

Prueba de EBAU 2020-2021

Contenido

1	EXAMEN 2020-2021 A.....	2
2	EXAMEN 2020-2021 B.....	11

ANGEL HERNANDEZ DE CASTRO

1 Examen 2020-2021 A

1. Ejercicio

Tres amigas Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores, todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcular cuántos seguidores tiene cada una

Solución

	Seguidores	
Sara	X	2000
Cristina	Y	5000
Jimena	Z	8000
	15000	

Enunciado:

Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores : $0,75 * Z = 3X$

$$\frac{X}{2} + \frac{1}{5}Y = \frac{1}{4}Z; \quad 10X + 4Y = 5Z;$$

$$\begin{cases} X + Y + Z = 15000 \\ 0,75Z = 3X \\ 10X + 4Y = 5Z \end{cases} \quad \begin{cases} X + Y + Z = 15000 \\ 0,75Z - 3X = 0 \\ 10X + 4Y - 5Z = 0 \end{cases}$$

$$0,75Z - 3X = 0; X = \frac{0,75}{3}Z; X = 0,25Z$$

$$\text{sustituimos } \begin{cases} 0,25Z + Y + Z = 15000 \\ 10 * 0,25Z + 4Y - 5Z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1,25Z + Y = 15000; Y = 15000 - 1,25Z; \\ -2,5Z + 4Y = 0; Y = \frac{2,5Z}{4} \end{cases}$$

$$15000 - 1,25Z = \frac{2,5Z}{4}; 60000 = 7,5Z; Z = 8000 \text{ seguidores}$$

$$X = 0,25Z \text{ sustituimos } \Rightarrow X = 2000 \text{ seguidores}$$

$$Y = \frac{2,5Z}{4} = 5000 \text{ seguidores}$$

2. Ejercicio

Calcular en caso de existir los siguientes límites

$$a1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x}; \quad a2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin \frac{1}{x}} \right)$$

Use el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ cuando sea necesario

b) Calcule las siguientes integrales

$$b1) \int \frac{x}{x^2-1} dx; \quad b2) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x} = \frac{0^2(1-2*0)}{0-2*0^2-\sin 0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminado; Aplicamos L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1-2x) - 2x^2}{1-4x-\cos x} = \frac{2*0(1-2x) - 2*0^2}{1-4*0-\cos 0} = \frac{0}{1-0-1} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

Aplicamos L'Hopital $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1-2x) + 2 * 2x - 4x}{-4 + \text{sen } x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 4x + 4x - 4x}{-4 + \text{sen } x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 4x}{-4 + \text{sen } x} = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x - 2x^2 - \text{sen } x} = -\frac{1}{2};$$

a2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\text{sen} \frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{\infty} \left(\frac{3}{\infty} - \frac{2}{\text{sen} \frac{1}{\infty}} \right) = (0 - 0) \text{ indeterminado; hacemos cambio de variable}$

$\frac{1}{x} = t \Rightarrow$ si es para $x \rightarrow \infty$ ahora será para $x \rightarrow 0$; $\lim_{t \rightarrow 0} t \left(3t - \frac{2}{\text{sen } t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(3t^2 - \frac{2t}{\text{sen } t} \right) =$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{3t^2 \text{sen } t - 2t}{\text{sen } t} \right) = \frac{0}{0} \text{ Indeterminado};$$

Aplicamos L'Hopital $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{(6t \text{sen } t + \text{cos } t(3t^2) - 2)}{\text{cos } t} \right) = -\frac{2}{1} = -2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\text{sen} \frac{1}{x}} \right) = -2;$$

b) Calcule las siguientes integrales

b1) $\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + C$; Integral directa

b2) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ Aplicamos integracion por partes

(ILATE) Aplicamos la formula $\int u dv = uv - \int v du$

$$\Rightarrow \int x^2 e^{-x} dx = \begin{cases} x^2 = u; & 2x dx = du \\ e^{-x} dx = dv; & -e^{-x} = v \end{cases} \int x^2 e^{-x} dx = x^2(-e^{-x}) - \int -e^{-x} * 2x dx$$

integramos por partes; $-2 \int -e^{-x} * x dx \left\{ \begin{array}{l} x = u; & 1 dx = du \\ -e^{-x} dx = dv; & e^{-x} = v \end{array} \right. = -2((x(e^{-x}) - \int e^{-x} * 1 dx))$

$$-2 \int -e^{-x} * 2x dx = -2x(e^{-x}) - 2e^{-x}$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = [x^2(-e^{-x}) - (2x(e^{-x}) - 2e^{-x}) + C]_0^1 =$$

$$(-1^2(e^{-1}) - 2 * 1e^{-1} - 2e^{-1}) - (-0^2(e^{-1}) - 2 * 0e^{-1} - 2e^{-0}) =$$

$$= -1^2(e^{-1}) - 2 * 1e^{-1} - 2e^{-1} + 2 = e^{-1}(-1 - 2 - 2) + 2 = -5e^{-1} + 2 = -\frac{5}{e} + 2$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\frac{5}{e} + 2;$$

3. Ejercicio

Dado el punto $A(1,0,-1)$ y la recta $r: x - 1 = y + 1 = \frac{z - 2}{2}$ y el plano $\pi: x + y - z = 6$. Se pide:

- Hallar el ángulo que forma el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A .
- Determinar la distancia entre el plano π y la recta r
- Calcula una ecuación de la recta que pasa por A , forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π

Solución

- Hallar el ángulo que forma el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A .

El plano perpendicular a la recta r tendrá como vector normal el vector director de la recta

$$r: x - 1 = y + 1 = \frac{z - 2}{2} \begin{cases} \vec{v}_{d_r} = (1, 1, 2) \\ P_r = (1, -1, 2) \end{cases}$$

$$\vec{v}_{n_\pi} = (1, 1, 2) \quad \mu: Ax + By + Cz + D = 0; \text{ sustituyo } \Rightarrow \mu: 1x + 1y + 2z + D = 0; \mu: x + y + 2z + D = 0$$

Como ha de pasar por $A(1,0,-1)$ debe cumplir la ecuación: $\mu: x + y + 2z + D = 0; 1 + 0 - 2 + D = 0$
 $D = 1; \mu: x + y + 2z + 1 = 0$

