Prueba de EBAU 2024-2025

Contenido

1 Examen 2024-2025 A

1. **Ejercicio**

Sea λ un número real y considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ se pide

a) Estudiar si existe algún valor de λ para el cual la matriz AB no tenga inversa

b) Estudiar el rango de la matriz BA en función del parámetro λ

c) Para $\lambda = 1$, discutir el sistema $A^t\mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ 2a \end{pmatrix}$ según valores de a

Solución

$$A_{2*3} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \text{ X } B_{3*2} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = AB_{2*2}\begin{pmatrix} \lambda+0+\lambda & \lambda^2-1-\lambda^2 \\ 0+0-1 & 0-\lambda+\lambda \end{pmatrix} = AB_{2*2}\begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{La matriz Inversa } \mathbf{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{A}|} * \ (\mathbf{A^*})^{\mathbf{t}} \ ;$$

$$|\mathbf{A}| = \textbf{Determinante de la matriz}; \quad (\mathbf{A^*})^{\mathbf{t}} = \textbf{Matriz transpuesta de la adjunta}$$

$$|AB_{2*2}| = \begin{vmatrix} 2\lambda & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \ ;$$

$\textit{Independientemente al valor que tome } \lambda\textit{, la matriz } AB_{2*2} \textit{ siempre tendrá inversa}$

b) Estudiar el rango de la matriz BA en función del parámetro λ

$$B_{3*2} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} X\, A_{2*3} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} = BA_{3*3}\begin{pmatrix} \lambda+0 & 1+\lambda^2 & \lambda-\lambda \\ 0 & 0-\lambda & 0+1 \\ \lambda & 1-\lambda^2 & \lambda+\lambda \end{pmatrix} = BA_{3*3}\begin{pmatrix} \lambda & 1+\lambda^2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{BA}_{3*3}\begin{pmatrix} \lambda & 1+\lambda^2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} \text{ por deteminantes } \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 1+\lambda^2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1-\lambda^2 & 2\lambda \end{vmatrix} = -2\lambda^3+\lambda+\lambda^3-\lambda+\lambda^3 = 0$$

El rango será ≤ 2; Busco un determinante de $2*2$ que sea distinto de 0 $\begin{vmatrix} \lambda & 1+\lambda^2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2$;

Para todo valor de λ el determinante es distinto de 0 => Rango matriz $\mathrm{BA}_{3*3} = 2$

c) Para $\lambda = 1$, discutir el sistema $A^t\mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ 2a \end{pmatrix}$ según valores de a

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^t\mathrm{A} = A^t = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} * \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & 1+\lambda^2 & \lambda-\lambda \\ \lambda^2 & \lambda-\lambda & \lambda^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & 1+\lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para } \lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & 1+\lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & \lambda^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t\mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ 2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2y \\ x+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ 2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = a^2 \\ x+2y = a^2 \\ x+2z = 2a \end{cases}$$

$$\text{Hallamos rango de la matriz de coeficientes } \begin{cases} \mathrm{x+y+z = a^2} \\ \mathrm{x+2y = a^2} \\ \mathrm{x+2z = 2a} \end{cases} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4-2-2 = 0; \textit{Rango matriz de coeficentes} = 2$$

Hallamos rango de la matriz ampliada $\begin{cases} x+y+z=a^2 \\ x+2y=a^2 \\ x+2z=2a \end{cases}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 2 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 2 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{vmatrix}$;

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 2 & 0 & a^2 \\ 0 & 2 & 2a \end{vmatrix} = 4a^2-2a^2-4a = 2a^2-4a = a(2a-4) = 0;\ Para \begin{cases} a=0 \\ a=2; \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 2 & 2a \end{vmatrix} = a^2+2a^2-2a^2-2a = a^2-2a = a(a-2) = 0\ para \begin{cases} a=0 \\ a=2; \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 2 & a^2 \\ 1 & 0 & 2a \end{vmatrix} = 4a+a^2-2a^2-2a = -a^2+2a = a(-a+2) = 0\ Para \begin{cases} a=0 \\ a=2; \end{cases}$

Para $a \neq 0$ y $a \neq 2$ el Rango matriz A = 2; el rango matriz A ampliada = 3; nº de incognitas = 3 =>

Sistema es incompatible; No tiene solución

Para $a = 0$ y $a = 2$ el Rango matriz A = 2; el rango matriz A ampliada = 2; nº de incognitas = 3 =>

Sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones;

