Prueba de EBAU 2019-2020

Contenido

1 Examen 2019-2020 A

1. **Ejercicio**

Dado la matriz Auna matriz de tamaño 3X4 tal que sus dos primeras filas osn (1,1,1,1)y (1,2,3,4) y sin ningun 0 en la tercera fila. En cad a apartado se pide poner un ejemplo de matriz A

a) La tercera fila en es combinacion lineal de las dos primeras

b) Las tres filas son linealmente indepedientes

c) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado

d) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado

e) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible

Solución

a) La tercera fila en es combinacion lineal de las dos primeras

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\end{pmatrix}\text{Siendo a, b, c, d distinto de 0.}$$

a) La tercera fila en es combinacion lineal de las dos primeras

$(\mathrm{a,b,c,d}) = \alpha(1,1,1,1)+\beta(1,2,3,4)\ para\ todo\ valor\ de\ \alpha \text{ y } \beta \text{ ejem } \alpha=1 \text{ y } \beta=2$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 7 & 9\end{pmatrix}$$

b) Las tres filas son linealmente independientes

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 5 & 9\end{pmatrix}$$

c) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado

Para que sea la matriz ampliada de un sistema compatible determinado. La matriz y su ampliada tienen que tener el mismos rango (rango 3)

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 5 & 9\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 5\end{vmatrix}=10+3+4-2-5-12=-2 \text{ Rango 3}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 9\end{vmatrix}=18+4+4-2-16-9=-1 \text{ Rango 3}$$

Sistema compatible determinado

d) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 7 & 9\end{pmatrix}\text{; La matriz inicial y la ampliada ha de ser de rango 2;}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 7\end{vmatrix}=14+9+5-6-15-7=0 \text{ El rango de la matriz de los coeficientes es 2}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 5 & 7 & 9\end{vmatrix}=27+20+14-15-18-28=0 \text{ El rango de la matriz ampliada 2}$$

Cualquier combinacion elegida con la ampliada dará 0 pues la tercera fila es combinacion lineal de las dos filas primeras

2. **Ejercicio**

Dado la funcion $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} \; si\; x < 1, x \neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} \quad si\; x \geq 1 \end{cases}$ Se pide:

a) Calcular f(0) y (f(f(0))

b) Estudiar continuida y derivabilidad de f(x)en x = 1 y determinar si en ese punto existe un extremo relativo

c) Estudiar sus asintotas

Solución

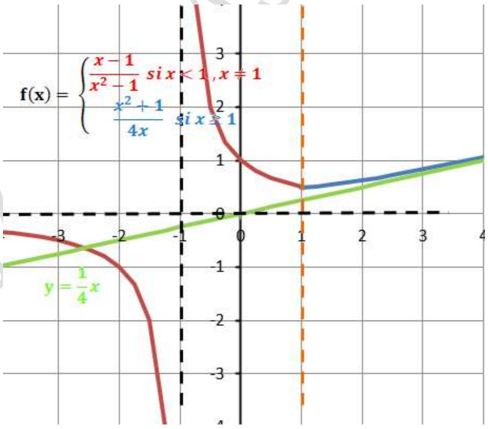
a) Calcular f(0) y (fof)(0)

$$\mathrm{f(x)} = \frac{x-1}{x^2-1};\; \mathrm{f(0)} = \frac{-1}{-1} = 1;$$

$$(\mathrm{f}(\mathrm{f(0)})) = \mathrm{f((1); al\ ser\ x \geq 1\ será\ f(1)} = \frac{1^2+1}{4*1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

b) Estudiar continuida y derivabilidad de f(x)

en x = 1 y determinar si en ese



$\lim_{x\to1} \mathrm{f(x)};\;$ para $x < 1; \lim_{x\to1} \mathrm{f(x)} =$

$$\lim_{x\to1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

$$\text{Aplico L´hopital } \lim_{x\to1} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2};$$

$\lim_{x\to1} \mathrm{f(x)};\;$ para $x \geq 1; \lim_{x\to1} \mathrm{f(x)} =$

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2+1}{4x} = \frac{1+1}{4*1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La funcion es continua en x = 1

Para ver si es derivable en x = 1 su derivada debe coincidir por derecha e izquierda

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} \; si\; x < 1, x \neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} \quad si\; x \geq 1 \end{cases} \quad \mathrm{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x+1} \; si\; x < 1, x \neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} \quad si\; x \geq 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} \; si\; x < 1, x \neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} \quad si\; x \geq 1 \end{cases} \quad \mathrm{f´(x)} = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x+1)^2} \; si\; x < 1, x \neq 1 \\ \dfrac{2x(4x) - 4(x^2+1)}{(4x)^2} = \dfrac{8x^2-4x^2-4}{(4x)^2} \quad si\; x \geq 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{f´(x)} = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x+1)^2} \; si\; x < 1, x \neq -1 \\ \dfrac{8x^2-4x^2-4}{(4x)^2} = \dfrac{4x^2-4}{(4x)^2} \quad si\; x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to1} \mathrm{f´(x)} \begin{cases} \dfrac{-1}{(x+1)^2} \; si\; x < 1, x \neq 1 = \dfrac{-1}{(1+1)^2} = -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{4x^2-4}{(4x)^2} \quad si\; x \geq 1 = \dfrac{4*1^2-4}{(4*1)^2} = \dfrac{0}{4} \end{cases}$$

la funcion no es derivable en x = 1;

Para ver si hay un extemo en x = 1. Dado que no es derivable calculamos valoresen el entorno de x = 1

F(x) para x=-2	F(x) para x=1	F(x) par x=2
$f'(-2) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}\, siempre -$ Negativo(decreciente)	Hay un mínimo relativo	$f'(2) = \dfrac{4x^2-4}{(4x)^2}\ siempre +$ Positivo (creciente)

c) Estudiar sus asintotas

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}^2-1} & \mathrm{si\ x < 1\ , x \neq -1} \\ \dfrac{\mathrm{x}^2+1}{4\mathrm{x}} & \mathrm{si\ x \geq 1} \end{cases}$$ la funcion presentaria un asintota vertical en $\mathrm{x} = -1$

Pero ese punto no pertenece al dominio de la función

Asintota Horizontal

Comprobamos limites pa $\mathrm{x} = \pm\infty$;

$\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} \mathrm{f(x)}\ \dfrac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}^2-1}$: para $\mathrm{x} < 1$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} \mathrm{f(x)} = \dfrac{1}{\infty} = 0$; Asintota Horizotal $\mathrm{y} = 0$ en $\mathrm{x} \to -\infty$

$\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} \mathrm{f(x)}\ \dfrac{\mathrm{x}^2+1}{4\mathrm{x}}$: para $\mathrm{x} < 1$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} \mathrm{f(x)}\dfrac{\mathrm{x}}{4} = \infty$

Asintota oblicua; $\mathrm{y = mx + n}$

En $-\infty$ no existe pues existiria asintota Horizontal

En $+\infty$

$$\mathrm{m} = \lim_{+\infty} \mathrm{f'(x)} = \frac{4x^2-4}{(4x)^2} = \lim_{+\infty} \mathrm{f'(x)} = \frac{4x^2-4}{16x^2} = \frac{1}{4};$$

$$\mathrm{n} = \lim_{+\infty} (\mathrm{f(x)} - \mathrm{mx}) = \lim_{+\infty} \left(\frac{\mathrm{x}^2+1}{4\mathrm{x}} - \frac{\mathrm{x}}{4}\right) = \lim_{+\infty} \left(\frac{4\mathrm{x}^2 + 4 - 4\mathrm{x}^2}{16\mathrm{x}}\right) = \lim_{+\infty} \frac{4}{16\mathrm{x}} = 0$$

Asintota oblicua; $\mathrm{y} = \dfrac{1}{4}x$

3. **Ejercicio**

Dado el punto P(3,3,0) y la recta r: $\dfrac{\mathrm{x}-2}{-1} = \dfrac{\mathrm{y}}{1} = \dfrac{\mathrm{z}+1}{0}$; se pide :

a) Escribe la ecuacion del plano que contiene a la recta y al punto

b) Calcula el punto simetrico de P respecto de r

C) Halla llos puntos A y B de r tales que el triangulo ABPsea rectangulo y tenga de area $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

El anguo recto es A

Solución

a) Escribe la ecuacion del plano que contiene a la recta y al punto

$$\mathrm{r}: \frac{\mathrm{x}-2}{-1} = \frac{\mathrm{y}}{1} = \frac{\mathrm{z}+1}{0} \begin{cases} x = -1\lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}; \begin{cases} Vd_r = (-1,1,0) \\ P_r = (2,0,-1) \end{cases}$$

Como el plano contiene a la recta un $\mathrm{Vd}_\mu = (-1,1,0)$

Otro Vd_μ es el determinado por P (3,3,0) y un punto de la recta $P_r = (2,0,-1)$

$\mathrm{Vd}_\mu = \mathrm{P}\ (3,3,0) - P_r = (2,0,-1) = (1,3,1)$;

La ecuacion del plano será $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{i - 3k - k + j = i + j - 4k}$;