El ángulo que formaran los planos lo hallamos con el producto escalar

$$\vec{v}_{n_\pi} * \vec{v}_{n_\mu} = |\vec{v}_{n_\pi}| * |\vec{v}_{n_\mu}| \cos \alpha; \cos \alpha = \frac{\vec{v}_{n_\pi} * \vec{v}_{n_\mu}}{|\vec{v}_{n_\pi}| * |\vec{v}_{n_\mu}|}$$

$$\vec{v}_{n_\pi} * \vec{v}_{n_\mu} = (1, 1, -1)(1, 1, 2) = 1 + 1 - 2 = 0;$$

$$|\vec{v}_{n_\pi}| * |\vec{v}_{n_\mu}| = \sqrt{(1 + 1 + 1)} * \sqrt{(1 + 1 + 4)} = \sqrt{3} * \sqrt{6} = \sqrt{18};$$

$$\cos \alpha = \frac{0}{\sqrt{18}} = 0; \text{ los planos son perpendiculares}$$

- Determinar la distancia entre el plano π y la recta r

Comprobamos si la recta corta al plano $r: x - 1 = y + 1 = \frac{z - 2}{2}; \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda - 1 \\ z = 2\lambda + 2 \end{cases}$

Sustituimos en el plano $\pi: x + y - z = 6 \Rightarrow \lambda + 1 + \lambda - 1 - (2\lambda + 2) = 6; -2 = 6;$

Como no se cortan ni está contenida en el plano, la distancia se calcula hallando distancia de

un punto de la recta (por ejemplo $P_r = (1, -1, 2)$) al plano $\pi: x + y - z = 6$

Distancia de un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y el plano $\lambda = Ax + By + Cz + D = 0$

$$\text{distancia de } (P \text{ a } \lambda) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{Distancia de } (P_r \text{ a } \pi) = \frac{|1 * 1 + 1 * (-1) - 1 * 2 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

- Calcula una ecuación de la recta que pasa por $A(1,0,-1)$, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π

Buscamos un plano que contenga a una recta s perpendicular a $r: x - 1 = y + 1 = \frac{z - 2}{2} \begin{cases} \vec{v}_{d_r} = (1, 1, 2) \\ P_r = (1, -1, 2) \end{cases}$

que pase por A y sea paralelo al plano $\pi: x + y - z = 6$

Si la recta s es perpendicular a r su producto escalar = 0;

$$\Rightarrow (\vec{v}_{d_r} = (1, 1, 2)) * (\vec{v}_{d_s} = (a, b, c)) = 0; 1a + 1b + 2c = 0$$

Por otro lado el \vec{v}_{d_s} ha de ser perpendicular al vector normal del plano $\vec{v}_{n_\pi} = (1, 1, -1)$

$$\text{Producto escalar} = 0 \Rightarrow (\vec{v}_{d_s} = (a, b, c)) * (\vec{v}_{n_\pi} = (1, 1, -1)) = 0; a + b - c = 0;$$

$$\begin{cases} 1a + 1b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \quad \text{dos ecuaciones con tres incógnitas; hacemos } a = \beta$$

$$\begin{cases} \beta + b + 2c = 0 \\ \beta + b - c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0; \\ b = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \beta \\ b = -\beta \\ c = 0; \end{cases} \quad \text{La recta s: será } \begin{cases} x = \beta + x_0 \\ y = -\beta + y_0 \\ z = 0 + z_0; \end{cases}$$

Si la recta s: ha de pasar por $A(1,0,-1) \Rightarrow s: \begin{cases} x = \beta + 1 \\ y = -\beta + 0 \\ z = 0 + (-1); \end{cases}$

La recta pedida será s: $\begin{cases} x = \beta + 1 \\ y = -\beta \\ z = -1; \end{cases}$

4. Ejercicio

En una urna hay dos bolas blancas y cuatro negras. Se extrae una al azar. Si la bola extraída es blanca se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra no se devuelve a la urna.

A continuación se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

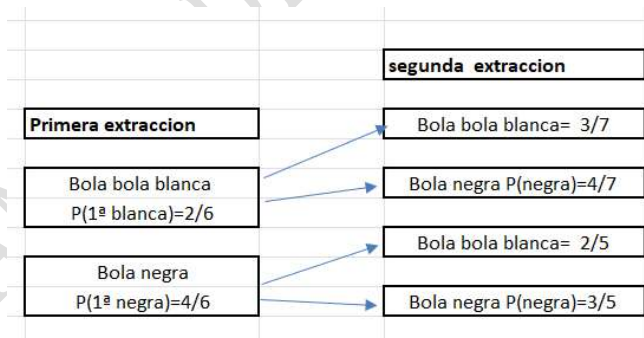
- Cual es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color
- Cual es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color
- Cual es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda a sido blanca

Solución

- Cual es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

$$P(\text{las dos bolas blancas}) = \frac{2}{6} * \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

$$P(\text{las dos bolas negras}) = \frac{4}{6} * \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$



$$P(\text{las dos bolas del mismo color}) = P(\text{las dos bolas blancas}) \cup P(\text{las dos bolas negras}) = \frac{1}{7} + \frac{2}{5} = \frac{19}{35}$$

- Cual es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.

$$P(\text{la } 1^{\text{o}} \text{ sea blanca y la segunda negra}) = \frac{2}{6} * \frac{4}{7} = \frac{8}{42}$$

$$P(\text{la } 1^{\text{o}} \text{ sea negra y la segunda sea blanca}) = \frac{4}{6} * \frac{2}{5} = \frac{8}{30}$$

$$P(\text{las dos bolas de distinto color}) = \frac{8}{42} + \frac{8}{30} = \frac{240}{1260} + \frac{336}{1260} = \frac{576}{1260}$$

- Cual es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca

Probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso al que denominamos A, como consecuencia de que haya tenido lugar otro evento llamado B;

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(\text{la } 1^{\text{o}} \text{ sea negra y la segunda sea blanca}) = \frac{4}{6} * \frac{2}{5} = \frac{8}{30}$$

$$P(B) = P(\text{la 2ª bola sea blanca}) = \begin{cases} P(\text{la 1ª y la 2ª sea blanca}) = \frac{2}{6} * \frac{3}{7} = \frac{6}{42} \\ P(\text{la 1ª sea negra y la 2ª sea blanca}) = \frac{4}{6} * \frac{2}{5} = \frac{8}{30} \end{cases}$$

$$P(2ª sea blanca) = \frac{6}{42} + \frac{8}{30} = \frac{180}{1260} + \frac{336}{1260} = \frac{516}{1260}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{8}{30}}{\frac{516}{1260}} = \frac{10080}{15480} = 0,65116$$

