \begin{cases} \text{Para } X = 14,5; Z_1 = \frac{14,5 - 20}{4} \approx -1,375 \\ \text{Para } X = 25,5; Z_1 = \frac{25,5 - 20}{4} \approx 1,375 \end{cases}; P(-1,375 \leq Z \leq 1,375)$$

Comprobamos en la tabla de distribucion normal standard

$$P(-1,375 \leq Z) = 1 - 0,9147 = 0,0853$$

$$P(Z \leq 1,375) = 0,9147;$$

$$P(-1,375 \leq Z \leq 1,375) = 0,9147 - (0,0853) = 0,8294;$$

5. Ejercicio

Un dietista veterinario ha establecido la alimentacion diaria (en terminos de grasas, carbonohidratos y proteínas de un quebrantahuesos pirenaico que se ha recogido en el hogar de recuperación de fauna. Se sabe que el quebrantahuesos necesita 500 gr de alimento al día y que necesita 2500Kcal. Tambien se sabe que cada gr de grasa proporcinoa 9kcal, cada gramo de carbohidratos 4 Kcal y cada gr de proteinas 4 Kcal. Debido a que el ave ha llegado en un estado de debilidad , el veterinario estima que el consumo de carbohidratos debe ser de 40gr mas del doble de proteinas. Determinas la cantidad de Kcal diarias que obtendra el quebrantahuesos procedentes de grasas, de carbohidratos y de proteinas

Solución

	Alimento para el quebrantahuesos			
	Grasas	Carbohidratos	Proteinas	TOTAL
Gramos	x	y	z	500
K calorías	x*9	y*4	z*4	2500
Dieta recomendada	100 g / 900Kcal	280 g / 1120Kcal	120 / 480 Kcal	500g / 2500Kcal

Datos del enunciado

$$\begin{cases} X + Y + Z = 500 \\ 9X + 4Y + 4Z = 2500; \text{ sustituimos } Y \end{cases} \begin{cases} X + (40 + 2Z) + Z = 500 \\ 9X + 4(40 + 2Z) + 4Z = 2500; \end{cases} \begin{cases} X + 3Z = 460; \\ 9X + 12Z = 2340; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 460 - 3Z; \\ \text{Sustituimos } \Rightarrow 9(460 - 3Z) + 12Z = 2340; \end{cases} 15Z = 1800; Z = 120\text{gr};$$

$$\text{Sustituimos en } X = 460 - 3Z \Rightarrow X = 460 - 3(120) = 103; X = 100\text{gr};$$

$$\text{Sustituimos en } X + Y + Z = 500 \Rightarrow 100 + Y + 120 = 500; Y = 280\text{ gr}$$

6. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 + 2x + 1}$ se pide :

- Hallar si existen las asíntotas de la gráfica $f(x)$
- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular si existe sus extremos relativos

Solución

$$f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 + 2x + 1} = \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} \\ f(x) = \frac{-(x^2 - x - 2)}{x^2 + 2x + 1} \end{cases}$$

- Hallar si existen las asíntotas de la gráfica $f(x)$

Asíntota vertical : Estará en el punto donde el denominador sea 0;

$$f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 + 2x + 1} \text{ el denominador se hace 0 para } x^2 + 2x + 1 = 0;$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 + 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = -1;$$

Hallamos el límite de la función cuando $x \rightarrow -1$;

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 + 2x + 1} = \frac{|(-1)^2 - (-1) - 2|}{(-1)^2 + 2(-1) + 1} = \frac{|0|}{0} \text{ indeterminado}$$

$$\begin{aligned} &\text{factorizamos } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 + 2x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|(x+1)(x-2)|}{(x+1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|(x-2)|}{(x+1)} = \frac{-3}{0} = \infty \end{aligned}$$

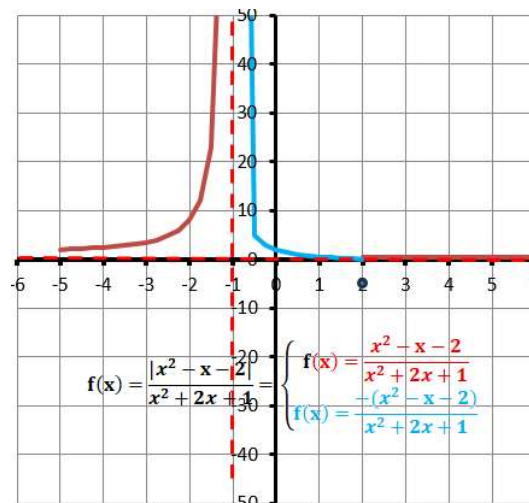
Habrà una asíntota vertical en $x = -1$;

Asíntota Horizontal :

Hallamos los límites de la función $f(x)$

cuando $x \rightarrow \pm \infty$;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) &= \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 + 2x + 1} = \\ &= \frac{|(-\infty)^2 - (-\infty) - 2|}{(-\infty)^2 + 2(-\infty) + 1} = \frac{|\infty|}{\infty} \text{ indeterminado} \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \frac{\left| \frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right|}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \frac{\left| 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right|}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1;$$

hay una asintota horizontal en $y = 1$;

Como hay asintota Horizontal no puede haber asintota oblicua

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular si existe sus extremos relativos

$$f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 + 2x + 1}; \text{ analizamos el signo en el valor absoluto } \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0;$$

vale 0 en $x = -1$ y $x = 2$

$x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ para $x^2 - x - 2 > 0$;

$x \in (-1, 2)$ para $x^2 - x - 2 < 0$; por lo que $|x^2 - x - 2| = -(x^2 - x - 2) = -x^2 + x + 2$

$$\text{funcion a trozos } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} \text{ para } x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty) \text{ para } x^2 - x - 2 > 0 \\ f(x) = \frac{-(x^2 - x - 2)}{x^2 + 2x + 1} = \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1} \text{ para } x \in (-1, 2) \text{ para } x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$$

Hallamos la derivada en cada tramo

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 1)(x^2 + 2x + 1) - (2x + 2)(x^2 - x - 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$$

$$= \frac{(2x - 1)(x + 1)(x + 1) - (2x + 2)(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)^2} = \frac{(2x - 1)(x + 1) - (2x + 2)(x - 2)}{(x + 1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + x - 1 - 2x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^3} = \frac{3x + 3}{(x + 1)^3} = \frac{3}{(x + 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-2x + 1)(x^2 + 2x + 1) - (2x + 2)(-x^2 + x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$$

$$\frac{(-2x + 1)(x + 1)(x + 1) - (2x + 2)(-x^2 + x + 2)}{(x + 1)^2} = \frac{(-2x + 1)(x + 1)(x + 1) - 2(x + 1)(-x^2 + x + 2)}{(x + 1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(-2x + 1)(x + 1) - 2(-x^2 + x + 2)}{(x + 1)^3} = \frac{-3x - 3}{(x + 1)^3} = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{3}{(x + 1)^2} \text{ para } x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty) \text{ para } x^2 - x - 2 > 0 \\ f'(x) = \frac{-3}{(x + 1)^2} \text{ para } x \in (-1, 2) \text{ para } x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$$

Intervalos de crecimiento o decrecimiento

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{3}{(x + 1)^2} \text{ para } x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty) \text{ La función es creciente} \\ f'(x) = \frac{-3}{(x + 1)^2} \text{ para } x \in (-1, 2) \text{ La función es decreciente} \end{cases}$$

Podria haber un máximo o mínimo en $x = -1$ y $x = 2$;

En $x = -1$ no puede ser máximo o mínimo porque hay una asintota. La funcion no es continua

En $x = 2 \Rightarrow f(2) = 0$; por lo que en $x = 2$ hay un minimo relativo

7. Ejercicio

Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ y Los planos $\pi: x + 2y + 2z - 1 = 0$ y $\mu: 2x + 2y + z + 4 = 0$;

se pide:

- Comprobar que los planos π y μ se cortan. Hallar el ángulo que forman
- Estudiar la posición relativa de r y π y ángulo que forman. Halla si es posible el punto de corte.
- Hallar los puntos de la recta r que equidistan de los planos π y μ

Solución

- Comprobar que los planos π y μ se cortan. Hallar el ángulo que forman

$$\begin{cases} \pi: x + 2y + 2z - 1 = 0; \vec{v}_{n_\pi}(1,2,2) \\ \mu: 2x + 2y + z + 4 = 0; \vec{v}_{n_\mu}(2,2,1) \end{cases} \text{ Comprobamos si son paralelos o coincidentes } \frac{1}{2} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{2}{1}$$

Al no ser paralelos ni coincidentes se cortan.

El ángulo que forman los planos es igual al ángulo que forman sus vectores normales

Aplicando el producto escalar:

$$\cos(\vec{v}_{n_\pi}, \vec{v}_{n_\mu}) = \frac{|\vec{v}_{n_\pi} \cdot \vec{v}_{n_\mu}|}{|\vec{v}_{n_\pi}| \cdot |\vec{v}_{n_\mu}|} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1|}{|\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}| \cdot |\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}|} = \frac{|8|}{|\sqrt{9}| \cdot |\sqrt{9}|} = \frac{8}{9}$$

$$\arccos(\vec{v}_{n_\pi}, \vec{v}_{n_\mu}) = \arccos \frac{8}{9} = 3,03^\circ$$

Los planos forman un ángulo de $3,03^\circ$

- Estudiar la posición relativa de r y π . Halla si es posible el punto de corte.