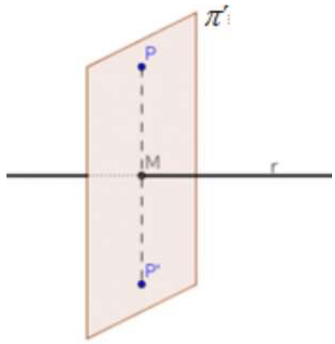
$\mathrm{x + y - 4z + D = 0}$; => como ha de paser por P(3,3,0) => $3 + 3 - 0 + \mathrm{D} = 0$; $\mathrm{D} = -6$;

La ecuacion del plano μ: $x + y - 4z - 6 = 0$

b) Calcula el punto simetrico de P respecto de r

Sabemos que P y P´ estan en el plano μ: $x + y - 4z - 6 = 0$

necesitamos calcula un plano π que sea perpendicular a r contenga a P



$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ tiene como vector nomal el vector director de la recta $Vd_r = (-1,1,0)$

$\pi : -x + y + D = 0$

y ha de contener a P(3,3,0) => $-3 + 3 + D = 0; D = 0$

$\pi : -x + y = 0$

El punto de corte de la recta r $\begin{cases} x = -1\lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$ y el plano

$\pi : -x + y = 0$ será M

sutituimos $-(-1\lambda + 2) + \lambda = 0; \lambda + \lambda - 2 = 0; \lambda = 1;$

Punto M = $\begin{cases} x = -1(1) + 2 \\ y = (1) \\ z = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$; $M(1,1,-1)$

El punto simetrico P´(x, y, z) => P´(x, y, z) + P(3,3,0) = $2M(1,1,-1)$ =>

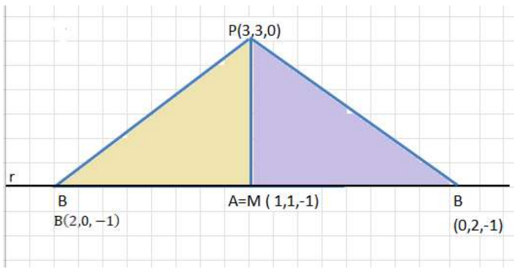
P´(x, y, z) = $\big((2-3),(2-3),(-2-0)\big)$ $P' = (-1,-1,-2)$

C) Halla los puntos A y B de r tales que el triangulo ABP sea rectangulo y tenga de area $\frac{3}{\sqrt{2}}$

Area del triangulo = $\frac{AB*AP}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Distancia AB = x;

Distancia AP si tomo A = M =>



$D(MP) = \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + (z - z_a)^2}$

$D(MP) = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2 + \big(0 - (-1)\big)^2}$

$= \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3;$

Area del triangulo = $\frac{AB * 3}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}; AB = \frac{2}{\sqrt{2}};$

$D(MB) = \sqrt{(1 - x_a)^2 + (1 - y_a)^2 + (-1 - (z_a))^2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$; $(1 - x_a)^2 + (1 - y_a)^2 + (z_a + 1)^2 = \frac{4}{2} = 2;$

$1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2 + 1 + 2z + z^2 = 2;\ x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 + 2z = -1;$

como M pertenece a r: se cumplira $\begin{cases} x = -1\lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$

$x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 + 2z = -1$; sustiyuimos

=> $(-1\lambda + 2)^2 - 2(-1\lambda + 2) + \lambda^2 - 2\lambda + (-1)^2 + 2(-1) = -1$

$\lambda^2 + 4 - 4\lambda - 4 + 2\lambda + \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 2 = -1;\ 2\lambda^2 - 4\lambda = 0; \lambda(2\lambda - 4) = 0; \lambda = 0\ y\ \lambda = 2;$

Para $\lambda = 0$ $\begin{cases} x = -1\lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$ B(2,0,−1) Para $\lambda = 2$ $\begin{cases} x = -2 + 2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ $B(0,2,-1)$

4. **Ejercicio**

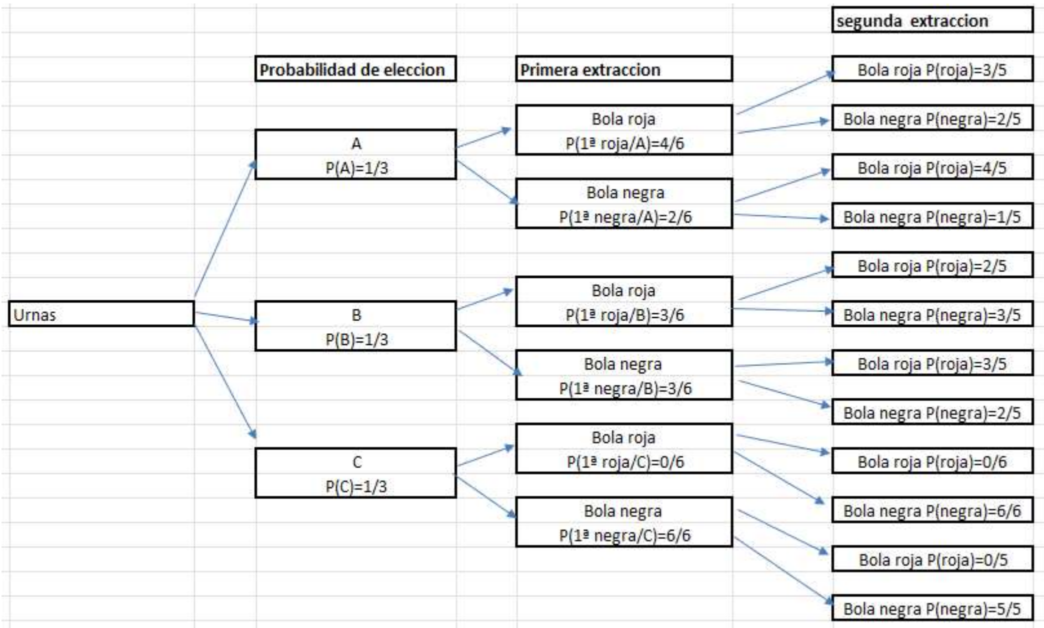
Se tienen tres urnas A, B, C . La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva, sinreemplazamiento. Se pide:

a)Calcular la probabilidad de que la primera bola extraida sea roja

b) Calcular la probanilidad de que la primera bola extraida sea roja y la segunda negra

c) Saliendo que la primera bola extraida es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra

Solución



a)Calcular la probabilidad de que la primera bola extraida sea roja

$$\mathrm{P(1^{o}\ extraccion\ sea\ bola\ roja)}\begin{cases} \mathrm{P(urna\ A)} * \mathrm{P(bola\ roja)} = \frac{1}{3} * \frac{4}{6} = \frac{4}{18} \\ \mathrm{P(urna\ B)} * \mathrm{P(bola\ roja)} = \frac{1}{3} * \frac{3}{6} = \frac{3}{18} \\ \mathrm{P(urna\ C)} * \mathrm{P(bola\ roja)} = \frac{1}{3} * \frac{0}{6} = \frac{0}{18} = 0; \end{cases} = \frac{4}{18} + \frac{3}{18} + 0 = \frac{7}{18};$$

$$\mathrm{P(1^{o}\ extraccion\ sea\ bola\ roja)} = \frac{7}{18}$$

b) Calcular la probanilidad de que la primera bola extraida sea roja y la segunda negra

$$\mathrm{P}\left(\begin{matrix}\mathrm{1^{a}\ extraccion\ roja} \\ \mathrm{y\ \ 2^{o}\ extraccion\ sea\ bola\ negra}\end{matrix}\right)\begin{cases} \mathrm{P(urna\ A)} * \mathrm{P(1^{o}\ roja)\ P(2^{o}\ negra)} = \frac{1}{3} * \frac{4}{6} * \frac{2}{5} = \frac{8}{90} \\ \mathrm{P(urna\ B)} * \mathrm{P(1^{o}\ roja)\ P(2^{o}\ negra)} = \frac{1}{3} * \frac{3}{6} * \frac{3}{5} = \frac{9}{90} \\ \mathrm{P(urna\ B)} * \mathrm{P(1^{o}\ roja)\ P(2^{o}\ negra)} = \frac{1}{3} * \frac{0}{6} * \frac{5}{5} = \frac{0}{90} = 0; \end{cases}$$

$$\mathrm{P}\left(\begin{matrix}\mathrm{1^{a}\ extraccion\ roja} \\ \mathrm{y\ \ 2^{o}\ extraccion\ sea\ bola\ negra}\end{matrix}\right) = \frac{8}{90} + \frac{9}{90} = \frac{17}{90}$$

c) Saliendo que la primera bola extraida es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra

Probabilidad condicionada de que ocurra A sabiendo que ocurre B es: $\mathbf{P(A|B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\boldsymbol{P(B)}}$

$$P(A|B) = \frac{P(1^{\underline{o}}\text{ sea roja } \cap 2^{\underline{o}}\text{ sea negra } B)}{P(1^{\underline{o}}\text{ sea roja})} = \frac{\frac{17}{90}}{\frac{7}{18}} = \frac{306}{630} = 0{,}4857$$

5. **Ejercicio**

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Se pide:

a) Calcular si es posible la inversa de A

b) Calcular la matriz $A^2 - 2I$

c)Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$; B^t matriz transpuesta de B

Solución:

a) Calcular si es posible la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{(\mathrm{Adj}(A))^t}{|A|}$$