2. **Ejercicio**

Se tienen garrafas de tres tamaños diferentes para llenar un aljibe . Con seis garrafas pequeñas y 2 litros se llenan exactamente una garrafa mediana y una grande. Con dos garrafas grandes llenamos dos medianas una pequeña y sobra un litro. El aljibe se llena al completo, bien con catorce garrafas pequeñas mas seis medianas, bien con cinco medianas junto con cinco grandes. Se pide hallar la capacidad de cada garrafa y la del aljibe

Solución

Garrafas			
	Pequeñas	Medianas	Grandes
Tipos	a	b	c
Capacidad	x=11L	y= 31 L	z=37 L

Datos del enunciado:

Con seis garrafas pequeñas y 2 litros se llenan exactamente una garrafa mediana y una grande

$6a * x + 2 = b * y + c * z$

Con dos garrafas grandes llenamos dos medianas una pequeña y sobra un litro

$2c * z = 2b * y + a * x + 1;$

El aljibe se llena al completo, bien con catorce garrafas pequeñas mas seis medianas,

$14a * x + 6b * y =$ capacidad del aljibe

, bien con cinco medianas junto con cinco grandes

$5b * y + 5c * z =$ capacidad del aljibe

$\begin{cases} 6 * x + 2 = y + z \\ 2z = 2y + x + 1 \\ 14 * x + 6y = 5y + 5z; \end{cases} \begin{cases} 6x - y - z = -2 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ 14x + y - 5z = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 6x - y - z = -2 & F_1 \\ x + 2y - 2z = -1 & F_2 = F_1 - 6F_2 \\ 14x + y - 5z = 0; & F_3 = 14F_1 - 6F_3 \end{cases} \begin{cases} 6x - y - z = -2 & F_1 \\ 0 - 13y + 11z = 4 & F_2 \\ 0 - 20y + 16z = -28; & F_3 = 20F_2 + 13F_3 \end{cases} \begin{cases} 6x - y - z = -2 \\ 0 - 13y + 11z = 4 \\ 0 + 0 + 12z = 444; \end{cases}$

$z = \frac{444}{12} = 37$ L las garrafas grandes;

Sustituimos $z = 37$ en $0 - 13y + 11z = 4 \Rightarrow -13y + 11 * 37 = 4;\ -13y = -403;$

$y = 31$ L las garrafas medianas;

Sustituimos en $6x - y - z = -2$; $6x - 31 - 37 = -2$; $x = \frac{66}{6} = 11$ L las garrafas pequeñas;

Capacidad del aljibe sustituimos en $14a * x + 6b * y$; $14 * 11 + 6 * 31 = 340$ L

Capacidad del aljibe $= 340$ L

3. **Ejercicio**

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & si\ x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de f(x) en R

b) Estudiar los extremos relativos de la función en el intervalo (1,3)

c) Estudiar el área encerrada por la función y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$;

Solución

a) Estudiar la continuidad de f(x) en R

Comprobamos si es continua en $x = 2$;

$f(x) = \sqrt{5x-1}$; $f(2) = \sqrt{5 * 2 - 1} = \pm 3$

Hallo limites por la derecha e izquierda de $x = 2$;

$\lim_{x \to 2^-} (x^2 - 6x + 11) = 2^2 - 6 * 2 + 11 = 4 - 12 + 11 = 3$;

$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{5x-1} = \sqrt{5 * 2 - 1} = 3$;

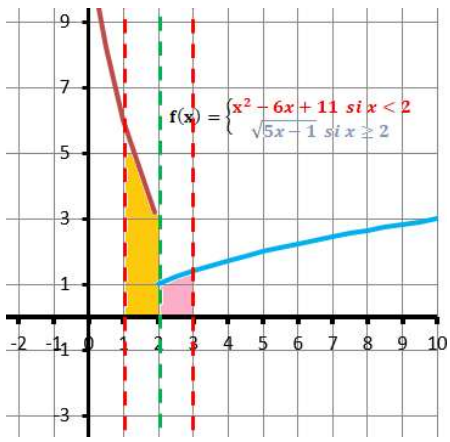
Dado que $\lim_{x \to 2^-} (x^2 - 6x + 11) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{5x-1} = f(2) = 3$; la función es continua en $x = 2$;

La función es continua en R

b) Estudiar los extremos relativos de la función en el intervalo (1,3)

Comprobamos derivabilidad

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & si\ x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & si\ x \geq 2 \end{cases}$ $f'(x) \begin{cases} 2x - 6 & si\ x < 2 \\ \frac{5}{2} * \frac{1}{\sqrt{5x-1}} & si\ x \geq 2 \end{cases}$



Hallo límites por la derecha e izquierda de $x = 2$;

$\lim_{x \to 2^-} (2x - 6) = 4 - 6 = -2$

$\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{5}{2} * \frac{1}{\sqrt{5x-1}}\right) = \frac{5}{2} * \frac{1}{\sqrt{5 * 2 - 1}} = \frac{5}{2} * \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$;

Dado que $\lim_{x \to 2^-} (2x - 6) \neq \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{5}{2} * \frac{1}{\sqrt{5x-1}}\right)$; la función no es derivable en $x = 2$;

Estudiamos en el punto crítico $x = 2$ del intervalo (1,3).