5. Ejercicio

- a) Encuentra un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y que tenga como solución $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$
- b) Encuentra un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y, z cuyas soluciones sean en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$;
- c) Encuentra un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas x e y que solo tengan como solución $\{x = 1, y = 2\}$

Solución

- a) Encuentra un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y que tenga como solución $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$

dos ecuaciones lineales $\begin{cases} \text{Para que tenga solución } x = 0 \text{ e } y = 0 \text{ será de la forma } x + y = 0 \\ \text{Para que tenga solución } x = 1 \text{ e } y = 2 \text{ será de la forma } 2x + y = 0 \end{cases}$

- b) Encuentra un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y, z cuyas soluciones sean en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$;

Dos ecuaciones con tres incógnitas será la ecuación de una recta intersección de dos planos

ejemplo: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ hacemos $x = \lambda \Rightarrow \begin{cases} y + z = 3 - \lambda \\ 3y - z = 1 - 2\lambda \end{cases}$

- c) Encuentra un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas x e y que solo tengan como solución $\{x = 1, y = 2\}$

$\begin{cases} \text{Para que tenga solución } x = 1 \text{ e } y = 2 \text{ será de la forma } 2x - y = 0 \\ \text{Otra podría ser } 6x - 3y = 0 \\ \text{otra podría ser } 8x - 4y = 0; \end{cases}$

6. Ejercicio

Sea la función $f(x) = x^3 - |x| + 2$

- a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $x = 0$;
- b) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real
- c) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica delimitada por la gráfica f , el eje de abscisas $y = 0$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$;

Solución

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en

$x = 0$;

$f(x) = x^3 - |x| + 2$ definimos función a trozos =

$$\begin{cases} x^3 - x + 2 & \text{para } x \geq 0 \\ x^3 + x + 2 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - x + 2 & \text{para } x \geq 0 \\ x^3 + x + 2 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Comprobamos continuidad de la función $f(x)$ en

$x = 0$:

$$f(x) = x^3 - x + 2; f(0) = 2$$

Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 + x + 2 = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - x + 2 = 2;$$

Dado que $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 + x + 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - x + 2 = f(0) = 2$ la función es continua en $x = 0$;

Comprobamos derivabilidad

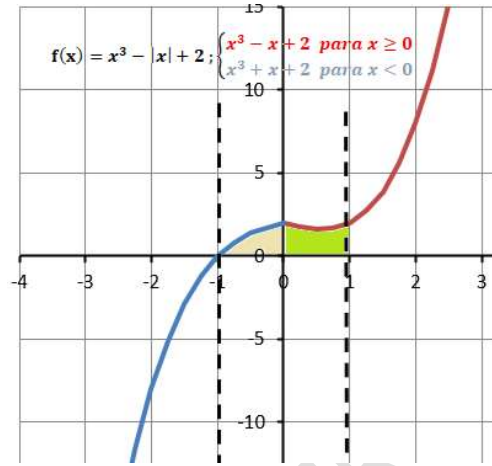
$$f'(x) \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{para } x \geq 0 \\ 3x^2 + 1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 + 1 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 - 1 = -1;$$

Dado que $\lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 + 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 - 1$ la función no es derivable en $x = 0$;



b) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real

$$f'(x) \begin{cases} 3x^2 - 1 = 0 & \text{para } x \geq 0 \\ 3x^2 + 1 = 0 & \text{para } x < 0 \end{cases} \text{ habrá un máximo o mínimo en } \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{3}} & \text{para } x \geq 0 \\ x = -\sqrt{\frac{1}{3}} & \text{para } x < 0 \end{cases} \text{ No hay}$$

Hallamos valores de f próximos a $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$;

$f(x)$ para $x=0$	$f(x)$ para $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$	$f(x)$ para $x=1$
$f'(0) = 3x^2 - 1 = -1$ Negativo (decreciente)	Hay un mínimo relativo	$f'(1) = 3 - 1$ siempre + Positivo (creciente)

c) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica delimitada por la grafica f , el eje de abscisas

$y = 0$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$;

$$\int_{-1}^1 (x^3 - |x| + 2) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 2) dx + \int_0^1 (x^3 - x + 2) dx$$

$$\int_{-1}^0 (x^3 + x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{5}{4}$$

$$\int_0^1 (x^3 - x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4};$$

$$\int_{-1}^1 (x^3 - |x| + 2) dx = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

7. Ejercicio

Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}$ $s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$

- a) Escribir una ecuación de la recta perpendicular común a r y s
 b) Calcular la distancia entre las rectas r y s

Solución

- a) Escribir una ecuación de la recta perpendicular común a r y s

$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}$; $r: \begin{cases} Vd_r = (1,1,-3) \\ P_r = (2,-1,-4) \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = \lambda - 1 \\ z = -\lambda - 4 \end{cases}$

$s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$; Dos ecuaciones con tres incógnitas

$s: \begin{cases} \text{hacemos } x = \beta \text{ y sustituimos} \\ x+z=2 \Rightarrow \beta+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \Rightarrow -2\beta+y-2z=1 \end{cases} = \begin{cases} x = \beta \\ z = -\beta + 2 \\ -2\beta + y - 2(-\beta + 2) = 1 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$

$s: \begin{cases} x = \beta \\ y = 5 \\ z = -\beta + 2 \end{cases} \begin{cases} Vd_s = (1,0,-1) \\ P_s = (0,5,2) \end{cases}$

Calculamos un plano μ que contiene a r y la recta t

Para calcular el plano μ necesito $\begin{cases} \vec{Vd}_1 \\ \vec{Vd}_2 \\ P_\mu \end{cases}$ como el plano contiene a r y t

$\mu \begin{cases} \vec{Vd}_1 = \vec{Vd}_r = (1,1,-3) \\ \vec{Vd}_2 = \vec{Vd}_t \text{ es perpendicular a los vectores } (\vec{Vd}_r \text{ y } \vec{Vd}_s) \\ P_\mu = P_r = (2,-1,-4) \end{cases}$

$\vec{Vd}_t = \vec{Vd}_r \times \vec{Vd}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i - 3j - k + j = -i - 2j - k = (-1, -2, -1)$

$\mu \begin{cases} \vec{Vd}_r = (1,1,-3) \\ \vec{Vd}_t = (-1,-2,-1) \\ P_\mu = (2,-1,-4) \end{cases}; \mu = \begin{vmatrix} x-2 & y-(-1) & z-(-4) \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