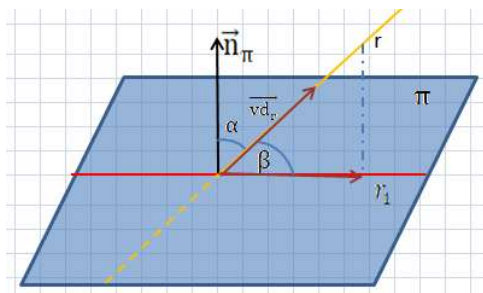
$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P(1,0,-2) \\ \vec{v}_r(3,1,-1) \end{cases} \begin{cases} x = 3\lambda + 1; \\ y = \lambda \\ z = -\lambda - 2 \end{cases}$$

El ángulo que forman los planos es igual al complementario del ángulo que forman el vector normal del plano y el vector director de la recta

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \cos \alpha = \cos(\vec{v}_{n_\pi}, \vec{v}_r) = \frac{|\vec{v}_{n_\pi} \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{v}_{n_\pi}| \cdot |\vec{v}_r|} = \\ &= \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)|}{|\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}| \cdot |\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}|} = \frac{|3|}{|\sqrt{9}| \cdot |\sqrt{11}|} = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \end{aligned}$$

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{11}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{11}} = 5,216^\circ$$

la recta r y el plano π forman un ángulo de $5,216^\circ$



Punto de corte de la recta y el plano: Al cortarse, tendrán un punto en común

Sustituimos en el plano $\pi: x + 2y + 2z - 1 = 0$ los valores de la recta $r \begin{cases} x = 3\lambda + 1; \\ y = \lambda \\ z = -\lambda - 2 \end{cases}$

$$(3\lambda + 1) + 2 \cdot \lambda + 2(-\lambda - 2) - 1 = 0; 3\lambda + 1 + 2\lambda - 2\lambda - 4 - 1 = 0; 3\lambda - 4 = 0; \lambda = \frac{4}{3}$$

$$\text{Hallamos el punto de } r \text{ para } \lambda = \frac{4}{3} \begin{cases} x = 3 \cdot \frac{4}{3} + 1; \\ y = \frac{4}{3}; \\ z = -\frac{4}{3} - 2; \end{cases} \text{ Punto de corte } (5, \frac{4}{3}, -\frac{10}{3})$$

c) Hallar los puntos de la recta r que equidistan de los planos π y μ

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \lambda) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Tomamos un punto generico de la recta $P = \begin{cases} x = 3\lambda + 1; \\ y = \lambda \\ z = -\lambda - 2 \end{cases}$ y calculamos la distancia

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \pi) = \frac{|(3\lambda + 1) + 2 * \lambda + 2(-\lambda - 2) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|3\lambda - 4|}{\sqrt{9}} = \frac{|3\lambda - 4|}{3}$$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \mu) = \frac{|2(3\lambda + 1) + 2\lambda + (-\lambda - 2) + 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|7\lambda + 4|}{\sqrt{9}} = \frac{|7\lambda + 4|}{3}$$

Dado que la distancia ha de ser la misma tendremos

$$\text{Para valores } + \text{ de los valores absolutos } \Rightarrow \frac{|3\lambda - 4|}{3} = \frac{|7\lambda + 4|}{3}; 4\lambda = -8; \lambda = -2;$$

$$\text{Sustituimos } \lambda = -2 \text{ en } P = \begin{cases} x = 3\lambda + 1; \\ y = \lambda \\ z = -\lambda - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3(-2) + 1; \\ y = (-2) \\ z = -(-2) - 2 \end{cases} \begin{cases} x = -5; \\ y = -2; \\ z = 0 \end{cases} ; P(-5, -2, 0)$$

$$\text{Para valor } - \text{ de uno de los valores absolutos } \Rightarrow \frac{-3\lambda + 4}{3} = \frac{7\lambda + 4}{3}; -4\lambda = 0; \lambda = 0;$$

$$\text{Sustituimos } \lambda = 0 \text{ en } P = \begin{cases} x = 3\lambda + 1; \\ y = \lambda \\ z = -\lambda - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3(0) + 1; \\ y = (0) \\ z = -(0) - 2 \end{cases} \begin{cases} x = 1; \\ y = 0; \\ z = -2 \end{cases} ; P(1, 0, -2)$$

8. Ejercicio

Siete de cada 20 personas que entran en cierta joyería acaban comprando algun artículo. El 75% de las personas que se marchan sin comprar nada tienen menos de 50 años. El 80% de las personas que hacen alguna compra tienen al menos 50 años. Entra un cliente en la joyería. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que sea menos de 50 años

b) Sabiendo que tien como mínimo 50 años, hallar la probabilidad de que salga de la tienda sin haber comprado nada

Solución

a) Calcular la probabilidad de que sea menos de 50 años

$$P < 50 \text{ años} = 0,35 * 0,20 + 0,65 * 0,75 = 0,07 + 0,4875 = 0,5575; P = 55,75\%$$

b) Sabiendo que tien como minimo 50 años, hallar la probabilidad de que salga de la tienda sin haber comprado nada

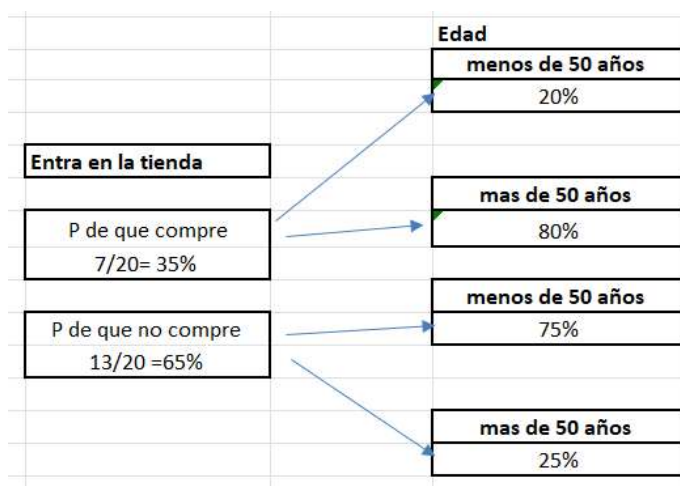
Probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso al que denominamos A, como consecuencia de que haya tenido lugar otro evento llamado B;

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) \text{ P de que no compre} = 0,65$$

$$P(B) > \text{de 50 años} = 0,35 * 0,8 + 0,65 * 0,25 = 0,28 + 0,1625 = 0,4425$$

$$P(A|B) = \frac{0,25 * 0,65}{0,4425} = \frac{0,1625}{0,4425} = 0,3672 ; P = 36,72\%$$



2 Examen 2023 B

1. Ejercicio

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide

- Calcular el determinante de $A^t A$
- Calcular el rango de BA en función de b
- Calcular B^{-1} para $b = 2$;
- Para $b = 1$, calcular B^5

Solución

- Calcular el determinante de $A^t A$

$$A_{(2 \times 3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t (\text{Matriz transpuesta de } A) = A^t_{(3 \times 2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t * A = A^t_{(3 \times 2)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} * A_{(2 \times 3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A^t A_{(3 \times 3)} = \begin{pmatrix} 4+1 & 2+0 & 0-2 \\ 2+0 & 1+0 & 0+0 \\ 0-2 & 0+0 & 0+4 \end{pmatrix}$$

$$A^t A_{(3 \times 3)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A^t A_{(3 \times 3)}| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 4 - 16 = 0;$$

- Calcular el rango de BA en función de b

$$B_{(2 \times 2)} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} * A_{(2 \times 3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = BA_{(2 \times 3)} \begin{pmatrix} 2b+0 & b+0 & 0+0 \\ 2-b & 1+0 & 0+2 \end{pmatrix} = BA_{(2 \times 3)} \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA_{(2 \times 3)} \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ El rango de la matriz será } \leq 2;$$

$$\text{Busco matrices de rango 2} \begin{cases} \begin{pmatrix} 2b & b \\ 2-b & 1 \end{pmatrix} = 2b - 2b + b^2 = 0 \Rightarrow b = 0 \\ \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 2-b & 2 \end{pmatrix} = 4b - 0 \Rightarrow b = 0; \\ \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2b - 0 \Rightarrow b = 0; \end{cases}$$

$$BA_{(2 \times 3)} \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ El rango es 2 para } b \neq 0; \text{ y rango 1 para } b = 0;$$

- Calcular B^{-1} para $b = 2$;

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \text{ Para } b = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz Inversa } A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{|A|};$$

$A^* = \text{Determinante de la matriz}; (A^*)^t = \text{Matriz transpuesta de la adjunta}$

$|B|$ determinante de $B = 4$;

$$B^* \text{ adjunta de } B \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(B^*)^t \text{ Matriz transpuesta de la adjunta} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz Inversa } B = B^{-1} = \frac{(B^*)^t}{|B|} \Rightarrow B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} \frac{2}{4} & \frac{0}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}; B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d) Para $b = 1$, calcular B^5 ;

Para $b = 1$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ esto sigue una secuencia por lo que}$$

$$B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Ejercicio

Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por 100km en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora es

$$c(v) = \begin{cases} \frac{5v}{3} & \text{si } 0 \leq v < 3 \\ 14 - 4v + \frac{v^2}{3} & \text{si } v \geq 3 \end{cases}$$

a) Si en la primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de $\frac{km}{h}$. ¿A qué velocidad ha de ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

b) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \leq v \leq 8$, ¿Cuáles serán el máximo y mínimo consumo posible del vehículo?

