

Prueba de EBAU 2020

Contenido

1	EXAMEN 2020 A	2
2	EXAMEN 2020 B	11
3	EXAMEN 2020 C	18

1 Examen 2020 A

1. Ejercicio

Dado la matriz A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1,1,1,1)$ y $(1,2,3,4)$ y sin ningún 0 en la tercera fila. En cada apartado se pide poner un ejemplo de matriz A

- a) La tercera fila en es combinación lineal de las dos primeras
- b) Las tres filas son linealmente independientes
- c) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado
- d) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado
- e) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible

Solución

- a) La tercera fila en es combinación lineal de las dos primeras

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \text{ Siendo } a, b, c, d \text{ distinto de } 0.$$

- a) La tercera fila en es combinación lineal de las dos primeras

$(a, b, c, d) = \alpha(1,1,1,1) + \beta(1,2,3,4)$ para todo valor de α y β ejem $\alpha = 1$ y $\beta = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

- b) Las tres filas son linealmente independientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

- c) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado

Para que sea la matriz ampliada de un sistema compatible determinado. La matriz y su ampliada tienen que tener el mismo rango (rango 3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 + 4 - 2 - 5 - 12 = -2 \text{ Rango } 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 4 - 2 - 16 - 9 = -1 \text{ Rango } 3$$

Sistema compatible determinado

- d) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}; \text{ La matriz inicial y la ampliada ha de ser de rango } 2;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 9 + 5 - 6 - 15 - 7 = 0 \text{ El rango de la matriz de los coeficientes es } 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 27 + 20 + 14 - 15 - 18 - 28 = 0 \text{ El rango de la matriz ampliada } 2$$

Cualquier combinación elegida con la ampliada dará 0 pues la tercera fila es combinación lineal de las dos filas primeras

2. Ejercicio

Dado la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ Se pide:

a) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$

b) Estudiar continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en ese punto existe un extremo relativo

c) Estudiar sus asíntotas

Solución

a) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}; f(0) = \frac{-1}{-1} = 1;$$

$$(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(1); \text{ al ser } x \geq 1 \text{ será } f(1) = \frac{1^2+1}{4 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

b) Estudiar continuidad y derivabilidad de $f(x)$

en $x = 1$ y determinar si en ese

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x); \text{ para } x < 1; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

$$\text{Aplico L'Hopital } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x); \text{ para } x \geq 1; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{4x} = \frac{1+1}{4 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La función es continua en $x = 1$

Para ver si es derivable en $x = 1$ su derivada debe coincidir por derecha e izquierda

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x+1)^2} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{2x(4x) - 4(x^2+1)}{(4x)^2} = \frac{8x^2 - 4x^2 - 4}{(4x)^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

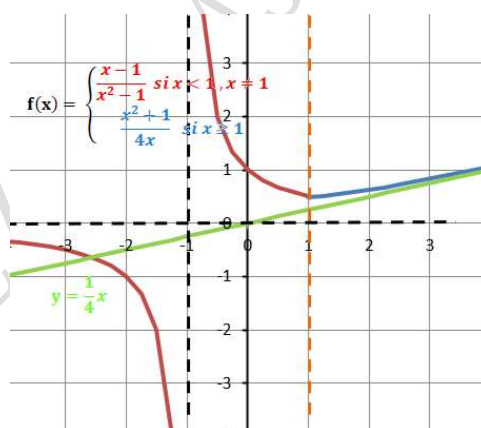
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x+1)^2} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{8x^2 - 4x^2 - 4}{(4x)^2} = \frac{4x^2 - 4}{(4x)^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x+1)^2} & \text{si } x < 1, x \neq 1 = \frac{-1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4} \\ \frac{4x^2 - 4}{(4x)^2} & \text{si } x \geq 1 = \frac{4 \cdot 1^2 - 4}{(4 \cdot 1)^2} = \frac{0}{4} \end{cases}$$

la función no es derivable en $x = 1$;

Para ver si hay un extremo en $x = 1$. Dado que no es derivable calculamos valores en el entorno

de $x = 1$



F(x) para x=-2	F(x) para x=1	F(x) para x=2
$f'(-2) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ siempre - Negativo (decreciente)	Hay un mínimo relativo	$f'(2) = \frac{4x^2-4}{(4x)^2}$ siempre + Positivo (creciente)

c) Estudiar sus asíntotas

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

la función presentaría una asíntota vertical en $x = -1$

Pero ese punto no pertenece al dominio de la función

Asíntota Horizontal

Comprobamos límites para $x = \pm\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} : \text{para } x < 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0; \text{ Asíntota Horizontal } y = 0 \text{ en } x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{x^2+1}{4x} : \text{para } x < 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{x}{4} = \infty$$

Asíntota oblicua; $y = mx + n$

En $-\infty$ no existe pues existiría asíntota Horizontal

En $+\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \frac{4x^2-4}{(4x)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \frac{4x^2-4}{16x^2} = \frac{1}{4};$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{4x} - \frac{x}{4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2+4-4x^2}{16x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{16x} = 0$$

$$\text{Asíntota oblicua; } y = \frac{1}{4}x$$

3. Ejercicio

Dado el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$; se pide:

a) Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta y al punto

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de r

c) Halla los puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo y tenga de área $\frac{3}{\sqrt{2}}$

El ángulo recto es A

Solución

a) Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta y al punto

$$r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0} \begin{cases} x = -1\lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}; \begin{cases} Vd_r = (-1, 1, 0) \\ P_r = (2, 0, -1) \end{cases}$$

Como el plano contiene a la recta un $Vd_\mu = (-1, 1, 0)$

Otro Vd_μ es el determinado por P (3,3,0) y un punto de la recta $P_r = (2, 0, -1)$

$$Vd_\mu = P(3,3,0) - P_r = (2, 0, -1) = (1, 3, 1);$$

$$\text{La ecuación del plano será } \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i - 3k - k + j = i + j - 4k;$$

$$x + y - 4z + D = 0; \Rightarrow \text{como ha de pasar por } P(3,3,0) \Rightarrow 3 + 3 - 0 + D = 0; D = -6;$$

La ecuación del plano $\mu: x + y - 4z - 6 = 0$

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de r

Sabemos que P y P' están en el plano $\mu: x + y - 4z - 6 = 0$

necesitamos calcular un plano π que sea perpendicular a r contenga a P

$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ tiene como vector normal el vector director de la recta $Vd_r = (-1, 1, 0)$

$\pi: -x + y + D = 0$

y ha de contener a P(3,3,0) $\Rightarrow -3 + 3 + D = 0; D = 0$

$\pi: -x + y = 0$

El punto de corte de la recta $r \begin{cases} x = -1\lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$ y el plano

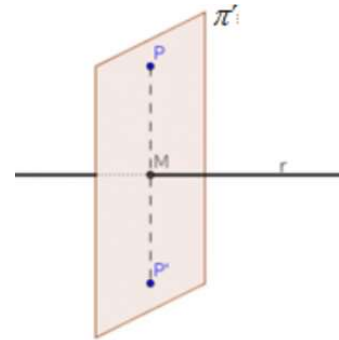
$\pi: -x + y = 0$ será M

sustituimos $-(-1\lambda + 2) + \lambda = 0; \lambda + \lambda - 2 = 0; \lambda = 1;$

Punto M = $\begin{cases} x = -1(1) + 2 \\ y = (1) \\ z = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}; M(1, 1, -1)$

El punto simétrico P'(x, y, z) $\Rightarrow P'(x, y, z) + P(3, 3, 0) = 2M(1, 1, -1) \Rightarrow$

$P'(x, y, z) = ((2 - 3), (2 - 3), (-2 - 0)) P' = (-1, -1, -2)$



C) Halla los puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo y tenga de área $\frac{3}{\sqrt{2}}$

Área del triángulo = $\frac{AB \cdot AP}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Distancia AB = x;

Distancia AP si tomo A = M $\Rightarrow$

$D(MP) = \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + (z - z_a)^2}$

$D(MP) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (0 - (-1))^2}$

$= \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3;$

Área del triángulo = $\frac{AB \cdot 3}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}; AB = \frac{2}{\sqrt{2}};$