A^{-1} Matriz inversa

Adj(A) Es la matriz adjunta de A

$(\mathrm{Adj}(A))^t$ Matriz transpuesta de la adjunta

|A| Deternante de la matriz

$$A^{-1} = \frac{(\mathrm{Adj}(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^t}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 2 = 1;$$

b) Calcular la matriz $A^2 - 2I$;

$$A^2 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$; B^t matriz transpuesta de B

$$D = ABB^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$D = AB\text{dada por la expresion } = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$|D| = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 + 52 - 40 - 24 = 0$$

6. **Ejercicio**

La potencia generada por una pila viene dada por la expresion $p(t) = 25t\, e^{-\frac{t^2}{4}}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento

a) Calcular hacia que valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente

b) Determinar la potencia maxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza

c) La energia total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energia produciada por la pila entre lo instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

Solución

a) Calcular hacia que valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente

$$\lim_{+\infty} 25t\, e^{-\frac{t^2}{4}} = \lim_{+\infty} \frac{25t}{e^{\frac{t^2}{4}}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indeterminado; aplicamos L'Hopital} = \lim_{+\infty} \frac{25}{\frac{2t}{4} e^{\frac{t^2}{4}}} = \frac{25}{\infty} = 0;$$

La potencia generada por la pila tiende a 0

b) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza

$$p(t) = \frac{25t}{e^{\frac{t^2}{4}}} \text{ Hallamos la derivada ;}$$

$$p'(t) = 25e^{\frac{t^2}{4}} - 25t\frac{2t}{4}\, e^{-\frac{t^2}{4}} = 25e^{\frac{t^2}{4}} - 25t\frac{t}{2}\, e^{-\frac{t^2}{4}} = 25e^{\frac{t^2}{4}}\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) = 0; p'(t) = \begin{cases} 25e^{\frac{t^2}{4}} = 0 \text{ no puede ser} \\ 1 - \frac{t^2}{2} = 0; \boxed{t = \sqrt{2}} \end{cases}$$

$1 - \frac{t^2}{2} = 0; \boxed{t = \sqrt{2}}$ en esta punto tendra la potencia maxima.

La potencia en este punto será tendra potencia maxima en $t = \sqrt{2}$

$$p(t) = 25t\, e^{-\frac{t^2}{4}}; \text{para } t = \sqrt{2}\,; p(t) = 25\sqrt{2}\, e^{-\frac{\sqrt{2}^2}{4}} = 25\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} = \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = 21{,}44 \textit{ potencia}$$

c) La energia total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energia produciada por la pila entre lo instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

calculamos la integral de $P(t)$ en el intervalo $(0,2)$

$$\int 25t\, e^{-\frac{t^2}{4}} dt = \int 25t\, e^{-\frac{t^2}{4}} dt \text{ integracion por cambio de variable } \begin{cases} -\frac{t^2}{4} = u; du = -\frac{t}{2} dt \\ dt = -\frac{2}{t} du \end{cases}$$

$$\int 25t\, e^u = 25 \int t\, e^u \left(-\frac{2}{t} du\right) = 25 \int -2\, e^u du = -50 \int e^u\, du = -50\, e^u + C = -50e^{-\frac{t^2}{4}} + C$$

$$E(t) = -50e^{-\frac{t^2}{4}} + C; \textit{dado que } e(0) = 0 => -50e^{-\frac{o^2}{4}} + C = 0; -50e^0 + C = 0; 50 = C;$$

$$\int_0^2 25t\, e^{-\frac{t^2}{4}} d(t) = \left[-50e^{-\frac{t^2}{4}}\right]_0^2 = \left(-50e^{-\frac{2^2}{4}}\right) - \left(-50e^{-\frac{0^2}{4}}\right) = (-50e^{-1} + 50) = \boxed{-\frac{50}{e} + 50}$$

7. **Ejercicio**

Del paralelogramo ABCD se conocen los vertices consecutivos $A(1,0,-1)$ $B(2,1,0)$y $C\ (4,3,-2)$ se pide:

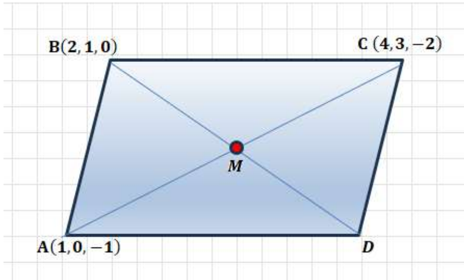
a) Calcular la ecucion de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC

b) Hallar las coordendas del vertice D y el area del paralelogramo resultante.

c) Calcula el coseno del anguo que forman los vertices $\overrightarrow{AB}$ y$\overrightarrow{AC}$

Solución

a) Calcular la ecucion de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC



Calculamos el punto M ;

$$\mathrm{M}=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{2}=\frac{\mathrm{A}(1,0,-1)+\mathrm{C}\ (4,3,-2)}{2}=\frac{(5,3,-3)}{2}$$

$\mathrm{M}(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$

Calculamos el plano que contiene al paralelogramo para ello necesitamos dos vectores directores y un punto

$$\text{Plano } \alpha\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\mathrm{B}(2,1,0)-\mathrm{A}(1,0,-1)=(1,1,1)\\ \overrightarrow{AB}=\ \mathrm{C}\ (4,3,-2)-\mathrm{A}(1,0,-1)=(3,3,-1)\\ M\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\end{cases};\ \alpha=\begin{vmatrix}x-\frac{5}{2} & y-\frac{3}{2} & z+\frac{3}{2}\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & -1\end{vmatrix}=$$

$$-x+\frac{5}{2}++3z+\frac{9}{2}+3y-\frac{9}{2}-3z-\frac{9}{2}+y-\frac{3}{2}-3x-\frac{5}{2}=-4x+4y-\frac{3}{2}=0;$$

Plano α; $-4x+4y-\frac{3}{2}=0;$

$$\text{Recta perpendicular al plano } \alpha \text{ por punto M}\begin{cases}\overrightarrow{Vd}=(-4,4,0)\\ M\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\end{cases}\ recta\ r{:}\frac{x-\frac{5}{2}}{-4}=\frac{y-\frac{3}{2}}{4}=\frac{z+\frac{3}{2}}{0};$$

$$recta\ r{:}\frac{x-\frac{5}{2}}{-4}=\frac{y-\frac{3}{2}}{4};\begin{cases}x=-4\lambda+\frac{5}{2};\\ y=4\lambda+\frac{3}{2};\\ Z=-\frac{3}{2};\end{cases}$$

b) Hallar las coordendas del vertice D y el area del paralelogramo resultante.

$$\mathrm{M}=\frac{\mathrm{B}+\mathrm{D}}{2};D=2M-B=2\left(M\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\right)-\mathrm{B}(2,1,0)=(5,3,-3)-(2,1,0)=(3,2,-3);D(3,2,-3)$$

Area del paralelogramo $\mathrm{A,B,C,D}=$ modulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\ \mathrm{X}\ \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB}\ \mathrm{X}\ \overrightarrow{AD}\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\mathrm{B}(2,1,0)-\mathrm{A}(1,0,-1)=(1,1,1)\\ \overrightarrow{AD}=\ D(3,2,-3)-\mathrm{A}(1,0,-1)=(2,2,-2)\end{cases}\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=-5i+4j;$$

$$|5i+4j|=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}\,u^2$$

c) Calcula el coseno del angulo que forman los vertices $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

Para calcular el coseno hallamos el producto escalar $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|*|\overrightarrow{AC}|\cos\alpha\,;$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|*|\overrightarrow{AC}|}=\frac{(1,1,1)*(3,3,-1)}{\sqrt{3}*\sqrt{9+9+1}}=\frac{3+3-1}{\sqrt{3}*\sqrt{19}}=\frac{5}{\sqrt{57}}=0{,}662266;\ \alpha=48{,}527^{\text{o}}$$

8. **Ejercicio**

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y .

Sabemos que $P(X) = 0{,}4$ y que $P\left(X \cap \overline{Y}\right) = 0{,}08$ Se pide:

a) Calcular P(Y)

b) Calcular P(X U Y)

c) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideremos que el experimento es un exito cuando no sucede X y repetimos el experimento 8 ocaciones , hallar la probabilidad de haber tenido exito almentos 2 veces

Solución

a) Calcular P(Y)

La probabilidad de la union de dos sucesos cualesquiera

$P(X \cap Y) = P(X) * P(Y) => 0{,}4 * P(Y)$

$P(X \cap \overline{Y}) = P(X) - P(X \cap Y)$; $P(X \cap Y) = 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}32$;

$Sustituimos => P(X \cap Y) = P(X) * P(Y) => 0{,}32 = 0{,}4 * P(Y); P(Y) = \frac{0{,}32}{0{,}4} = 0{,}8$

b) Calcular P(X U Y)

$P(XUY) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$; $P(XUY) = 0{,}4 + 0{,}8 - 0{,}32 = 0{,}88$; $P(XUY) = 0{,}88$

c) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideremos que el experimento es un exito cuando no sucede X y repetimos el experimento 8 ocaciones , hallar la probabilidad de haber tenido exito al mentos 2 veces

Seria una binomial $X =$ no deseado, $\overline{X} =$ deseado;

