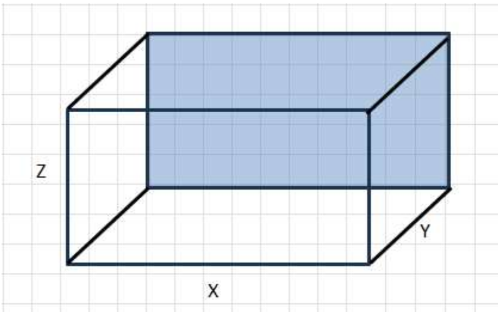
Prueba de EBAU 2023-2024

Contenido

1 Examen 2023-2024 A

1. **Ejercicio**

Tras una gran cosecha de sandías en una comarca, la producción se mete en cajas cúbicas de 1m de lado que se amontonan en una gran pila compacta en forma de ortoedro. Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2m para llegar a ser la suma del ancho y el alto. Pero el largo supera en 8m al ancho menos el alto. El perímetro de la base es de 54m ¿ Cuantas cajas de sandías ha producido esta cosecha?



Solución

X = largo, Y = ancho y Z = alto;

Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2m para llegar a ser la suma del ancho y el alto.

$y + z = 2x + 2$

Pero el largo supera en 8m al ancho menos el alto.

$x = (y - z) + 8;$

El perímetro de la base es de 54m

$2y + 2x = 54;$

$\begin{cases} y + z = 2x + 2 \\ x = (y - z) + 8 \\ 2y + 2x = 54; \end{cases}$ $\begin{cases} -2x + y + z = 2 \\ x - y + z = 8 \\ 2x + 2y = 54; \end{cases}$ despejamos x en la tercera ecuación $x = \dfrac{54 - 2y}{2} = 27 - y$

sustituimos x $\begin{cases} -2x + y + z = 2 \\ x - y + z = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} -2(27 - y) + y + z = 2 \\ (27 - y) - y + z = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} -54 + 2y + y + z = 2 \\ 27 - y - y + z = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y + z = 56 \\ -2y + z = -19 \end{cases}; z = 56 - 3y = -19 + 2y; 75 = 5y; y = \dfrac{75}{5} = 15; y = 15$

$x = 27 - y$ sustituimos y => $x = 27 - 15 = 12; x = 12$

Sustituimos y en $z = 56 - 3y$ => $z = 56 - 3 * 15 = 11; z = 11$

Volumen del ortoedro $= x * y * z = 12 * 15 * 11 = 1980\ m^3$

El número de cajas de sandía que ha producido la cosecha 1980

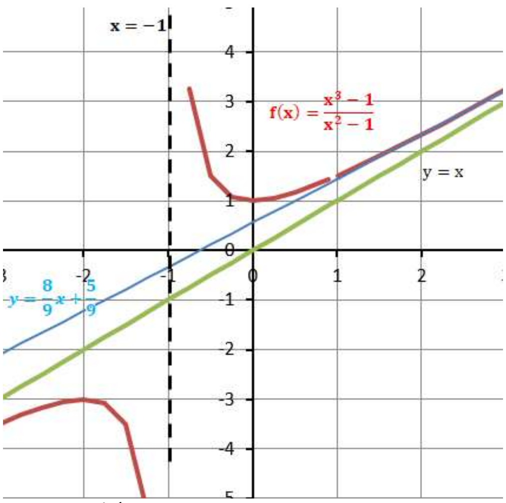
2. **Ejercicio**

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$; se pie:

a) Hallar su dominio y estudiar las asíntota de su gráfica.

b) Calcular la recta tangencial a la gráfica de f en el punto (2,7/3)

c) Encontrar si es posible, algún punto x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la grafica de f en el punto x_0 sea igual a 1



Solución

a) Hallar su dominio y estudiar las asíntota de su gráfica.

La función no es continua para los valores de x en los que no existe f(x).

Los punto de discontinuidad son los que hacen 0 el denominador son $x = \pm 1$;

El dominio de f, es todo $R - \{-1,1\}$

Asíntotas vertical : Calculamos los límites en los puntos de discontinuidad

En $x = -1$; $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0} = \pm\infty$ en $x = -1$ hay una asíntota vertical

En $x = 1$; $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$ indeterminado ; aplicamos L´Hopital $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^3}{2x} = \frac{3}{2}$; No hay asíntota vertical

Como f(x) no existe en $x = 1$, pero si tiene limite $\frac{3}{2}$, la discontinuidad es evitable

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \infty$; por lo que no tiene asintota horizontal

Asíntota Oblicua: $y = mx + n$; $\begin{cases} m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}; \\ n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx) \end{cases}$

Donde $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$; $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x} = 1$; $m = 1$;

$n = \lim\limits_{x \to \infty} (\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} - 1 * x) = \lim\limits_{x \to \infty} (\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} - x) = \lim\limits_{x \to \infty} (\frac{x^3 - 1 - x^3 + x}{x^2 - 1}) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x - 1}{x^2 - 1}\right) = 0$; $n = 0$

Asíntota Oblicua: $y = x$

b) Calcular la recta tangencial a la gráfica de f en el punto (2,7/3)

Hallamos la derivada *de* $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x(x^3 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4 + 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^2 - 1)^2};$$

en el punto $x = 2 \Rightarrow m = f'(2) = \frac{2^4 - 3 * 2^2 + 2 * 2}{(2^2 - 1)^2} = \frac{8}{9}$

La tangente en el punto $\left(2, \frac{7}{3}\right)$ será : $y - y_0 = m(x - x_0)$ sustituimos $y - \frac{7}{3} = \frac{8}{9}(x - 2)$; $y = \frac{8}{9}x + \frac{5}{9}$

c) Encontrar si es posible, algún punto x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la grafica de f en el punto x_0 sea igual a 1

$m = f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^2 - 1)^2}$ hallar un punto en que $m = 1$;

$\frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^2 - 1)^2} = 1$; $x^4 - 3x^2 + 2x = x^4 + 1 - 2x^2$; $-x^2 + 2x - 1 = 0$; $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$; $x = 1$; dado que la función no existe en $x = 1$;

No existe ningún punto en que la pendiente sea 1;

3. **Ejercicio**

Dados el punto $P(-1,2,6)$ el plano π: $3x - 2y + z - 5 = 0$; y la recta $s \equiv \frac{x + 1}{2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 0}{-1}$

a) Halle una ecuación de la recta que pasa por P, es secante a s y paralela al plano π

b) Halle el simétrico de P respecto al plano π

Solución

a) Halle una ecuación de la recta que pasa por P, es secante a s y paralela al plano π

$s \equiv \frac{x + 1}{2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 0}{-1}$; $\begin{cases} A(\text{Punto de paso de la recta s } (-1,2,0) \\ \text{Vector director de la recta s } \overrightarrow{V_s} = (2,1,-1) \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda \end{cases}$

La ecuación de la recta pedida será $t \equiv \begin{cases} \text{(Ha de pasar por } P(-1,2,6) \\ \text{Vector director de la recta t } \overrightarrow{V_t} = (a,b,c) \end{cases}$ $t \equiv \begin{cases} x = a\beta - 1 \\ y = b\beta + 2 \\ z = c\beta + 6 \end{cases}$

Dado que las rectas s y t son secantes tendrán un punto en común $A \begin{cases} x = a\beta - 1 = 2\lambda - 1 \\ y = b\beta + 2 = \lambda + 2 \\ z = c\beta + 6 = -\lambda \end{cases}$;

$A \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda \end{cases}$;

Un vector director de t será $\overrightarrow{V_t} = P - A = P(-1,2,6) - (2\lambda - 1, \lambda + 2, -\lambda) = (-2\lambda, -\lambda, 6 + \lambda)$

Si la recta t ha de ser paralela al plano π: $3x - 2y + z - 5 = 0$;

su vector director $\overrightarrow{V_t}(-2\lambda, -\lambda, 6 + \lambda)$será perpendicular al vector normal del plano $\overrightarrow{V_{n\pi}}(3, -2,1)$

Si $\overrightarrow{V_t}(-2\lambda, -\lambda, 6 + \lambda)$es perpendicular a $\overrightarrow{V_{n\pi}}(3, -2,1)$, su producto escalar sera igual a 0;

$\overrightarrow{V_t}(-2\lambda, -\lambda, 6 + \lambda) * \overrightarrow{V_{n\pi}}(3, -2,1) = -6\lambda + 2\lambda + \lambda + 6 = 0;\ 3\lambda = 6;\ \lambda = 2;$

Sustituimos λ en $\overrightarrow{V_t}(-2\lambda, -\lambda, 6 + \lambda) \Rightarrow \overrightarrow{V_t}(-4, -2,8)$ simplificamos $\overrightarrow{V_t}(-2, -1,4)$

Ecuación de la recta $t \equiv \begin{cases} x = a\beta - 1 \\ y = b\beta + 2 \\ z = c\beta + 6 \end{cases}$; $t \equiv \begin{cases} x = -2\beta - 1 \\ y = -\beta + 2 \\ z = 4\beta + 6 \end{cases}$

b) Halle el simétrico de P respecto al plano π

El punto P´simétrico de P respecto al plano π estará en la recta perpendicular a π y que pase por P

Una recta perpendicular al plano π: $3x - 2y + z - 5 = 0$ tendra $\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{V_{n\pi}}(3, -2,1)$

La recta perpendicular a π y que pase por P $r \equiv \begin{cases} x = 3\beta - 1 \\ y = -2\beta + 2 \\ z = \beta + 6 \end{cases}$

La recta r, $r \equiv \begin{cases} x = 3\beta - 1 \\ y = -2\beta + 2 \\ z = \beta + 6 \end{cases}$ cortará al plano π: $3x - 2y + z - 5 = 0$ en un punto Q ; sustituimos

$3(3\beta - 1) - 2(-2\beta + 2) + (\beta + 6) - 5 = 0; 9\beta - 3 + 4\beta - 4 + \beta + 6 - 5 = 0;\ \beta = \frac{6}{14} = \frac{3}{7};$

Sustituimos $\beta = \frac{3}{7}$ en $Q = \begin{cases} x = 3\frac{3}{7} - 1 \\ y = -2\frac{3}{7} + 2 \\ z = \frac{3}{7} + 6 \end{cases}$; $Q = \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ y = \frac{8}{7} \\ z = \frac{45}{7} \end{cases}$

El punto P´simetrico de P será : $\frac{P + P'}{2} = Q; P' = 2Q - P; P' = 2\left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7}\right) - P(-1,2,6)$

$P' = \left(\frac{4}{7}, \frac{16}{7}, \frac{90}{7}\right) - P(-1,2,6) = \left(\frac{11}{7}, \frac{2}{7}, \frac{48}{7}\right)$; $P'\left(\frac{11}{7}, \frac{2}{7}, \frac{48}{7}\right)$

4. Ejercicio

Para conocer la opinión de los usuarios sobre su servicio, la empresa de transporte público de una ciudad ha realizado una encuesta. De esa encuesta se desprende que la nota global otorgada al servicio por sus usuarios se puede considerar una norma de medida 6.7 y de desviación típica 1,25. Si un usuario da una nota menor que 5 se considera que ve como insatisfecho el servicio; si la nota está entre 5 y 7,5 que para el usuario el servicio es satisfactorio; y si la nota es mayos que 7,5 que el servicio es excelente

a) Elegido un usuario al azar. ¿ Que probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transporte es excelente?

b) Elegido un usuario al azar. ¿ Que probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transporte es satisfactorio?

c)Para conocer de forma más directa la opinión de sus usuarios , de entre todos ellos la empresa convoca a 25 elegidos al azar . ¿ Cual es la probabilidad de que al menos dos de entre los convocados considere el servicio insatisfactorio?