Solución

a) Si en la primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de $\frac{km}{h}$.

¿A qué velocidad ha de ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

$$c(v) = \begin{cases} \frac{5v}{3} & \text{si } 0 \leq v < 3 \\ 14 - 4v + \frac{v^2}{3} & \text{si } v \geq 3 \end{cases} \text{ si circula a más de 3 } \Rightarrow c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3}$$

Hallamos $c'(v) = -4 + \frac{2v \cdot 3}{9}$; Habrá un máximo o mínimo en $c'(v) = 0$;

$$-4 + \frac{2v \cdot 3}{9} = 0; \frac{-36 + 6v}{9} = 0; v = \frac{36}{6} = 6 \frac{km}{h}$$

Hallamos $c''(v) = \frac{6}{9}$ positivo, lo que implica que habrá un mínimo en $6 \frac{km}{h}$

b) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \leq v \leq 8$, ¿Cuáles serán el máximo y mínimo consumo posible del vehículo?

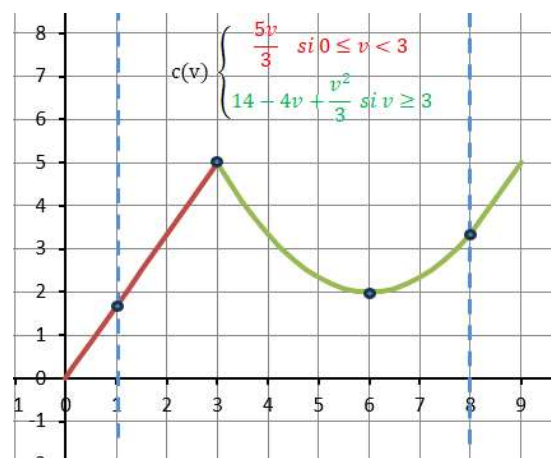
Al ser una función a trozos comprobamos si la

función es continua y derivable en $v = 3$

Comprobamos continuidad de la función

$f(x)$ en $x = 3$:

$$c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3}; c(3) = 14 - 4 \cdot 3 + \frac{3^2}{3} = 5;$$



Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 3$;

$$\lim_{v \rightarrow 3^-} \frac{5v}{3} = 5;$$

$$\lim_{v \rightarrow 3^+} 14 - 4v + \frac{v^2}{3} = 5;$$

Dado que $\lim_{v \rightarrow 3^-} \frac{5v}{3} = \lim_{v \rightarrow 3^+} 14 - 4v + \frac{v^2}{3} = c(3) = 5$; La función es continua en $C(v) = 3$;

Comprobamos derivabilidad

$$c'(v) = \begin{cases} \frac{5}{3} & \text{si } 0 \leq v < 3 \\ -4 + \frac{2v \cdot 3}{9} & \text{si } v \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{5}{3} & \text{si } 0 \leq v < 3 \\ \frac{-36 + 6v}{9} & \text{si } v \geq 3 \end{cases} =$$

Hallo límites por la derecha e izquierda de $v = 3$;

$$\lim_{v \rightarrow 3^-} \frac{5}{3} = \frac{5}{3};$$

$$\lim_{v \rightarrow 3^+} \frac{-36 + 6v}{9} = \frac{-36 + 18}{9} = \frac{-36 + 18}{9} = -2 ;$$

Dado que $\lim_{v \rightarrow 3^-} \frac{5}{3} \neq \lim_{v \rightarrow 3^+} \frac{-36 + 6v}{9}$ la función no es derivable en $v = 3$;

Dado que no es derivable para hallar el máximo y el mínimo podemos usar el **teorema de Weierstrass o teorema del valor extremo que establece "Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ alcanza al menos un máximo y un mínimo absoluto dentro de ese intervalo "**

Comprobamos el valor del consumo en los extremos del intervalo $[1, 8]$ y puntos críticos

$$c(v) = \begin{cases} \frac{5v}{3} & \text{si } 0 \leq v < 3 \\ 14 - 4v + \frac{v^2}{3} & \text{si } v \geq 3 \end{cases}$$

Para $v = 1 \Rightarrow c(v) = \frac{5v}{3} = \frac{5}{3}$ Litros por cada 100 Km

Para $v = 8 \Rightarrow c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3} = 14 - 4 \cdot 8 + \frac{8^2}{3} = \frac{10}{3}$ Litros por cada 100 Km

Para $v = 3 \Rightarrow c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3} = 14 - 4 \cdot 3 + \frac{3^2}{3} = 5$ Litros por cada 100 Km

Para $v = 6 \Rightarrow c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3} = 14 - 4 \cdot 6 + \frac{6^2}{3} = \frac{6}{3} = 2$ Litros por cada 100 Km

Consumo mínimo = valor menor de los calculados $\frac{5}{3}$ Litros por cada 100 Km

Consumo máximo = valor mayor de los calculados 5 Litros por cada 100 Km

3. Ejercicio

Sea el plano $\pi: z = 1$, los puntos $P(1,1,1)$, $Q(0,0,1)$ y la recta r que pasa por P y Q

- Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π
- Halle una recta paralela la recta r contenida en el plano $z = 0$;
- Halle una recta que pase por P tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes

Solución

- Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π

Los puntos $P(1,1,1)$, $Q(0,0,1)$ pertenecen al plano pues la variable $z = 1$

- Halle una recta paralela la recta r contenida en el plano $z = 0$;

$$\text{recta } r(P, Q) \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{v}_{d_r} = P(1,1,1) - Q(0,0,1) \end{cases} \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{v}_{d_r}(1,1,0) \end{cases} r: \begin{cases} x = \lambda + 1; \\ y = \lambda + 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Una recta } n \text{ paralela a } r \text{ tendrá su mismo vector director; } n: \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{v}_{d_r}(x,y,z) \end{cases} n: \begin{cases} x = \lambda + x; \\ y = \lambda + y; \\ z = z \end{cases}$$

Como ha de pertenecer al plano $z = 0$; implica que $z = 0$;

$$n: \begin{cases} x = \lambda + x; \\ y = \lambda + y \\ z = 0; \end{cases} \text{ como el punto } (0,0,0) \text{ pertenece al plano } z = 0; \text{ la recta será } n: \begin{cases} x = \lambda; \\ y = \lambda \\ z = 0; \end{cases}$$

- Halle una recta que pase por P tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes

Como la proyección de la recta t sobre el plano

$z = 1$ es la recta r .

El plano $z = 1$ tendrá un vector normal $\vec{v}_{n_r}(0,0,1)$

La recta s que pasa por $Q(0,0,1)$ y tiene un vector director $\vec{v}_{n_r}(0,0,1)$ cortará a la recta t en $A(a, b, c)$

$$s: \begin{cases} Q(0,0,1) \\ \vec{v}_{d_s}(0,0,1) \end{cases} s: \begin{cases} x = 0; \\ y = 0 \\ z = \lambda + 1 \end{cases} \text{ El punto } A \text{ será } A(0,0,\lambda + 1)$$

$$\text{La recta } t = \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{v}_{d_t} A(0,0,\lambda + 1) - P(1,1,1) \end{cases} = \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{v}_{d_t}(-1,-1,\lambda) \end{cases}$$

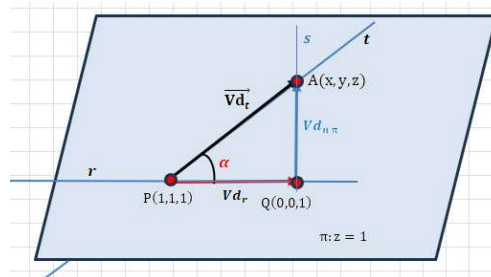
Dado que el ángulo que formará la recta r y t es $\frac{\pi}{4}$

$$\cos(\vec{v}_{d_r}, \vec{v}_{d_t}) = \frac{|\vec{v}_{d_r} * \vec{v}_{d_t}|}{|\vec{v}_{d_r}| |\vec{v}_{d_t}|} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{|(1,1,0) * (-1,-1,\lambda)|}{|\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}| |\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + \lambda^2}|}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-1 - 1|}{|\sqrt{2}| |\sqrt{2 + \lambda^2}|} = \frac{2}{|\sqrt{2}| |\sqrt{2 + \lambda^2}|}; \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2 + \lambda^2} = 4; \sqrt{2 + \lambda^2} = 2$$

$$2 + \lambda^2 = 4; \lambda^2 = 2; \lambda = \sqrt{2}$$

$$\text{La recta } t = \text{para } \lambda = \sqrt{2} \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{v}_{d_t}(-1,-1,\sqrt{2}) \end{cases}; t = \begin{cases} x = -1\lambda + 1; \\ y = -1\lambda + 1 \\ z = \sqrt{2}\lambda + 1 \end{cases} = \begin{cases} x = -\lambda + 1; \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \sqrt{2}\lambda + 1 \end{cases}$$