$D(MB) = \sqrt{(1 - x_a)^2 + (1 - y_a)^2 + (-1 - (z_a))^2} = \frac{2}{\sqrt{2}}; (1 - x_a)^2 + (1 - y_a)^2 + (z_a + 1)^2 = \frac{4}{2} = 2;$

$1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2 + 1 + 2z + z^2 = 2; x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 + 2z = -1;$

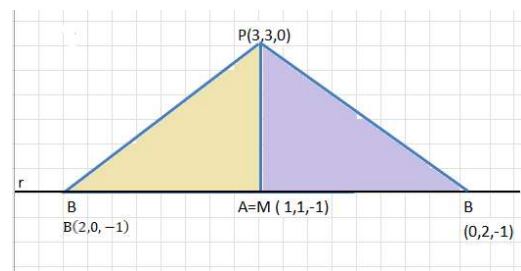
como M pertenece a r: se cumplirá $\begin{cases} x = -1\lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$

$x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 + 2z = -1$; sustituimos

$\Rightarrow (-1\lambda + 2)^2 - 2(-1\lambda + 2) + \lambda^2 - 2\lambda + (-1)^2 + 2(-1) = -1$

$\lambda^2 + 4 - 4\lambda - 4 + 2\lambda + \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 2 = -1; 2\lambda^2 - 4\lambda = 0; \lambda(2\lambda - 4) = 0; \lambda = 0 \text{ y } \lambda = 2;$

Para $\lambda = 0 \begin{cases} x = -1\lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} B(2, 0, -1)$ Para $\lambda = 2 \begin{cases} x = -1\lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} B(0, 2, -1)$

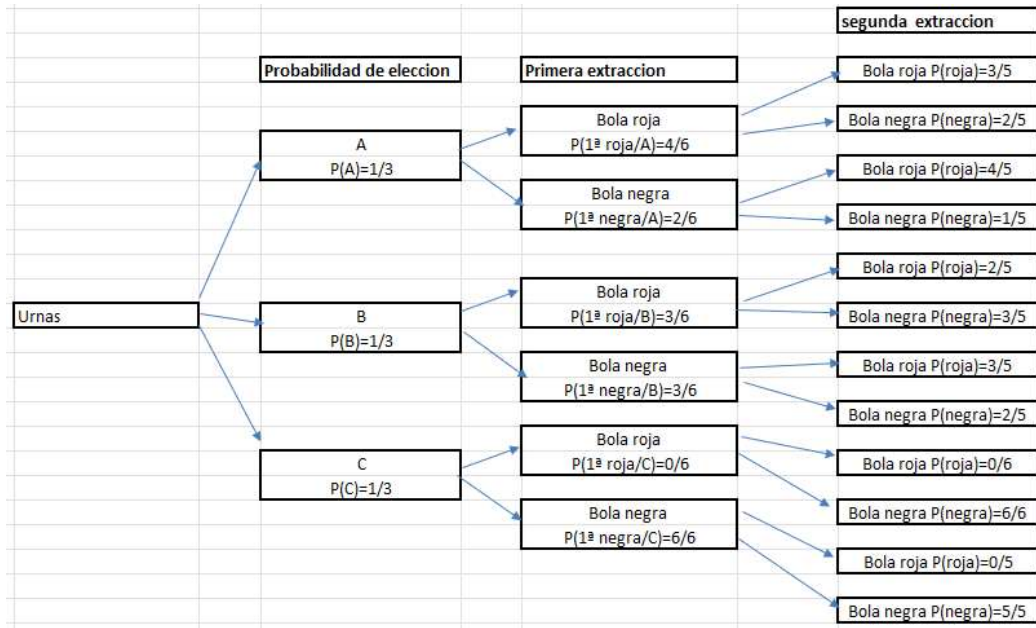


4. Ejercicio

Se tienen tres urnas A, B, C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva, sin reposición. Se pide:

- Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja
- Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda negra
- Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra

Solución



- Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja

$$P(1^a \text{ extracción sea bola roja}) = \begin{cases} P(\text{urna A}) * P(\text{bola roja}) = \frac{1}{3} * \frac{4}{6} = \frac{4}{18} \\ P(\text{urna B}) * P(\text{bola roja}) = \frac{1}{3} * \frac{3}{6} = \frac{3}{18} \\ P(\text{urna C}) * P(\text{bola roja}) = \frac{1}{3} * \frac{0}{6} = \frac{0}{18} = 0; \end{cases} = \frac{4}{18} + \frac{3}{18} + 0 = \frac{7}{18};$$

$$P(1^a \text{ extracción sea bola roja}) = \frac{7}{18}$$

- Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda negra

$$P\left(\begin{matrix} 1^a \text{ extracción roja} \\ \text{y } 2^a \text{ extracción sea bola negra} \end{matrix}\right) = \begin{cases} P(\text{urna A}) * P(1^a \text{ roja}) * P(2^a \text{ negra}) = \frac{1}{3} * \frac{4}{6} * \frac{2}{5} = \frac{8}{90} \\ P(\text{urna B}) * P(1^a \text{ roja}) * P(2^a \text{ negra}) = \frac{1}{3} * \frac{3}{6} * \frac{3}{5} = \frac{9}{90} \\ P(\text{urna C}) * P(1^a \text{ roja}) * P(2^a \text{ negra}) = \frac{1}{3} * \frac{0}{6} * \frac{5}{5} = \frac{0}{90} = 0; \end{cases}$$

$$P\left(\begin{matrix} 1^a \text{ extracción roja} \\ \text{y } 2^a \text{ extracción sea bola negra} \end{matrix}\right) = \frac{8}{90} + \frac{9}{90} = \frac{17}{90}$$

- Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra

Probabilidad condicionada de que ocurra A sabiendo que ocurre B es: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$P(A|B) = \frac{P(1^{\circ} \text{ sea roja} \cap 2^{\circ} \text{ sea negra} | B)}{P(1^{\circ} \text{ sea roja})} = \frac{\frac{17}{90}}{\frac{7}{18}} = \frac{306}{630} = 0,4857$$

5. Ejercicio

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Se pide:

a) Calcular si es posible la inversa de A

b) Calcular la matriz $A^2 - 2I$

c) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$; B^t matriz transpuesta de B

Solución:

a) Calcular si es posible la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}$$

A^{-1} Matriz inversa

$\text{Adj}(A)$ Es la matriz adjunta de A

$(\text{Adj}(A))^t$ Matriz transpuesta de la adjunta

$|A|$ Determinante de la matriz

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^t}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 2 = 1;$$

b) Calcular la matriz $A^2 - 2I$;

$$A^2 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$; B^t matriz transpuesta de B

$$D = ABB^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$D = ABB^t \text{ dada por la expresion } = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$|D| = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 + 52 - 40 - 24 = 0$$

6. Ejercicio

La potencia generada por una pila viene dada por la expresion $p(t) = 25t e^{-\frac{t^2}{4}}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento

- Calcular hacia que valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente
- Determinar la potencia maxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza
- La energia total generada por la pila hasta el instante t , $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energia produciada por la pila entre lo instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

Solución

- Calcular hacia que valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 25t e^{-\frac{t^2}{4}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25t}{\frac{t^2}{e^4}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indeterminado; aplicamos L'Hopital} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{2t}{4} e^4} = \frac{25}{\infty} = 0;$$

La potencia generada por la pila tiende a 0

- Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza

$$p(t) = \frac{25t}{e^{\frac{t^2}{4}}} \text{ Hallamos la derivada ;}$$

$$p'(t) = 25e^{\frac{t^2}{4}} - 25t \frac{2t}{4} e^{-\frac{t^2}{4}} = 25e^{\frac{t^2}{4}} - 25t \frac{t}{2} e^{-\frac{t^2}{4}} = 25e^{\frac{t^2}{4}} \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) = 0; p'(t) = \begin{cases} 25e^{\frac{t^2}{4}} = 0 \text{ no puede ser} \\ 1 - \frac{t^2}{2} = 0; t = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$1 - \frac{t^2}{2} = 0; t = \sqrt{2} \text{ en esta punto tendra la potencia maxima.}$$