Solución

a) Elegido un usuario al azar. ¿ Que probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transporte es excelente?

La probabilidad de que el servicio sea excelente $(X > 7{,}5)$

Pasamos (μ es la media y σ es la desviacion tipica) ; en otra Z que siga una distribuccion $N(0,1)$, aplicando la formula $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$P(X > 7{,}5);\ P\left(Z > \frac{7{,}5-6{,}7}{1{,}25}\right); P(Z > 0{,}64);$

Si buscamos en la tabla el valor 0,64 nos da 0,7389; sería para valores $P(Z < 0{,}64)$;

Como buscamos $P(Z > 0{,}64) = 1 - 0{,}7389 = 0{,}2611$; $P(X > 7{,}5) = 26{,}11\%$

b) Elegido un usuario al azar. ¿ Que probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transporte es satisfactorio?

$P(5 \le X \le 7{,}5); P\left(\frac{5-6{,}7}{1{,}25} \le Z \le \frac{7{,}5-6{,}7}{1{,}25}\right);$

$P\left(Z \le \frac{7{,}5-6{,}7}{1{,}25}\right); P(Z \le 0{,}64)$buscando en la tabla $P(Z \le 0{,}64) = 0{,}7389$

$P\left(Z \ge \frac{5-6{,}7}{1{,}25}\right) = P(Z \ge -1{,}36)$; buscamos en la tabla $1{,}36 = 0{,}9131$;

$P(Z \ge -1{,}36) = 1 - P(Z \le 1{,}36) = 1 - 0{,}9131 = 0{,}0869$

$P\left(\frac{5-6{,}7}{1{,}25} \le Z \le \frac{7{,}5-6{,}7}{1{,}25}\right) = 0{,}7389 - 0{,}0869 = 0{,}652;$

$P(5 \le X \le 7{,}5) = 0{,}652$;

c)Para conocer de forma más directa la opinión de sus usuarios , de entre todos ellos la empresa convoca a 25 elegidos al azar . ¿ Cual es la probabilidad de que al menos dos de entre los convocados considere el servicio insatisfactorio?

Del apartado b sabemos que la probabilidad de que un usuario esté insatisfecho es 0,0869

$P(X < 5);\ P\left(Z < \frac{5-6{,}7}{1{,}25}\right); P(Z < -1{,}36) = 1 - P(Z < 1{,}36) = 0{,}0869;$

Aplicamos la distribucción binomal $n = 25$ y $p = 0{,}0869$, siendo Y número de insatisfechos $P(Y \geq 2)$

Probabilidad de al menos dos usuarios insatisfechos $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2)$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - (P(Y = 0) - P(Y = 1)$

$$P(Y = 0) = \binom{25}{0} 0{,}0869^{0} * 0{,}9131^{25}; P(Y = 0) = \frac{25¡}{0¡\,(25-0)¡} 0{,}0869^{0} * 0{,}9131^{25} = 0{,}1030$$

$$P(Y = 1) = \binom{25}{1} 0{,}0869^{1} * 0{,}9131^{24}; P(Y = 1) = \frac{25¡}{1¡\,(25-1)¡} 0{,}0869^{1} * 0{,}9131^{24} = 0{,}2451$$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - (P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - 0{,}1030 - 0{,}2451 = 0{,}6519; 65{,}19\%$

5. **Ejercicio**

Sean X e Y dos matrices reales y cuadradas de orden dos tales que $5X - 3Y = A$ y $3X + 6Y = B$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}$ Se pide:

a) Hallar X; Y y X^{-1}

b) Calcular X^{127}

Solución

a) Hallar X; Y y X^{-1};

$$\text{Sea } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } Y = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5X - 3Y = A \\ 3X + 6Y = B \end{cases}; \begin{cases} 5\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 5a & 5b \\ 5c & 5d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3e & 3f \\ 3g & 3h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6e & 6f \\ 6g & 6h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix} \end{cases} \begin{cases} \begin{pmatrix} 5a-3e & 5b-3f \\ 5c-3g & 5d-3h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{cases} 5a - 3e = 0 \\ 5c - 3g = 1 \\ 5b - 3f = -1 \\ 5d - 3h = 0 \end{cases} \\ \begin{pmatrix} 3a+6e & 3b+6f \\ 3c+6g & 3d+6h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}; \begin{cases} 3a + 6e = 39 \\ 3c + 6g = -15 \\ 3b + 6f = 2 \\ 3d + 6h = 13 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a - 3e = 0; a = \frac{3e}{5} \\ 5c - 3g = 1; c = \frac{1+3g}{5} \\ 5b - 3f = -1; b = \frac{-1+3f}{5} \\ 5d - 3h = 0; d = \frac{3h}{5} \end{cases}; \begin{cases} 3a + 6e = 39; a = \frac{39-6e}{3} \\ 3c + 6g = -15; c = \frac{-15-6g}{3} \\ 3b + 6f = 2; b = \frac{2-6f}{3} \\ 3d + 6h = 13; d = \frac{13-6h}{3} \end{cases}; \begin{cases} \frac{3e}{5} = \frac{39-6e}{3} \\ \frac{1+3g}{5} = \frac{-15-6g}{3} \\ \frac{-1+3f}{5} = \frac{2-6f}{3} \\ \frac{3h}{5} = \frac{13-6h}{3} \end{cases} \begin{cases} e = 5; \\ g = -2 \\ f = \frac{1}{3} \\ h = 5/3 \end{cases}$$

$$sustituimos \begin{cases} e = 5; \\ g = -2 \\ f = \frac{1}{3} \\ h = \frac{5}{3} \end{cases} en \begin{cases} a = \frac{3e}{5} \\ c = \frac{1+3g}{5} \\ b = \frac{-1+3f}{5} \\ d = \frac{3h}{5} \end{cases} \begin{cases} a = 3; \\ c = -1 \\ b = 0 \\ d = 1 \end{cases};$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \; Y = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 5 & 1/3 \\ -2 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

La matriz Inversa $\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^{*})^{t}}$;

$\mathbf{|A|}$ **= Determinante de la matriz;** $\mathbf{(A^{*})^{t}}$ **= Matriz transpuesta de la adjunta**

La matriz Inversa $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $X^{-1} = \frac{1}{|X|} * (X^{*})^{t}$; $|X| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$;

$|X| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ ;\ (X^*)^t; X^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\ (X^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$

$$X^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcular X^{127}

$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$

$X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$X^3 = X * X^2 = \left(\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ -13 & 1 \end{pmatrix}$

$X^4 = X^2 * X^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ -40 & 1 \end{pmatrix};$

$X^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ \frac{1-3^n}{2} & 1 \end{pmatrix};\ X^{127} = \begin{pmatrix} 3^{127} & 0 \\ \frac{1-3^{127}}{2} & 1 \end{pmatrix}$

6. **Ejercicio**

Sea la funcion $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$

a) Analice la monotonia y los extremos relativos de f(x);

b) Halle el area de la region acotada delimitada por la recta $fy = \frac{1}{2}$ y la grafica f(x)

Solución

a) Analice la monotonía y los extremos relativos de f(x);

Simetría Par:

Una función presenta simetría par si $f(x) = f(-x)$. La funcion es simetrica respcecto al eje Y

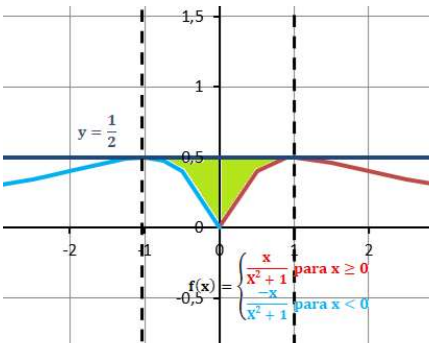
$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1};\ f(-x) = \frac{|-x|}{(-x^2)+1};$ Se cumple $f(x) = f(-x)$; presenta simetría par

Simetría Impar: **Una función presenta simetría impar si $-f(x) = f(-x)$.**

La funcion es simetrica respecto al origen

$-f(x) = -\frac{|x|}{x^2+1};\ f(-x) = \frac{|-x|}{(-x^2)+1}$ es positivo,

no presenta simetría impar



$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x^2+1} & \text{para } x \geq 0; \\ f(x) = \frac{-x}{x^2+1} & \text{para } x < 0; \end{cases}$

La función es continua en todo R

Como la funcion presenta simetría par podemos hacer el calculo de la función para $x \geq 0$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}; f'(x) = \frac{x^2+1-(2x*x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}: f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0; 1-x^2 = 0;$

$x = \pm 1$; La función presenta máximos o mínimos en $x = \pm 1$

para $x < 0$ $f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$

$f(x) = \frac{-x}{x^2+1}; f'(x) = \frac{-(x^2+1)+(2x*x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}; f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

Estudiamos la monotonía de la función

	$´(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$	$´´(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$	$´(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$	$`f`(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$	$`f`(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$	$f`(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$	$f`(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$
	$(-\infty,-1)$	(-1)	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(\frac{1}{2},\infty)$
x	-2		-0,5		0,5		2
f´(x)	+	0	−		+	0	−
	creciente	máximo	decreciente	No existe	creciente	máximo	decreciente

b) Halle el area de la region acotada delimitada por la recta $y = \frac{1}{2}$ y la grafica f(x)

Hallamos la interseccion de la función con la recta $y = \frac{1}{2}$; la region

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \text{ para } x \geq 0; \\ f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1} \text{ para } x < 0; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{x^2+1}; \quad x^2+1-2x = 0; \text{para } x \geq 0; \; x = 1; \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{-x}{x^2+1}; x^2+1+2x = \text{para } x < 0; x = -1 \end{cases}$$