Probabilidad de $X = 0{,}4$; Probabilidad de $\overline{X} = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$; $n =$ numero de repeticiones 8

binomial $Z =$ numero exitos en 8 repeticiones $Z(0{,}6\ ,8)$

$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - \left(P(Z = 0) + P(Z = 1)\right) = 1 - (\binom{8}{0} 0{,}6^0\ 0{,}4^{10-0} + \binom{8}{1} 0{,}6^1\ 0{,}4^{10-1})$

$P(Z \geq 2) = 1 - \left(\binom{8}{0} 0{,}6^0\ 0{,}4^8 + \binom{8}{1} 0{,}6^1\ 0{,}4^7\right) = 1 - \left(\frac{8¡}{0¡\,(8-0)¡} 0{,}4^{10} + \frac{8¡}{1¡\,(8-1)¡} 0{,}6^1\ 0{,}4^7\right)$

$P(Z \geq 2) = 1 - (0{,}4^{10} + 8 * 0{,}6^1\ 0{,}4^7) = 1 - (0{,}0001 + 0{,}00786) = 1 - 0{,}00796 = 0{,}992$

Probabilidad de tener exito al mentos 2 veces = 0,992

2 Examen 2019-2020 B

1. **Ejercicio**

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (k+1)x+3y+kz=1 \\ 3x+(k+1)y+2z=k-1; \\ kx+2y+kz=2 \end{cases}$ *Se pide*:

a) Discutir el sistema en funcion de los valores de k

b) Resolver el sistema para $k=-3$;

Solución:

a) Discutir el sistema en funcion de los valores de k

$$\begin{cases} (k+1)x+3y+kz=1 \\ 3x+(k+1)y+2z=k-1;\ hallamos\ el\ rango\ de\ la\ matriz \\ kx+2y+kz=2 \end{cases} \begin{pmatrix} k+1 & 3 & k \\ 3 & k+1 & 2 \\ k & 2 & k \end{pmatrix}$$

$Si\ el\ determinante=0\ en\ rango\ de\ la\ matriz\ sera \le 2$

$$\begin{vmatrix} k+1 & 3 & k \\ 3 & k+1 & 2 \\ k & 2 & k \end{vmatrix} = k^3+2k^2+k+6k+6k-k^3-k^2-9k-4k-4=k^2-4=0$$

$$K=\sqrt{4}; \begin{cases} \text{k} = \pm 2 \text{ el rango de la matriz es 2 y el de la ampliada 3 (S. compatible indeterminado)} \\ \text{Para k} \neq \pm 2 \text{ el rango de la matriz y su ampliada es 3 (S. Compatible determinado)} \end{cases}$$

b) Resolver el sistema para $k=-3$;

$$\begin{cases} (k+1)x+3y+kz=1 \\ 3x+(k+1)y+2z=k-1;\ para\ k=-3 => \\ kx+2y+kz=2 \end{cases} \begin{cases} -2x+3y-3z=1 \\ 3x-2y+2z=-4; \\ -3x+2y-3z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x+3y-3z=1 \\ 3x-2y+2z=-4; \\ -3x+2y-3z=2 \end{cases} \begin{cases} F_1 \\ F_2=2F_2+3F_1 \\ F_3=2F_3-3F_1 \end{cases} \begin{cases} -2x+3y-3z=1 \\ 0\ +\ 5y-5z=-5; \\ 0\ \ +5y-3z=1 \end{cases} \begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ F_3=F_3-F_2 \end{cases} \begin{cases} -2x+3y-3z=1 \\ 0\ +\ 5y-5z=-5; \\ 0\ \ 0+2z=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x+3y-3z=1;\ -2x+3*1-3*2=1; x=-2: \\ 0\ +\ 5y-5*2=-5;\qquad y=1 \\ z=2; \end{cases}$$

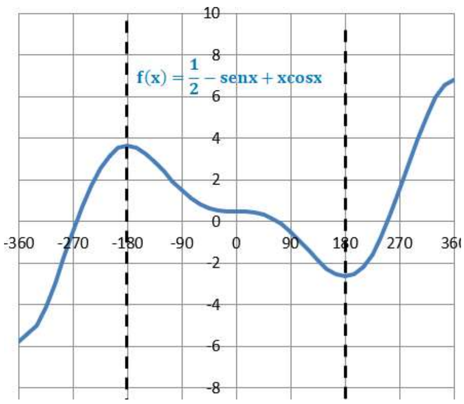
Solucion de la matriz para $k=-3$ igual a $(-2,1,2)$

2. **Ejercicio**

Dado la funcion $f(x)=\frac{1}{2}-\text{senx}+\text{xcosx}$ se pide:

a) Estudiar el crecimiento en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Justifica que la funcion se anula en algun punto del intevalo. . Justifica que ese punto es único.

b) Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$



Solución:

a) Estudiar el crecimiento en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Justifica que la funcion se anula en algun punto

$f'(x)=0-\cos x+1\cos x+x(-\text{sen } x)=$

$f'(x)=-x\text{sen } x=0;$

habra un maximo o minimo en ;

$$\begin{cases} x=0; \\ sen\ x=0; => x=\pm 180^{\circ}=\pi; \end{cases}$$

En el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; $f'x = -x\operatorname{sen}x$; es simepre negativo decreciente

b) Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen}x + x\cos x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x)dx \quad =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \ = \left[\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [x\,sen x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{x}{2} + \cos x + x\,sen\,x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\left[\frac{x}{2} + 2\cos x + x sen\, x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}sen\ \frac{\pi}{2} - \frac{0}{2} - 2\cos 0 - 0sen0 = \frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{2} - 0 - 2 - 0$$

$$= \frac{3\pi}{4} - 2;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen}x + x\cos x\right)dx = \frac{3\pi - 8}{4}$$

3. Ejercicio

Se consideran los punos A$(0,-4,2)$, B$(3.-2,3)$ y C $(-1,-3,3)$ se pide:

a) Comprobar que el triangulo de vertices A, B, C es rectangulo, identifica los catetos y la hipotenusa.

b) Determina una ecuacion del plano π que contiene a los tres planos.

c) Calcula el punto simetrico de A respectos a la recta que pasa por los puntos B y C;

Solución:

$\overrightarrow{AB} = B(3.-2,3) - A(0,-4,2) = (3,2,1)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{AC} = C\ (-1,-3,3) - A(0,-4,2) = (-1,1,1)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\overrightarrow{BC} = C\ (-1,-3,3) - B(3.-2,3) = (-4,-1,0)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{17}$

Teorema de pitagoras : $(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{14})^2 = (\sqrt{17})^2$ Hipotenusa $\overrightarrow{AB}$ catetos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

b) Determina una ecuacion del plano π que contiene a los tres puntos.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+4 & z-2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - y - 4 + 3z - 6 + 2z - 4 - x - 3y - 12 = x - 4y + 5z - 26 = 0;$$

$\pi: x - 4y + 5z - 26 = 0$

c) Calcula el punto simetrico de A respectos a la recta que pasa por los puntos B y C;

Recta que pasa por los puntos B y C ; $\overrightarrow{Vd}(-4,-1,0)$; P$(3,-2.3)$ $\begin{cases} x = -4\lambda + 3 \\ y = -\lambda - 2 \\ z = 3 \end{cases}$

Un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ perpendicular a la recta $\begin{cases} x = -4\lambda + 3 \\ y = -\lambda - 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow -4x - y + D = 0;$

$-4x - y + D = 0$ *que pasa por* A$(0,-4,2) \Rightarrow -4 * 0 - (-4) + D = 0\ ; D = -4;$

Un plano perpendicular a la recta $-4x - y - 4 = 0$;

Interseccion recta plano $\begin{cases} -4x - y - 4 = 0 \\ \begin{cases} x = -4\lambda + 3 \\ y = -\lambda - 2 \end{cases} \\ \quad z = 3 \end{cases} \quad -4(-4\lambda + 3) - (-\lambda - 2) - 4 = 0;$

$16\,\lambda - 12 + \lambda + 2 - 4 = 0; \;\; \lambda = \dfrac{14}{17}$

$para\,\lambda = \dfrac{14}{17} \begin{cases} x = -4\lambda + 3 \\ y = -\lambda - 2 \\ z = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = -4\dfrac{14}{17} + 3 \\ y = -\dfrac{14}{17} - 2 \\ z = 3 \end{cases} = \begin{cases} x = -\dfrac{56}{17} + 3 \\ y = -\dfrac{14}{17} - 2 \\ z = 3 \end{cases} \begin{cases} x = -\dfrac{5}{17} \\ y = -\dfrac{48}{17} \\ z = 3 \end{cases} \; (-\dfrac{5}{17}, -\dfrac{48}{17}, 3)$

Punto simetrico de A; $\dfrac{A' + A}{2} = M; \; A' = 2M - A;$

$A' = 2\left((-\dfrac{5}{17}, -\dfrac{48}{17}, 3)\right) - A(0,-4,2) = (-\dfrac{10}{17}, -\dfrac{96}{17}, 6) - (0,-4,2) = (-\dfrac{10}{17}, -\dfrac{28}{17}, 4)$

4. Ejercicio

De una bolsa de fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas si remplazamiento .

Se pide:

a)Calcular la probabilidad de que ambos sean multiplos de 3.

b) Calcular la probabilidad de que el primero sea multiplo de 6 y el segundo multiplo de 3.

c) Calcula la probabilidad de que ninguno sea multiplo de 2.

d) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un numero impar, sabiendo que la primera tambien lo ha sido

Solución:

a)Calcular la probabilidad de que ambos sean multiplos de 3.