La potencia en este punto será tendra potencia maxima en $t = \sqrt{2}$

$$p(t) = 25t e^{-\frac{t^2}{4}}; \text{ para } t = \sqrt{2}; p(t) = 25\sqrt{2} e^{-\frac{\sqrt{2}^2}{4}} = 25\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = 21,44 \text{ potencia}$$

- La energia total generada por la pila hasta el instante t , $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante

$E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energia produciada por la pila entre lo instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

calculamos la integral de $P(t)$ en el intervalo $(0,2)$

$$\int 25t e^{-\frac{t^2}{4}} dt = \int 25t e^{-\frac{t^2}{4}} dt \text{ integracion por cambio de variable } \begin{cases} -\frac{t^2}{4} = u; du = -\frac{t}{2} dt \\ dt = -\frac{2}{t} du \end{cases}$$

$$\int 25t e^u = 25 \int t e^u \left(-\frac{2}{t} du\right) = 25 \int -2 e^u du = -50 \int e^u du = -50 e^u + C = -50 e^{-\frac{t^2}{4}} + C$$

$$E(t) = -50 e^{-\frac{t^2}{4}} + C; \text{ dado que } e(0) = 0 \Rightarrow -50 e^{-\frac{0^2}{4}} + C = 0; -50 e^0 + C = 0; 50 = C;$$

$$\int_0^2 25t e^{-\frac{t^2}{4}} d(t) = \left[-50 e^{-\frac{t^2}{4}}\right]_0^2 = \left(-50 e^{-\frac{2^2}{4}}\right) - \left(-50 e^{-\frac{0^2}{4}}\right) = (-50 e^{-1} + 50) = -\frac{50}{e} + 50$$

7. Ejercicio

Del paralelogramo ABCD se conocen los vertices consecutivos A(1,0,-1) B(2,1,0) y C(4,3,-2) se pide:

a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC

b) Hallar las coordenadas del vertex D y el area del paralelogramo resultante.

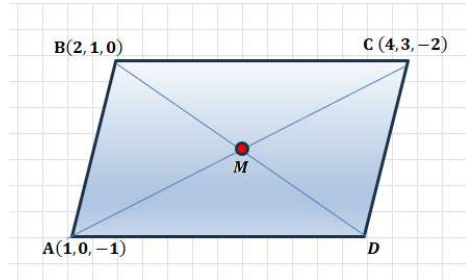
c) Calcular el coseno del angulo que forman los vertices $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

Solución

a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC

Calculamos el punto M ;

$$M = \frac{A + C}{2} = \frac{A(1,0,-1) + C(4,3,-2)}{2} = \frac{(5,3,-3)}{2}$$



$$M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Calculamos el plano que contiene al paralelogramo para ello necesitamos dos vectores directores y un punto

$$\text{Plano } \alpha \begin{cases} \overrightarrow{AB} = B(2,1,0) - A(1,0,-1) = (1,1,1) \\ \overrightarrow{AC} = C(4,3,-2) - A(1,0,-1) = (3,3,-1) \\ M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \end{cases}; \alpha = \begin{vmatrix} x - \frac{5}{2} & y - \frac{3}{2} & z + \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-x + \frac{5}{2} + 3z + \frac{9}{2} + 3y - \frac{9}{2} - 3z - \frac{9}{2} + y - \frac{3}{2} - 3x - \frac{5}{2} = -4x + 4y - \frac{3}{2} = 0;$$

$$\text{Plano } \alpha; -4x + 4y - \frac{3}{2} = 0;$$

$$\text{Recta perpendicular al plano } \alpha \text{ por punto } M \begin{cases} \overrightarrow{Vd} = (-4, 4, 0) \\ M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \end{cases} \text{ recta } r: \frac{x - \frac{5}{2}}{-4} = \frac{y - \frac{3}{2}}{4} = \frac{z + \frac{3}{2}}{0};$$

$$\text{recta } r: \frac{x - \frac{5}{2}}{-4} = \frac{y - \frac{3}{2}}{4}; \begin{cases} x = -4\lambda + \frac{5}{2}; \\ y = 4\lambda + \frac{3}{2}; \\ z = -\frac{3}{2}; \end{cases}$$

b) Hallar las coordenadas del vertex D y el area del paralelogramo resultante.

$$M = \frac{B + D}{2}; D = 2M - B = 2\left(M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right) - B(2,1,0) = (5,3,-3) - (2,1,0) = (3,2,-3); D(3,2,-3)$$

Area del paralelogramo A, B, C, D = modulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \begin{cases} \overrightarrow{AB} = B(2,1,0) - A(1,0,-1) = (1,1,1) \\ \overrightarrow{AD} = D(3,2,-3) - A(1,0,-1) = (2,2,-2) \end{cases} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -5i + 4j;$$

$$|-5i + 4j| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} u^2$$

c) Calcular el coseno del angulo que forman los vertices $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

Para calcular el coseno hallamos el producto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \alpha;$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(1,1,1) \cdot (3,3,-1)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{9+9+1}} = \frac{3+3-1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{57}} = 0,662266; \alpha = 48,527^\circ$$

8. Ejercicio

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y .

Sabemos que $P(X) = 0,4$ y que $P(X \cap \bar{Y}) = 0,08$. Se pide:

a) Calcular $P(Y)$

b) Calcular $P(X \cup Y)$

c) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideremos que el experimento es un éxito cuando no sucede X y repetimos el experimento 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces

Solución

a) Calcular $P(Y)$

La probabilidad de la unión de dos sucesos cualesquiera

$$P(X \cap Y) = P(X) * P(Y) \Rightarrow 0,4 * P(Y)$$

$$P(X \cap \bar{Y}) = P(X) - P(X \cap Y); P(X \cap \bar{Y}) = 0,4 - 0,08 = 0,32;$$

$$\text{Sustituimos } \Rightarrow P(X \cap Y) = P(X) * P(Y) \Rightarrow 0,32 = 0,4 * P(Y); P(Y) = \frac{0,32}{0,4} = 0,8$$

b) Calcular $P(X \cup Y)$

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y); P(X \cup Y) = 0,4 + 0,8 - 0,32 = 0,88; P(X \cup Y) = 0,88$$

c) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideremos que el experimento es un éxito cuando no sucede X y repetimos el experimento 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces

Será una binomial $X = \text{no deseado}, \bar{X} = \text{deseado}$;

Probabilidad de $X = 0,4$; Probabilidad de $\bar{X} = 1 - 0,4 = 0,6$; $n = \text{numero de repeticiones } 8$

binomial $Z = \text{numero exitos en 8 repeticiones } Z(0,6, 8)$

$$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - (P(Z = 0) + P(Z = 1)) = 1 - \left(\binom{8}{0} 0,6^0 0,4^{10-0} + \binom{8}{1} 0,6^1 0,4^{10-1} \right)$$

$$P(Z \geq 2) = 1 - \left(\binom{8}{0} 0,6^0 0,4^8 + \binom{8}{1} 0,6^1 0,4^7 \right) = 1 - \left(\frac{8!}{0!(8-0)!} 0,4^{10} + \frac{8!}{1!(8-1)!} 0,6^1 0,4^7 \right)$$

$$P(Z \geq 2) = 1 - (0,4^{10} + 8 * 0,6^1 0,4^7) = 1 - (0,0001 + 0,00786) = 1 - 0,00796 = 0,992$$

Probabilidad de tener éxito al menos 2 veces = 0,992

2 Examen 2020 B

1. Ejercicio

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} (k+1)x + 3y + kz = 1 \\ 3x + (k+1)y + 2z = k-1 \\ kx + 2y + kz = 2 \end{cases}$$
 Se pide:

a) Discutir el sistema en funcion de los valores de k

b) Resolver el sistema para $k = -3$;

Solución:

a) Discutir el sistema en funcion de los valores de k

$$\begin{cases} (k+1)x + 3y + kz = 1 \\ 3x + (k+1)y + 2z = k-1 \\ kx + 2y + kz = 2 \end{cases} \quad \text{hallamos el rango de la matriz } \begin{pmatrix} k+1 & 3 & k \\ 3 & k+1 & 2 \\ k & 2 & k \end{pmatrix}$$