Como tiene simetría par; $A = 2\int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1} = 2\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 =$

$$2\left(\left(\frac{1}{2}\right) * 1 - \frac{1}{2}\ln((1)^2+1) - (\frac{1}{2}0 - \frac{1}{2}\ln(0+1)\right) = 1 - 1\ln 2 + \ln 1 = 1 - \ln 2 + 0 = 1 - \ln 2$$

$$A = 2\int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1} = 1 - \ln 2$$

7. **Ejercicio**

En el punto $A(1,0,-1)$ se encuentra un emisor que dispara un rayo de luz (unidimensional) apuntando hacia el punto $B(3,1,0)$. Dicho rayo incide en un punto P del plano π: $\begin{cases} x = 2-\alpha \\ y = 2+2\beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$; α y $\beta \in R$;

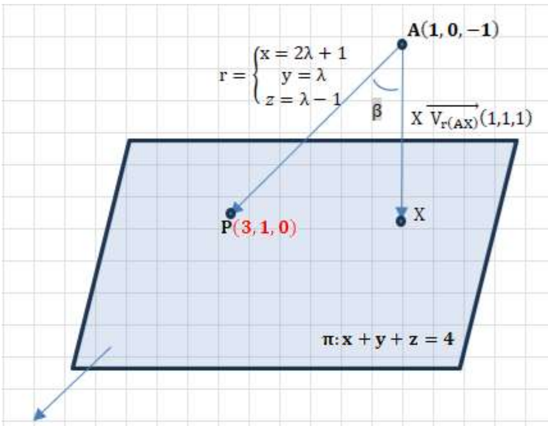
Llamamos al punto P el punto de incidencia del rayo de luz sobre el plano π. Se pide:

a) Calcular una ecuación del plano de incidencia, es decir, el plano perpendicular a π que contiene al rayo de luz

b) Calcula la distancia que recorre el rayo de luz desde el emisor hasta el punto P

c) Calcular el angulo que debería girar el emisor para que la distancia entre él y el nuevo punto de incidencia sobre π sea mínima.

Solución



$$\pi: \begin{cases} x = 2-\alpha \\ y = 2+2\beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}; \begin{cases} \overrightarrow{Vd_{\pi_1}}(-1,0,1) \\ \overrightarrow{Vd_{\pi_2}}(0,2,-2) \\ P(2,2,0) \end{cases}$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2z - 2y + 4 - 2x + 4$$

$$= -2x - 2y - 2z + 8 = 0; \; \pi = x + y + z - 4 = 0$$

Ecuación de la recta que pasa por A y P $\begin{cases} \overrightarrow{Vd_r} = B(3,1,0) - A(1,0,-1) = (2,1,-1);\ \overrightarrow{Vd_r}(2,1,1) \\ P(1,0,-1) \end{cases}$

$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

Punto de incidencia del rayo $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ *con el plano* $\pi = x + y + z - 4 = 0$

$1 + 2\lambda + \lambda - 1 + \lambda - 4 = 0$; $4\lambda = 4$; $\lambda = 1$; punto de incidencia $\begin{cases} x = 1 + 2 * 1 \\ y = 1 \\ z = -1 + 1 \end{cases}$ $P(3,1,0)$

a) Calcular una ecuación del plano de incidencia, es decir, el plano perpendicular a π que contiene al rayo de luz

Si el plano μ contiene al rayo, tendrá como vector director $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ $\overrightarrow{Vd_r}(2,1,1) = \overrightarrow{Vd_{\mu 1}}(2,1,1)$

Si el plano μ es perpendicular al plano $\pi = x + y + z - 4 = 0$; tendrá como vector director $\overrightarrow{Vd_{\mu 2}}$

el vector normal del plano $\pi = x + y + z - 4 = 0$; $\overrightarrow{Vn_\pi}(1,1,1)$; y el punto $P(3,1,0)$

plano μ $\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - 3 + z + 2y - 2 - 2z - x + 3 - y + 1 = y - z - 1 = 0;$

Plano μ: $y - z - 1 = 0$

b) Calcula la distancia que recorre el rayo de luz desde el emisor hasta el punto P

Distancia entre $A(1,0,-1)$ y $P(3,1,0) = D(AP) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-0)^2 + \left(0-(-1)\right)^2}$

$D(AP) = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6};$

c) Calcular el ángulo que debería girar el emisor para que la distancia entre él y el nuevo punto de incidencia sobre π sea mínima

Para que la distancia de A al plano $\pi = x + y + z - 4 = 0$ sea mínima ,

el rayo ha de ser perpendicular al plano. El vector director del rayo será igual al vector normal del plano

$\overrightarrow{Vn_\pi}(1,1,1) = \overrightarrow{Vr_{AX}}$ ((1,1,1)

El ángulo que formará la nueva posición del rayo $\overrightarrow{Vr_{AX}}$ ((1,1,1)con la primera posición

del rayo $\overrightarrow{Vd_r}(2,1,1)$ *será*:

$\text{Cos}\ \beta = \text{Cos}\ \left(\overrightarrow{Vn_\pi}(1,1,1)\ ,\overrightarrow{Vd_r}(2,1,1)\right) = \frac{\left|\overrightarrow{Vn_\pi} * \overrightarrow{Vd_r}\right|}{\left|\overrightarrow{vd_r}\right| * \left|\overrightarrow{Vd_r}\right|} == \frac{|1*2+1*1+1*1|}{\left|\sqrt{1^2+1^2+1^2}\right| * \left|\sqrt{2^2+1^2+1^2}\right|} =$

$\text{Cos}\ \beta = \frac{|4|}{\left|\sqrt{3}\right| * \left|\sqrt{6}\right|} = \frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = 0{,}9428$

Arc Cos β = 0,9428; β = 19,47º

8. **Ejercicio**

En la sección de idiomas de la biblioteca muncipal se tienen libros en francés o inglés, de tres categorias: el 50% son cuentos infantiles, el 30% novelas históricas y el resto manuales técnicos. Uno de cada cinco de los cuentos está en francés y una de cada tres de las novelas en inglés. Por otra parte, uno de cada siete de los libros en francés es un manual . Se toma un libro al azar y se pide:

a) Calcular la probabilidad de que esté en frances si no es un manual técnico

b) Calcular la probabilidad de que esté escrito en francés, y la probabilidad de que si está en inglés sea una novela histórica.

Solución

Cuento $P(C) = 0,5$; Novela $P(N) = 0,3$ y Manual Técmnico $P(MT) = 0,2$

$P(F|C) = \frac{1}{5} = 0,2;\; P(I|C) = \frac{4}{5} = 0,8;\; P(F|N) = \frac{2}{3};\; P(I|N) = \frac{1}{3}; P(M|F) = \frac{1}{7};$

a) Calcular la probabilidad de que esté en frances si no es un manual técnico

Probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso al que denominamos A, como consecuencia de que haya tenido lugar otro evento llamado B;

$$\boldsymbol{P(A|B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(B)}}$$

$(\text{probabilidad de que no sea tecnico}) = 0,5 + 0,3 = 0,8$

$P(\text{Si está en frances y no es un manual técnico}) = 0,5 * \frac{1}{5} + 0,3 * \frac{2}{3} = 0,1 + 0,2 = 0,3$

$$P(\text{Frances}|\text{no es manual técnico}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,8} = 0,375;\ 37,5\%$$

b) Calcular la probabilidad de que esté escrito en francés, y la probabilidad de que si está en inglés sea una novela histórica.

$\text{Calcular la probabilidad de que esté escrito en francés} = 0,5 * \frac{1}{5} + 0,3 * \frac{2}{3} + 0,2 * \frac{1}{7}$

$= 0,1 + 0,2 + 0,02857 = 0,32857 = 32,857\%$

Probabilidad de que si está en inglés sea una novela histórica.

Teoria de la probabilidad Total:

Los sucesos $\mathbf{A_1, A_2, A_3, \ldots\ A_n}$ constituyen una participacion del espacio muestral E y por otro lado sea B otro evento cualquiera del espacio muestral ,
se cumple que la probabilidad de B es:

$$\mathbf{P(B) = P(A_1) * P(B|A_1) + P(A_2) * P(B|A_2) + P(A_3) * P(B|A_3) + \cdots + P(A_n) * P(B|A_n)}$$

Calcular la probabilidad de que esté escrito en francés:

$P(Fr) = P(Fr|C)P(C) + P(Fr|N)\,P(N) + P(Fr|Mt)P(Mt) = \frac{1}{5} * 0,5 + \frac{2}{3} * 0,3 + P(Fr) * \frac{1}{7}$

$P(Fr) = 0,1 + 0,2 + P(Fr) * \frac{1}{7};\; P(Fr) - \frac{1}{7}P(Fr) = 0,3; \frac{6}{7}P(Fr) = 0,3;$

$$P(Fr) = 0,3 * \frac{7}{6} = \frac{7}{20} = 0,35 = 35\%$$

Probabilidad de que si está en inglés sea una novela histórica.

Aplicamos el teorema de Bayes

El teorema de Bayes vincula la probabilidad de A dado B con la probabilidad de B dado A

Los sucesos $A_1, A_2, A_3, \dots\ A_n$ constituyen una participacion del espacio muestral E y por otro lado sea B otro evento cualquiera del espacio muestral , se cumple que la probabilidad de $A_j|B$ es: $P(A_j|B) = \dfrac{P(B|A_j) * P(A_j)}{P(B)} =>$

$$\mathbf{P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) * P(A_j)}{P(A_1) * P(B|A_1) + P(A_2) * P(B|A_2) + P(A_3) * P(B|A_3) + \cdots + P(A_n) * P(B|A_n)}}$$

$P(A_j)$ se denominan probabilidades iniciales a priori

$P(A_j/B)$ se denominan probabilidades finales a posteriori

$$P(N|In) = \frac{P(In|N) * P(N)}{P(In)} = \frac{\frac{1}{3} * 0{,}3}{\left(1 - \frac{7}{20}\right)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{20}} = \frac{2}{13} = 0{,}1538;\ 15{,}38\%$$

2 Examen 2023-2024 B

1. **Ejercicio**

Se tienen listones de madrera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones lrgos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio mas uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón

Solución

Listón corto = x; listón intermedio = y ; listón largo = z;

$$\begin{cases} 2z+4y=3y+15x \\ z=y+x+17; \\ 9x+7=y+z \end{cases} \begin{cases} 15x-y-2z=0; \\ x+y-z=-17; \\ 9x-y-z=-7; \end{cases} \text{resolvemos el sistema}$$

$$\begin{cases} 15x-y-2z=0; & F_1 \\ x+y-z=-17; & F_2=F_1-15F_2 \\ 9x-y-z=-7; & F_3=9F_1-15F_3 \end{cases} \begin{cases} 15x-y-2z=0; & F_1 \\ 0-16y+13z=255; & F_2 \\ 0+6y-3z=105; & F_3=6F_2+16F_3 \end{cases} \begin{cases} 15x-y-2z=0; \\ 0-16y+13z=255; \\ 0+0+30z=150; \end{cases}$$