$\mu = -7x + 4y - z + 14 = 0;$

$\pi \begin{cases} \vec{Vd}_1 = \vec{Vd}_s = (1,0,-1) \\ \vec{Vd}_2 = \vec{Vd}_t \text{ es perpendicular a los vectores } (\vec{Vd}_r \text{ y } \vec{Vd}_s) = (-1,-2,-1) \\ P_\pi = P_s = (0,5,2) \end{cases}$

$\pi \begin{cases} \vec{Vd}_s = (1,0,-1) \\ \vec{Vd}_t = (-1,-2,-1) \\ P_\pi = (0,5,2) \end{cases}; \pi = \begin{vmatrix} x-0 & y-5 & z-2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2z + 4 + y - 5 + y - 5 - 2x = 0;$

$\pi = -2x + 2y - 2z - 6 = 0; \pi = -x + y - z - 3 = 0;$

Recta perpendicular común a r y s: $\begin{cases} \mu = -7x + 4y - z + 14 = 0; \\ \pi = -x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$

b) Calcular la distancia entre las rectas r y s

Comprobamos la posición relativa de ambas rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}; r: \begin{cases} Vd_r = (1,1,-3) \\ P_r = (2,-1,-4) \end{cases} r: \begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = \lambda - 1 \\ z = -\lambda - 4 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + z = 2 \\ -2x + y - 2z = 1 \end{cases}; \text{ Dos ecuaciones con tres incógnitas}$$

$$s: \begin{cases} \text{hacemos } x = \beta \text{ y sustituimos} \\ x + z = 2 \Rightarrow \beta + z = 2 \\ -2x + y - 2z = 1 \Rightarrow -2\beta + y - 2z = 1 \end{cases} = \begin{cases} x = \beta \\ z = -\beta + 2 \\ -2\beta + y - 2(-\beta + 2) = 1 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = \beta \\ y = 5 \\ z = -\beta + 2 \end{cases} \begin{cases} Vd_s = (1,0,-1) \\ P_s = (0,5,2) \end{cases}$$

Los vectores directores no son proporcionales $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{-3}{-1}$; por lo que no son paralelos ni coincidentes

comprobamos si se cruzan o se cortan

$$\begin{cases} Vd_r = (1,1,-3) \\ Vd_s = (1,0,-1) \\ \text{vector } P_s P_r = (0,5,2) - (2,-1,-4) \end{cases} \begin{cases} Vd_r = (1,1,-3) \\ Vd_s = (1,0,-1) \\ \text{vector } P_s P_r = (-2,6,6) \end{cases}$$

$$\text{vemos si son coplanarios } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -18 + 2 - 6 + 6 = -16 \text{ no se cortan;}$$

Las rectas se cruzan

Distancia entre dos rectas

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{P_s P_r} * (\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s})|}{\|\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s}\|}$$

$$(\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i - 3j - k + j = -i - 2j - k = (-1, -2, -1)$$

$$\overrightarrow{P_s P_r} * (\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s}) = P_s P_r = (-2, 6, 6) * (-1, -2, -1) = (2 - 12 - 6) = -16;$$

$$|\overrightarrow{P_s P_r} * (\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s})| = 16$$

Calcular el módulo del producto vectorial $|\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s}|; |(-1, -2, -1)|$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{P_s P_r} * (\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s})|}{\|\overrightarrow{Vd_r} \times \overrightarrow{Vd_s}\|} = \frac{16}{\sqrt{6}}$$

8. Ejercicio

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45% de los días.

Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los últimos 50 años.

a) Expresar como calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal

Solución

Aplicamos la fórmula de la aplicación binomial $P(X = k) = \binom{N}{k} p^k q^{n-k}$;

$$P(X = 40) = \binom{100}{40} (0,45)^{40} (0,55)^{100-40} = \binom{100}{40} (0,45)^{40} (0,55)^{60}$$

$$\binom{100}{40} (0,45)^{40} (0,55)^{60} = \frac{100!}{40! (100 - 40)!} (0,45)^{40} (0,55)^{60} = \frac{100!}{40! (60)!} (0,45)^{40} (0,55)^{60}$$

b) Calcule dicha probabilidad aproximandola mediante una normal

Pasamos (μ es la media y σ es la desviacion tipica) ; en otra Z que siga una distribucion $N(0,1)$

aplicando la formula $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

La media $\mu = n * p = 100 * 0,45 = 45$;

La varianza $\sigma^2 = n * p * q = 100 * 0,45 * 0,55 = 24,75$;

σ es la desviacion tipica = $\sqrt{\text{La varianza } \sigma^2} = \sqrt{24,75} = 4,97494$

Aplicamos la correccion y consideramos el intervalo $[39,5,40,5] \Rightarrow P(39,5 \leq X \leq 40,5)$

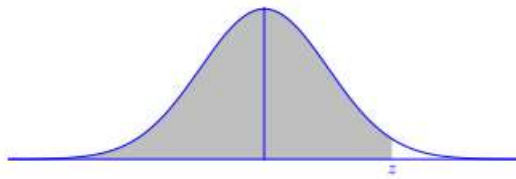
Aplicamos la correccion y consideramos el intervalo $[39,5,40,5] \Rightarrow$

$$\text{Estandarizamos valores, } \begin{cases} \text{Para } X = 39,5; Z_1 = \frac{39,5 - 45}{4,97494} \approx -1,11559 \\ \text{Para } X = 40,5; Z_2 = \frac{40,5 - 45}{4,97494} \approx -0,90453 \end{cases}$$

$P(39,5 \leq X \leq 40,5); P(-1,11559 \leq Z \leq -0,90453)$;

Obtenemos valores en la tabla $\begin{cases} P(-1,1156) = 0,8686 \\ P(-0,90453) = 0,8159 \end{cases}$ Probabilidad $0,8686 - 0,8159 = 0,0527$

Probabilidad 5,27%



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

2 Examen 2020-2021 B

1. Ejercicio

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 € que corresponden a tres empresas A, B, C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano

Solución

Ponemos en una tabla los datos del problema;

x = acciones de la empresa B; y = acciones empresa A

	Empresas			
	A	B	C	TOTAL
N de acciones	$y=360$	$x=120$	$x/2=60$	540
Precio por acción	3 €	1 €	6 €	
Total	$3y=1080€$	$x=120€$	$3x=360€$	1.560 €

$$\begin{cases} y + x + \frac{x}{2} = 540; \\ 3y + x + 3x = 1560 \end{cases} \begin{cases} 2y + 2x + x = 1080; \\ 3y + x + 3x = 1560 \end{cases} \begin{cases} 2y + 3x = 1080; \\ 3y + 4x = 1560 \end{cases} \quad x = 120; y = 360$$