4. Ejercicio

Sabiendo que $P(A) = 0.5$, $P(A|B) = 0,625$ y $P(A \cup B) = 0,65$ se pide calcular:

a) $P(B)$ y $P(A \cap B)$

b) $P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$

Solución

Probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso al que denominamos A, como consecuencia de que haya tenido lugar otro evento llamado B;

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

a) $P(B)$ y $P(A \cap B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \Rightarrow 0,625 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; P(B) = \frac{P(A \cap B)}{0,625}$$

Por propiedades de probabilidades sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B); P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$\text{Sustituimos; } P(A \cap B) = 0,5 + \frac{P(A \cap B)}{0,625} - 0,65; 0,625 P(A \cap B) = -0,15 * 0,625 + P(A \cap B)$$

$$0,375 P(A \cap B) = 0,09375; P(A \cap B) = 0,25$$

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{0,625}; P(B) = \frac{0,25}{0,625} = 0,4; P(B) = 0,4$$

b) $P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}; P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}$$

La intersección de A con la unión de A y B = A;

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0,5}{0,65} = 0,769; P(A|A \cup B) = 0,76923;$$

$$P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P(A \cap B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}; P(A \cap B \cap (A \cup B)) = P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0,25}{0,65} = 0,384615; P(A \cap B|A \cup B) = 0,384615$$

5. Ejercicio

Dado el sistema
$$\begin{cases} -2x + y + kz = 1 \\ kx - y - z = 0 \\ -y + (k-1)z = 3 \end{cases}$$
 Se pide:

a) Discriminarlo en función del Parámetro k

b) Resolverlo para $k = 3$;

c) Resolverlo para $k = \frac{3}{2}$ y especificar, si es posible, una solución particular para $x = 2$;

Solución

a) Discriminarlo en función del Parámetro k

Comprobamos el rango de la matriz de coeficientes
$$\begin{cases} -2x + y + kz = 1 \\ kx - y - z = 0 \\ -y + (k-1)z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & (k-1) \end{vmatrix} = 2k - 2 - k^2 - k^2 + k + 2 = -2k^2 + 3k \text{ igualamos a } 0;$$

$$-2k^2 + 3k = 0; k = 0 \text{ y } k = \frac{3}{2}$$

Para $k \neq 0$ y $k \neq \frac{3}{2}$ el Rango matriz A = rango matriz A ampliada = n° de incógnitas = 3 =>

Sistema Compatible determinado; tiene una solución A

Estudiamos el rango de la matriz ampliada: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & k & 1 \\ k & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (k-1) & 3 \end{pmatrix}$

Para $k = 0$; $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (0-1) & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$

El rango será $\leq 3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 1 - 1 = -3$; como es distinto de 0; rango = 3

Para $k = 0$ el Rango matriz A = 2; El rango matriz A ampliada = 3; El n° de incógnitas = 3 =>

Sistema incompatible

Estudiamos el rango de la matriz ampliada: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & k & 1 \\ k & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (k-1) & 3 \end{pmatrix}$

Para $k = \frac{3}{2}$; $\begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (\frac{3}{2}-1) & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix};$

El rango será $\leq 3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix} = -3 - \frac{1}{2} - 1 + \frac{9}{2} = 0$; rango = 2;

El rango será $\leq 3 = \begin{vmatrix} -2 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix} = +6 + \frac{3}{4} - \frac{27}{4} = 0$; rango = 2;

El rango será $\leq 3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = +6 - \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = 0$; rango = 2;

Para $k = \frac{3}{2}$ el Rango matriz A = 2; El rango matriz A ampliada = 2; El n° de incógnitas = 3 => A

Sistema Compatible indeterminado : tiene infinitas soluciones

b) Resolverlo para $k = 3$;

$$\begin{cases} -2x + y + kz = 1 \\ kx - y - z = 0 \\ -y + (k-1)z = 3 \end{cases} \text{ Para } k = 3 \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + 3z = 1 \\ 3x - y - z = 0 \\ -y + (3-1)z = 3 \end{cases} \begin{cases} -2x + y + 3z = 1 & E_1 \\ 3x - y - z = 0 & E_2 \\ -y + 2z = 3 & E_3 = E_3 - E_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y + 3z = 1 & F_1 \\ 3x - y - z = 0 & F_2 \\ -y + 2z = 3 & F_3 \end{cases} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 = 3F_1 + 2F_2 \\ F_3 \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + 3z = 1 & F_1 \\ 0 + y + 7z = 3 & F_2 \\ 0 - y + 2z = 3 & F_3 = F_3 + F_2 \end{cases} \begin{cases} -2x + y + 3z = 1 \\ 0 + y + 7z = 3 \\ 0 + 0 + 9z = 6 \end{cases} ; z = \frac{6}{9} = \frac{2}{3};$$

Sustituyo en $0 + y + 7z = 3 \Rightarrow y + 7 \cdot \frac{6}{9} = 3$; $y = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$;

Sustituyo en $-2x + y + 3z = 1 \Rightarrow -2x + \left(-\frac{5}{3}\right) + 3 \cdot \frac{2}{3} = 1$; $-2x - \frac{5}{3} + \frac{6}{3} = 1$; $x = -\frac{1}{3}$;

c) Resolverlo para $k = \frac{3}{2}$ y especificar, si es posible, una solución particular para $x = 2$;

$$\text{Calculamos para } k = \frac{3}{2} \begin{cases} -2x + y + kz = 1 \\ kx - y - z = 0 \\ -y + (k-1)z = 3 \end{cases} \text{ sustituimos } \begin{cases} -2x + y + \frac{3}{2}z = 1 \\ \frac{3}{2}x - y - z = 0 \\ -y + \left(\frac{3}{2}-1\right)z = 3 \end{cases} \begin{cases} -2x + y + \frac{3}{2}z = 1 \\ \frac{3}{2}x - y - z = 0 \\ -y + \frac{1}{2}z = 3 \end{cases}$$

Sabemos que para $k = \frac{3}{2}$ el sistema es compatible e indeterminado con infinitas soluciones

$$\text{Hacemos } x = \lambda; \begin{cases} -2\lambda + y + \frac{3}{2}z = 1 \\ \frac{3}{2}\lambda - y - z = 0 \\ -y + \frac{1}{2}z = 3 \end{cases} \begin{cases} y + \frac{3}{2}z = 1 + 2\lambda \\ -y - z = -\frac{3}{2}\lambda \\ -y + \frac{1}{2}z = 3 \end{cases}$$

sumamos F_1 y F_2 ; $0 + \frac{3}{2}z - z = 1 + 2\lambda - \frac{3}{2}\lambda$; despejamos $z = 2 + \lambda$;

sustituimos en F_3 ; $-y + \frac{1}{2}z = 3 \Rightarrow -y + \frac{1}{2}(2 + \lambda) = 3$; $y = -2 + \frac{\lambda}{2}$

$$\text{Solución } \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \frac{\lambda}{2} \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \text{ Para } x = \lambda = 2 \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

6. Ejercicio

Dadas las funciones $f(x) = 2 + 2x - 2x^2$ y $g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3$ se pide:

a) Estudia la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$

b) Halla el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$; $y = g(x)$; $x = 0$ y $x = 2$

Solución

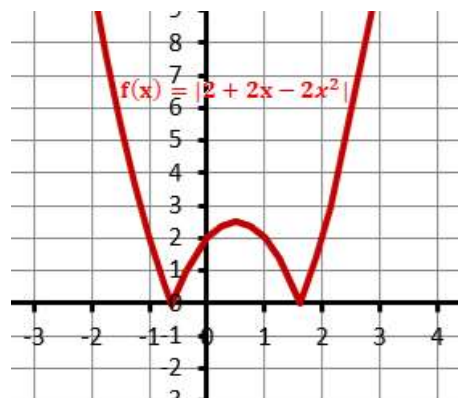
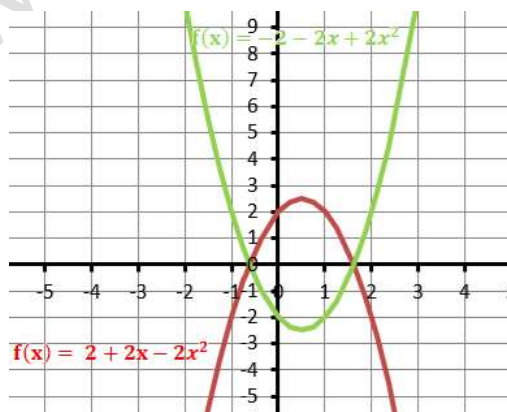
a) Estudia la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$

$$h(x) = |f(x)| = \begin{cases} 2 + 2x - 2x^2 & \text{para } f(x) \geq 0 \\ -(2 + 2x - 2x^2) & \text{para } f(x) < 0 \end{cases} \text{ para no trabajar con desigualdades}$$

1º comprobáramos en dominio y la continuidad.