Multiplos de 3. son : 3,6,9,12,15,18;

Probabilidad de que elprimero sea multiplo de 3 $= \dfrac{6}{20}$

Probabilidad de que el segundo sea multipli de 3 $= \dfrac{5}{19}$

Probabilidad de que ambos sean multiplos de 3 $= \dfrac{6}{20} * \dfrac{5}{19} = \dfrac{30}{380} = 0{,}078947$

b) Calcular la probabilidad de que el primero sea multiplo de 6 y el segundo multiplo de 3.

Multiplos de 3. son : 3,6,9,12,15,18; Multiplos de 6. son : 6,12,18;

Probabilidad de que elprimero sea multiplo de 6 $= \dfrac{3}{20}$

Probabilidad de que el segundo sea multipli de 3 $= \dfrac{5}{19}$

Probabilidad de que el primero sea multiplo de 6 y el segundo multiplo de 3 $= \dfrac{3}{20} * \dfrac{5}{19} = \dfrac{15}{380} = 0{,}03947$

c) Calcula la probabilidad de que ninguno sea multiplo de 2.

Multiplos de 2. son : 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20;

Probabilidad de que el primero no sea multiplo de 2 $= \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$

Probabilidad de que el segundo no sea multiplo de 2 $= \dfrac{9}{19}$

Probabilidad de que ninguno sea multiplo de $2 = \frac{1}{2} * \frac{9}{19} = \frac{9}{38} = 0{,}23684$

d) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un numero impar, sabiendo que la primera tambien lo ha sido

Probabilidad condicionada $\mathrm{P}(2^{\text{º}}\text{ sea impar}|\text{sabiendo que la primera lo ha sido}) = \frac{\mathrm{P}(\text{los dos impares})}{\text{primero ha sido impar}}$

$$\mathrm{P}(2^{\text{º}}\text{ sea impar}|\text{sabiendo que la primera lo ha sido}) = \frac{\frac{9}{38}}{\frac{1}{2}} = \frac{18}{38} = 0{,}473684;$$

5. **Ejercicio**

Dea $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y A una matriz que verifica AB = BC se pide:

a) Calcular determinante de A

b)Calcular BCB^{-1}

c) Encontrar el vector tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $BC \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solución

a) Calcular determinante de A

$$AB = BC \Rightarrow AB \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c & a+c & a+b \\ e+f & d+f & d+e \\ h+i & g+i & g+h \end{pmatrix}$$

Propiedades de determinates $|AB| = |A| * |B|$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2; \quad |C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6; |BC| = 12;$$

$$|BC| \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12$$

$$|AB| = 12; |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{|A| = 6}$$

b)Calcular BCB^{-1}

$$\text{Siendo } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{(\mathrm{Adj}(B))^t}{|B|}$$

$$\mathrm{Adj}(B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \left(\mathrm{Adj}(B)\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{2}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$BCB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{4}{2} & -\frac{2}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

c) Encontrar el vector tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que BC $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$BC \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + 3z \\ x + 3z \\ x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{cases} 2y + 3z = 1; \\ x + 3z = 2; \\ x + 2y = 3; \end{cases}$$

$2y - x = -1; x = 2y + 1;$

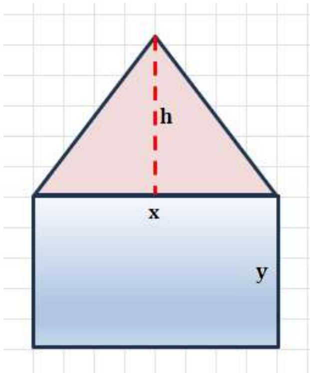
sustituyo en $x + 2y = 3 \Rightarrow 2y + 1 + 2y = 3; y = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2} \Rightarrow\ x + 2\frac{1}{2} = 3; x = 2;$

Sustituyo en $x + 3z = 2; \Rightarrow z = 0;$

6. **Ejercicio**

Disponemos de una barra metalica de 10m. Con ella queremos construir una estructura formada por un rectangulos rematado encima por un triangulo equilatero como en la figura. Para construir la figura cortamos seis trozos de barra original de longitudes adecuadas y se sueldan para obtener la figura.



Se pide:

a) Si denotamos por x la base del triangulo, calcular su altura en funcion de x

b)Determinar como debemos cortar la barra original para que la estructura encierre un area máxima

Solución

a) Si denotamos por x la base del triangulo, calcular su altura en funcion de x

6 Barras cortadas $\Rightarrow\ 4x + 2y = 10m; y = \frac{10 - 4x}{2} = 5 - 2x$

Area del rectangulo $= xy$

Area del triangulo (cada angulo mida 60º) $\Rightarrow$ sen 60 $= \frac{h}{x}$; h = x sen 60; h = 0,866x

Area del triangulo $= \frac{x * 0{,}866x}{2}$

Area de la figura $= xy + \frac{x * 0{,}866x}{2} = \frac{2xy + 0{,}866\,x^2}{2}$

sutituimos y por su valor $y = 5 - 2x$; Area de la figura $= \frac{2xy + 0{,}866\,x^2}{2} \Rightarrow$

Area de la figura; $= \frac{2(5 - 2x)x + 0{,}866\,x^2}{2} = \frac{10x - 4x^2 + 0{,}866\,x^2}{2} = \frac{10x - 3{,}134x^2}{2}$

$A = 5x - 1{,}567x^2; A' = 5 - 3{,}134x = 0;\ x = 1{,}5954$; $y = 5 - 2(1{,}5954); y = 1{,}8091895$

$A'' = -3{,}134$ *es máximo*

7. **Ejercicio**

Dada la recta r: $\begin{cases} x - z = 0; \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y la recta s que pasa por A$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

y tiene direccion$(-1,1,0)$

a) Escribe la posicion relativa de ambas rectas

b) Calcular el plano que contiene a la recta r y a un vector perpendicular a r y a s

c) Encuentra una perpendicular comuna r y a s

Solución

a) Escribe la posicion relativa de ambas rectas

r: $\begin{cases} x - z = 0; \\ x + 2y - z = 4 \end{cases} \begin{cases} x = z; \\ z + 2y - z = 4 \end{cases} \begin{cases} x = z; \\ y = 2; \end{cases}$ $hacemos\ x = \lambda \Rightarrow\ r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \begin{cases} Vd_r = (1,0,1) \\ P_r = (0,2,0) \end{cases}$

s: $\begin{cases} Vd_s = (-1,1,0) \\ P_s = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = -\beta + \frac{1}{4} \\ y = \beta + \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

Los vectores directores no son proporcionales $\frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{1}{0}$

por lo que no son paraaleos ni coincidentes

veamos si se cruzan o se cortan $\begin{cases} Vd_r = (1,0,1) \\ Vd_s = (-1,1,0) \\ vector\ P_sP_r = (0,2,0) - \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \begin{cases} Vd_r = (1,0,1) \\ Vd_s = (-1,1,0) \\ vector\ P_sP_r = \left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

vemos si son coplanarios $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = -2$ no se cortan;

Las rectas se cruzan

b) Calcular el plano que contiene a la recta r y a un vector perpendicular a r y a s

$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \begin{cases} Vd_r = (1,0,1) \\ P_r = (0,2,0) \end{cases}$ y s: $\begin{cases} Vd_s = (-1,1,0) \\ P_s = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = -\beta + \frac{1}{4} \\ y = \beta + \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

Un vector perpendicular a r y s nos lo da e producto vectorial de $Vd_s = (-1,1,0)$y $Vd_r = (1,0,1)$

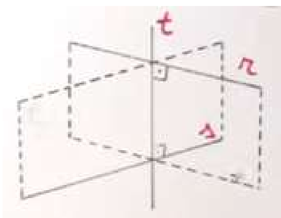
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}i - \frac{1}{4}k - \frac{1}{4}k + \frac{1}{2}J = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}J - \frac{2}{4}k\ ;\ Vd_{rs} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (1,1,-1)$$

El plano pedido tendra vectores directores Vd_{rs} y Vd_ry punto de r (0,2,0

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - y + 2 - z - y + 2 = x - 2y - z + 4 = 0$$

El plano pedido $x - 2y - z + 4 = 0$

c) Encuentra una perpendicular comuna r y a s



La recta perpendicular a las dos r y s

El plano calculado anterior contiene a la recta r

y el vector director de t ; $x - 2y - z + 4 = 0$

Calculamos otro plano que contenga a s y a un vector perpendicular a s y r

Vd_{rs} y Vd_s y un punto de s $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})$

$$\begin{vmatrix} x-\frac{1}{4} & y-\frac{1}{4} & z-\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = y-\frac{1}{4}+z-\frac{1}{2}+z-\frac{1}{2}+x-\frac{1}{4} = x+y+2z-\frac{6}{4} = 0$$

$$x+y+2z-\frac{3}{2}=0$$

La recta pedida $\begin{cases} x+y+2z-\frac{3}{2}=0 \\ x-2y-z+4=0 \end{cases}$

8. **Ejercicio**

El peso de las crias recien nacidas de una especie de primates sigue una distribuccion normal X de media $\mu = 3353$ gr. Sabiendo que $P(X > 3693) = 0{,}2$;

a) Calcula da desviacion tipica σ de la distribuccion de pesos

b) Calcular el valor de x_0 tal que $P(X < x_0) = 0{,}2$

Solución

a) Calcula da desviacion tipica σ de la distribuccion de pesos

Pasamos (μ es la media y σ es la desviacion tipica) ; en otra Z que siga una distribuccion N(0,1)

aplicando la formula $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$P(X \le 3693) = 0{,}8$;

$$P\left(Z = \frac{X-3353}{\sigma} \le \frac{3693-3353}{\sigma}\right)$$

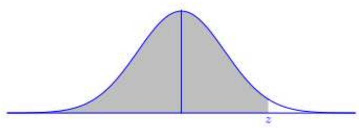
$$= P\left(Z \le \frac{340}{\sigma}\right) = 0{,}8$$