Importe economico que recibirá cada hermano = 520 €

$$\text{Acciones que recibirá cada hermano: } \begin{cases} \text{de la empresa A} = \frac{360}{3} = 120 \text{ acciones} \\ \text{De la empresa B} = \frac{120}{3} = 40 \text{ acciones} \\ \text{De la empresa C} = \frac{60}{3} = 20 \text{ acciones} \end{cases}$$

2. Ejercicio

Calcular el area delimitada por las graficas de las funciones $f(x) = 2 + x - x^2$ y $g(x) = 2x^2 - 4x$;

Solución

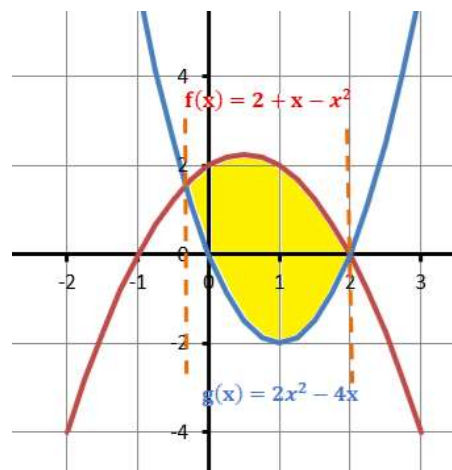
Calculamos punto de corte de las funciones

$$\begin{cases} f(x) = 2 + x - x^2 \\ g(x) = 2x^2 - 4x \end{cases} \quad 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0;$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 * 3 * (-2)}}{2 * 3} =$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$



$$\text{Area} = \int_{-\frac{1}{3}}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^2 (2 + x - x^2 - (2x^2 - 4x)) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^2 (-3x^2 + 5x + 2) dx =$$

$$\left[-x^3 + 5\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-\frac{1}{3}}^2 = 2^3 + 5\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 5\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{2} + 2\left(-\frac{1}{3}\right) \right) =$$

$$8 + 10 + 4 - \left(-\frac{1}{27} + \frac{5}{18} - \frac{2}{3} \right) = 22 + \frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} = \frac{343}{54}$$

$$\text{Area} = \frac{343}{54}$$

3. Ejercicio

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0; \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$; se pide:

- Calcular el ángulo que forman r y π
- Hallar el punto simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$;
- Determina la proyección ortogonal de la recta y el plano

Solución

- Calcular el ángulo que forman r y π

$$r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0; \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad r \equiv \begin{cases} x = \lambda; \\ -\lambda - y + z = 0; \\ 2\lambda + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \lambda; \\ -y + z = \lambda; \\ 3y - z = -2\lambda - 1; \end{cases}$$

$$\text{sumamos las dos ecuaciones } \begin{cases} -y + z = \lambda; \\ 3y - z = -2\lambda - 1; \end{cases} \quad 2y = -\lambda - 1; \quad y = -\frac{\lambda + 1}{2}$$

$$\text{sustituimos en una de las ecuaciones; } -x - y + z = 0 \Rightarrow -\lambda - \left(-\frac{\lambda + 1}{2}\right) + z = 0; \quad z = \frac{\lambda - 1}{2}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda; \\ y = -\frac{\lambda + 1}{2} \\ z = \frac{\lambda - 1}{2} \end{cases} = \begin{cases} x = \lambda; \\ y = -\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \\ z = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}d_r = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2, -1, 1) \\ P_r = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

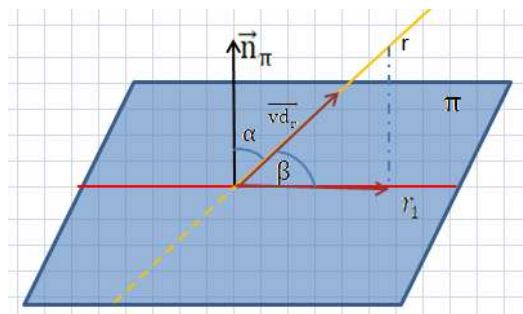
$$\text{sustituimos e el plano } \pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0 \Rightarrow 2\lambda + \left(-\frac{\lambda + 1}{2}\right) - \frac{\lambda - 1}{2} + 3 = 0; \quad \lambda = -3$$

$$\text{Punto de intersección } \begin{cases} x = -3; \\ y = -2 \\ z = -2 \end{cases} \quad (-3, 1, -2)$$

El ángulo que forma un plano π con una recta r es igual al ángulo formado por el vector director de la recta r y el vector director de la recta proyectada sobre el plano π

El ángulo β es el complementarios del ángulo α ;

$$\text{sen } \beta = \text{cos } \alpha;$$



$$\text{sen } \beta = \text{Cos } (\vec{v}d_r, \vec{v}N_\pi) = \frac{|\vec{v}d_r \cdot \vec{v}N_\pi|}{|\vec{v}d_r| |\vec{v}N_\pi|} = \frac{|aa_1 + bb_1 + cc_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

$$\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0; \overline{vN_\pi} = (2, 1, -1)$$

$$\overline{vd_r} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2, -1, 1)$$

$$\text{sen } \beta = \text{Cos}(\overline{vd_r}, \overline{vN_\pi}) = \frac{|\overline{vd_r} * \overline{vN_\pi}|}{|\overline{vd_r}| |\overline{vN_\pi}|} = \frac{|aa_1 + bb_1 + cc_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{|2 * 2 + 1 * (-1) + (-1) * 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{|\sqrt{6}\sqrt{6}|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{arc sen } \beta = 19,4712^\circ$$

b) Hallar el punto simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$;

Punto de intersección de la recta r y el plano $\pi \begin{cases} x = -3; \\ y = -2 \\ z = -2 \end{cases} P(-3, 1, -2)$

Plano de referencia $\mu: z - y = 0; \overline{vN_\mu} = (0, -1, 1)$

Recta t perpendicular a $\mu: z - y = 0$ y que pasa por $P(-3, 1, -2)$; $t \equiv \begin{cases} x = 0\lambda - 3; \\ y = -1\lambda + 1 \\ z = 1\lambda - 2 \end{cases} \begin{cases} x = -3; \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$

Punto de intersección de la recta t y el plano $\mu \Rightarrow z - y = 0$ sustituimos $\begin{cases} x = -3; \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$