Dominio es en todo $\mathbb{R}$

La función es continua para todo $\mathbb{R}$



Representamos las funciones y calculamos los puntos donde las funciones cortan al eje X

$$2 + 2x - 2x^2 = 0; x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-2) * 2}}{2(-2)} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{-4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{-4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2};$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

La función a trozos quedaría
$$\begin{cases} -(2 + 2x - 2x^2) & \text{para } x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ (2 + 2x - 2x^2) & \text{para } x > \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ -(2 + 2x - 2x^2) & \text{para } x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Derivamos las funciones
$$\begin{cases} -2 + 4x & \text{para } x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ 2 - 4x & \text{para } x > \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ -2 + 4x & \text{para } x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Comprobamos si la función es derivable en los puntos críticos

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2}} -2 + 4x = -2 + 4 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -2 + 2 - 2\sqrt{5} = -2\sqrt{5}; \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2}^+} 2 - 4x = 2 - 4 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 2 - 2 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}; \end{cases} \quad \text{No coinciden}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} 2 - 4x = 2 - 4 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 2 - 2 - 2\sqrt{5} = -2\sqrt{5}; \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2}^+} -2 + 4x = -2 + 4 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = -2 + 2 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}; \end{cases} \quad \text{No coinciden}$$

La función no es derivable en $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

b) Halla el área de la región acotada por las curvas

$$y = f(x); y = g(x); x = 0 \text{ y } x = 2$$

Hallamos los puntos de corte de las dos funciones

$$f(x) - g(x) = 0$$

$$2 + 2x - 2x^2 - (2 - 6x + 4x^2 + 2x^3)$$

$$= 2 + 2x - 2x^2 - 2 + 6x - 4x^2 - 2x^3$$

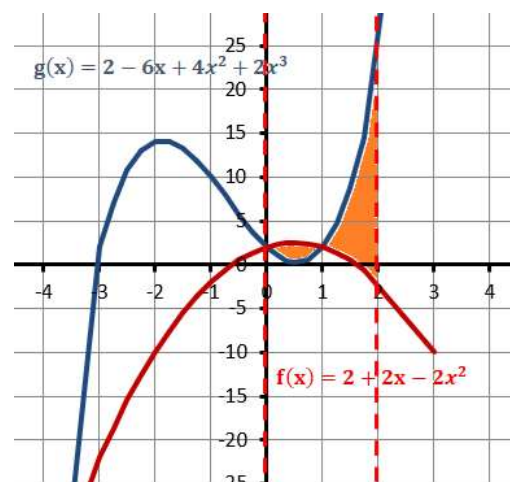
$$f(x) - g(x) = -2x^3 - 6x^2 + 8x =$$

$$x(-2x^2 - 6x + 8) = 0; \text{solución } x = 0$$

$$-2x^2 - 6x + 8 = 0;$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(-2) * 8}}{2(-2)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{-4}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + \sqrt{100}}{-4} = -4 \\ x = \frac{6 - \sqrt{100}}{-4} = 1 \end{cases}$$



puntos de corte: $x = -4$; $x = 0$; $x = 1$;

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (-2x^3 - 6x^2 + 8x)dx + \int_1^2 (-2x^3 - 6x^2 + 8x)dx \Rightarrow \\ & \int_0^1 (-2x^3 - 6x^2 + 8x)dx = \left[-\frac{2x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{2 \cdot 1^4}{4} - \frac{6 \cdot 1^3}{3} + \frac{8 \cdot 1^2}{2} = -\frac{2}{4} - \frac{6}{3} + \frac{8}{2} = \frac{3}{2}; \\ & \int_1^2 (-2x^3 - 6x^2 + 8x)dx = \left[-\frac{2x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} \right]_1^2 = -\frac{2 \cdot 2^4}{4} - \frac{6 \cdot 2^3}{3} + \frac{8 \cdot 2^2}{2} - \left(-\frac{2 \cdot 1^4}{4} - \frac{6 \cdot 1^3}{3} + \frac{8 \cdot 1^2}{2} \right) \\ & = -8 - \frac{3}{2} = -\frac{19}{2} u^2 \text{ como es su valor absoluto} = \frac{19}{2} u^2 \\ & \text{Area total} = \frac{3}{2} + \frac{19}{2} = \frac{22}{2} = 11u^2 \end{aligned}$$

7. Ejercicio

Dado el plano $\pi: x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$ Se pide:

- Hallar el punto del plano más próximo al origen de coordenadas
- Calcular la proyección del eje OZ sobre el plano π .
- Hallar la recta con dirección perpendicular a r , que esté contenida en π y que corte al eje OZ

Solución

- Hallar el punto del plano más próximo al origen de coordenadas

$$\pi: x + 3y + 2z + 14 = 0; \overrightarrow{Vn_\pi} = (1, 3, 2)$$

Calculamos una recta t perpendicular al plano y que pase por $O(0,0,0)$ $\begin{cases} P(0,0,0) \\ \overrightarrow{Vd_t}(1,3,2) \end{cases}; t = \begin{cases} x = 1\lambda; \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

El punto de intersección de esta recta t y el plano π será;

sustituimos los valores de la recta en el plano; $\pi: x + 3y + 2z + 14 = 0 \Rightarrow$

$$\lambda + 3(3\lambda) + 2(2\lambda) + 14 = 0; 14\lambda + 14 = 0; \lambda = -1;$$

$$\text{Punto más próximo} \begin{cases} x = -1; \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases} P(-1, -3, -2)$$

- Calcular la proyección del eje OZ sobre el plano π .

$$\text{Recta OZ} = \begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \\ z = \lambda; \end{cases} \text{ tomamos dos puntos de OZ ejemplo } A(0,0,0) \text{ y } B(0,0,1)$$

La proyección de OZ serán puntos de OZ contenidos en recta perpendiculares a π :

$$x + 3y + 2z + 14 = 0; \overrightarrow{Vn_\pi} = (1, 3, 2);$$

Para el punto $A(0,0,0)$ es el punto proyectado será el calculado anteriormente Punto mas próximo

$$\begin{cases} x = -1; \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases} P(-1, -3, -2); A'(-1, -3, -2)$$

Para el punto $B(0,0,1)$ hallamos la recta perpendicular al plano y que pase por B; $\begin{cases} B(0,0,1) \\ \overrightarrow{Vd_t}(1,3,2) \end{cases};$

$$s = \begin{cases} x = 1\lambda; \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda + 1 \end{cases} \text{ El punto de interseccion con el plano se halla sustituyendo } s \text{ en } \pi: x + 3y + 2z + 14 = 0$$

$$\lambda + 3\lambda + 2(2\lambda + 1) + 14 = 0; 8\lambda + 16 = 0; \lambda = -2; B' = \begin{cases} x = -2; \\ y = -6 \\ z = -4 + 1 \end{cases} = \begin{cases} x = -2; \\ y = -6 \\ z = -3 \end{cases} B'(-2, -6, -3)$$

La proyección de OZ será la recta que pasa por $A'(-1, -3, -2)$ y $B'(-2, -6, -3)$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(-1, -3, -2) \\ \overrightarrow{Vd_t} B'(-2, -6, -3) - A'(-1, -3, -2) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} P(-1, -3, -2) \\ \overrightarrow{Vd_t}(-1, -3, -1) \end{array} \right\} \text{Proyección de OZ} = \begin{cases} x = -\lambda - 1; \\ y = -3\lambda - 3 \\ z = -\lambda - 2 \end{cases}$$

c) Hallar la recta con dirección perpendicular a r , que esté contenida en π y que corte al eje OZ

La recta que corta al eje OZ, coincidirá en un punto en el eje

$$\text{La recta OZ} = \begin{cases} x = 0; \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \text{ La recta t que corte al eje OZ lo hará en un punto } (0, 0, a)$$

Dado que la recta t ha de estar contenida en el plano π el punto $(0, 0, a)$ también pertenecerá al plano $\pi: x + 3y + 2z + 14 = 0; \Rightarrow 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot a + 14 = 0; a = -7$; La recta t corta al eje OZ en $(0, 0, -7)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2; \\ z = 5 \end{cases}; r = \begin{cases} x = 2; \\ y = \beta \\ z = 5 \end{cases}; r = \begin{cases} \overrightarrow{Vd_r}(0, 1, 0) \\ P(2, 0, 5) \end{cases}$$

La recta t es perpendicular a la recta r ;

Como la recta t está contenida en el plano también será perpendicular al vector normal de plano

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{Vd_r} \text{ perpendicular a } \overrightarrow{Vd_t} \\ \overrightarrow{Vd_t} \text{ es perpendicular al } \overrightarrow{Vn_\pi} \end{array} \right\} \text{ el vector } \overrightarrow{Vd_t} \text{ es perpendicular a los vectores } \overrightarrow{Vd_r} \text{ y } \overrightarrow{Vn_\pi}$$

$$\overrightarrow{Vd_t} = \text{producto vectorial de } \overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vn_\pi} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{Vd_r}(0, 1, 0) \\ \overrightarrow{Vn_\pi}(1, 3, 2) \end{vmatrix}; \overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vn_\pi} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2i - k; \overrightarrow{Vd_t} = (2, 0, -1);$$

$$t \equiv \begin{cases} P(0, 0, -7) \\ \overrightarrow{Vd_t}(2, 0, -1) \end{cases}; t \equiv \begin{cases} x = 2\beta; \\ y = 0 \\ z = -\beta - 7 \end{cases}$$