=> En la tabla el valor 0,8 ≈ 0,7995 equivale en la tabla de distribucion N(0,1) = 0,84

$\frac{340}{\sigma} = 0{,}84$; $\sigma = 404{,}7619$;

Tabla ($\mu = 3353, \sigma = 404{,}7619$)

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución N(0, 1), $P(Z < 0.45) = 0.6736$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545

b) Calcular el valor de x_0 tal que $P(X < x_0) = 0{,}2$

$$P\left(Z \le \frac{x_0-3353}{404{,}7619}\right) = -0{,}84 \Rightarrow x_0 = 3013$$

3 Examen 2019-2020 C

1. **Ejercicio**

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parametro real a:

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a; \\ \quad -y + z = a; \end{cases}$$

a) Discutir el sistema segun los valores de a

b) reseolver el sistema para $a = 0$:

Solución

Hallamos el rango de la matriz de variables $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$1 + a - 1 + a^2 = a^2 + a = a(a+1) = 0$; el determinante es 0 para $a = 0$ y $a = -1$

para $a \neq 0$ y $a \neq -1 \Rightarrow$ Rango de la matriz coeficientes $=$ Rango de la ampliada $= 3$;

Sistema compatible determinado

Para $a = 0$ sustituyo $\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a; \\ -y + z = a; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 0 + z = 1 \\ 0 + y - z = 0; \\ -y + z = 0; \end{cases} \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0; \\ -y + z = 0; \end{cases}$

Rrango de la matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$; $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$; $R(\text{ampliada}) = 3$;

Rango de la matriz coeficientes $= 2$ y Rango de la ampliada $= 3$; Sistema incompatible

Para $a = -1$ sustituyo $\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a; \\ -y + z = a; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = -2; \\ -y + z = -1; \end{cases}$

Rrango de la matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 - 1 = -4$;

$R(\text{ampliada}) = 3$;

- ***Rango de la matriz A $\neq$ rango de matriz A ampliada; Sistema incompatible***
- ***Rango matriz A = rango matriz A ampliada = nº de incognitas =>***

  Sistema Compatible determinado; tine una solución A

- ***Rango matriz A = rango matriz A ampliada $\neq$ nº de incognitas =>***

  Sistema Compatible determinado; tine infinitas solución A

- **Rango de la matriz coeficientes = 2 y Rango de la ampliada = 3; Sistema incompatible**

b) reseolver el sistema para $a = 0$:

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a; \\ -y + z = a; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 0y + z = 0 + 1 \\ -0x + y - z = 2 * 0; \\ -y + z = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0; \\ -y + z = 0; \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Rango de A = 2 y rango de la ampliada de A = 2 => SCD con infinitas soluciones

$dado\ que\ \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_3^{\mathrm{E}_1} \begin{cases} x + z = 1 \\ y = z; \end{cases}$ Sustituyo en $\mathrm{E}_1 \begin{cases} x = 1 - z \\ y = z; \end{cases}$ *hago* $y = z = \lambda$; *Solución* $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda; \\ z = \lambda; \end{cases}$

2. **Ejercicio**

Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$; Se Pide:

considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parametro real a:

a) Justifica usando el teorema adecuado, que que existe algun punto en el intervalo [1,10] en que ambas funciones toman el mismo valor .

b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente minima

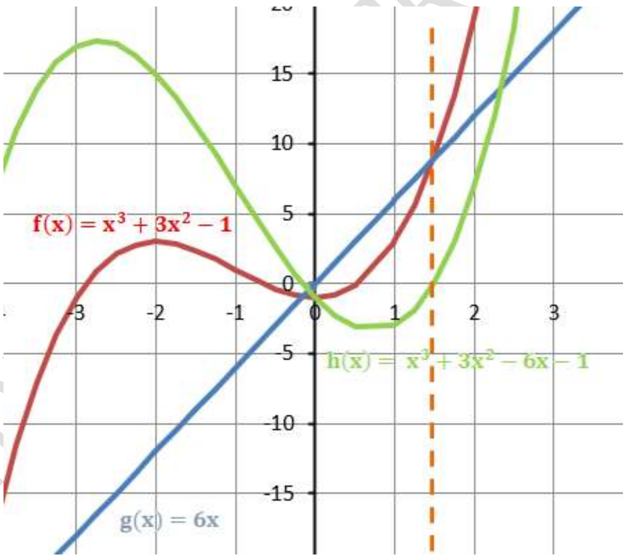
c) Calcula $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$;

Solución

a) Justifica usando el teorema adecuado, que que existe algun punto en el intervalo [1,10] en que ambas funciones toman el mismo valor .

El teorema de Bolzano o teorema del valor medio nos dice que si una funcion $f(x)$ *es continua en en un intervalo* $[a, b]$.

Si $f(a)$ *y* $f(b)$ *tienen signos opuestos existe al menos un mumero* $c \in (a, b)$ *donde* $f(c) = 0$;



Si ambas funciones toman el mismo valor $f(x) = g(x)$

$=> f(x) - g(x) = h(x)$

$h(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1 = 0$;

es una funcion continua y

$$\begin{cases} h(10) = 10^3 + 3 * 10^2 - 6 * 10 - 1 > 0 \\ h(1) = 1^3 + 3 * 1^2 - 6 * 1 - 1 < 0 \end{cases}$$

Segun el teorema del valor medio existe un punto c donde en el intervalo (a, b) donde $h(x) = 0$;

b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente minima

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1; f'(x) = m =$ pendiente de la tangente $= 3x^2 + 6x = 0; x(3x + 6) = 0$;

Habrá un máximo o un mínimo en $x = 0$ y $x = -2$;

$f''(x) = 6x + 6 = 0; x = -1$; *Punto critico* $x = -1$;

Calculamos valores $f'(x)$ proximos al punto critico

(-∞,1) *para* $x = -2$	1 *Para* $x = -1$	(1, ∞) *para* $x = 0$
− decreciente	0 mínimo	+ creciente

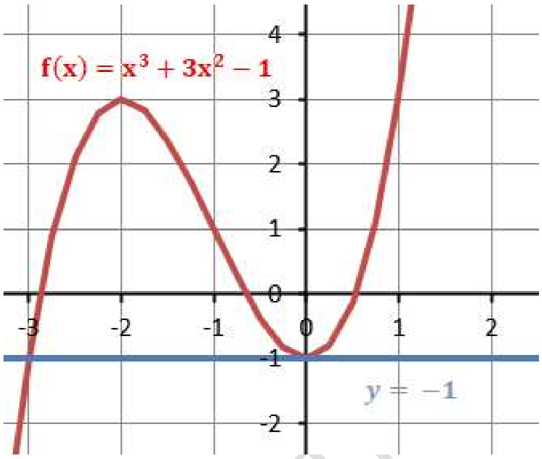
Calculamos el punto mínimo $x = 0 =>$

$f(x) = -1$; Punto mínimo $(0, -1)$

Calculamos $m = f'(x)$ en el punto $(0, -1) =>$

$m = 0;$

$Tangente: y - (-1) = 0(x - 0) => y = -1;$



c) Calcula $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx;$

$$\int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x} dx = \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x} dx \text{ ; hacemos la division} = \int_1^2 (\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6x})dx =$$

$$\int_1^2 (\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{6}x - \frac{1}{6x})dx = \frac{1}{6}\int_1^2 (x^2 + 3x - \frac{1}{x})dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \ln x\right]_1^2 =$$

$$\frac{1}{6}\left(\left(\frac{2^3}{3} + \frac{3 * 2^2}{2} - \ln 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{3 * 1^2}{2} - \ln 1\right)\right) = \frac{1}{6}(\frac{8}{3} + \frac{12}{2} - \ln 2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + ln 1\ ) =$$

$$\frac{1}{6}(\frac{7}{3} + \frac{9}{2} + \ln\frac{1}{2}) = \frac{41}{36} + \frac{1}{6}\ln\frac{1}{2};$$

$$\boxed{\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{41}{36} + \frac{1}{6}\ln\frac{1}{2};}$$

3. **Ejercicio**

Dadas las rectas $r = \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$ y $s = \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ Se pide:

a) Calcular la posición relativa de las rectas r y s;

b)Hallar la ecuacion del plano perpendicular a la recta r y que pase por $P(2, -1,5)$

c) Encontrar la ecuacion del plano paralelo a la recta r y que contenga a la recta s

Solución

a) Calcular la posición relativa de las rectas r y s;

$r = \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$ como son dos ecuaciones y tres incognitas, depende de un parametro