$z=107$; sustituimos en $-16y+13z=255 \Rightarrow -16y+1391=255;\ y=\dfrac{1136}{16}=71;\ y=71;$

Sustityumos en $15x-y-2z=0; \Rightarrow 15x-71-2*107=0;\ x=19;$

Listón corto = $x=19$; listón intermedio = $y=71$; listón largo = $z=107$;

2. **Ejercicio**

Para la función $f(x)=x^4+x^3\pi+\pi^2x^2+\pi^3x+\pi^4$ se pide:

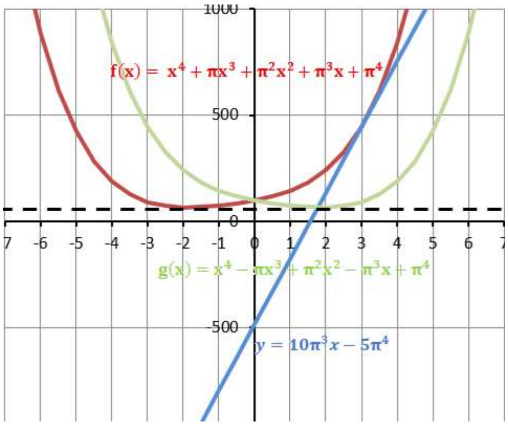
a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la grafica f(x) en $x=\pi$

b) Probar que f(x)tiene, al menos, un punto , con derivada nula en el intervalo $(-\pi,0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

c) Si $g(x)=f(-x)$. Hallar punto donde se cruzan las graficas y el área entre las gráficas f(x) y g(x) en el intervalo $[0,\pi]$

Solución

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la grafica f(x) en $x=\pi$



Hallamos la derivada f(x); $f'(x)$ = m pendiente de la tangente

$f'(x)=4x^3+3\pi x^2+2\pi^2x+\pi^3$; En el punto $x=\pi$;

$m=4\pi^3+3\pi\pi^2+2\pi^2\pi+\pi^3;\ m=10\pi^3$;

En el punto $x=\pi$; $f(x)=\pi^4+\pi^3\pi+\pi^2\pi^2+\pi^3\pi+\pi^4=5\pi^4$

La recta tangente será $y-y_0=m(x-x_0)$;

$y-5\pi^4=10\pi^3(x-\pi)$;

$y=10\pi^3x-10\pi^4+5\pi^4;\ y=10\pi^3x-5\pi^4$;

b) Probar que f(x) tiene, al menos, un punto , con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

La función es continua y derivable en R

Teorema de Bolzano:

"Si una función f(x) está definida y es continua en un intervalo cerrado [a, b] y toma valores de distinto signo en los extremos a y b, entonces existe al menos un punto C del intervalo abierto (a, b) en que se anula la funcion

Aplicamos Bolzano a la derivada de f(x); $f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$; en elintervalo $(-\pi, 0)$

$$\begin{cases} f'(0) = \pi^3 \\ f'(-\pi) = 4(-\pi)^3 + 3\pi(-\pi)^2 + 2\pi^2(-\pi) + \pi^3 = -4\pi^3 + 3\pi^3 - 2\pi^3 + \pi^3 = -2\pi^3 \end{cases}$$

Al tomar valores de distinto signo podemos afirmar que existe al menos un punto C del intervalo abierto $(-\pi, 0)$ en que se anula la función.

Teorema de Rolle:

"Si una función f(x) está definida y es continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) y cumple que f(a) = f(b), entonces existe al menos un punto C del intervalo abierto (a, b) en que su derivada es nula f´(x) = 0;

Si $f(0) = 0^4 + 0^3\pi + \pi^2 0^2 + \pi^3 0 + \pi^4 = \pi^4$

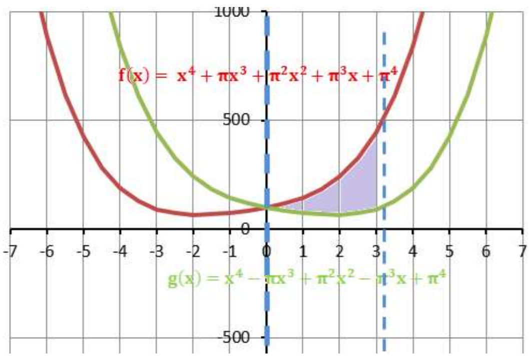
y $f(-\pi) = (-\pi)^4 + (-\pi)^3\pi + \pi^2(-\pi)^2 + \pi^3(-\pi) + \pi^4 = \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 = \pi^4$;

Dado que $f(0) = f(-\pi)$ implia que existe al menos un punto C del intervalo abierto $(-\pi, 0)$ en que su derivada es nula $f'(x) = 0$

c) Si $g(x) = f(-x)$. Hallar punto donde se cruzan las graficas y el área entre las gráficas f(x) y g(x) en el intervalo $[0, \pi]$

$f(x) = x^4 + x^3\pi + \pi^2x^2 + \pi^3x + \pi^4$;

$g(x) = x^4 - x^3\pi + \pi^2x^2 - \pi^3x + \pi^4$



Hallamos los puntos de corte

$f(x) = x^4 + x^3\pi + \pi^2x^2 + \pi^3x + \pi^4 =$

$g(x) = x^4 - x^3\pi + \pi^2x^2 - \pi^3x + \pi^4$

$x^4 + x^3\pi + \pi^2x^2 + \pi^3x + \pi^4 = x^4 - x^3\pi + \pi^2x^2 - \pi^3x + \pi^4$

$2x^3\pi + 2\pi^3x = 0; 2x\pi(x^2 + \pi^3) = 0$;

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + \pi^3 = 0; x = \sqrt{-\pi^3} \textit{ no hay solucion en R} \end{cases}$$

$$A = \int_0^\pi f(x) - g(x) = \int_0^\pi 2x^3\pi + 2\pi^3 x =$$

$$\left[2\pi\frac{x^4}{4} + 2\pi^3\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^5}{2} + \pi^5 = \frac{3}{2}\pi^5;$$

$$A = \int_0^\pi f(x) - g(x) = \frac{3}{2}\pi^5$$

3. **Ejercicio**

Dados los puntos $A(0,0,1)$y $B(1,1,0)$ se pide:

a) Hallar la ecución del plano que pasa por A y B y es perpendicupar al plano $z = 0$;

b) Hallar la ecuación de dos rectas paralelas , r_1 y r_2 que pasen por los puntos A y B respectivanente, estén en el plano $x + z = 1$ y tal que la distancia entre ellas sea 1.

Solución

a) Hallar la ecución del plano que pasa por A y B y es perpendicupar al plano $z = 0$;

$\overrightarrow{Vr_{AB}} = B(1,1,0) - A(0,0,1) = (1,1,-1)$;

Si es perpendicular al plano π: $z = 0$ implica que un vector del plano μ pedido, sera igual al vector normal $\overrightarrow{Vn_{\pi}}(1,1,0) = \overrightarrow{Vd_{\mu}}$

El plano μ tambien contendrá al punto $A(0,0,1)$

plano $\mu = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = y - x = 0;$ *el* plano $\mu : y - z = 0;$

b) Hallar la ecuación de dos rectas paralelas , r_1 y r_2 que pasen por los puntos A y B respectivanente, estén en el plano $x + z = 1$ y tal que la distancia entre ellas sea 1

Comprobamos que A y B pertenecen al plano $\begin{cases} A(0,0,1) \text{ en el } x + z = 1 \Rightarrow 0 + 1 = 1 \\ B(1,1,0) \text{ en el } x + z = 1 \Rightarrow 1 + 0 = 1 \end{cases}$ pertenecen;

Al ser rectas paralelas tendrán el mismo vector director $\overrightarrow{Vdr_1}(a,b,c)$, $\overrightarrow{Vdr_2}(a,b,c)$;

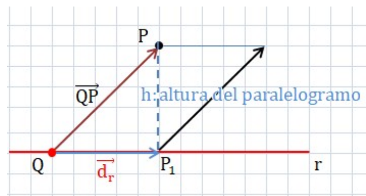
Dado que las rectas están en el plano $(x + z = 1)$ su vector director será perpendicular al vector normal del plano $\overrightarrow{Vn}(1,0,1)$

Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es $0 \Rightarrow \overrightarrow{Vdr_1}(a,b,c) * \overrightarrow{Vn}(1,0,1) = 0$;

$\overrightarrow{Vdr_1}(a,b,c) * \overrightarrow{Vn}(1,0,1) = a * 1 + b * 0 + c * 1 = 0; a + c = 0; \Rightarrow c = -a;$ $\begin{cases} \overrightarrow{Vdr_1}(a,b,-a) \\ \overrightarrow{Vdr_1}(a,b,-a) \end{cases}$

$r_1 \equiv \begin{cases} \overrightarrow{Vdr_1}(a,b,-a) \\ A(0,0,1) \end{cases} \begin{cases} x = a\lambda + 0 \\ y = b\lambda + 0 \\ z = -a\lambda + 1 \end{cases} \begin{cases} x = a\lambda \\ y = b\lambda \\ z = -a\lambda + 1 \end{cases}$

$r_2 \equiv \begin{cases} \overrightarrow{Vdr_2}(a,b,-a) \\ B(1,1,0) \end{cases} \begin{cases} x = a\beta + 1 \\ y = b\beta + 1 \\ z = -a\beta + 0 \end{cases} \begin{cases} x = a\beta + 1 \\ y = b\beta + 1 \\ z = -a\beta \end{cases}$



La distancia entre dos recta es igual a la distancia de una recta al punto de la otra

Para hallar la distancia $d(P,P_1)$, de un punto P a una recta r , tomamos un punto Q cualquiera de la recta y con el vector $\overrightarrow{d_r}$ de la recta y el vector $\overrightarrow{QP}$ formamos un parallemogramo.

El modulo del producto vectorial $|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}|$nos da el area del paralleogramo. Por otro lado sabemos que area paralelogramo = base por altura.