8. Ejercicio

El 65% de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consiguen a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir y se pide:

- Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.
- Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.
- Aproximando por una distribución normal, determina la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir

Solución

- Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir

Aplicamos la fórmula de la aplicación binomial $P(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{n-k}$;

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} (0,65)^7 (0,35)^{10-7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} (0,65)^7 (0,35)^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} (0,65)^7 (0,35)^3$$

$$P(X = 7) = 120 \cdot 0,049 \cdot 0,043 = 0,2521; 25,21,3\%$$

b) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir

Probabilidad de que ninguno de ellos haya necesitado más de un intento

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} (0,65)^0 (0,35)^{10-0} = \frac{10!}{0!(10-0)!} (0,65)^0 (0,35)^{10} = 1(0,65)^0 (0,35)^{10} = 0,01346$$

$$\text{Probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento} = 1 - 0,01346 = 0,9865$$

c) Aproximando por una distribución normal, determina la probabilidad de que , dados 60 de estos universitarios , como minimo la mitad superase el examen práctico de conducir

Pasamos (μ es la media y σ es la desviación típica) ; en otra Z que siga una distribución $N(0,1)$

aplicando la formula $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

La media $\mu = n * p = 60 * 0,65 = 39$;

La varianza $\sigma^2 = n * p * q = 60 * 0,65 * 0,35 = 13,65$;

σ es la desviación típica $= \sqrt{\text{La varianza } \sigma^2} = \sqrt{13,65} = 3,69459$

Se busca $P(X \geq 30)$ Aplicamos la corrección y consideramos $P(X) \geq 29,5$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}; Z = \frac{29,5 - 39}{3,69459} = -2,571$$

$$P(Z \geq -2,571) = P(Z < 2,571); \text{ calculamos en la tabla } 2,57 \approx 0,9949$$

3 Examen 2023 C

1. Ejercicio

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio se usan tres tipos de camiones diferentes : A, B, C . Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, 24 toneladas y los de tipo C 28 toneladas. Habría que traer un camión más del tipo A para igualar el número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B suponen un séptimo de la de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad , se ha extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿ Cuanta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Solución

	Camiones			
	A	B	C	TOTAL
Capacidad	14 Toneladas	24 T	28T	45 T
Nº de camiones	x= 7 camiones	y= 5 camiones	z= 3 camiones	15

Datos del problema

Habría traer un camión más del tipo A para igualar el número de camiones restantes. $(x + 1 = y + z$;

El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B suponen un séptimo de la de mayor

$$\text{tonelaje } 10\%y * 24 = \frac{1}{7} * 28$$

Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad , se ha extraído de la

obra 302 toneladas de tierra. $x * 14 + y * 24 + z * 28 = 302$

$$\text{Datos del problema } \begin{cases} x + 1 = y + z \\ 10\% y * 24 = \frac{1}{7} z * 28 \\ x * 14 + y * 24 + z * 28 = 302 \end{cases} \begin{cases} x - y - z = -1 \\ 2,4y = 4z \\ 14x + 24y + 28z = 302 \end{cases}$$

Despejamos z de la segunda $z = 0,6y$ sustituiamos en las otra $\begin{cases} x - y - 0,6y = -1 \\ 14x + 24y + 28(0,6y) = 302 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 1,6y = -1 \\ 14x + 40,8y = 302 \end{cases} \begin{cases} x = 1,6y - 1 \\ x = \frac{302 - 40,8y}{14} \end{cases} \quad 1,6y - 1 = \frac{302 - 40,8y}{14}; 22,4y - 14 = 302 - 40,8y$$

$$y = \frac{302 + 14}{63,2}; y = 5 \text{ camiones tipo B ;}$$

Sustituimos en $x = 1,6y - 1 \Rightarrow x = 1,6 * 5 - 1$; $x = 7$ camiones tipo A

Sustituimos en $x - y - z = -1 \Rightarrow 7 - 5 - z = -1$; $z = 3$ camiones tipo C

2. Ejercicio

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ se pide:

- Estudiar si es par o impar
- Estudiar su derivabilidad en $x = 1$;
- Estudiar extremos relativos y absolutos

Solución

a) Estudiar si es par o impar

Simetría Par:

Una función presenta simetría par si $f(x) = f(-x)$. La función es simétrica respecto al eje Y

$$f(x) = f(-x); f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} = f(-x) = \sqrt[3]{(-x^2 - 1)^2} \text{ es igual simetría par}$$

Simetría Impar: Una función presenta simetría impar si $-f(x) = f(-x)$.

La función es simétrica respecto al origen

$$-f(x) = f(-x); -f(x) = -\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} \neq f(-x) = \sqrt[3]{(-x^2 - 1)^2} \text{ no presenta simetría impar}$$

b) Estudiar su derivabilidad en $x = 1$;

Comprobamos si es continua en $x = 1$;

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} \text{ Para } x = 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} = 0$$

Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} = 0;$$

Dado que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} = f(1) = 0$ la función es continua en $x = 1$;

Comprobamos derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} * 2x = \frac{4x}{3 * \sqrt[3]{(x^2 - 1)}} & \text{para } x \geq 1 \\ \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} * 2x = \frac{4x}{3 * \sqrt[3]{(x^2 - 1)}} & \text{para } x < 1 \end{cases}$$

Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x}{3 * \sqrt[3]{(x^2 - 1)}} = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x}{3 * \sqrt[3]{(x^2 - 1)}} = \infty;$$

La función no es derivable en $x = 1$;

Damos valores a x y creamos la grafica

c) Estudiar extremos relativos y absolutos

$$f'(x) = \frac{4x}{3 * \sqrt[3]{(x^2 - 1)}} = 0; 4x = 0; x = 0; \text{presentará un máximo o mínimo en } x = 0;$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3 * \sqrt[3]{(x^2 - 1)}} \text{ no está definida en } x = 1 \text{ y } x = -1;$$

Los puntos críticos serán $x = -1, x = 0$ y $x = 1$; Estudiar extrem

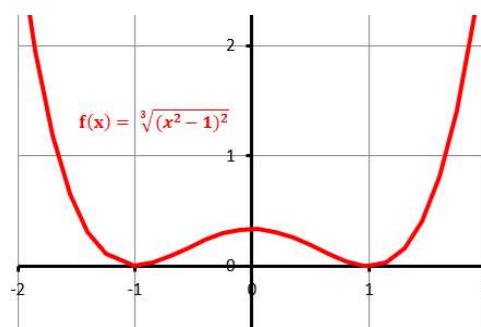
	$(-\infty, -1)$	(-1)	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
x	-2		-0,5		0,5		2
f'(x)	-	∞	+	0	-	∞	+

En $x = -1$; la función pasa de decreciente a creciente. Habrá un mínimo absoluto

En $x = 0$; la función pasa de creciente a decreciente.

Habrá un máximo relativo pues la función crece indefinidamente

En $x = 1$; la función pasa de decreciente a creciente. Habrá un mínimo absoluto



3. Ejercicio

Sean los puntos $A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, -1)$ y $C(2, 1, 0)$ se pide:

- Comprobar que forman un triángulo y hallar una ecuación del plano que los contiene
- Calcular el corte de la recta que pasa por A y B con el plano $z = 1$;
- Determinar el perímetro del triángulo

Solución

$$\overrightarrow{AB} = B(0, 2, -1) - A(1, -2, 3) = (-1, 4, -4)$$

$$\overrightarrow{AC} = C(2, 1, 0) - A(1, -2, 3) = (1, 3, -3)$$

Los vectores $\overrightarrow{AB}(-1, 4, -4)$ y $\overrightarrow{AC}(1, 3, -3)$ no son proporcionales no están alineados

$$\text{y por otro lado } \overrightarrow{AB}(-1, 4, -4) \times \overrightarrow{AC}(1, 3, -3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -12i - 4j - 3k - 4k + 12i - 3j$$

$$= 0 - 7j - 7k = (0, -7, -7) \neq 0$$

El plano que los contiene tendrá como vector normal $\overrightarrow{Vn_\pi} (0, -7, -7)$

$$\pi = 0x - 7y - 7z + D = 0;$$

podemos usar uno de los puntos $C(2, 1, 0)$ que también pertenecerán al plano

$$\text{Sustituimos } \pi = 0x - 7y - 7z + D = 0 \Rightarrow 0 \cdot 2 - 7 \cdot 1 - 7 \cdot 0 + D = 0; D = 7;$$

$$\pi: -7y - 7z + 7 = 0; y + z - 1 = 0;$$

- Calcular el corte de la recta que pasa por A y B con el plano $z = 1$;

Cualquier punto del plano $z = 1$ será de la forma $(a, b, 1)$

$$AB \equiv \begin{cases} \overrightarrow{Vd_r}(-1, 4, -4) \\ P(0, 2, -1) \end{cases} \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 4\lambda + 2 \\ z = -4\lambda - 1 \end{cases}$$

Para hallar el punto de corte con $Z = 1$; sustituimos los valores en la ecuación $z = 1$; $-4\lambda - 1 = 1$;

$$\lambda = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}; \text{ El punto de corte será para } \lambda = -\frac{1}{2} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \left(\frac{1}{2}, 0, 1 \right)$$

- Determinar el perímetro del triángulo

$$\text{Longitud } \overrightarrow{AB}(-1, 4, -4) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{33}$$

$$\text{Longitud } \overrightarrow{AC}(1, 3, -3) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(1)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}$$

$$\text{Vector } \overrightarrow{BC} = C(2, 1, 0) - B(0, 2, -1) = (2, -1, 1)$$

$$\text{Longitud } \overrightarrow{BC}(2, -1, 1) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Perímetro del triángulo} = \sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6}$$

4. Ejercicio

Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0,3$.

- Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0,5$ es independiente de A. Calcular $P(A \cup B)$
- Otro suceso C cumple $P(C|A) = 0,5$. Determinar $P(A \cap \bar{C})$
- Si se tiene otro suceso D tal que $P(\bar{A}|D) = 0,2$ y $P(D|A) = 0,5$. Calcular $P(D)$

Solución

a) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0.5$ es independiente de A. Calcular $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B); P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

$$P(A \cup B) = 0,3 + 0,5 - 0,3 * 0,5 = 0,65;$$

b) Otro suceso C cumple $P(C|A) = 0,5$. Determinar $P(A \cap \bar{C})$

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = 0,5; P(C \cap A) = 0,5 * 0,3 = 0,15;$$

$$P(A \cap C) = P(A) * P(C) = 0,15 = 0,3 * P(C); P(C) = 0,5 \Rightarrow P(\bar{C}) = 0,5$$

$$P(A \cap \bar{C}) = 0,3 * 0,5 = 0,15$$

b) Si se tiene otro suceso D tal que $P(\bar{A}|D) = 0,2$ y $P(D|A) = 0,5$. Calcular $P(D)$

$$P(\bar{A}|D) = \frac{P(D \cap \bar{A})}{P(D)} = 0,2; P(D \cap \bar{A}) = 0,2P(D)$$

$$P(D \cap \bar{A}) = P(D) * P(\bar{A}) ; \text{ dado que } P(\bar{A}) = 1 - P(A), \text{ Sustituimos}$$

$$P(D \cap \bar{A}) = P(D) * (1 - P(A)) = P(D) - P(D) * P(A) = P(D) - P(D \cap A)$$

$$P(D \cap \bar{A}) = 0,2P(D) = P(D) - P(D \cap A); P(D \cap A) = P(D) - 0,2P(D) = 0,8P(D);$$

$$\text{Por otro lado nos dicen que } P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = 0,5; P(D \cap A) = 0,3 * 0,5 = 0,15$$

$$\text{Igualamos } P(D \cap A) = 0,15 = 0,8P(D);$$

$$P(D) = \frac{0,15}{0,8} = 0,1875;$$

5. Ejercicio

$$\text{Dado el sistema } \begin{cases} (a+1)x + 4y = 0 \\ (a-1)y + z = 3; \\ 4x + 2ay + z = 3; \end{cases} \text{ Se pide:}$$

a) Discriminarlo en función del Parámetro a

b) Resolverlo para a = 3;

c) Resolverlo para a = 5;

Solución

$$\text{Comprobamos el rango de la matriz de coeficientes } \begin{cases} (a+1)x + 4y = 0 \\ (a-1)y + z = 3; \\ 4x + 2ay + z = 3; \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} (a+1) & 4 & 0 \\ 0 & (a-1) & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1^2 + 16 - 2a^2 - 2a = -a^2 - 2a + 15 \text{ igualamos a 0;}$$

$$-a^2 - 2a + 15 = 0; a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * 1 * 15}}{2(-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{-2} = \frac{2 \pm 8}{-2} = \begin{cases} a = 3; \\ a = -5; \end{cases}$$

Para $a \neq 3$ y $a \neq -5$ el Rango matriz A = rango matriz A ampliada = n° de incógnitas = 3 =>

Sistema Compatible determinado; tiene una solución A

$$\text{Estudiamos el rango de la matriz ampliada: } \begin{pmatrix} (a+1) & 4 & 0 & 0 \\ 0 & (a-1) & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para } a = 3; \begin{pmatrix} (3+1) & 4 & 0 & 0 \\ 0 & (3-1) & 1 & 3 \\ 4 & 2*3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \text{ El rango será } \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0; \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0; \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 24 + 48 - 72 = 0$$

Para $a = 3$ el Rango matriz $A = 2$; El rango matriz A ampliada $= 2$; El n° de incognitas $= 3 \Rightarrow$

Sistema Compatible indeterminado : tiene infinitas soluciones

Para $a = -5$; $\begin{pmatrix} (-5+1) & 4 & 0 & 0 \\ 0 & (-5-1) & 1 & 3 \\ 4 & 2*(-5) & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; El rango será ≤ 3

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \\ -10 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0; \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0; \begin{vmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 4 & -10 & 3 \end{vmatrix} = 72 + 48 - 120 = 0;$$

Para $a = -5$ el Rango matriz $A = 2$; El rango matriz A ampliada $= 2$; El n° de incognitas $= 3$

$\Rightarrow$ Sistema Compatible indeterminado; tiene infinitas soluciones

b) Resolverlo para $a = 5$;

Para $a = 5$ el Rango matriz $A =$ rango matriz A ampliada $= n^\circ$ de incognitas $= 3 \Rightarrow$

Sistema Compatible determinado; tiene una solución A

$$\begin{cases} (a+1)x + 4y = 0 \\ (a-1)y + z = 3; \\ 4x + 2ay + z = 3; \end{cases} \text{ Para } a = 5 \begin{cases} (5+1)x + 4y = 0 \\ (5-1)y + z = 3; \\ 4x + 2*5y + z = 3; \end{cases} \begin{cases} 6x + 4y + 0 = 0 \\ 0 + 4y + z = 3; \\ 4x + 10y + z = 3; \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{4y}{6} \\ z = 3 - 4y; \\ 4x + 10y + z = 3; \end{cases}$$

Sustituimos los valores de x e z en $4x + 10y + z = 3$; $4 * \left(-\frac{4y}{6}\right) + 10y + (3 - 4y) = 3$;

$$\left(-\frac{16y}{6}\right) + 10y + 3 - 4y = 3; 16y + 60y - 24y = 0; 52y = 0; y = 0; x = 0 \text{ y } z = 3$$

6. Ejercicio

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{2x^2}{3-3x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$ Se pide:

a) Estudiar continuidad de la función en $\mathbb{R}$

b) Calcular el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{2x^2-1}$;

c) Calcular la siguiente integral $\int_{-1}^0 f(x) dx$

Solución

a) Estudiar continuidad de la función en $\mathbb{R}$

Los puntos críticos de la función son $x = -1$ y $x = 1$

Comprobamos si es continua en $x = -1$;

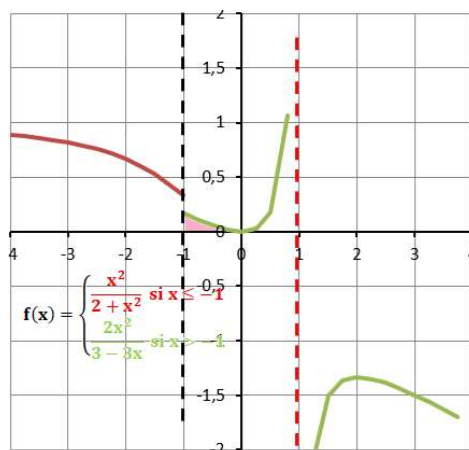
$$f(x) = \frac{x^2}{2+x^2}; f(-1) = \frac{(-1)^2}{2+(-1)^2} = \frac{1}{3}$$

Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = -1$;

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{2+x^2} = \frac{(-1)^2}{2+(-1)^2} = \frac{1}{3};$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2}{3-3x} = \frac{2(-1)^2}{3-3(-1)} = -\frac{2}{3+3} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3};$$

Dado que $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{2+x^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2}{3-3x} = f(-1) = \frac{1}{3}$ la función es continua en $x = -1$;



Comprobamos si es continua en $x = 1$;

$$f(x) = \frac{x^2}{2+x^2}; f(1) = \frac{(1)^2}{2+(1)^2} = \frac{1}{3}$$

Hallo limites por la derecha e izquierda de $x = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{2+x^2} = \frac{(1)^2}{2+(1)^2} = \frac{1}{3};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2}{3-3x} = \frac{2(1)^2}{3-3(1)} = -\frac{2}{0} = \infty;$$