Hacemos $x = \beta$; y sustituimos en $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases} => \begin{cases} \beta - y = 2 \\ 3\beta - z = -1 \end{cases} \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta - 2 \\ z = 3\beta + 1 \end{cases} \begin{cases} \text{Vector director}(1,1,3) \\ \text{Punto } (0, -2,1) \end{cases}$

$s = \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \begin{cases} \text{Vector director}(2, -1,1) \\ \text{Punto } (-1, -4,0) \end{cases}$

Posiciones de las rectas:

Vemos si los vectores directores son proporcionales $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{3}{1}$ no son =>

las rectas se cortan o se cruzan

comprobamos si se corta, si son coplanarias su determinante es 0;

$$\begin{cases} \text{Vector director r}(1,1,3) \\ \text{Vector director de s } (2,-1,1) \\ \text{Vector que une los dos puntos} = (0,-2,1)-(-1,-4,0)=(1,2,1) \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$\textit{Dado que el determinante es distinto de } 0 \textit{ las rectas se cruzan}$

b)Hallar la ecuacion del plano perpendicular a la recta r y que pase por $\mathrm{P}(2,-1{,}5)$

Si es perpendicular a la recta r su vector Normal será el vector director de la recta

$\mathrm{Ax+By+Cz+D=0}$ Sustituyo => $\mathrm{1x+1y+3z+D=0}$; como ha de pasar por $\mathrm{P}(2,-1{,}5)$

$1*2+1(-1)+3*5+\mathrm{D}=0; D=16;$ $\textit{Plano } \mathrm{x+y+3z+16=0}$

c) Encontrar la ecuacion del plano paralelo a la recta r y que contenga a la recta s

Para hallar la ecuacion de un plano necesito dos vectores directores del plano y un punto

$$\text{Si ha de ser paralelo a la recta r} \begin{cases} \text{Vector del plano paralelo a : Vector director de r}(1,1,3) \\ \text{Vector del plano: Vector director de s } (2,-1,1) \\ \text{un punto será el de la recta } (-1,-4,0) \end{cases}$$

$$\text{Ecuacion del plano} \begin{vmatrix} \mathrm{x}-(-1) & \mathrm{y}-(-4) & \mathrm{z}-0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} \mathrm{x}+1 & \mathrm{y}+4 & \mathrm{z} \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$x+1+6y+24-z+3x+3-y-4-2z=0;$

$\textit{Ecuación del plano } 4x+5y-3z+24=0;$

4. Ejercicio

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo coocado en el centro de la diana .
La probabilidad de alcanzar el blanco en en el primer tiro es 30% en el segundo es del 40% en el tercero 50% y en el cuarto 60%

a) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el 4 disparo

b)Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo

c) En una exhibicion participan diez arqueros profesionales , que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado 6 globos al primer disparo

Solución

a) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el 4 disparo

Tomamos E explote y N no explote

Probabilidad de que explote con el primer disparo $E_1 = 0{,}3;$

Probabilidad de que no explote en el primero $N_1 = 1-0{,}3 = 0{,}7;$

Probabilidad de que no explote en el primero y explote en el segundo $E_2 = 0{,}7*0{,}4 = 0{,}28$

Probabilidad de que no explote en el primero, ni en el segundo y explote en el tercero

$E_3 = N_1 * N_2 * E_3 = (1-0{,}3)*(1-0{,}4)*0{,}5 = 0{,}7*0{,}6*0{,}5 = 0{,}21;$

Probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el 4 disparo

$E_{antes\ del\ 4} = E_1 + E_2 + E_3 = 0{,}3 + 0{,}28 + 0{,}21 = 0{,}79$

b)Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo

$N_{siga\ intacto\ despues\ del\ cuarto\ disparo} = N_1 * N_2 * N_3 * N_4$

$= (1 - 0,3) * (1 - 0,4) * (1 - 0,5) * (1 - 0,6) = 0,7 + 0,6 + 0,5 + 0,4 = 0,084;$

c) En una exhibicion participan diez arqueros profesionales , que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado 6 globos al primer disparo

Formula de la probabilidad Binomial es $\boldsymbol{P(X = r)} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{p^n * q^{n-r}}$

$X =$ *Variable, numero de veces que sucede el evento definido*

$r =$ *valor que toma la variable* (6)

$n =$ *numero de veces que se repite el evento* (10)

$p =$ *Probabilidad de que suceda* X(0,85)

$q =$ *Probabilidad de que no suceda* X(0,15)

$$P(X = r) = \binom{10}{6} 0,85^6 * 0,15^4 = \frac{10\text{¡}}{6\text{¡}*(10-6)\text{¡}} 0,85^6 * 0,15^4 = \left(\frac{10*9*8*7}{4*3*2*1}\right) 0,85^6 * 0,15^4$$

Probabilidad de que entre los 10 hayan explotado 6 globos al primer disparo

$\mathrm{P} = 210 * \ 0,00019 = 0,0399 = 4\ \%$

5. **Ejercicio**

Segunn informa la AE de acuicultura, durante el año 2016 se comercializaron en España dorada, lubinas y rodaballos por un total de 275,8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron 13740 toneladas de doradas, 23440 t de lubinas. En cuanto a rodaballos se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63,6 millones de Euros. Sabiendo que el kg de dorada fue 11 cm mas caro que el kg de lubina. Se pide calcular el precio del kg de cada uno de los tres tipos de pescado

Solución

Hacemos una tabla con los datos del problema

	Kg vendidos	*Precio el Kg*	*Euros*
Dorada	*13.740.000*	*(x+0,11)*	*5,77671€*
Lubina	*23.440.000*	*x*	5,66671€
Rodaballo	*740.000*	*63600000/740000 = 8,5946*	*63600000*
TOTAL	*37.920.000*		*275.800.000*

$\text{Precio de las doradas y lubinas vendidas} = 275.800.000 - 63600000 = 212.200.000$

$\text{Precio de las dorada + lubinas} = 13.740.000 * (x + 0,11) + 23.440.000 * x = 212.200.000$

$13.740.000x + 1.511.400 + 23.440.000x = 212.200.000; 37.180.000x = 210.688.600;$

$$\text{Precio de la lubina} = \mathrm{x} = \frac{210.688.600}{37.180.000} = 5,66671€$$

$\text{Precio de la dorada} = 5,66671€ + 0,11 = 5,77671€$

6. **Ejercicio**

Sea la funcion $f(x) = \begin{cases}(x-1)^2 \; si \; x \le 1 \\ (x-1)^3 \; si \; x > 1\end{cases}$

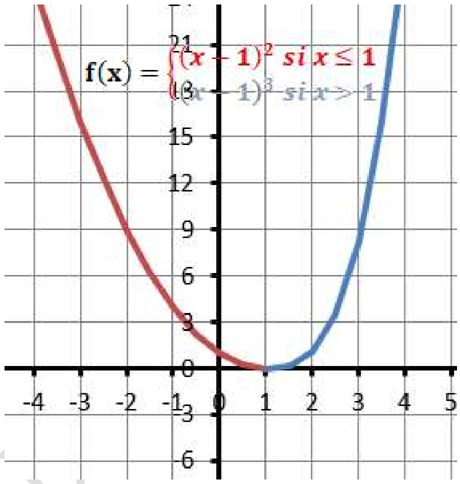
a) Estudie la continuidad en $[-4,4]$

b) Analice la derivabilidad y crecimiento en $[-4,4]$

c) Determine si la funcion $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$

Solución

a) Estudie la continuidad en $[-4,4]$



La funcion $f(x) = \begin{cases}(x-1)^2 \; si \; x \le 1 \\ (x-1)^3 \; si \; x > 1\end{cases}$ *puede*

presentar discontinuidad en $x = 1$;

Hallo valor de f en $x = 1$; $f(1) = (1-1)^2 = 0$;

Hallo limites por la derecha e izquierda de $x = 1$;

$\lim\limits_{x\to1^-} (x-1)^2 = 0$;

$\lim\limits_{x\to1^+} (x-1)^3 = 0$;

Dado que $\lim\limits_{x\to1^-} (x-1)^2 = \lim\limits_{x\to1^+} (x-1)^3 = 0$;

Implica que la f(x) es continua en $x = 1$

b) Analice la derivabilidad y crecimiento en $[-4,4]$

Hallamos la derivada de la funcion $f(x) = \begin{cases}(x-1)^2 \; si \; x \le 1 \\ (x-1)^3 \; si \; x > 1\end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases}2(x-1) si \; x \le 1 \\ 3(x-1)^2 \; si \; x > 1\end{cases}$

Hallo valor de $f'(x)$ en $x = 1$; $f'(1) = 2(1-1) = 0$;

Hallo limites por la derecha e izquierda de $x = 1$;

$\lim\limits_{x\to1^-} 2(x-1) = 0$;

$\lim\limits_{x\to1^+} 3(x-1)^2 = 0$;

Dado que $\lim\limits_{x\to1^-} 2(x-1) = \lim\limits_{x\to1^+} 3(x-1)^2 = 0$;

La funcion es derivable en $x = 1$;

Comprobamos crecimiento de la funcion $f'(x)$ dado que para $f'(1) = 0$

(-∞,1) $para \; x = 0$ $f'(x) = 2(x-1) si \; x \le 1$	$Para \; x = 1$	$(1, \infty)$ $para \; x = 2$ $f'(x) = 3(x-1)^2 si \; x > 1$
$-$ decreciente	0 mínimo	+ creciente

c) Determine si la funcion $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$