Dado que la derivada de $f'(1,2)$ es -3(negativo) y la derivada $f'(2,3)$ es positiva implica que en $x = 2$ habrá un extremo relativo (un mínimo)

b) Estudiar el área encerrada por la función y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$;

Calculamos el área (1,2) $f(x) = x^2 - 6x + 11$ *y entre* (2,3) $f(x) = \sqrt{5x-1}$

$$Area = \int_1^2 (x^2 - 6x + 11)dx + \int_2^3 (\sqrt{5x-1})dx;$$

$$Area(1,2) = \int_1^2 (x^2 - 6x + 11)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 11x\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{6 * 2^2}{2} + 11 * 2 - (\frac{1^3}{3} - \frac{6 * 1^2}{2} + 11 * 1)$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{24}{2}+22-\left(\frac{1}{3}-\frac{6}{2}+11\right)=\frac{76}{6}-\frac{50}{6}=\frac{26}{6}\text{u}^2$$

$$Aréa(2,3)\int_2^3\left(\sqrt{5x-1}\right)dx=\left[\frac{(5x-1)^{\frac{3}{2}}}{5*\frac{3}{2}}\right]_2^3=\left[\frac{2(5x-1)^{\frac{3}{2}}}{15}\right]_2^3=\frac{2(5*3-1)^{\frac{3}{2}}}{15}-\frac{2(5*2-1)^{\frac{3}{2}}}{15}=$$

$$\frac{2(14)^{\frac{3}{2}}}{15}-\frac{2(9)^{\frac{3}{2}}}{15}=\frac{2}{15}((14)^{\frac{3}{2}}-(9)^{\frac{3}{2}})=\frac{2}{15}((14)^{\frac{3}{2}}-27)\text{u}^2$$

$$Area\ (1,3)=\frac{26}{6}\text{u}^2+\frac{2}{15}((14)^{\frac{3}{2}}-27)\text{u}^2$$

4. **Ejercicio**

Dada la función $f(x)=\left(\text{sen}\frac{\pi}{2}x\right)$ se pide:

a) Estudiar la paridad de la función $g(x)=f(f(x))$

b)Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x}\right)$

c)Calcular $\int_0^1\left(x\,f(x)\right)dx$

Solución

a) Estudiar la paridad de la función $g(x)=f(f(x))$

Simetría Impar: Una función presenta simetría impar si $-f(x)=f(-x)$.

La funcion es simetrica respecto al origen

La funcion $f(x)=\left(\text{sen}\frac{\pi}{2}x\right)$ presenta paridad impar pues $\text{sen}\,(-\alpha)=-\text{sen}\,\alpha$

$-g(x)=g(-x)$

$g(x)\ =f(f(x)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}*\text{sen}\frac{\pi}{2}x\right);$

$g(-x)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}*\text{sen}\frac{\pi}{2}(-x)\right)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}*\text{sen}(-\frac{\pi}{2}x\right);$

Dado que $\text{sen}\,(-\alpha)=-\text{sen}\,\alpha;$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}*sen(-\frac{\pi}{2}x\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}*-sen(\frac{\pi}{2}x\right)=sen\left(-\frac{\pi}{2}*sen(\frac{\pi}{2}x\right)=\ -sen\ \left(\frac{\pi}{2}*sen(\frac{\pi}{2}x\right)\ ;$$

$-g(x)=g(-x);\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}*\text{sen}(-\frac{\pi}{2}x\right)=\ -\text{sen}\ \left(\frac{\pi}{2}*\text{sen}(\frac{\pi}{2}x\right)$ paridad impar

b) Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+3\text{sen}\frac{\pi}{2}x}-2}{x}\right)=\frac{\sqrt{4+3\text{sen}\frac{\pi}{2}*0}-2}{0}=\frac{\sqrt{4+0}-2}{0}=\frac{2-2}{0}=\frac{0}{0}\ indeterminado$$