Dado que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{2+x^2} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2}{3-3x}$ la función no es continua en $x = 1$;

b) b) Calcular el siguiente limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{2x^2-1}$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{2x^2-1}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}; \text{ hallamos los limites de la base y exponente};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2+x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\frac{2}{x^2} + 1}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 1) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{2x^2-1} = 1^\infty \text{ para solucionar esta indeterminación aplicamos la formula}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)^{g(x)}] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-1] \cdot g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2}{2+x^2} - 1\right] \cdot (2x^2-1)};$$

$$\frac{x^2}{2+x^2} - 1 = \frac{x^2 - 2 - x^2}{2+x^2} = \frac{-2}{2+x^2}; \text{ hallamos}$$

$$\left[\frac{x^2}{2+x^2} - 1\right] \cdot (2x^2 - 1) = \frac{-2}{2+x^2} \cdot (2x^2 - 1) = \frac{-4x^2 - 2}{2+x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2 - 2}{2+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{4x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4 - \frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x^2} + 1} = \frac{-4 - 0}{0 + 1} = -4;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = e^{-4}$$

c) Calcular la siguiente integral $\int_{-1}^0 f(x) dx$

$$\text{Como los limites son entre } 0 \text{ y } -1 \text{ será } \int_{-1}^0 \left(\frac{2x^2}{3-3x}\right) dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^0 \left(\frac{x^2}{1-x}\right) dx$$

$$\text{dividimos los polinomios } \Rightarrow \frac{2}{3} \int_{-1}^0 \left(-x - 1 + \frac{1}{1-x}\right) dx = \frac{2}{3} \left[-\frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x)\right]_{-1}^0$$

$$= \frac{2}{3} \left(-\frac{0^2}{2} - 0 - \ln(1-0)\right) - \frac{2}{3} \left(-\frac{(-1)^2}{2} - (-1) - \ln(1-(-1))\right)$$

$$= -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} + 1 - \ln 2\right) = -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - \ln 2\right)$$

$$\int_{-1}^0 \left(\frac{2x^2}{3-3x}\right) dx = -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - \ln 2\right)$$

7. Ejercicio

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi: x - z = 2$ y el punto $A(1,1,1)$ se pide:

- Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π y. Calcular su intersección, si existe.
- Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π
- Calcular el punto simétrico del punto A respecto a la recta r

Solución

- Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π y. Calcular su intersección, si existe.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}; r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda - 1 \end{cases} = \begin{cases} \vec{Vd}_r(2, 1, -2) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}$$

Comprobamos si se cortan sustituyendo los valores de la recta en el plano

$$\pi: 2\lambda + 1 - (-2\lambda - 1) = 2; 2\lambda + 1 + 2\lambda + 1 = 2; 4\lambda = 0; \lambda = 0;$$

$$\text{Se cortan en } \begin{cases} x = 2 \cdot 0 + 1 \\ y = 0 \\ z = -2 \cdot 0 - 1 \end{cases} = (1, 0, -1) \text{ Punto de intersección}$$

- Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π

$$\pi: x - z = 2; \vec{Vn}_\pi(1, 0, -1)$$

Calculamos la recta t perpendicular al plano y que pasa por A

$$t \equiv \begin{cases} \vec{Vd}_t = \vec{Vn}_\pi(1, 0, -1) \\ A_t(1, 1, 1) \end{cases}; t \equiv \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 0 + 1 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases} = \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 1 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}$$

$$\text{Calculamos el punto de intersección de la recta } t \equiv \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 1 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases} \text{ con } \pi: x - z = 2;$$

$$\lambda + 1 - (-\lambda + 1) = 2; 2\lambda = 2; \lambda = 1; \text{sustituimos en } \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 1 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 + 1 \\ y = 1 \\ z = -1 + 1 \end{cases}$$

Proyección ortogonal de A en π $(2, 1, 0)$

- Calcular el punto simétrico del punto A respecto a la recta r

Calculamos un plano perpendicular a r , que pase por A ;

el vector normal al plano será perpendicular

al vector director de r

$$\vec{Vn}_\mu = \vec{Vd}_r(2, 1, -2) \text{ y un punto del plano } \mu$$

será el punto $A(1, 1, 1)$

$$\text{Ecuación del plano } Ax + By + Cz + D = 0; 2x + y - 2z + D = 0;$$

como contiene al punto $A(1, 1, 1)$

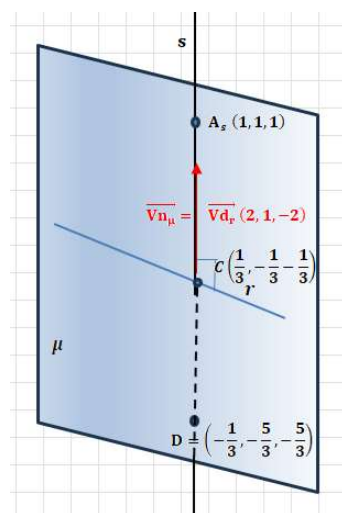
$$\text{Sustituimos en el plano } 2 \cdot 1 + 1 - 2 \cdot 1 + D = 0;$$

$$2 - 2 + 1 + D = 0; D = -1;$$

$$\text{Ecuación del plano } \mu \text{ que contiene a } A \text{ será } \mu: 2x + y - 2z - 1 = 0$$

$$\text{Calculamos el punto } C \text{ de intersección del plano } \mu: 2x + y - 2z - 1 = 0 \text{ con } r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda - 1 \end{cases}$$

$$\text{Sustituimos en } 2x + y - 2z - 1 = 0 \Rightarrow 2(2\lambda + 1) + \lambda - 2(-2\lambda - 1) - 1 = 0;$$



$$4\lambda + 2 + \lambda + 4\lambda + 2 - 1 = 0; 9\lambda + 3 = 0; \lambda = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3};$$

$$C \text{ punto de corte del plano } \mu \text{ y la recta } r; \text{ Para } \lambda = -\frac{1}{3} \begin{cases} x = 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -2\left(-\frac{1}{3}\right) - 1 \end{cases} \quad C\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Punto simétrico de A respecto a } r \text{ será } D(a, b, c) \Rightarrow \frac{A + D}{2} = C;$$

$$\frac{A(1,1,1) + D(a, b, c)}{2} = C\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right); D(a, b, c) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) - (1,1,1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

$$\text{Punto simétrico de A respecto a } r \text{ será } D = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

8. Ejercicio

La longitud de la sardina del Pacífico se puede considerar que es una variación aleatoria con distribución normal; media 175 mm y desviación típica 25,75 mm

- Una empresa envasadora de esta variedad de sardina solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16cm. ¿Que porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad esperada por la empresa envasadora?
- Hallar una longitud $t < 175\text{mm}$ tal que entre t y 175 mm esten el 18% de las sardinas capturadas
- En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15cm por considerarlas pequeñas. ¿Cual es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña.

Solución

- Una empresa envasadora de esta variedad de sardina solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16cm. ¿Que porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad esperada por la empresa envasadora?

La media $\mu = 175$; σ es la desviación típica = 25,75;

$$\text{Aplicando la formula } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Se busca $P(X \geq 160)$ *No aplicamos la reducción pues los datos nos los dan directamente en distribución normal*

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}; Z = \frac{160 - 175}{25,75} = -0,5825 \approx -0,58$$

$$P(Z \geq -0,58) = P(Z < 0,58); \text{ calculamos en la tabla } 0,58 \approx 0,7190;$$

P = 71,9% de las sardinas capturadas serán de la calidad exigida

- Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm esten el 18% de las sardinas capturadas

$$\text{Las sardinas capturadas estarán entre } P(t < X < 175) = P\left(\frac{t - 175}{25,75} < Z < 0\right) = 0,18$$

$$P(Z < 0) - P\left(Z < \frac{t - 175}{25,75}\right) = 0,18 \text{ en la tabla}; P(Z < 0) = 0,5 \Rightarrow$$

$$0,5 - P\left(Z < \frac{t - 175}{25,75}\right) = 0,18; P\left(Z < \frac{t - 175}{25,75}\right) = 0,32;$$

En la tabla vemos que $0,32 < 0,5$ lo que implica que será un número negativo

$$P\left(Z < \frac{t - 175}{25,75}\right) = P(1 - 0,32) = 0,68; \text{ busco en la tabla y el valor más próximo es } 0,6808$$

$$\Rightarrow \frac{t - 175}{25,75} = -0,47; \frac{t - 175}{25,75} = -0,47; t = 162,8975 \approx 173 \text{ mm}$$

c) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15cm por considerarlas pequeñas.

¿Cual es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

Lotes de 10 $\Rightarrow n = 10$; $P(X < 150)$; Distribución binomial $B(10, p)$

$$\text{Para calcular } P, \text{ aplicamos la fórmula } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}; P(X < 150) = P\left(Z < \frac{150 - 175}{25,75}\right) = P(Z < -0,9709)$$

$$= 1 - P(Z < 0,9709); 1 - P(Z < 0,97) = 1 - 0,8340 = 0,166;$$

$$P(X < 150) = 0,166;$$

¿Cual es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

$$\text{Aplicamos la fórmula } P(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{n-k}$$

Probabilidad de que ninguna sardina haya sido devuelta al mar $P(X = 0)$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} (0,166)^0 (1 - 0,166)^{10-0} = \frac{10!}{0!(10-0)!} (0,166)^0 (0,834)^{10-0} = 1 * 1 * 0,1628$$

$$P(X = 0) = 0,1628;$$

$$P(\text{alguna al menos una haya sido tirada al mar}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,1628 = 0,8372$$