$\left(\textbf{Area} = |\overrightarrow{d_r}| * \textbf{h}\right)$; **Igualamos** $|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}| = |\overrightarrow{d_r}| \times \textbf{h}$; $\textbf{h} = (\textbf{d}(\textbf{P},\textbf{P}_1)) = \dfrac{|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}|}{|\overrightarrow{d_r}|}$

$\overrightarrow{QP}$ = en nuestro caso es $\overrightarrow{AB} = (B(1,1,0) - A(0,0,1) = (1,1,-1)$

$$(D(r_2,B)) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{Vdr_1}(a,b,-a)|}{|\overrightarrow{Vdr_1}(a,b,-a)|} = \frac{|(1,1,-1) \times (a,b,-a)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (-a)^2}} = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ a & b & -a \end{matrix} \right\|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (-a)^2}} = \frac{|-ai + bi + bk - ak|}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$$

$$\frac{|(-a+b)i, (b-a)k|}{\sqrt{2a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{(-a+b)^2 + (-a+b)^2}}{\sqrt{2a^2 + b^2}} = 1; \sqrt{(-a+b)^2 + (-a+b)^2} = \sqrt{2a^2 + b^2}$$

elevamos los dos terminos al cuadrado $(-a+b)^2+(-a+b)^2=2a^2+b^2$;

$a^2+b^2-2ab+a^2+b^2-2ab=2a^2+b^2;\ 2a^2+2b^2-4ab=2a^2+b^2; b^2-4ab=0$

$b(b-4a)=0; b=0; b=4a;$

para $b=0;\ r_1 \equiv \begin{cases} x=a\lambda \\ y=b\lambda \\ z=-a\lambda+1 \end{cases} = \begin{cases} x=a\lambda \\ y=0 \\ z=-a\lambda+1 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x=a\beta+1 \\ y=b\beta+1 \\ z=-a\beta \end{cases} = \begin{cases} x=a\beta+1 \\ y=1 \\ z=-a\beta \end{cases};$

para $b=4a;\ r_1 \equiv \begin{cases} x=a\lambda \\ y=b\lambda \\ z=-a\lambda+1 \end{cases} = \begin{cases} x=a\lambda \\ y=4a \\ z=-a\lambda+1 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x=a\beta+1 \\ y=b\beta+1 \\ z=-a\beta \end{cases} = \begin{cases} x=a\beta+1 \\ y=4a\beta+1 \\ z=-a\beta \end{cases};$

4. **Ejercicio**

Sabiendo que $P(\bar{A})=\frac{11}{20}, P(A|B)-P(B|A)=\frac{1}{24}$ y $P(A\cap\bar{B})=\frac{3}{10}$ se pide:

a) Calcular $P(A\cap B)$ y $P(B)$;

b) Calcular $P(C)$ siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica

$P(AUC)=\frac{14}{25}$

Solución

a) Calcular $P(A\cap B)$ y $P(B)$;

==

Probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso al que denominamos A, como consecuencia de que haya tenido lugar otro evento llamado B;

$$\boldsymbol{P(A|B)}=\frac{\mathbf{P(A\cap B)}}{\mathbf{P(B)}}$$

Propiedades de las probabilidades

- ✓ La probabilidad de la interseccion de dos sucesos independiente $\mathbf{P(A\cap B)=P(A)*P(B)}$
- ✓ Cuando dos sucesos son independientes $\mathbf{P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{AUB})=1-P(AUB)}$
- ✓ $\mathbf{P(A-B)=P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)}$
- ✓ $\mathbf{P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B);\ P(A)=P(A\cap\bar{B})}+P(\mathbf{A\cap B})$
- ✓ $\mathbf{P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B);\ P(B)=P(\bar{A}\cap B)}+P(\mathbf{A\cap B})$

==

Si $P(\bar{A})=\frac{11}{20} => P(A)=\frac{9}{20};$

$P(A\cap\bar{B})=\frac{3}{10}=P(A)-P(A\cap B) => P(A\cap\bar{B})=\frac{3}{10}=\frac{9}{20}-P(A\cap B);\ P(A\cap B)=\frac{9}{20}-\frac{3}{10}$

$P(A\cap B)=\frac{9}{20}-\frac{3}{10}=\frac{3}{20}; \boxed{P(A\cap B)=\frac{3}{20}}$

Si $P(\bar{A})=\frac{11}{20} => P(A)=\frac{9}{20};$

$$P(A|B)-P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}-\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{24};\ \frac{\frac{3}{20}}{P(B)}-\frac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{20}}=\frac{1}{24};\frac{3}{20P(B)}=\frac{1}{24}+\frac{3}{9}=\frac{81}{216};$$

$P(B)=\frac{3*216}{20*81}=\frac{648}{1620}=\frac{2}{5};\ \boxed{P(B)=\frac{2}{5}}$

b) Calcular $P(C)$ siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica

$P(AUC)=\frac{14}{25};$

Si los sucesos A y C son independientes $P(AUC)=P(A)+P(C)-P(A\cap C);$

✓ La probabilidad de la interseccion de dos sucesos independiente $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) * P(B)}$

$$P(AUC) = \frac{14}{25} = \frac{9}{20} + P(C) - P(A \cap C); => \frac{14}{25} = \frac{9}{20} + P(C) - (P(A) * P(C))$$

$$\frac{14}{25} = \frac{9}{20} + P(C) - (\frac{9}{20}P(C); \ \frac{14}{25} - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}P(C); \ \frac{11}{100} = \frac{11}{20}P(C); P(C) = \frac{20}{100}; P(C) = \frac{1}{5}$$

5. **Ejercicio**

Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} y\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\ con\ b \neq 0$

Se pide:

a) Encontrar todos los valores de b para que verifiquen $BCB^{-1} = A$;

b) Calcular el determinante de la matriz AA^t;

c) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$;

Solución

a) Encontrar todos los valores de b para que verifiquen $BCB^{-1} = A$;

==

La matriz Inversa $\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (A^*)^t}$;

$\mathbf{|A|}$ = **Determinante de la matriz**; $\mathbf{(A^*)^t}$ = **Matriz transpuesta de la adjunta**

$$|B| = \begin{vmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{vmatrix} = 3b^3 + 2b^3 + 2b^3 - 3b^3 - 4b^3 - b^3 = -b^3 \neq 0; \text{ la matriz tiene inversa}$$

Si multiplicamos los dos terminos por B => $BCB^{-1} = A; BCB^{-1}B = AB$;

$BCI = AB => BC = AB$; si multiplicamos por la derecha los dos teminos, por B^{-1}

$BCB^{-1} = ABB^{-1} = AI = A$; Es igual para todo valor de b

b) Calcular el determinante de la matriz AA^t;

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \ A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 11 \end{pmatrix};$$

$$|AA^t| = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 363 + 63 + 63 - 147 - 99 - 99 = 144$$

c) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$;

$$B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \text{ para } b = 1 => \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{cases} x + 2y + z = 3; & F_1 \\ 2x + 3y + z = -1; & F_2 = 2F_1 - F_2 \\ x + y + z = 1; & F_3 = F_1 - F_3 \end{cases} \begin{cases} x + 2y + z = 3; \\ 0 + y + z = 7; \ y = 2; \\ 0 + y + 0 = 2; \end{cases}$$

Sustituimos $y = 2$ en $0 + y + z = 7 => z = 5$;

Sustituimos en $x + 2y + z = 3; => x = -6$; $\begin{cases} x = -6; \\ y = 2; \\ z = 5; \end{cases}$

6. **Ejercicio**

Calcule :

a) $\int_1^e (x+2)lnx\, dx$

b) $\lim\limits_{n\to\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{tag}\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

Solución

a) $\int_1^e (x+2)lnx\, dx$

Utilizamos la integración por partes: $(\boldsymbol{ILATE})$ **Aplicamos la formula** $\int \boldsymbol{u\, dv = u\, v} - \int \boldsymbol{vdu}$

$$\int_1^e (x+2)lnx\, dx\,;\ \begin{cases} \ln x = u;\ \dfrac{1}{x}dx = du \\ (x+2)\mathrm{dx} = dv;\ \dfrac{x^2}{2} + 2x = v \end{cases} \quad \ln x\left(\frac{x^2}{2}+2x\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$\ln x\left(\frac{x^2}{2}+2x\right) - \int \left(\frac{x}{2}+2\right)dx = \ln x\left(\frac{x^2}{2}+2x\right) - (\frac{x^2}{4}+2x)$$

$$\int_1^e (x+2)lnx\, dx = \left[\ln x\left(\frac{x^2}{2}+2x\right) - (\frac{x^2}{4}+2x)\right]_1^{\mathrm{e}}$$

$$\ln e\left(\frac{e^2}{2}+2e\right) - \left(\frac{e^2}{4}+2e\right) - \left(\ln 1\left(\frac{1^2}{2}+2*1\right) - \left(\frac{1^2}{4}+2*1\right)\right) =$$

$$\left(\left(\frac{e^2}{2}+2e\right) - \left(\frac{e^2}{4}+2e\right) - (0\left(\frac{1^2}{2}+2*1\right) - \left(\frac{1^2}{4}+2*1\right)\right) =$$

$$\left(\frac{2e^2+8e-e^2-8e}{4} + \frac{9}{4}\right) = \frac{e^2+9}{4}$$

$$\int_1^e (x+2)lnx\, dx = \frac{e^2+9}{4}$$

b) $\lim\limits_{n\to\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{tag}\ \frac{\mathrm{x}}{2}\right)^{\frac{1}{\cos \mathrm{x}}} = \left(\mathrm{tag}\ \frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}}} = \left(\mathrm{tag}\ \frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}}} = 1^{\infty}$ indeterminado

Para la resolucion de indeterminaciones 1^{∞} podemos usar la siguiente propiedad

$$\lim_{x\to a}[\ \mathbf{f(x)^{g(x)}}] = \ \mathbf{e}^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]*g(x)}$$

$$\lim_{n\to\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{tag}\ \frac{\mathrm{x}}{2}\right)^{\frac{1}{\cos \mathrm{x}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\frac{\pi}{2}}\left[\mathrm{tag}\frac{\mathrm{x}}{2}-1\right]*\frac{1}{\mathrm{co}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\frac{\pi}{2}}\left[\mathrm{tag}\frac{\mathrm{x}}{2}-1\right]*\frac{1}{\cos \mathrm{x}}}$$

$$\lim_{n\to\frac{\pi}{2}}\left[\mathrm{tag}\ \frac{\mathrm{x}}{2}-1\right]*\frac{1}{\cos \mathrm{x}} = \lim_{n\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\mathrm{tag}\ \frac{\mathrm{x}}{2}-1}{\cos \mathrm{x}}\right] = \frac{0}{0}\ \text{ indeterminación}$$

aplicamos L´Hopital: $\lim\limits_{n\to\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{(\frac{1}{2}sec^2\ \frac{x}{2}}{-sen\ x}\right] = \dfrac{\frac{1}{2}sec^2\ \frac{\frac{\pi}{2}}{2}}{-sen\ \frac{\pi}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}sec^2\ \frac{\pi}{4}}{-sen\ \frac{\pi}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2}{-1} = -\dfrac{1}{1} = -1;$

$$\lim_{n\to\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{tag}\ \frac{\mathrm{x}}{2}\right)^{\frac{1}{\cos \mathrm{x}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