$\lambda - 2 - (-\lambda + 1) = 0; 2\lambda - 3 = 0; \lambda = \frac{3}{2}$; Punto de intersección $\begin{cases} x = -3; \\ y = -\frac{3}{2} + 1 \\ z = \frac{3}{2} - 2 \end{cases} \begin{cases} x = -3; \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Punto simétrico $(x, y, z) \Rightarrow \frac{(x, y, z) + (-3, 1, -2)}{2} = \text{punto medio} \left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$;

$(x, y, z) = \left(-3 * 2, -\frac{1}{2} * 2, -\frac{1}{2} * 2\right) - (-3, 1, -2) = (-6, -1, -1) - (-3, 1, -2) = (-3, -2, 1)$;

Punto simétrico $(x, y, z) = (-3, -2, 1)$;

c) Determina la proyección ortogonal de la recta y el plano

Tenemos el punto de intersección de la recta r y el plano $\pi (-3, 1, -2)$ y otro punto

de la recta r $P_r = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ Hallamos la proyección del punto en el plano π

$\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0; \overline{vN_\pi} (2, 1, -1)$; recta perpendicular al plano por P_r

$$n \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 0; \\ y = 1\lambda - \frac{1}{2} \\ z = -1\lambda - \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2\lambda; \\ y = \lambda - 1/2 \\ z = -\lambda - \frac{1}{2} \end{cases}$$

La proyección del punto P_r plano π , será el punto de intersección de la recta n con el plano π

$2x + y - z + 3 = 0$ sustituimos $\Rightarrow 2(2\lambda + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) - \left(-\lambda - \frac{1}{2}\right) + 3 = 0; \lambda = -\frac{1}{2}$;

Punto de intersección (proyección) = será $\begin{cases} x = 2\left(-\frac{1}{2}\right); \\ y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ z = -\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \end{cases} (-1, -1, 0)$

$$\text{Proyeccion ortogonal de } r \text{ en el plano } \pi \begin{cases} \overrightarrow{vd_r} = (-3, 1, -2) - (-1, -1, 0) = (-2, 2, -2) \\ P_n = (-1, -1, 0) \end{cases}$$

$$\text{Proyeccion ortogonal de } r \text{ en el plano } \pi: \begin{cases} x = -2\beta - 1; \\ y = 2\beta - 1 \\ z = -2\beta \end{cases}$$

4. Ejercicio

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8,8 y una desviación típica de 3 meses.

- ¿Qué porcentaje de esa especie superan los 10 meses? . ¿ Que porcentaje ha vivido entre 7 y 10 meses?
- Si se toma al azar 4 especímenes . ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses?
- ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8,8 - c, 8,8 + c)$ incluya el tiempo de vida (en meses) del 98% de los individuos de la especie?

Solución

- ¿Qué porcentaje de esa especie superan los 10 meses? . ¿ Que porcentaje ha vivido entre 7 y 10 meses?

¿Qué porcentaje de esa especie superan los 10 meses?.

Aplicando la formula $Z = \frac{10 - 8,8}{3} = 0,4$; $P(X > 10) = P(Z > 0,4)$

Comprobamos en la tabla para $z < 0,4 = 0,6554$; para $Z > 0,4 = 1 - 0,6554 = 0,3446$;

$$P(X > 10) = 34,46\%$$

¿ Que porcentaje ha vivido entre 7 y 10 meses? $P(7 < X < 10)$; $Z = \frac{7 - 8,8}{3} = -0,6$

$P(7 < X < 10) = P(-0,6 < Z < 0,4) \Rightarrow P(Z < 0,4) - P(Z < -0,6)$ en tabla

$$P(Z < 0,4) = 0,6554; \quad P(Z < -0,6) = 1 - 0,7257 = 0,2743$$

$$P(Z < 0,4) - P(Z < -0,6) = 0,6554 - 0,2743 = 0,3811 \Rightarrow P(7 < X < 10) = 38,11\%$$

- Si se toma al azar 4 especímenes . ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses?

La probabilidad de que uno supere los 10 meses = $P(X > 10) = P(Z > 0,4) = 0,3446$

La probabilidad de que 4 superen los 10 meses, como son independientes

$$P(Z > 0,4)^4 = (1 - 0,6554)^4 = (0,3446)^4 = 0,0141;$$

. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses?;

$$1 - P(\text{todos superen los 10 meses}) = 1 - 0,0141 = 0,9859 \Rightarrow 98,58\%$$

- ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8,8 - c, 8,8 + c)$ incluya el tiempo de vida (en meses) del 98% de los individuos de la especie?

Para un nivel de confianza del 98% el valor de z se encuentra buscando el area de 0,99

ya que el $1 - 0,98 = 0,02$; para 0,98 central tendremoa $(0,98 - 0,01, 0,98 + 0,01) \Rightarrow (0,97, 0,99)$

Para un nivel de confianza 0,98 en la tabla 0,99 corresponde a $\approx 2,33$

5. Ejercicio

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases} ax - 2y + (a - 1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los valores de a

b) Resolver el sistema para a = 1

Solución

a) Discutir el sistema según los valores de a

Comprobamos el rango de la matriz de coeficientes $\begin{cases} ax - 2y + (a - 1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{vmatrix} = -18a - 12a - 2a + 2 + 3a^2 - 3a + 24 + 6a = 0; 3a^2 - 29a + 26 = 0;$$

$$a = \frac{29 \pm \sqrt{(29)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 26}}{2 \cdot 3}; a = a = \frac{29 \pm 23}{6} \begin{cases} a = \frac{26}{3} \\ a = 1; \end{cases}$$

Para $a \neq \frac{26}{3}$ y $a \neq 1$ Rango matriz A = rango matriz A ampliada = nº de incógnitas =>

Sistema Compatible determinado; tiene una solución A

Estudiamos el sistema para $a = \frac{26}{3}$; $\begin{vmatrix} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & \frac{26}{3} - 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ 6 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & \frac{23}{3} \\ 2 & 3 & -6 \\ 6 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 72 + \frac{46}{3} - 72 - \frac{414}{3} - 24 + 24 = -\frac{368}{3} \neq 0; \text{rango } 3$$

Para $a = \frac{26}{3}$; Rango de la matriz coeficientes = 2 y Rango de la ampliada = 3; Sistema incompatible