Si el determinante = 0 en rango de la matriz sera ≤ 2

$$\begin{vmatrix} k+1 & 3 & k \\ 3 & k+1 & 2 \\ k & 2 & k \end{vmatrix} = k^3 + 2k^2 + k + 6k + 6k - k^3 - k^2 - 9k - 4k - 4 = k^2 - 4 = 0$$

$K = \sqrt{4}$; $\begin{cases} k = \pm 2 \text{ el rango de la matriz es 2 y el de la ampliada 3 (S. compatible indeterminado)} \\ \text{Para } k \neq \pm 2 \text{ el rango de la matriz y su ampliada es 3 (S. Compatible determinado)} \end{cases}$

b) Resolver el sistema para $k = -3$;

$$\begin{cases} (k+1)x + 3y + kz = 1 \\ 3x + (k+1)y + 2z = k-1 \\ kx + 2y + kz = 2 \end{cases} \quad \text{para } k = -3 \Rightarrow \begin{cases} -2x + 3y - 3z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -4 \\ -3x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 3y - 3z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -4 \\ -3x + 2y - 3z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 \\ F_2 = 2F_2 + 3F_1 \\ F_3 = 2F_3 - 3F_1 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 3y - 3z = 1 \\ 0 + 5y - 5z = -5 \\ 0 + 5y - 3z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = F_3 - F_2 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 3y - 3z = 1 \\ 0 + 5y - 5z = -5 \\ 0 \quad 0 + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 3y - 3z = 1; & -2x + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 1; & x = -2; \\ & 0 + 5y - 5 \cdot 2 = -5; & y = 1 \\ & z = 2; \end{cases}$$

Solucion de la matriz para $k = -3$ igual a $(-2, 1, 2)$

2. Ejercicio

Dado la funcion $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x + x \cos x$ se pide:

a) Estudiar el crecimiento en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Justifica que la funcion se anula en algun punto del intervalo. Justifica que ese punto es único.

b) Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

Solución:

a) Estudiar el crecimiento en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

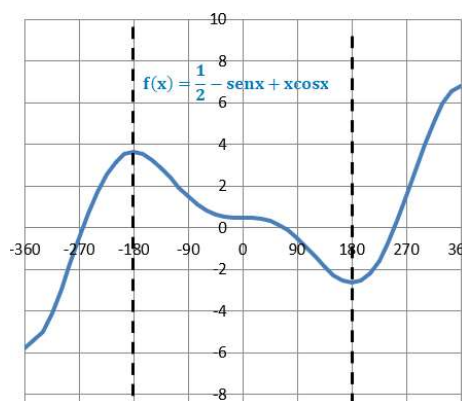
Justifica que la funcion se anula en algun punto

$$f'(x) = 0 - \cos x + 1 \cos x + x(-\sin x) =$$

$$f'(x) = -x \sin x = 0;$$

habra un maximo o minimo en ;

$$\begin{cases} x = 0; \\ \sin x = 0; \Rightarrow x = \pm 180^\circ = \pi; \end{cases}$$



En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $f'x = -x \operatorname{sen} x$; es siempre negativo decreciente

$$\begin{aligned} \text{b) Calcula } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x + x \cos x \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \left[\frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [x \operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{x}{2} + \cos x + x \operatorname{sen} x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ \left[\frac{x}{2} + 2 \cos x + x \operatorname{sen} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} &= \frac{\pi}{2} + 2 \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \frac{0}{2} - 2 \cos 0 - 0 \operatorname{sen} 0 = \frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{2} - 0 - 2 - 0 \\ &= \frac{3\pi}{4} - 2; \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x + x \cos x \right) dx = \frac{3\pi - 8}{4}$$

3. Ejercicio

Se consideran los puntos $A(0, -4, 2)$, $B(3, -2, 3)$ y $C(-1, -3, 3)$ se pide:

- Comprobar que el triángulo de vértices A, B, C es rectángulo, identifica los catetos y la hipotenusa.
- Determina una ecuación del plano π que contiene a los tres puntos.
- Calcula el punto simétrico de A respecto a la recta que pasa por los puntos B y C;

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = B(3, -2, 3) - A(0, -4, 2) = (3, 2, 1)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{AC} = C(-1, -3, 3) - A(0, -4, 2) = (-1, 1, 1)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{BC} = C(-1, -3, 3) - B(3, -2, 3) = (-4, -1, 0)$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{17}$$

Teorema de Pitágoras: $(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{14})^2 = (\sqrt{17})^2$ Hipotenusa $\overrightarrow{AB}$ catetos $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$

- Determina una ecuación del plano π que contiene a los tres puntos.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+4 & z-2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - y - 4 + 3z - 6 + 2z - 4 - x - 3y - 12 = x - 4y + 5z - 26 = 0;$$

$$\pi: x - 4y + 5z - 26 = 0$$

- Calcula el punto simétrico de A respecto a la recta que pasa por los puntos B y C;

$$\text{Recta que pasa por los puntos B y C; } \overrightarrow{d}(-4, -1, 0); P(3, -2, 3) \begin{cases} x = -4\lambda + 3 \\ y = -\lambda - 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\text{Un plano } Ax + By + Cz + D = 0 \text{ perpendicular a la recta } \begin{cases} x = -4\lambda + 3 \\ y = -\lambda - 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow -4x - y + D = 0;$$

$$-4x - y + D = 0 \text{ que pasa por } A(0, -4, 2) \Rightarrow -4 \cdot 0 - (-4) + D = 0; D = -4;$$

$$\text{Un plano perpendicular a la recta } -4x - y - 4 = 0;$$

$$\text{Interseccion recta plano } \begin{cases} -4x - y - 4 = 0 \\ \begin{cases} x = -4\lambda + 3 \\ y = -\lambda - 2 \\ z = 3 \end{cases} \end{cases} \rightarrow -4(-4\lambda + 3) - (-\lambda - 2) - 4 = 0;$$

$$16\lambda - 12 + \lambda + 2 - 4 = 0; \lambda = \frac{14}{17}$$

$$\text{para } \lambda = \frac{14}{17} \begin{cases} x = -4\lambda + 3 \\ y = -\lambda - 2 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -4\frac{14}{17} + 3 \\ y = -\frac{14}{17} - 2 \\ z = 3 \end{cases} = \begin{cases} x = -\frac{56}{17} + 3 \\ y = -\frac{14}{17} - 2 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{17} \\ y = -\frac{48}{17} \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \left(-\frac{5}{17}, -\frac{48}{17}, 3\right)$$

$$\text{Punto simetrico de A; } \frac{A' + A}{2} = M; A' = 2M - A;$$

$$A' = 2\left(-\frac{5}{17}, -\frac{48}{17}, 3\right) - A(0, -4, 2) = \left(-\frac{10}{17}, -\frac{96}{17}, 6\right) - (0, -4, 2) = \left(-\frac{10}{17}, -\frac{28}{17}, 4\right)$$

4. Ejercicio

De una bolsa de fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas si remplazamiento .

Se pide:

- Calcular la probabilidad de que ambos sean multiples de 3.
- Calcular la probabilidad de que el primero sea multiplo de 6 y el segundo multiplo de 3.
- Calcula la probabilidad de que ninguno sea multiplo de 2.
- Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un numero impar, sabiendo que la primera tambien lo ha sido

Solución:

- Calcular la probabilidad de que ambos sean multiples de 3.

Multiplos de 3. son : 3,6,9,12,15,18;

$$\text{Probabilidad de que el primero sea multiplo de 3} = \frac{6}{20}$$

$$\text{Probabilidad de que el segundo sea multipli de 3} = \frac{5}{19}$$

$$\text{Probabilidad de que ambos sean multiples de 3} = \frac{6}{20} * \frac{5}{19} = \frac{30}{380} = 0,078947$$

- Calcular la probabilidad de que el primero sea multiplo de 6 y el segundo multiplo de 3.