7. Ejercicio

Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vertices P_1, P_2, P_3. P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento . Se sabe que $P_1(1,1,1), P_2(2,1,0), P_3(1,3,2), P_4(3, \mathrm{a}, 3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada

a) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora, sabemos que el volumen del tetraedro es $\mathrm{V} = 1$; Tambien sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la pimpresora, que es de 10. Determinar los posibles valores de a

b) Dado el punto Q(3,3,3), se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q. como aristas . ¿ Cuales serán los valores de las coordenadas de los ocho vetices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador

Solución

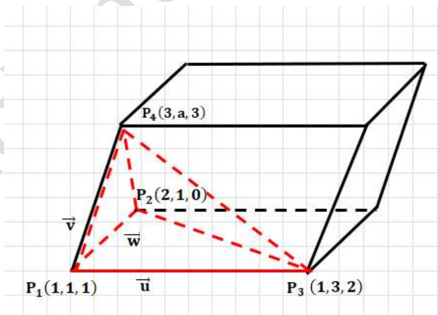
El volumen de un paralelepipedo conociendo los vectors de las aristas que concurren en un vertice se calcula mediante el valor absoluto del producto mixto de dichos vectores

$$\boldsymbol{V_{paraleleppedo}} = \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} \\ \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{w_1} & \boldsymbol{w_2} & \boldsymbol{w_3} \end{matrix} \right\|; \ \boldsymbol{V_{tetraedro}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} \\ \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{w_1} & \boldsymbol{w_2} & \boldsymbol{w_3} \end{matrix} \right\|;$$

$\vec{u} = P_3(1,3,2) - P_1(1,1,1) = (0,2,1)$

$\vec{v} = P_4(3, \mathrm{a}, 3) - P_1(1,1,1) = (2, a-1, 2)$

$\vec{w} = P_2(2,1,0) - P_1(1,1,1) = (1,0,-1)$



$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \right\| = |4 + 4 - a + 1|$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6}|9 - a| \ Sabemos \ que \ V_{tetraedro} = 1;$$

$$\frac{1}{6}|9 - a| = 1; \ |9 - a| = 6; \begin{cases} 9 - a = 6; a = 3 \\ -9 + a = 6; a = 15 \end{cases}$$

Tambien sabemos que ninguna de sus aristas > 10;

Para $\mathrm{a} = 15 \Rightarrow \vec{\mathrm{v}}(2,14,2)$; $\mathrm{L} = \sqrt{2^2 + 14^2 + 2^2} = \sqrt{204} = 14{,}2828 < 10$;

Con lo que a = 3; $\boldsymbol{\vec{v} = P_4(2, 2, 2)}$

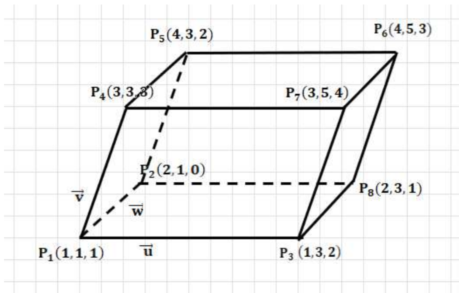
b) Dado el punto $\mathrm{Q}(3,3,3) = P_4$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q. como aristas . ¿ Cuales serán los valores de las coordenadas de los ocho vetices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador.

$\mathbf{P_5 = P_4(3, 3, 3) + \vec{w}(1, 0, -1) = (4, 3, 2)}$

$\mathbf{P_6 = P_5(4, 3, 2) + \vec{u}(0, 2, 1) = (4, 5, 3)}$

$\mathbf{P_7 = P_4(3, 3, 3) + \vec{u}(0, 2, 1) = (3, 5, 4)}$

$\mathbf{P_8 = \boldsymbol{P_2}(2, 1, 0) + \vec{u}(0, 2, 1) = (2, 3, 1)}$



8. **Ejercicio**

Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados.

Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento:

Si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar

b) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par

Tirada de los dos lados		
Dado azul	Dado rojo	Cantidad
1	1	2
1	2	3
1	3	4
1	4	5
1	5	6
1	6	7
2	1	4
2	2	6
2	3	8
2	4	10
2	5	12
2	6	14
3	1	4
3	2	5
3	3	6
3	4	7
3	5	8
3	6	9
4	1	6
4	2	8
4	3	10
4	4	12
4	5	14
4	6	16
5	1	6
5	2	7
5	3	8
5	4	9
5	5	10
5	6	11
6	1	8
6	2	10
6	3	12
6	4	14
6	5	16
6	6	18

Solución

Regla de Laplace, calcula la probabilidad de que ocurra un suceso P(A) en un espacio muestral, dividiendo casos favorable entre casos posibles

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{Casos favorables}}{\textbf{Casos posibles}}$$

a) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar

Calcular la probabilidad de obtener una puntuación 10;

Como 10 es par => azul debe ser par y rojo par o azul 5 rojo 5

Azul 2, rojo 4; Azul 4, rojo 3; Azul 5, rojo 5; Azul 6, rojo 2;

$$P_{puntuación\ 10} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar

Para obteber una puntuacion impar => azul ha de ser impar y rojo par

$$P_{puntuación\ impar} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

b) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par

Pobabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8 implica

Azul 2, rojo 3; Azul 3, rojo 5; Azul 4, rojo 2; Azul 5, rojo 3; Azul 6, rojo 1

$$P_{azul\ par\ y\ puntuación\ 8} = \frac{3}{5}$$

Probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación ha sido un número par

$$\text{La puntuación final ha sido par} \begin{cases} \text{si azul es par } (par; 2x): 2,4,6;\ 2(1,2,3,4,5,6) => 3 * 6 = 18 \\ \text{si azul es impar y rojo impar}(1,3,5 * \text{impares } 1,3,5): 3 * 3 = 9 \end{cases} (27)$$

$$\text{Si puntuación final par, el dado rojo habrá sido impar} \begin{cases} (2,4,6; 2(1,3,5) = 3 * 3 = 9 \\ 1,3,5 * \text{impares } 1,3,5 = 3 * 3 = 9 \end{cases} (18)$$

$$P_{impar\ rojo\ y\ puntuación\ final\ par} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

3 Examen 2023-2024 C

1. **Ejercicio**

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro λ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ se pide:}$$

a) Discutir el sistema en función de los valores de λ

b) Resolver el sistema en el caso de que $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible una solución con $x = 5$.

Solución

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y & z \\ x(\lambda-1) & y & z \\ x & y(\lambda-1) & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Discutir el sistema en función de los valores de λ

Analizamos el determinante de la matríz de coeficientes $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (\lambda-1)^2 - 1 - \lambda + 1 = 1 + \lambda^2 + 1 - 2\lambda - 1 - \lambda + 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 2;$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0; \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 * 1 * 2}}{2 * 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} \lambda = 2; \\ \lambda = 1; \end{cases}$$

Para $\lambda \neq 2; \lambda \neq 1$; Rango matriz de coeficiente = rango matriz ampliada = n de incognritas = 3

El sistema es compatible determinado con una solución

Para $\lambda = 2$; Estudiamos el rango de la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 1 - 2 = 0; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 1 = 2 \text{ Rango matriz ampliada} = 3$$

Para $\lambda = 2$; Rango matriz de coeficiente = 2; Rango matriz ampliada = 3; el sistema es incompatible no tien solución

Para $\lambda = 1$; Estudiamos el rango de la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0; \text{Rango matriz ampliada} = 2$$

Para $\lambda = 1$; Rango matriz de coeficiente = 2; Rango matriz ampliada = 2; el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones

incompatible

b) Resolver el sistema en el caso de que $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible una solución con $x = 5$.

Para $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado

$$\begin{cases} 0x + y + z = 1 \\ 0x + y + z = 1 \\ x + 0y + z = 0; \end{cases} \begin{cases} y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 0; \end{cases} F_1 = F_2; \text{ Hacemos } y = \beta; z = 1 - \beta; x = \beta + 1$$

$$\begin{cases} y = \beta \\ z = 1 - \beta \\ x = \beta - 1; \end{cases} \text{ Para } x = 5 \Rightarrow \beta = 6; \begin{cases} y = 6 \\ z = -5 \\ x = 5 \end{cases} (5, 6, -5)$$

2. **Ejercicio**

a) Programa un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0,0)$

b) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(1,1)$

c) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extemos relativos en R

Solución

a) Programa un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0,0)$

Una función polinómica de grado 2 será $f(x) = ax^2 + bx + c = 0; y = mx + n;$

$f'(x) = 2ax + b = m;$ pendiente de la recta tangente a la curva;

Si la recta tangente es $y = x$ en el punto $(0,0) \Rightarrow m = 1;$

Como ha de ser tangente en $(0,0) \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c = 0; 0 = c \Rightarrow$

$f(x) = ax^2 + bx + 0 = 0;\ y = ax^2 + bx;$

$f'(x) = 2ax + b = m = 1; f'(0) = 2a * 0 + b = 1 \Rightarrow b = 1;$

$y = ax^2 + bx$ será ; $y = ax^2 + x;$ por ejemplo para $a = 1; y = x^2 + x$

b) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(1,1)$

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0; f'(x) = 2ax + b$ para que tenga un máximo on mínimo en $(1,1)$ha de cumplirse

$f'(1) = 2a * 1 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0; 2a = -b;$

Para que tenga un máximo $f''(x) = 2a > 0$; 2a>0 y b<0;

Para $b = -1; a = \frac{1}{2};\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + c = 0 ; f(x) = x^2 - 2x + c;$

como ha de pasar por $(1,1);\ f(1) = 1^2 - 2 * 1 + c = 1; c = 0;$

La función será $f(x) = x^2 - 2x;$

c) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extemos relativos en R;

Una función tendrá extremos relativos donde su derivada es 0 en más de un punto

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0; f'(x) = 2ax + b;$ igualamos a 0 para ver donde la pendiente de tangente es igual a 0; $2ax + b = 0; x = -\frac{b}{2a}$

Solo tendrá una única solución, habrá un punto que cumple la ecuación.