Estudiamos el sistema para $a = 1$; $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{vmatrix} = 72 - 72 + 24 - 24 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -6 & 2 \\ -1 & -6 & 6 \end{vmatrix} = -36 + 48 - 24 + 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 4 - 8 + 12 - 2 - 24 = 0;$$

Para $a = 1$; Rango de la matriz coeficientes = 2 y Rango de la ampliada = 2;

Sistema compatible indeterminado

b) Resolver el sistema para a = 1

$$\begin{cases} ax - 2y + (a - 1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases} \text{ sustituimos por } a = 1 \begin{cases} x - 2y + 0z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -1x + y - 6z = 6 \end{cases} \begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -x + y - 6z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -x + y - 6z = 6 \end{cases}; \begin{cases} x = 2y + 4 \\ -2(2y + 4) + 3y - 6z = 2 \\ -(2y + 4) + y - 6z = 6 \end{cases} \begin{cases} -4y - 8 + 3y - 6z = 2 \\ -2y - 4 + y - 6z = 6 \end{cases} \begin{cases} -y - 6z = 10 \\ -y - 6z = 10 \end{cases} \text{son iguales}$$

Como las dos ecuaciones son iguales el sistema queda $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -y - 6z = 6 \end{cases} \begin{cases} x = 2\lambda + 4 \\ y = \lambda \\ z = -\frac{\lambda}{6} - 1; \end{cases}$

sistema compatible indeterminado $\begin{cases} x = 2\lambda + 4 \\ y = \lambda \\ z = -\frac{\lambda}{6} - 1; \end{cases}$

6. Ejercicio

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- Estudiar continuidad y derivación de la función en $x = 0$;
- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f restringido a $(-\pi, 2)$
Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0,1]$ de manera que $f(x_0) = 2$;

c) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) d(x)$

Solución

- Estudiar continuidad y derivación de la función en $x = 0$;

Hallamos el $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ por la izquierda y la derecha;

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sen } x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^x = 0 \end{cases} \text{ sistema es continuo en } x = 0;$$

Para ver si es derivable en $x = 0$ su derivada debe coincidir por derecha e izquierda

$$f(x) = \text{sen } x; f'(x) = \cos x; \text{ Para } x = 0; f'(x) = 1$$

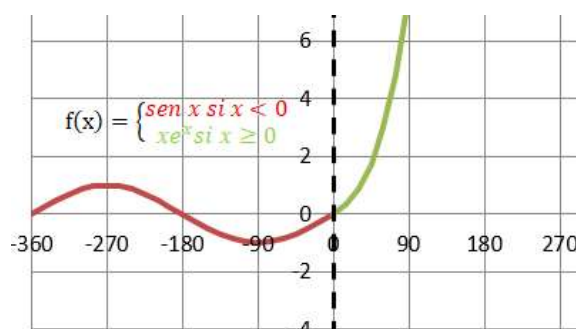
$$f(x) = xe^x; f'(x) = e^x + x \cdot e^x; \text{ Para } x = 0; f'(x) = 1$$

El sistema es derivable en $x = 0$;

- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f restringido a $(-\pi, 2)$

Damos valores a $f'(x)$; si es positivo es creciente y si es negativo es decreciente

$$\begin{cases} \text{Entre } -2\pi \text{ y } -\frac{3}{2}\pi \text{ la función es creciente} \\ \text{Entre } -\frac{3}{2}\pi \text{ y } -\frac{\pi}{2} \text{ la función es decreciente} \\ \text{Entre } -\frac{\pi}{2} \text{ y } 0 \text{ la función es creciente} \\ \text{Entre } 0 \text{ e infinito la función es creciente} \end{cases}$$



Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0,1]$ de manera que $f(x_0) = 2$;

$$f(x) = xe^x \text{ para } x \geq 0; \begin{cases} f(0) = 0e^0 = 0; \\ f(1) = 1e^1 = e; \text{ dado que } e > 2 \end{cases}$$

Como la función es creciente y continua en $[0,1]$ habrá algún x_0 tal que $f(x_0) = 2$

c) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) d(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) d(x) + \int_0^1 f(x) d(x);$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) d(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \text{sen}x d(x) + \int_0^1 xe^x d(x)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \text{sen}x d(x) = [-\text{cos}x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -1 - 0 = -1$$

$$\int_0^1 xe^x d(x) \text{ aplicamos la integración por partes } \int u dv = u v - \int v du$$

Una forma de saber cual debemos elegir como u o como dv es con la palabra

I L A T E (Tipo de funcion que tendremos) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Inversa} \\ \text{Logaritmica} \\ \text{Aritmetica} \\ \text{Trigonimetrica} \\ \text{Exponencial} \end{array} \right.$

$$\int_0^1 xe^x d(x); \text{Integramos por partes } \int e^x x d(x) \left\{ \begin{array}{l} u = x; \text{derivamos } du = d(x) \\ e^x d(x) = d(v) \text{ Integramos}; v = e^x \end{array} \right.$$

sustituimos en la formula $\Rightarrow xe^x - \int e^x d(x) = xe^x - e^x$

$$\int_0^1 xe^x d(x) = [xe^x - e^x]_0^1 = e^x - e^x - (0 * e^0 - e^0) = 1;$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) d(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \text{sen}x d(x) + \int_0^1 xe^x d(x) = -1 + 1 = 0;$$

7. **Ejercicio**

Sean los planos $\pi \equiv x + y = 1$ y $\mu \equiv x + z = 1$;

- a) Hallar los planos paralelos a $\pi \equiv x + y = 1$, tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2
- b) Hallar la recta que pasa por el punto $(0,2,0)$ y es perpendicular al plano $\mu \equiv x + z = 1$
- c) Hallar la distancia entre los puntos de interseccion del plano $\pi \equiv x + y = 1$ con los ejes x e y

Solución

- a) Hallar los planos paralelos a $\pi \equiv x + y = 1$, tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2

Los planos paralelos tendran el mismo vector normal $\overline{vn}_{\pi}(1,1,0)$

Planos paralelos $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow x + y + D = 0$; si la distancia al origen es 2 \Rightarrow

$$\text{Distancia de un punto a un plano} = \frac{|Ax_0 + B y_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{Distancia del punto } (0,0,0) \text{ al plano } x + y + D = 0; d = \frac{|A * 0 + B * 0 + C * 0 + D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + C^2}} = \frac{D}{\sqrt{2}} = 2; D = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Planos paralelos } \begin{cases} x + y + 2\sqrt{2} = 0; \\ x + y - 2\sqrt{2} = 0; \end{cases}$$