Multiplos de 3. son : 3,6,9,12,15,18; Multiplos de 6. son : 6,12,18;

$$\text{Probabilidad de que el primero sea multiplo de 6} = \frac{3}{20}$$

$$\text{Probabilidad de que el segundo sea multipli de 3} = \frac{5}{19}$$

$$\text{Probabilidad de que el primero sea multiplo de 6 y el segundo multiplo de 3} = \frac{3}{20} * \frac{5}{19} = \frac{15}{380} = 0,03947$$

- Calcula la probabilidad de que ninguno sea multiplo de 2.

Multiplos de 2. son : 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20;

$$\text{Probabilidad de que el primero no sea multiplo de 2} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Probabilidad de que el segundo no sea multiplo de 2} = \frac{9}{19}$$

Probabilidad de que ninguno sea multiplo de 2 = $\frac{1}{2} * \frac{9}{19} = \frac{9}{38} = 0,23684$

d) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un numero impar, sabiendo que la primera tambien lo ha sido

Probabilidad condicionada $P(2^{\circ} \text{ sea impar} | \text{sabiendo que la primera lo ha sido}) = \frac{P(\text{los dos impares})}{\text{primero ha sido impar}}$

$$P(2^{\circ} \text{ sea impar} | \text{sabiendo que la primera lo ha sido}) = \frac{\frac{9}{38}}{\frac{1}{2}} = \frac{18}{38} = 0,473684;$$

5. Ejercicio

Dea $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y A una matriz que verifica $AB = BC$ se pide:

a) Calcular determinante de A

b) Calcular BCB^{-1}

c) Encontrar el vector tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $BC \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solución

a) Calcular determinante de A

$$AB = BC \Rightarrow AB \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c & a+c & a+b \\ e+f & d+f & d+e \\ h+i & g+i & g+h \end{pmatrix}$$

Propiedades de determinantes $|AB| = |A| * |B|$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2; \quad |C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6; \quad |BC| = 12;$$

$$|BC| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12$$

$$|AB| = 12; |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow |A| = 6$$

b) Calcular BCB^{-1}

$$\text{Siendo } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{(\text{Adj}(B))^t}{|B|}$$

$$\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad (\text{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{2}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$BCB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{2} & -\frac{2}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

c) Encontrar el vector tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $BC \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$BC \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + 3z \\ x + 3z \\ x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{cases} 2y + 3z = 1; \\ x + 3z = 2; \\ x + 2y = 3; \end{cases}$$

$$2y - x = -1; x = 2y + 1;$$

$$\text{sustituyo en } x + 2y = 3 \Rightarrow 2y + 1 + 2y = 3; y = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow x + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3; x = 2;$$

$$\text{Sustituyo en } x + 3z = 2; \Rightarrow z = 0;$$

6. Ejercicio

Disponemos de una barra metálica de 10m. Con ella queremos construir una estructura formada por un

rectángulo rematado encima por un triángulo equilátero como

en la figura. Para construir la figura

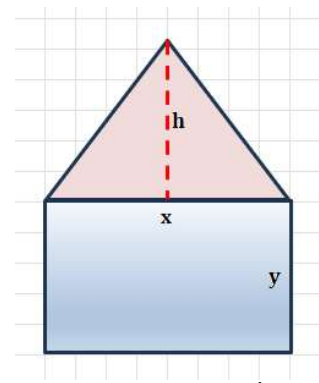
cortamos seis trozos de barra original de longitudes adecuadas y

se sueldan para obtener la figura.

Se pide:

a) Si denotamos por x la base del triángulo, calcular su altura

en función de x



b) Determinar como debemos cortar la barra original para que la estructura encierre un área máxima

Solución

a) Si denotamos por x la base del triángulo, calcular su altura en función de x

$$6 \text{ Barras cortadas} \Rightarrow 4x + 2y = 10\text{m}; y = \frac{10 - 4x}{2} = 5 - 2x$$

$$\text{Área del rectángulo} = xy$$

$$\text{Área del triángulo (cada ángulo mide } 60^\circ) \Rightarrow \sin 60 = \frac{h}{x}; h = x \sin 60; h = 0,866x$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{x * 0,866x}{2}$$

$$\text{Área de la figura} = xy + \frac{x * 0,866x}{2} = \frac{2xy + 0,866 x^2}{2}$$

$$\text{sustituimos y por su valor } y = 5 - 2x; \text{ Área de la figura} = \frac{2xy + 0,866 x^2}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Área de la figura;} = \frac{2(5 - 2x)x + 0,866 x^2}{2} = \frac{10x - 4x^2 + 0,866 x^2}{2} = \frac{10x - 3,134x^2}{2}$$

$$A = 5x - 1,567x^2; A' = 5 - 3,134x = 0; x = 1,5954; y = 5 - 2(1,5954); y = 1,8091895$$

$$A'' = -3,134 \text{ es máximo}$$

7. Ejercicio

Dada la recta $r: \begin{cases} x - z = 0; \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y la recta s que pasa por $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

y tiene direccion $(-1, 1, 0)$

- Escribe la posición relativa de ambas rectas
- Calcular el plano que contiene a la recta r y a un vector perpendicular a r y a s
- Encuentra una perpendicular común a r y a s

Solución

- Escribe la posición relativa de ambas rectas

$$r: \begin{cases} x - z = 0; \\ x + 2y - z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z; \\ z + 2y - z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z; \\ y = 2; \end{cases} \quad \text{hacemos } x = \lambda \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} Vd_r = (1, 0, 1) \\ P_r = (0, 2, 0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} Vd_s = (-1, 1, 0) \\ P_s = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -\beta + \frac{1}{4} \\ y = \beta + \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Los vectores directores no son proporcionales $\frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{1}{0}$

por lo que no son paralelos ni coincidentes

$$\text{veamos si se cruzan o se cortan} \quad \begin{cases} Vd_r = (1, 0, 1) \\ Vd_s = (-1, 1, 0) \\ \text{vector } P_s P_r = (0, 2, 0) - \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} Vd_r = (1, 0, 1) \\ Vd_s = (-1, 1, 0) \\ \text{vector } P_s P_r = \left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{vemos si son coplanarios} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = -2 \text{ no se cortan;}$$

Las rectas se cruzan

- Calcular el plano que contiene a la recta r y a un vector perpendicular a r y a s

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} Vd_r = (1, 0, 1) \\ P_r = (0, 2, 0) \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} Vd_s = (-1, 1, 0) \\ P_s = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -\beta + \frac{1}{4} \\ y = \beta + \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Un vector perpendicular a r y s nos lo da el producto vectorial de $Vd_s = (-1, 1, 0)$ y $Vd_r = (1, 0, 1)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}i - \frac{1}{4}k - \frac{1}{4}k + \frac{1}{2}j = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j - \frac{2}{4}k; \quad Vd_{rs} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (1, 1, -1)$$

El plano pedido tendrá vectores directores Vd_{rs} y Vd_r y punto de r $(0, 2, 0)$

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 2 & z - 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y - 2 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - y + 2 - z - y + 2 = x - 2y - z + 4 = 0$$

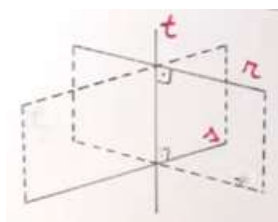
El plano pedido $x - 2y - z + 4 = 0$

- Encuentra una perpendicular común a r y a s

La recta perpendicular a las dos r y s

El plano calculado anterior contiene a la recta r

y el vector director de t ; $x - 2y - z + 4 = 0$



Calculamos otro plano que contenga a s y a un vector perpendicular a s y r

$V_{d_{rs}}$ y V_{d_s} y un punto de $s \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$

$$\begin{vmatrix} x - \frac{1}{4} & y - \frac{1}{4} & z - \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = y - \frac{1}{4} + z - \frac{1}{2} + z - \frac{1}{2} + x - \frac{1}{4} = x + y + 2z - \frac{6}{4} = 0$$

$$x + y + 2z - \frac{3}{2} = 0$$

La recta pedida $\begin{cases} x + y + 2z - \frac{3}{2} = 0 \\ x - 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$