3. **Ejercicio**

Sean los puntos $P(1, -1,3)$ y $Q(2,1, -1)$

a) Determinar una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos

b) El segmento PQ es uno de los tres lados de un triangulo cuya suma de los cuadrados de sus lados es 34 y el tercer vertice se encuentra en la recta $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vertice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula

Solución

a) Determinar una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos

Una recta r_{PQ} que pase por $P(1, -1,3)$ y $Q(2,1, -1)$ tendrá

$$\begin{cases} \overrightarrow{Vdr_{PQ}} = Q(2,1,-1) - P(1,-1,3) = (1,2,-4) \\ P(1,-1,3) \end{cases} ;\ r_{PQ} \begin{cases} x = 1\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \\ z = -4\lambda + 3 \end{cases}$$

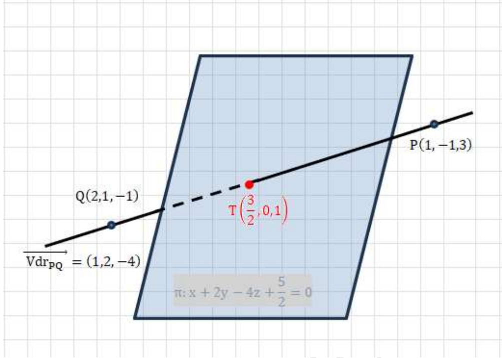
Si dos puntos son simétricos respecto a un plano π el vector normal del plano será igual al vector director de la recta PQ; $\overrightarrow{Vn_\pi} = \overrightarrow{Vdr_{PQ}} = (1,2,-4)$

La ecuación de un plano $\pi: AX + By + Cz + D = 0$;

Dado que su vector normal es $(1,2,-4)$;

El plano π será $1x + 2y - 4z + D = 0$;

$\pi: x + 2y - 4z + D = 0$



Si lo s puntos P y Q son simétricos respecto a π El punto medio T del segmento PQ estará en el plano

$$T = \frac{P(1,-1,3) + Q(2,1,-1)}{2} = \frac{(3,0,2)}{2} = \left(\frac{3}{2},0,1\right)$$

Dado que este punto $T\left(\frac{3}{2},0,1\right)$ perpenece al plano,

cumplirá su ecuación $\pi: x + 2y - 4z + D = 0$;

$$\pi: \frac{3}{2} + 2 * 0 - 4 * 1 + D = 0; D = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2};$$

$$\pi: x + 2y - 4z + \frac{5}{2} = 0$$

b) El segmento PQ es uno de los tres lados de un triangulo cuya suma de los cuadrados de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vertice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

$$r \equiv x - 2 = y = z;\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = \lambda + 0 \\ z = \lambda + 0 \end{cases}; \begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$; Un punto T de la recta será $(\lambda + 2, \lambda, \lambda)$

Lado PQ: $Q(2,1,-1) - P(1,-1,3) = (1,2,-4)$;

Lado PT: $(\lambda + 2, \lambda, \lambda) - P(1,-1,3) = (\lambda + 2 - 1, \lambda + 1, \lambda - 3)$

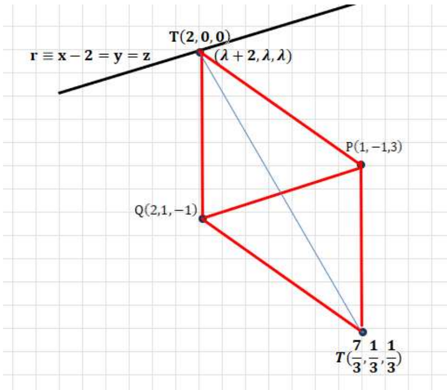
$= (\lambda + 1, \lambda + 1, \lambda - 3)$

Lado QT: $(\lambda + 2, \lambda, \lambda) - Q(2,1,-1) = (\lambda, \lambda - 1, \lambda + 1)$

Longitud lado PQ: $\sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$;

Longitud Lado PT: $\sqrt{(\lambda + 1)^2 + (\lambda + 1)^2 + (\lambda - 3)^2}$

Longitud Lado QT: $\sqrt{(\lambda)^2 + (\lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2}$



Los cuadrados de sus lados = 34

$$34 = \left(\sqrt{21}\right)^2 + \left(\sqrt{(\lambda)^2 + (\lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(\lambda + 1)^2 + (\lambda + 1)^2 + (\lambda - 3)^2}\right)^2$$

$$34 = 21 + (\lambda)^2 + (\lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2 + (\lambda + 1)^2 + (\lambda + 1)^2 + (\lambda - 3)^2$$

$$13 = (\lambda)^2 + (\lambda - 1)^2 + 3(\lambda + 1)^2 + (\lambda - 3)^2$$

$$13 = \lambda^2 + \lambda^2 + 1 - 2\lambda + 3(\lambda^2 + 1 + 2\lambda) + \lambda^2 + 9 - 6\lambda =$$

$$13 = \lambda^2 + \lambda^2 + 1 - 2\lambda + 3\lambda^2 + 3 + 6\lambda + \lambda^2 + 9 - 6\lambda$$

$$13 = 6\lambda^2 - 2\lambda + 13;\ 6\lambda^2 - 2\lambda = 0; \lambda(6\lambda - 2) = 0;$$

Como $\lambda = 0$; y $\lambda = \frac{1}{3}$; Para $\lambda = 0 \begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $\lambda = \frac{1}{3} \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$; El vértice T(2,0,0) y $T\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

4. Ejercicio

En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles A_1 y A_2 de igual probabilidad 0,4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad $A_3 = 0{,}2$). De cierto suceso B se sabe que $P(B|A_1) = P(B|A_2)$ y $P(B|A_3) = 2P(B|A_1)$. Y un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C|A_2) = 0{,}3$ y $P(C|A_3) = 0{,}6$. Con estos datos se pide:

a) Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1) = 0{,}25$

b) Calcular la probabilidad de C y determina si C es independiente de A_2

Solución

a) Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1) = 0{,}25$

Datos:

$P(A_1) = 0{,}4; P(A_2) = 0{,}4; P(A_3) = 0{,}2;$

$P(B|A_1) = 0{,}25;$

$P(B|A_1) = P(B|A_2) = 0{,}25$

$P(B|A_3) = 2P(B|A_1) = 2 * 0{,}25 = 0{,}50$

==

Teoria de la probabilidad Total:

Los sucesos $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ constituyen una participacion del espacio muestral E y por otro lado sea B otro evento cualquiera del espacio muestral ,

se cumple que la probabilidad de B es:

$$\mathbf{P(B) = P(A_1) * P(B|A_1) + P(A_2) * P(B|A_2) + P(A_3) * P(B|A_3) + \cdots + P(A_n) * P(B|A_n)}$$

==

$P(B) = P(A_1) * P(B|A_1) + P(A_2) * P(B|A_2) + P(A_3) * P(B|A_3);$

$P(B) = 0{,}4 * 0{,}25 + 0{,}4 * 0{,}25 + 0{,}2 * 0{,}5 = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}3;$

$P(B) = 0{,}3$

b) Calcular la probabilidad de C y determina si C es independiente de A_2

Datos:

C independiente de A_1; $P(C|A_2) = 0{,}3$ y $P(C|A_3) = 0{,}6$

El suceso C es independiente de A_1

<u>Calcular la probabilidad de C</u>

Toría de la probabilidad Total:

$P(C) = P(A_1) * P(C|A_1) + P(A_2) * P(C|A_2) + P(A_3) * P(C|A_3);$

$P(C) = 0{,}4 * P(C|A_1) + 0{,}4 * 0{,}3 + 0{,}2 * 0{,}6 = 0{,}4 * P(C|A_1) + 0{,}12 + 0{,}12 =$

$P(C) = 0{,}4 * P(C|A_1) + 0{,}24;$ Dado un suceso C independiente de $A_1 \Rightarrow P(C|A_1) = P(C);$

$P(C) = 0{,}4 * P(C) + 0{,}24; P(C) = \frac{0{,}24}{0{,}6} = 0{,}4;$

<u>Determina si C es independiente de A_2 :</u>

Si es independiente $\Rightarrow P(C|A_2) = P(C)$; Dado que $P(C|A_2) = 0{,}3$ y $P(C) = 0{,}4$; no son iguales

Podemos determinar que C no es independiente de A_2

5. **Ejercicio**

Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \det A + \det B$ no se cierta en general

a) Si A y B son dos matrices para las que $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \mathrm{dest}\ (\mathrm{A}) + \det(B)$ pruebe que entonces $\det(A+B)^2 = \det \mathrm{A}^2 + \det \mathrm{B}^2 + 2\det(AB)$

b) Dadas las matrices $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; Determine un único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $\det(\mathrm{C}+\mathrm{D}) = \det C + \det D$

c) Para el valor de $\alpha = -1$, resuelva el sistema homogeneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes

Solución

a) Si A y B son dos matrices para las que $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \mathrm{dest}\ (\mathrm{A}) + \det(B)$ pruebe que entonces $\det(A+B)^2 = \det \mathrm{A}^2 + \det \mathrm{B}^2 + 2\det(AB)$

==

Propiedades de los determinantes

- El determinante del producto de matrices es igual al producto de los determinantes
- El determinante de una potencia es igual a la potencia del determinante

==

Aplicando la propiedad de la potencia de determinantes: $\det(A+B)^2 = (\det(A+B))^2$

Como sabemos que se cumple, $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \mathrm{dest}\ (\mathrm{A}) + \det(B)$ sustituimos en

$\det(A+B)^2 = (\mathrm{dest}\ (\mathrm{A}) + \det(B))^2 = (\det A)^2 + (\det B)^2 + 2\det(A) * \det(B)$

Aplicando la propiedad del producto de determinantes

$\det(A+B)^2 = (\mathrm{dest}\ (\mathrm{A}) + \det(B))^2 = \det A^2 + \det B^2 + 2\det(AB)$

b) Dadas las matrices $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; Determine un único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $\det(\mathrm{C}+\mathrm{D}) = \det C + \det D$

$$\mathrm{C}+\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

$$|C+D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = 4\alpha + 4 - 4 = 4\alpha$$

$$|C| \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha + \alpha + 2 = 2\alpha + 2; \quad |D| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 - 4 = 2; \ |C| + |D| = 2\alpha + 4$$

$$|C+D| = 4\alpha = |C| + |D| = 2\alpha + 4; \ 4\alpha = 2\alpha + 4; \ \alpha = \frac{4}{2} = 2;$$

Se cumple la igualdad $\det(\mathrm{C}+\mathrm{D}) = \det C + \det D\ \ para\ \alpha = 2;$

c) Para el valor de $\alpha = -1$, resuelva el sistema homogeneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes

Para $\alpha = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Sistema homogéneo

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 2 = 0$; rango de la matriz de coeficientes 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

rango de la matriz ampliada es 2 => el sistema es compatible indeterminado

$$\begin{cases} x + 0y - z = 0 \\ -x + y + 0z = 0 \\ 2x - y - z = 0; \end{cases} \begin{cases} y - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 2x - y - z = 0; \end{cases} \begin{cases} y = z \\ y = x \\ 2x - y - z = 0; \end{cases} ; \text{Hacemos } x = \lambda; => \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda; \end{cases}$$

6. **Ejercicio**

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$ se pide:

a) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas $f(x)$ y $g(x) = x(x - 3)$

Solución

a) Estudiar si es par o impar y calcular susintervalos de crecimiento y decrecimiento

Una función es par si $f(x) = f(-x)$; presenta simetría respecto al eje y

Una función es impar si $f(-x) = -f(x)$; presenta simetría respecto al origen de coordenadas