$g(x) = f'(x) = \begin{cases}2(x-1) si \; x \le 1 \\ 3(x-1)^2 \; si \; x > 1\end{cases}$

Comprobamos continuida de la funcion g(x) en $x = 1$:

Hallo valor de g en $x = 1$; $g(1) = 2(x-1) = 0$;

Hallo limites por la derecha e izquierda de $x = 1$;

$\lim_{x\to 1^-} 2(x-1) = 0;$

$\lim_{x\to 1^+} 3(x-1)^2 = 0;$

Dado que $\lim_{x\to 1^-} 2(x-1) = \lim_{x\to 1^+} 3(x-1)^2 = 0;$

Implica que la g(x) es continua en $x = 1$

Comprobamos derivabilidad de la funcion g(x) en $x = 1$:

$$g'(x) = \begin{cases} 2si\ x \leq 1 \\ 6(x-1)\ si\ x > 1 \end{cases}$$

Hallo valor de $g'(x)$ en $x = 1; g'(1) = 2$

Hallo limites por la derecha e izquierda de $x = 1$;

$\lim_{x\to 1^-} 2 = 2;$

$\lim_{x\to 1^+} 6(x-1) = 0;$

Dado que $\lim_{x\to 1^-} = 2$; $\lim_{x\to 1^+} = 0$ y $g'(1) = 2;$

Implica que la g(x) no es derivable en $x = 1$

7. Ejercicio

Dados lo puntos $P(-3,1,2)$ y $Q(-1,0,1)$ y el plano $\pi: x + 2y - 3z = 4$ se pide:

a) Halla la proyeccion de Q sobre el plano

b) Escribe la ecuacion del plano paralelo a $\pi: x + 2y - 3z = 4$ que pasa por P

c) Escribe la ecuacion del plano perpendicular a $\pi: x + 2y - 3z = 4$ que contiene a P y Q

Solución

a) Halla la proyeccion de Q sobre el plano

La proyeccion de Q sobre el plano estara en la recta perpendicular al plano que pasa por Q

El vector normal del plano $\pi: x + 2y - 3z - 4 = 0$ será $(1,2,-3)$ y será el vector de la recta perpendicular al plano

Recta perpendicular al plano que pasa por Q $\begin{cases} \text{Vd } (1,2,-3) \\ \text{Punto de paso } (-1,0,1) \end{cases}$ $r = \begin{cases} x = 1\lambda - 1; \\ y = 2\lambda \\ z = -3\lambda + 1 \end{cases}$

Punto de interseccion del plano y la recta; sustituyo en el plano $\pi: x + 2y - 3z = 4$

$(\lambda - 1) + 2 * 2\lambda - 3(-3\lambda + 1) = 4;\ \lambda + 4\lambda + 9\lambda - 8 = 0;\ \lambda = \frac{8}{14} = \frac{4}{7};$

Punto de proyeccion de Q en el plano = Punto de interseccion $\begin{cases} x = \frac{4}{7} - 1; \\ y = 2 * \frac{4}{7} \\ z = -3\frac{4}{7} + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{3}{7}; \\ y = \frac{8}{7} \\ z = -\frac{5}{7} \end{cases}$

b) Escribe la ecuacion del plano paralelo a $\pi: x + 2y - 3z = 4$ que pasa por P

Un plano paralelo a $\pi: x + 2y - 3z = 4$ que pasa por P, tendra el mismo vector normal

$\beta: Ax + By + Cz + D = 0$; con vector normal $(1,2,-3) \Rightarrow\ x + 2y - 3z + D = 0;$

Como ha de pasar por $P(-3,1,2)$ sustituyo; $-3 + 2(1) - 3 * 2 + D = 0; -3 + 2 - 6 + D = 0; D = 7;$

Plano paralelo a $\pi: x + 2y - 3z = 4$ que pasa por P; $\beta: x + 2y - 3z + 7 = 0$

d) Escribe la ecuacion del plano perpendicular a π: $x + 2y - 3z = 4$ que contiene a P y Q

Un plano perpendicular a $x + 2y - 3z = 4$ tendrá como vector director el normal del plano

$\overrightarrow{Vd} = (1,2,-3)$

Otro vector director P − Q; $\overrightarrow{(Vd_{P-Q})} = P(-3,1,2) - Q(-1,0,1) = (-2,1,1)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{Vd} = (1,2,-3) \\ \overrightarrow{(Vd_{P-Q})} = (-2,1,1) \\ Punto = (-1,0,1) \end{cases} Ecuacion\ del\ plano \begin{vmatrix} x-(-1) & y-0 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$-3x - 3 - 4z + 4 + y - 2x - 2 - 6y - z + 1 = -5x - 5y - 5z = 0;$

Plano perpendicular a π: $x + 2y - 3z = 4$ que contiene a P y Q; $x + y + z = 0$

8. Ejercicio

Se consideran dos sucesiones A y B tales que $P(A) = 0{,}5$ y $P(B) = 0{,}25$ y $P(A \cap B) = 0{,}125$

a) Sea C otro suceso incompatible con A y con B ¿ Son compatible los sucesos C y AUB ?

b) Son A y B Independientes?

c) Calcula la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

d) Calcula $P(\bar{B}|A)$

Solución

Teoria de probabilidades

Sucesos incompatibles

Se dice que dos sucesos A y B son incompatibles si no pueden ocurrir los dos a la vez => $A \cap B = \emptyset$

Sucesos Independientes

Dos sucesos A y B son independientes si la ocurrencia de A no afecta a la ocurrencia de B ; $P(A \cap C) = P(A) * P(B)$

Propiedades de la frecuencia relativa (Probabilidad)

- ✓ La probabilidad de un suceso siempre está entre 0 y 1
- ✓ La probabilidad de un suceso seguro es 1
- ✓ La probabilidad de un suceso imposible es 0
- ✓ La probabilidad de la union de dos sucesos cualesquiera $\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap} B)$
- ✓ La probabilidad de la union de varios sucesoss cualesquiera
- ✓ $\mathbf{P(AUBUC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap}B) - \mathbf{P(A\cap}C) - \mathbf{P(B\cap}C) + \mathbf{P(A\cap}B\cap C)$
- ✓ Cuando dos sucesos son incompatibles (no pueden ocurrir los dos a la vez)se cumple $\mathbf{P(A\cap}B) = 0.$
- ✓ Cuando dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de la unión de los mismos es la suma de sus probabilidades $\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B)}$

$$\mathbf{P(A_1\ U\ A_2\ U\ A_3\ U \ldots U\ A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots . + P(A_n)}$$

- ✓ La probabilidad de un suceso contrario a A , $\mathbf{\bar{A} = P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$
- ✓ La probabilidad de la interseccion de dos sucesos independiente $\mathbf{P(A\cap B) = P(A) * P(B)}$
- ✓ Cuando dos sucesos son independientes $\mathbf{P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{AUB}) = 1 - P(AUB)}$
- ✓ $\mathbf{P(A - B) = P(A\cap\bar{B}) = P(A) - P(A\cap B)}$
- ✓ $\mathbf{P(A\cap\bar{B}) = P(A) - P(A\cap B);\ P(A) = P(A\cap\bar{B})} + P(\mathbf{A\cap B})$
- ✓ $\mathbf{P(\bar{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B);\ P(B) = P(\bar{A}\cap B)} + P(\mathbf{A\cap B})$

a) Sea C otro suceso incompatible con A y con B ¿ Son compatible los sucesos C y AUB ¿

Al ser incompatibles => $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap C = \emptyset$;

Si A y B no tienen ningun elemento comun con C => AUB no tendra ningun elemto comun con C;

$(AUB) \cap C = \emptyset$; por la propiedad distributiva => $C \cap (AUB) = (C \cap A)U(C \cap B) = \emptyset \text{ U } \emptyset = \emptyset$

C y (A U B) son incompatibles

b) Son A y B Independientes?

$P(A \cap C) = P(A) * P(B)$: sustituimos => $P(A) = 0{,}5$ y $P(B) = 0{,}25$ y $P(A \cap B) = 0{,}125$

$P(A) = 0{,}5$ y $P(B) = 0{,}25$ y $P(A \cap B) = 0{,}125 = (P(A) = 0{,}5) * (P(B) = 0{,}25) = 0{,}125$;

A y B Independientes

c) Calcula la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

- ✓ Cuando dos sucesos son independientes $\mathbf{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{AUB}) = 1 - P(AUB)}$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P\,\overline{(AUB)} = 1 - P(AUB)$;

- ✓ La probabilidad de la union de dos sucesos cualesquiera $\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap} B)$

$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}25 - 0{,}125 = 0{,}625$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0{,}625 = 0{,}375$;

d) Calcula $P(\bar{B}|A)$

Probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso al que denominamos A, como consecuencia de que haya tenido lugar otro evento llamado B

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$ ó $P(A \cap B) = P(B|A) * P(A)$

$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)}$;

- ✓ $\mathbf{P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$; $\mathbf{P(A) = P(A \cap \bar{B})} + P(\mathbf{A \cap B})$

$P(\bar{B} \cap A) = 0{,}5 - 0{,}125 = 0{,}375$;

$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}375}{0{,}5} = 0{,}75$