8. Ejercicio

El peso de las crías recién nacidas de una especie de primates sigue una distribución normal X de media $\mu = 3353$ gr. Sabiendo que $P(X > 3693) = 0,2$;

a) Calcular la desviación típica σ de la distribución de pesos

b) Calcular el valor de x_0 tal que $P(X < x_0) = 0,2$

Solución

a) Calcular la desviación típica σ de la distribución de pesos

Pasamos (μ es la media y σ es la desviación típica); en otra Z que siga una distribución $N(0,1)$

aplicando la fórmula $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$$P(X \leq 3693) = 0,8;$$

$$P\left(Z = \frac{X - 3353}{\sigma} \leq \frac{3693 - 3353}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{340}{\sigma}\right) = 0,8$$

=> En la tabla el valor $0,8 \approx 0,7995$

equivale en la tabla de distribución

$$N(0,1) = 0,84$$

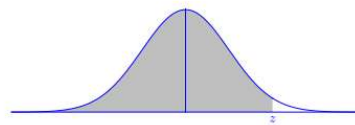
$$\frac{340}{\sigma} = 0,84; \sigma = 404,7619;$$

Tabla ($\mu = 3353, \sigma = 404,7619$)

b) Calcular el valor de x_0 tal que $P(X < x_0) = 0,2$

$$P\left(Z \leq \frac{x_0 - 3353}{404,7619}\right) = -0,84 \Rightarrow x_0 = 3013$$

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0.45) = 0.6736$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545

3 Examen 2020 C

1. Ejercicio

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parametro real a:

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a; \\ -y + z = a; \end{cases}$$

- b) resolver el sistema para $a = 0$:

Solución

Hallamos el rango de la matriz de variables $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$1 + a - 1 + a^2 = a^2 + a = a(a + 1) = 0$; el determinante es 0 para $a = 0$ y $a = -1$

para $a \neq 0$ y $a \neq -1 \Rightarrow \text{Rango de la matriz coeficientes} = \text{Rango de la ampliada} = 3;$

Sistema compatible determinado

$$\text{Para } a = 0 \text{ sustituyo } \begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a; \\ -y + z = a; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 0 + z = 1 \\ 0 + y - z = 0; \\ -y + z = 0; \end{cases} \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0; \\ -y + z = 0; \end{cases}$$

Rango de la matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right); \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right| = 1 + 1 = 2; R(\text{ampliada}) = 3;$

Rango de la matriz coeficientes = 2 y Rango de la ampliada = 3; Sistema incompatible

Para $a = -1$ sustituyo $\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a; \\ -y + z = a; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = -2; \\ -y + z = -1; \end{cases}$

Rango de la matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right); \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 - 1 = -4;$

$$R(\text{ampliada}) = 3;$$

- **Rango de la matriz $A \neq$ rango de matriz A ampliada; Sistema incompatible**
- **Rango matriz $A =$ rango matriz A ampliada $= n^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$**

Sistema Compatible determinado; tiene una solución A

- **Rango matriz A = rango matriz A ampliada $\neq n^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$**

Sistema Compatible determinado; tiene infinitas solución A

- **Rango de la matriz coeficientes = 2 y Rango de la ampliada = 3; Sistema incompatible**

- b) resolver el sistema para $a = 0$:

$$\begin{cases} x+ay+z=a+1 \\ -ax+y-z=2a; \\ -y+z=a; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+0y+z=0+1 \\ -0x+y-z=2*0; \\ -y+z=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ y-z=0; \\ -y+z=0; \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Rango de A = 2 y rango de la ampliada de A = 2 => SCD con infinitas soluciones

E_1
 dado que $E_2 = E_3 \begin{cases} x + z = 1 \\ y = z; \end{cases}$ Sustituyo en $E_1 \begin{cases} x = 1 - z \\ y = z; \end{cases}$ hago $y = z = \lambda$; Solución $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda; \\ z = \lambda; \end{cases}$

2. Ejercicio

Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$; Se Pide:

considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parametro real a:

a) Justifica usando el teorema adecuado, que que existe algun punto en el intervalo $[1,10]$ en que ambas funciones toman el mismo valor .

b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente minima

c) Calcula $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$;

Solución

a) Justifica usando el teorema adecuado, que que existe algun punto en el intervalo $[1,10]$ en que ambas funciones toman el mismo valor .

El teorema de Bolzano o teorema

del valor medio nos dice que si una

funcion $f(x)$

es continua en en un intervalo $[a, b]$.

Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos existe

al menos un numero

$c \in (a, b)$ donde $f(c) = 0$;

Si ambas funciones toman

el mismo valor $f(x) = g(x)$

$\Rightarrow f(x) - g(x) = h(x)$

$h(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1 = 0$;

es una funcion continua y

$$\begin{cases} h(10) = 10^3 + 3 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 - 1 > 0 \\ h(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 1 < 0 \end{cases}$$

Segun el teorema del valor medio existe un punto c donde en el intervalo (a, b) donde $h(x) = 0$;

b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente minima

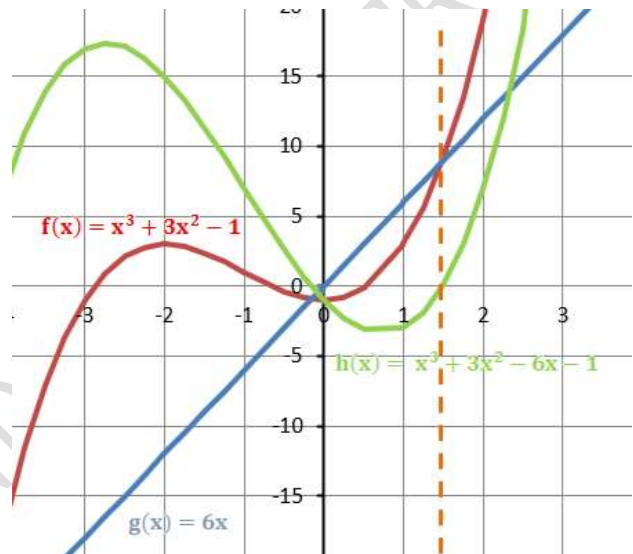
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$; $f'(x) = m$ = pendiente de la tangente $= 3x^2 + 6x = 0$; $x(3x + 6) = 0$;

Habrá un máximo o un mínimo en $x = 0$ y $x = -2$;

$f''(x) = 6x + 6 = 0$; $x = -1$; Punto critico $x = -1$;

Calculamos valores $f'(x)$ proximos al punto critico

$(-\infty, 1)$ para $x = -2$	1 Para $x = -1$	$(1, \infty)$ para $x = 0$
- decreciente	0 mínimo	+ creciente



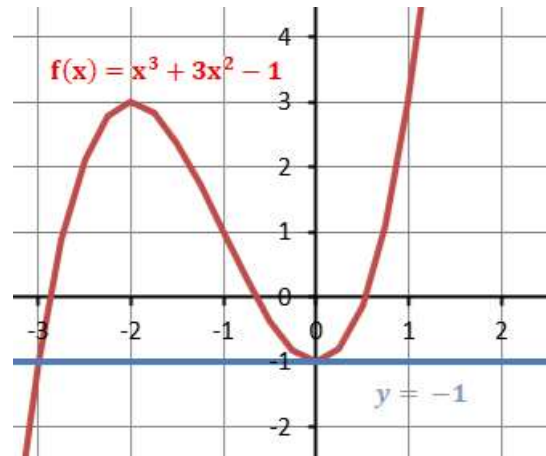
Calculamos el punto mínimo $x = 0 \Rightarrow$

$$f(x) = -1; \text{ Punto mínimo } (0, -1)$$

Calculamos $m = f'(x)$ en el punto $(0, -1) \Rightarrow$

$$m = 0;$$

$$\text{Tangente: } y - (-1) = 0(x - 0) \Rightarrow y = -1;$$



c) Calcula $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$;

$$\int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x} dx = \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x} dx; \text{ hacemos la division } = \int_1^2 \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6x} \right) dx =$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{6}x - \frac{1}{6x} \right) dx = \frac{1}{6} \int_1^2 \left(x^2 + 3x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{6} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \ln x \right]_1^2 =$$

$$\frac{1}{6} \left(\left(\frac{2^3}{3} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \ln 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \ln 1 \right) \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{8}{3} + \frac{12}{2} - \ln 2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \ln 1 \right) =$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{7}{3} + \frac{9}{2} + \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{41}{36} + \frac{1}{6} \ln \frac{1}{2};$$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{41}{36} + \frac{1}{6} \ln \frac{1}{2};$$