Comprobamos si presente simetria par $f(x) = f(-x) =>$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x;$

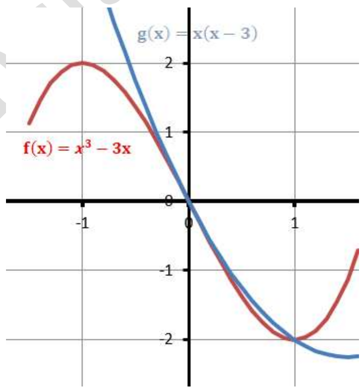
$f(x) = x^3 - 3x \neq f(-x) = -x^3 + 3x;$ No presenta simetría par

Comprobamos si presente simetria impar $- f(x) = f(-x);$

$-(x^3 - 3x) = (-x)^3 - 3(-x);$

$-f(x) = -x^3 + 3x = f(-x) = -x^3 + 3x;$ Presenta simetría impar

Simetría respecto al origen



Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

Hallamos la primera derivada para calcular puntos críticos (máximos y mínimos)

$f´(x) = 3x^2 - 3;$ igualamos a 0 => $3x^2 - 3 = 0;$

$x = \pm 1;$ Habrá un máximo o mínimo en $x = \pm 1;$

Calculamos la segunda derivada en $x = \pm 1; f´´(x) = 6x; \begin{cases} para\ x = -1;\ f´´(x) = -6 < 0\ Máximo \\ Para\ x = 1;\ f´´(x) = 6 > 0\ Mínimo \end{cases}$

	$(-\infty,-1)$	(-1)	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
x	-2		-0,5	0	0,5		2
f´(x)	+	0	−	−	−	0	+
	creciente	máximo	decreciente	decreciente	decreciente	mínimo	creciente

b) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas $f(x)$ y $g(x) = x(x - 3)$

Comprobamos los puntos de corte de las dos gráficas:

$f(x) = x^3 - 3x = g(x) = x(x - 3);\ x^3 - 3x = x^2 - 3x;\ x^3 - x^2 = 0; x(x - 1)$

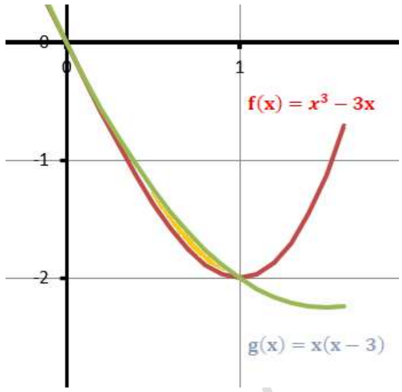
Puntos de corte $\begin{cases} x = 0; \\ x = 1; \end{cases}$

En el intervalo$(0,1)$ $g(x) > f(x) =>$

Area comprendida $= \int_0^1 (g(x) - f(x))dx = \text{Area} = \int_0^1 (x^2 - 3x) - (x^3 - 3x))dx$

$$\int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4}\right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4}\right) = \frac{1}{12}u^2;$$

$\text{Area} = \frac{1}{12}u^2$



7. **Ejercicio**

Dado un punto $P(5,-1,2)$ y las rectas $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y = 5; \\ x + z = 3; \end{cases}$

Se pide:

a) Estudiar la posicion relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas

b) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r;

Solución

a) Estudiar la posicion relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1};\ r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda + 2 \\ y = -\lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases};\ r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{Vd_r}(3,-1,1) \\ P_r(2,-1,0) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - y = 5; \\ x + z = 3; \end{cases} s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta - 5 \\ z = -\beta + 3 \end{cases} s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{Vd_s}(1,1,-1) \\ P_s(0,-5,3) \end{cases}$$

Dado que $\overrightarrow{Vd_r}(3,-1,1)$y $\overrightarrow{Vd_s}(1,1,-1)$ no son iguales ni proporcinales las rectas no son ni paralelas no coincidentes

Comprobamos si se cortan o se cruzan : Comprobamos si son coplanarias (están en el mismo plano)

Estudiamos el producto mixto de los vectores directores de r , s y un vector que una dos puntos de las recta r y s: $\overrightarrow{Vd_r}(3,-1,1)$, $\overrightarrow{Vd_s}(1,1,-1)$ y $\overrightarrow{Vd_{P_rP_s}}$;

$\overrightarrow{Vd_{P_rP_s}}$ $(P_s(0,-5,3) - P_r(2,-1,0) = (-2,-4,3)$; $\overrightarrow{Vd_{P_rP_s}}(-2,-4,3)$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 - 4 + 2 + 3 - 12 = -4;$$ al ser distinto de 0 implica que los vectores no son coplanarios por lo que podemos decir que las rectas se cruzan en el espacio.

<u>**Distancia entre las rectas r y s**</u>:

Para hallar la distancia entre dos recta que se cruzan en el espacio hago lo siguiente:

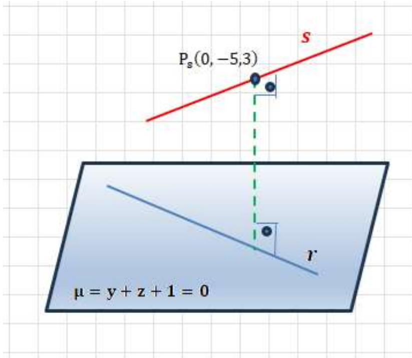
- **trazo un plano que contenga a una de las rectas y sea paralelo a la otra recta**
- **Dado que la recta s y el plano μ son paralelos, todos los puntos de la recta s están a la misma distancia del plano**

Para definir el plano μ necesitaría dos vectores de dirección y un punto

Distancia de un punto a un plano $D_{s\,a\,\mu} = \frac{|\,Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Como contiene a la recta r y es paralalo a s

$$\begin{cases} \overrightarrow{Vd_r}(3,-1,1) = (3,-1,1) = \overrightarrow{Vd_{\mu 1}}; \\ P_r(2,-1,0) \\ \overrightarrow{Vd_s}(1,1,-1)\ al\ ser\ paralelos\ \overrightarrow{Vd_{\mu 2}}; \end{cases}$$



El plano será $\begin{vmatrix} x-2 & y-(-1) & z-0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$x - 2 + y + 1 + 3z + z + 3y + 3 - x + 2$

$\mu = 4y + 4z + 4 = 0;$

$\mu = y + z + 1 = 0;$

Distancia de s a r será igual a la distancia de cualquier punto de la recta s por ejemplo $P_s(0,-5,3)$ al plano $\mu = y + z + 1 = 0;$

Distancia de un punto a un plano $D_{s\mu} = \dfrac{|\,By + Cz + 2|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}} = \dfrac{|\,1*(-5)+1*3+1|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}};$

$D_{s\mu} = \dfrac{|-5+3+1|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|-1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}};\ D_{s\,\mu} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r;

Si la recta t es perpendicular a r estará contenida en un plano que sea perpendicular a r;

El plano π perpendicular a r tendrá su vector normal = al vector director de la recta r

$\overrightarrow{Vn_\pi} = \overrightarrow{Vd_r}(3,-1,1)$ El plano pedido $Ax + By + Cz + D = 0;$ será $\pi: 3x - y + z + D = 0;$

$\pi: 3x - y + z + D = 0$ Si ha de contener a $P(5,-1,2)$ cumplirá $3*5-(-1)+1*2)+D = 0;$

$15 + 1 + 2 + D = 0; D = -18; \pi: 3x - y + z - 18 = 0;$

Hallamos el punto de intersección de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda + 2 \\ y = -\lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases}$ y el plano $\pi: 3x - y + z - 18 = 0$

$3(3\lambda+2) - (-\lambda-1) + \lambda - 18 = 0; 9\lambda + 6 + \lambda + 1 + \lambda - 18 = 0; 11\lambda = 11;\ \lambda = 1;$

Punto de intersección: $\begin{cases} x = 3*1+2 \\ y = -1-1 \\ z = 1 \end{cases};\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases} I(5,-2,1)$

$t \equiv \begin{cases} \overrightarrow{Vd_t} = I(5,-2,1) - P(5,-1,2) = (0,-1,-1) \\ P_t(5,-2,1) \end{cases};\ t \equiv \begin{cases} x = 0\beta + 5 \\ y = -\beta - 2 \\ z = \beta + 1 \end{cases} = \begin{cases} x = 5 \\ y = -\beta - 2 \\ z = \beta + 1 \end{cases}$

8. Ejercicio

Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternativamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quien friega. Friega quien menos acierte el centro de la diana. En el caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el 25% de sus lanzamientos y Benito el 30% . Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quien friega.

b) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos

Solución

A, probabilidad de que Antonio acierte en la diana y B, probabilidad de que Benito acierte en la diana

a) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quien friega.

La probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento implica que uno de los dos ha hecho plenos y el otro haya fallado los tres.

$P(\text{Antonio haya hecho tres plenos}) = 0{,}25^3 = 0{,}015625;$

$P(\text{Benito haya fallado los tres }) = 0{,}70^3 = 0{,}343;$

$P(\text{que Antonio no friege sen llegar al cuarto lanzamiento }) = 0{,}015625 * 0{,}343 = 0{,}005359$

$P(\text{Benito haya hecho tres plenos}) = 0{,}3^3 = 0{,}027;$

$P(\text{Atonio haya fallado los tres }) = 0{,}75^3 = 0{,}421875;$

$P(\text{que Benito no friege sen llegar al cuarto lanzamiento }) = 0{,}027 * 0{,}421875 = 0{,}01139$

$P(\text{saber quien friega antes de la cuarta tirada}) = 0{,}005359 + 0{,}01139 = 0{,}01675; 1{,}675\%$

b) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos

$n = 60$, q: probabilidad de fallos en el centro de la diana 0,75

$\mathbf{N(\mu, \sigma)}$; **(μ es la media y σ es la desviacion tipica)** $\begin{cases} \mu = n * p = 60 * 0{,}75 = 45 \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60 * 0{,}75 * 0{,}25} = 3{,}354 \end{cases} N(45, 3{,}354)$

Pasamos (μ es la media y σ es la desviacion tipica) ; en otra Z que siga una distribuccion $\mathbf{N(0,1)}$ aplicando la formula $\mathbf{Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}}$

Si pide probabilidad de Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos $= \dfrac{2}{3} * 60 = 40;$

$P(X \geq 40) \approx$ Corrección por continuidad $P(X \geq 39{,}5)$; $Z = \dfrac{39{,}5 - 45}{3{,}354} \approx -1{,}64$

$P(Z \geq -1{,}64) = P(Z \leq 1{,}64)$ Comprobamos en la tabla de distribuccion normal (0,1): $1{,}64 = 0{,}9495;$

$P(\text{Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60}) = 0{,}9495; 94{,}95\%$