Multiplicamos L´Hopital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+3\text{sen}\frac{\pi}{2}x}-2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}*3(\cos\frac{\pi}{2}x)\ \frac{\pi}{2}}{1*\sqrt{4+3\text{sen}\frac{\pi}{2}x}}=\frac{3(\cos\frac{\pi}{2}*0)\ \frac{\pi}{2}}{2*\sqrt{4+3\text{sen}\frac{\pi}{2}*0x}}=\frac{3(\cos 0)\ \frac{\pi}{2}}{2*\sqrt{4+3\text{sen}0}}$$

$$=\frac{3(1)\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{4+3*0}}=\frac{\frac{3\pi}{2}}{2\sqrt{4}}=\frac{3\pi}{8}\ ;\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x}\right)=\frac{3\pi}{8}$$

c) Calcular $\int_0^1 (x\, f(x))\mathrm{dx} = \int_0^1 \left(x * sen\frac{\pi}{2}\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}$ *Utilizamos la integración por partes*

(*ILATE*) **Aplicamos la formula** $\int \boldsymbol{u\, dv} = \boldsymbol{u\, v} - \int \boldsymbol{vdu}$

$$=> \int_0^1 \left(x * sen\frac{\pi}{2}\mathrm{x}\right)\mathrm{dx} \begin{cases} x = u; \quad dx = du \\ sen\ \left(\frac{\pi}{2}\mathrm{x}\right)\mathrm{dx} = dv; \ \frac{-2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{x} = v \end{cases}$$

$$\int_0^1 \left(\mathrm{x} * \mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\mathrm{x}\right)\mathrm{dx} = \mathrm{x}\frac{-2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{x} - \int \frac{-2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{x}\,\mathrm{dx} = \mathrm{x}\frac{-2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{x} - \frac{-2}{\pi}\big(\frac{2}{\pi}\left(-sen\ \frac{\pi}{2}\mathrm{x}\right) =$$

$$\frac{-2\mathrm{x}}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{x} + \frac{4}{\pi\pi}\left(-sen\ \frac{\pi}{2}\mathrm{x}\right) = \frac{-2\mathrm{x}}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{x} - \frac{4}{\pi^2}\left(\mathrm{sen}\ \frac{\pi}{2}\mathrm{x}\right)$$

$$\int_0^1 \left(\mathrm{x} * \mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\mathrm{x}\right)\mathrm{dx} = \left[\frac{-2\mathrm{x}}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{x} - \frac{4}{\pi^2}\left(\mathrm{sen}\ \frac{\pi}{2}\mathrm{x}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{-2*1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}*1 - \frac{4}{\pi^2}\left(\mathrm{sen}\ \frac{\pi}{2}*1\right) - \frac{-2*0}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}*0 - \frac{4}{\pi^2}\left(\mathrm{sen}\ \frac{\pi}{2}*0\right)$$

$$= \frac{-2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\mathrm{sen}\ \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2}(\mathrm{sen}\ 0) = \frac{-2}{\pi}*0 - \frac{4}{\pi^2}(1) = \frac{4}{\pi^2}$$

$$\int_0^1 \left(x * sen\frac{\pi}{2}\mathrm{x}\right)\mathrm{dx} = \frac{4}{\pi^2}\mathrm{u}^2$$

5. **Ejercicio**

Sean los puntos A(0,0,0)y B(1,1,1) y la recta $\mathrm{r} \equiv (\mathrm{x,y,z}) = (\lambda,\lambda,\lambda+1), \lambda \in \mathrm{R}$;

a) Halle una ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son siméricos

b) Halle una ecuación del plano que contiene a r y pasa por B

c) Halle una ecuación de una recta que sea paralela a r y pase por A

Solución

a) Halle una ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son siméricos

Si los puntos A y B son simetricos estarán contenidos en la recta que pase por ellos

$$s\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{V_r}} = \mathrm{B}(1,1,1) - \mathrm{A}(0,0,0) = (1,1,1) \\ \mathrm{P}(0,0,0) \end{cases} s{:}\begin{cases} x = 1\lambda + 0 \\ y = 1\lambda + 0 \\ z = 1\lambda + 02 \end{cases}; r{:}\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Hallamos un punto perpendicular a la recta s y que contenga el punto medio de AB

$$C = \frac{\mathrm{B}(1,1,1) - \mathrm{A}(0,0,0)}{2} = C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

El plano pedido $\mathrm{Ax + By + Cz + D} = 0$; tendrá $\overrightarrow{\mathrm{V_n}} = \overrightarrow{\mathrm{V_r}}(1,1,1)$y contendra el punto $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;