- b) Hallar la recta que pasa por el punto $(0,2,0)$ y es perpendicular al plano $\mu \equiv x + z = 1$

Una recta perpendicular al plano $\mu \equiv x + z = 1$ tendra un vector directo $\overline{vd}_r = \text{al } \overline{vn}_{\mu}$;

$$\overline{vd}_r = \overline{vn}_{\mu} = (1,0,1): \text{recta } r \begin{cases} \overline{vd}_r(1,0,1); \\ P_r(0,2,0) \end{cases} \text{ Recta } r \equiv \begin{cases} x = \lambda; \\ y = 2; \\ z = \lambda \end{cases}$$

- c) Hallar la distancia entre los puntos de interseccion del plano $\pi \equiv x + y = 1$ con los ejes x e y

Puntos de intersección del plano $\pi \equiv x + y = 1$ con los ejes $x =$ recta $\begin{cases} x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Punto de intersección (1,0,0)

Puntos de intersección del plano $\pi \equiv x + y = 1$ con los ejes $y =$ recta $\begin{cases} 0 \\ y \\ 0 \end{cases}$ Punto de intersección (0,1,0)

Distancia entre dos puntos $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

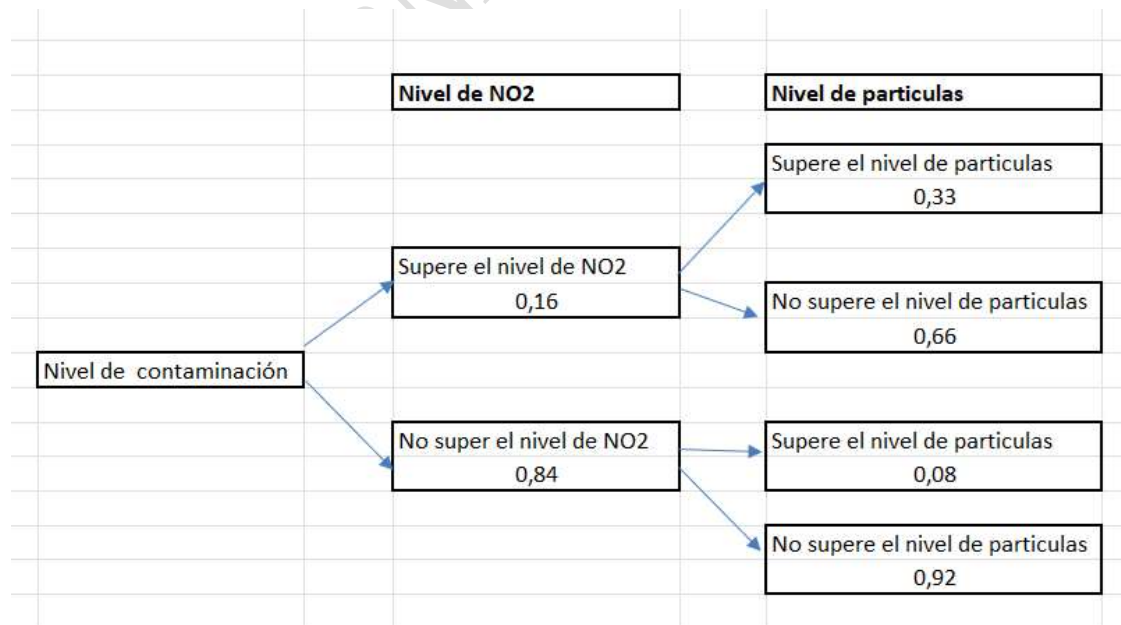
Distancia entre los punto (1,0,0) y (0,1,0) = $\sqrt{(0 - 1)^2 + (1 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{2}$

8. Ejercicio

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es de 0,16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es de 0,33. En los días en que no se supera el nivel de NO_2 la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0,08.

- a) Calcula la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos
- b) Calcula la probabilidad de que se supere al menos uno de ellos
- c) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2 y en un día se supera el nivel permitido de partículas"?
- d) Cual es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2 sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas

Solución



- a) Calcula la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos

P se superen los dos niveles = $0,16 * 0,33 = 0,0528$

b) Calcula la probabilidad de que se supere al menos uno de ellos

La probabilidad de que al menos un suceso ocurra se halla restando de la unidad la probabilidad de que ninguno de los dos sucesos ocurra $P(\text{al menos uno ocurra}) = 1 - P(\text{ningun suceso ocurra})$

$$P(\text{ninguno de los dos sucesos ocurra}) = 0,84 * 0,92 = 0,7728;$$

$$P(\text{de que al menos un suceso ocurra}) = 1 - 0,7728 = 0,2272;$$

c) ¿ Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO₂ y en un día se supera el nivel permitido de partículas?

Dos sucesos son independientes cuando la ocurrencia de uno no afecta a la posibilidad de que ocurra el otro

Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

$$P(\text{NO}_2 \text{supere} \cap \text{Partsupere}) = \text{Probabilidad de que sucedan los dos} = 0,16 * 0,33 = 0,0528$$

$$P(\text{supere NO}_2) = 0,16;$$

$$P(\text{superen las partículas}) = 0,16 * 0,33 + 0,84 * 0,08 = 0,0528 + 0,0672 = 0,12;$$

$$P(\text{no superen las partículas}) = 1 - 0,12 = 0,88$$

$$\text{Si son independientes } P(A \cap B) = P(A) * P(B) \Rightarrow 0,0528 \text{ debería ser igual a } 0,16 * 0,12;$$

Dado que $0,0528 \neq 0,0192$ los sucesos no son independientes

d) Cual es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO₂ sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas

Probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso A como consecuencia de haber tenido lugar otro B; $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$

$$P(\text{NO}_2 \text{supere} | \text{sabiendo que no se ha superado el numero de partículas}) =;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{NO}_2 \text{ Probabilidad de que supere} \\ \bar{P} = \text{Probabilidad de que no superen las partículas} \end{array} \right. P(\text{NO}_2 | \bar{P}) = \frac{P(\text{NO}_2 \cap \bar{P})}{P(\bar{P})} = \frac{P(\text{NO}_2) - P(\text{NO}_2 \cap P)}{1 - P(P)} =$$

$$\frac{0,16 - 0,16 * 0,33}{1 - 0,12} = \frac{0,16 - 0,0528}{0,88} = 0,1218;$$

$$P(\text{NO}_2 \text{supere} | \text{sabiendo que no se ha superado el numero de partículas}) = 0,1218$$