3. Ejercicio

Dadas las rectas $r = \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$ y $s = \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ Se pide:

a) Calcular la posición relativa de las rectas r y s ;

b) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por $P(2, -1, 5)$

c) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r y que contenga a la recta s

Solución

a) Calcular la posición relativa de las rectas r y s ;

$r = \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$ como son dos ecuaciones y tres incógnitas, depende de un parámetro

Hacemos $x = \beta$; y sustituimos en $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta - y = 2 \\ 3\beta - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \beta - 2 \\ z = 3\beta + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Vector director}(1, 1, 3) \\ \text{Punto } (0, -2, 1) \end{cases}$

$s = \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Vector director}(2, -1, 1) \\ \text{Punto } (-1, -4, 0) \end{cases}$

Posiciones de las rectas:

Vemos si los vectores directores son proporcionales $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{3}{1}$ no son $\Rightarrow$

las rectas se cortan o se cruzan

comprobamos si se corta, si son coplanarias su determinante es 0;

$$\begin{cases} \text{Vector director } r(1,1,3) \\ \text{Vector director de } s(2,-1,1) \\ \text{Vector que une los dos puntos} = (0,-2,1) - (-1,-4,0) = (1,2,1) \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

Dado que el determinante es distinto de 0 las rectas se cruzan

b) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por P(2, -1, 5)

Si es perpendicular a la recta r su vector Normal será el vector director de la recta

$Ax + By + Cz + D = 0$ Sustituyo $\Rightarrow 1x + 1y + 3z + D = 0$; como ha de pasar por P(2, -1, 5)

$$1 * 2 + 1(-1) + 3 * 5 + D = 0; D = -16; \text{Plano } x + y + 3z - 16 = 0$$

c) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r y que contenga a la recta s

Para hallar la ecuación de un plano necesito dos vectores directores del plano y un punto

Si ha de ser paralelo a la recta r $\begin{cases} \text{Vector del plano paralelo a : Vector director de } r(1,1,3) \\ \text{Vector del plano: Vector director de } s(2,-1,1) \\ \text{un punto será el de la recta } (-1,-4,0) \end{cases}$

$$\text{Ecuación del plano } \begin{vmatrix} x - (-1) & y - (-4) & z - 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} x + 1 & y + 4 & z \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$x + 1 + 6y + 24 - z + 3x + 3 - y - 4 - 2z = 0;$$

$$\text{Ecuación del plano } 4x + 5y - 3z + 24 = 0;$$

4. Ejercicio

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo coocado en el centro de la diana . La probabilidad de alcanzar el blanco en en el primer tiro es 30% en el segundo es del 40% en el tercero 50% y en el cuarto 60%

a) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el 4 disparo

b) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo

c) En una exhibición participan diez arqueros profesionales , que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado 6 globos al primer disparo

Solución

a) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el 4 disparo

Tomamos E explote y N no explote

Probabilidad de que explote con el primer disparo $E_1 = 0,3$;

Probabilidad de que no explote en el primero $N_1 = 1 - 0,3 = 0,7$;

Probabilidad de que no explote en el primero y explote en el segundo $E_2 = 0,7 * 0,4 = 0,28$

Probabilidad de que no explote en el primero, ni en el segundo y explote en el tercero

$$E_3 = N_1 * N_2 * E_3 = (1 - 0,3) * (1 - 0,4) * 0,5 = 0,7 * 0,6 * 0,5 = 0,21;$$

Probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el 4 disparo

$$E_{\text{antes del 4}} = E_1 + E_2 + E_3 = 0,3 + 0,28 + 0,21 = 0,79$$

b) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo

$$N_{\text{siguiente intacto despues del cuarto disparo}} = N_1 * N_2 * N_3 * N_4$$

$$= (1 - 0,3) * (1 - 0,4) * (1 - 0,5) * (1 - 0,6) = 0,7 + 0,6 + 0,5 + 0,4 = 0,084;$$

c) En una exhibicion participan diez arqueros profesionales , que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado 6 globos al primer disparo

$$\text{Formula de la probabilidad Binomial es } P(X = r) = \binom{n}{r} p^r * q^{n-r}$$

X = Variable, numero de veces que sucede el evento definido

r = valor que toma la variable (6)

n = numero de veces que se repite el evento (10)

p = Probabilidad de que suceda X (0,85)

q = Probabilidad de que no suceda X (0,15)

$$P(X = r) = \binom{10}{6} 0,85^6 * 0,15^4 = \frac{10!}{6! * (10 - 6)!} 0,85^6 * 0,15^4 = \left(\frac{10 * 9 * 8 * 7}{4 * 3 * 2 * 1} \right) 0,85^6 * 0,15^4$$

Probabilidad de que entre los 10 hayan explotado 6 globos al primer disparo

$$P = 210 * 0,00019 = 0,0399 = 4 \%$$

5. Ejercicio

Segun informa la AE de acuicultura, durante el año 2016 se comercializaron en España dorada, lubinas y rodaballos por un total de 275,8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron 13740 toneladas de doradas, 23440 t de lubinas. En cuanto a rodaballos se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63,6 millones de Euros. Sabiendo que el kg de dorada fue 11 cm mas caro que el kg de lubina. Se pide calcular el precio del kg de cada uno de los tres tipos de pescado

Solución

Hacemos una tabla con los datos del problema

	<i>Kg vendidos</i>	<i>Precio el Kg</i>	<i>Euros</i>
<i>Dorada</i>	<i>13.740.000</i>	<i>(x+0,11)</i>	<i>5,77671€</i>
<i>Lubina</i>	<i>23.440.000</i>	<i>x</i>	<i>5,66671€</i>
<i>Rodaballo</i>	<i>740.000</i>	<i>63600000/740000 =</i> <i>8,5946</i>	<i>63600000</i>
<i>TOTAL</i>	<i>37.920.000</i>		<i>275.800.000</i>

$$\text{Precio de las doradas y lubinas vendidas} = 275.800.000 - 63600000 = 212.200.000$$

$$\text{Precio de las dorada + lubinas} = 13.740.000 * (x + 0,11) + 23.440.000 * x = 212.200.000$$

$$13.740.000x + 1.511.400 + 23.440.000x = 212.200.000; 37.180.000x = 210.688.600;$$

$$\text{Precio de la lubina} = x = \frac{210.688.600}{37.180.000} = 5,66671€$$

$$\text{Precio de la dorada} = 5,66671€ + 0,11 = 5,77671€$$

6. Ejercicio

Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad en $[-4,4]$

b) Analice la derivabilidad y crecimiento en $[-4,4]$

c) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$

Solución

a) Estudie la continuidad en $[-4,4]$

La función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ puede

presentar discontinuidad en $x = 1$;

Hallo valor de f en $x = 1$; $f(1) = (1-1)^2 = 0$;

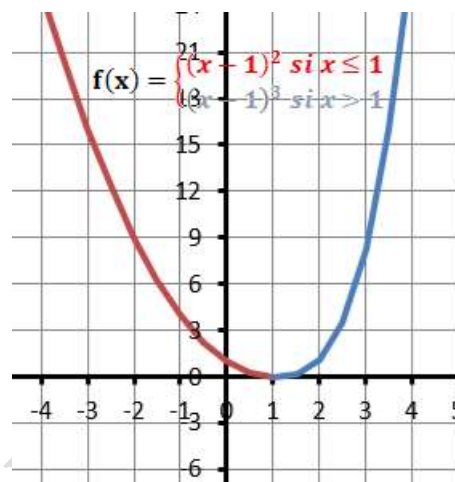
Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^3 = 0;$$

Dado que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^3 = 0$;

Implica que la $f(x)$ es continua en $x = 1$



b) Analice la derivabilidad y crecimiento en $[-4,4]$

Hallamos la derivada de la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Hallo valor de $f'(x)$ en $x = 1$; $f'(1) = 2(1-1) = 0$;

Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x-1) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x-1)^2 = 0;$$

Dado que $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x-1)^2 = 0$;

La función es derivable en $x = 1$;

Comprobamos crecimiento de la función $f'(x)$ dado que para $f'(1) = 0$

$(-\infty, 1)$ para $x = 0$ $f'(x) = 2(x-1)$ si $x \leq 1$	Para $x = 1$	$(1, \infty)$ para $x = 2$ $f'(x) = 3(x-1)^2$ si $x > 1$
- decreciente	0 mínimo	+ creciente

c) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$

$g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Comprobamos continuidad de la función $g(x)$ en $x = 1$:

Hallo valor de g en $x = 1$; $g(1) = 2(1-1) = 0$;

Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x-1) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x-1)^2 = 0;$$

$$\text{Dado que } \lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x-1)^2 = 0;$$

Implica que la $g(x)$ es continua en $x = 1$

Comprobamos derivabilidad de la función $g(x)$ en $x = 1$:

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 6(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallo valor de $g'(x)$ en $x = 1$; $g'(1) = 2$

Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 6(x-1) = 0;$$

$$\text{Dado que } \lim_{x \rightarrow 1^-} = 2; \lim_{x \rightarrow 1^+} = 0 \text{ y } g'(1) = 2;$$

Implica que la $g(x)$ no es derivable en $x = 1$

7. Ejercicio

Dados los puntos $P(-3,1,2)$ y $Q(-1,0,1)$ y el plano $\pi: x + 2y - 3z = 4$ se pide:

- Halla la proyección de Q sobre el plano
- Escribe la ecuación del plano paralelo a $\pi: x + 2y - 3z = 4$ que pasa por P
- Escribe la ecuación del plano perpendicular a $\pi: x + 2y - 3z = 4$ que contiene a P y Q

Solución

- Halla la proyección de Q sobre el plano

La proyección de Q sobre el plano estará en la recta perpendicular al plano que pasa por Q

El vector normal del plano $\pi: x + 2y - 3z - 4 = 0$ será $(1, 2, -3)$ y será el vector de la recta perpendicular al plano

$$\text{Recta perpendicular al plano que pasa por } Q \begin{cases} \text{Vd } (1, 2, -3) \\ \text{Punto de paso } (-1, 0, 1) \end{cases} r = \begin{cases} x = 1\lambda - 1; \\ y = 2\lambda \\ z = -3\lambda + 1 \end{cases}$$

Punto de intersección del plano y la recta; sustituyo en el plano $\pi: x + 2y - 3z = 4$

$$(\lambda - 1) + 2 * 2\lambda - 3(-3\lambda + 1) = 4; \lambda + 4\lambda + 9\lambda - 8 = 0; \lambda = \frac{8}{14} = \frac{4}{7};$$

$$\text{Punto de proyección de } Q \text{ en el plano} = \text{Punto de intersección} \begin{cases} x = \frac{4}{7} - 1; \\ y = 2 * \frac{4}{7} \\ z = -3\frac{4}{7} + 1 \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{3}{7}; \\ y = \frac{8}{7} \\ z = -\frac{5}{7} \end{cases}$$

- Escribe la ecuación del plano paralelo a $\pi: x + 2y - 3z = 4$ que pasa por P

Un plano paralelo a $\pi: x + 2y - 3z = 4$ que pasa por P , tendrá el mismo vector normal

$$\beta: Ax + By + Cz + D = 0; \text{ con vector normal } (1, 2, -3) \Rightarrow x + 2y - 3z + D = 0;$$

$$\text{Como ha de pasar por } P(-3, 1, 2) \text{ sustituyo; } -3 + 2(1) - 3 * 2 + D = 0; -3 + 2 - 6 + D = 0; D = 7;$$

$$\text{Plano paralelo a } \pi: x + 2y - 3z = 4 \text{ que pasa por } P; \beta: x + 2y - 3z + 7 = 0$$

d) Escribe la ecuación del plano perpendicular a $\pi: x + 2y - 3z = 4$ que contiene a P y Q

Un plano perpendicular a $x + 2y - 3z = 4$ tendrá como vector director el normal del plano

$$\vec{v_d} = (1, 2, -3)$$

$$\text{Otro vector director } P - Q: \overrightarrow{(Vd_{P-Q})} = P(-3, 1, 2) - Q(-1, 0, 1) = (-2, 1, 1)$$

$$\begin{cases} \vec{v_d} = (1, 2, -3) \\ \overrightarrow{(Vd_{P-Q})} = (-2, 1, 1) \\ \text{Punto} = (-1, 0, 1) \end{cases} \text{ Ecuación del plano } \begin{vmatrix} x - (-1) & y - 0 & z - 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + 1 & y & z - 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$-3x - 3 - 4z + 4 + y - 2x - 2 - 6y - z + 1 = -5x - 5y - 5z = 0;$$

Plano perpendicular a $\pi: x + 2y - 3z = 4$ que contiene a P y Q; $x + y + z = 0$

8. Ejercicio

Se consideran dos sucesiones A y B tales que $P(A) = 0,5$ y $P(B) = 0,25$ y $P(A \cap B) = 0,125$

a) Sea C otro suceso incompatible con A y con B ¿Son compatibles los sucesos C y AUB?

b) Son A y B Independientes?

c) Calcula la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

d) Calcula $P(\bar{B}|A)$

Solución

Teoría de probabilidades

Sucesos incompatibles

Se dice que dos sucesos A y B son incompatibles si no pueden ocurrir los dos a la vez $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$

Sucesos Independientes

Dos sucesos A y B son independientes si la ocurrencia de A no afecta a la ocurrencia de B; $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Propiedades de la frecuencia relativa (Probabilidad)

- ✓ La probabilidad de un suceso siempre está entre 0 y 1
- ✓ La probabilidad de un suceso seguro es 1
- ✓ La probabilidad de un suceso imposible es 0
- ✓ La probabilidad de la unión de dos sucesos cualesquiera $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ✓ La probabilidad de la unión de varios sucesos cualesquiera
- ✓ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- ✓ Cuando dos sucesos son incompatibles (no pueden ocurrir los dos a la vez) se cumple $P(A \cap B) = 0$.
- ✓ Cuando dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de la unión de los mismos es la suma de sus probabilidades $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- ✓ $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$
- ✓ La probabilidad de un suceso contrario a A, $\bar{A} = P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- ✓ La probabilidad de la intersección de dos sucesos independiente $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- ✓ Cuando dos sucesos son independientes $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$
- ✓ $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
- ✓ $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$; $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$
- ✓ $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$; $P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$

a) Sea C otro suceso incompatible con A y con B ¿Son compatibles los sucesos C y AUB?

Al ser incompatibles $\Rightarrow A \cap C = \emptyset$ y $B \cap C = \emptyset$;

Si A y B no tienen ningún elemento común con C $\Rightarrow A \cup B$ no tendrá ningún elemento común con C;

$(A \cup B) \cap C = \emptyset$; por la propiedad distributiva $\Rightarrow C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

C y $(A \cup B)$ son incompatibles

b) Son A y B Independientes?

$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$: sustituimos $\Rightarrow P(A) = 0,5$ y $P(B) = 0,25$ y $P(A \cap B) = 0,125$

$P(A) = 0,5$ y $P(B) = 0,25$ y $P(A \cap B) = 0,125 = (P(A) = 0,5) * (P(B) = 0,25) = 0,125$;

A y B Independientes

c) Calcula la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

✓ Cuando dos sucesos son independientes $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$;

✓ La probabilidad de la union de dos sucesos cualesquiera $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,25 - 0,125 = 0,625$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,625 = 0,375$;

d) Calcula $P(\bar{B}|A)$

Probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso al que denominamos A, como consecuencia de que haya tenido lugar otro evento llamado B

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$ ó $P(A \cap B) = P(B|A) * P(A)$

$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)}$;

✓ $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$; $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$

$P(\bar{B} \cap A) = 0,5 - 0,125 = 0,375$;

$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,375}{0,5} = 0,75$