$1\mathrm{x} + 1\mathrm{y} + 1\mathrm{z} + \mathrm{D} = 0; \mathrm{x+y+z+D} = 0$ al contener a $\mathrm{C}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ sustituimos $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+D = 0$;

$D = -\frac{3}{2}$; El plano pedido srá $\mathrm{x+y+z} - \frac{3}{2} = 0$

b) Halle una ecuación del plano que contiene a r y pasa por B;

$$\mathrm{r} \equiv (\mathrm{x,y,z}) = (\lambda,\lambda,\lambda+1), \lambda \in \mathrm{r}; \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda + 1 \end{cases} \mathrm{r}\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{V_r}} = (1,1,1) \\ \mathrm{P}(0,0,1) \end{cases};$$

Si el plano contiene a r tendrá su vector director $\overrightarrow{\mathrm{V}_{\pi_1}}(1,1,1)$ y contendrá a cualquier punto de la recta P(0,0,1) *y otro será* B(1,1,1) . *El vector BP será vector director del plano* $\overrightarrow{\mathrm{BP}_{\pi_2}}$ (B(1,1,1) − P(0,0,1)

$\overrightarrow{BP_{\pi_2}}(1,1,0)$; *plano pedido* $\begin{cases} \overrightarrow{V_{\pi_1}}(1,1,1) \\ \overrightarrow{BP_{\pi_2}}(1,1,0) \\ B(1,1,1) \end{cases}$ $=>$ $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x-1+z-1-z+1-y+1$

Plano pedido $= x - y = 0; x = y;$

c) Halle una ecuación de una recta que sea paralela a r y pase por A

Si la recta pedida t es paralela a r tendrá su mismo vector director $\overrightarrow{V_t} = \overrightarrow{V_r} = B(1,1,1)$

y pasará por A(0,0,0); $t\begin{cases} \overrightarrow{V_t} = (1,1,1) \\ P(0,0,0) \end{cases}$; $t\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda; \\ z = \lambda; \end{cases}$

6. **Ejercicio**

Sean los planos $\pi_1: -2x - 2y + z = 0$; $\pi_2: -2x + y - 2z = 0$; $\pi_3: x - 2y - 2z = 0$; se pide:

a) Determinar el ángulo que forman los planos dos a dos . Determinar la intersección de los tres planos

b) Determinar el punto P en el espacio del que se sabe que su proyeccion ortogonal sobre

$\pi_1: -2x - 2y + z = 0$, es el punto $Q_1\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$ y su proyección sobre $\pi_2: -2x + y - 2z = 0$ es

$Q_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Determinar la proyección ortogonal Q_3 de P sobre $\pi_3: x - 2y - 2z = 0$

Solución

a) Determinar el ángulo que forman los planos dos a dos . Determinar la intersección de los tres planos

$\begin{cases} \pi_1: -2x - 2y + z = 0;\ \overrightarrow{Vn_{\pi_1}}(-2,-2,1) \\ \pi_2: -2x + y - 2z = 0;\ \overrightarrow{Vn_{\pi_2}}(-2,1,-2) \\ \pi_3: x - 2y - 2z = 0; \overrightarrow{Vn_{\pi_3}}(1,-2,-2) \end{cases}$ Dado que $\overrightarrow{Vn_{\pi_1}} \neq \overrightarrow{Vn_{\pi_2}} \neq \overrightarrow{Vn_{\pi_3}}$ *los planos no son paralelos*

$$\text{Cos}\ (\overrightarrow{Vn_{\pi_1}}, \overrightarrow{Vn_{\pi_2}}) = \frac{|\overrightarrow{Vn_{\pi_1}} * \overrightarrow{Vn_{\pi_2}}|}{|\overrightarrow{Vn_{\pi_1}}| * |\overrightarrow{Vn_{\pi_2}}|} = \frac{|(-2)*(-2) + (-2)*1 + 1*(-2)|}{\left|\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2}\right| * \left|\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}\right|}$$

$$= \frac{|4-2-2|}{|\sqrt{9}| * |\sqrt{9}|} = \frac{0}{9} = 0;\ \text{Cos}\ (\overrightarrow{Vn_{\pi_1}}, \overrightarrow{Vn_{\pi_2}}) = 0; \text{angulo que forman los planos } 90º$$

$$\text{Cos}\ (\overrightarrow{Vn_{\pi_3}}, \overrightarrow{Vn_{\pi_2}}) = \frac{|\overrightarrow{Vn_{\pi_3}} * \overrightarrow{Vn_{\pi_2}}|}{|\overrightarrow{Vn_{\pi_3}}| * |\overrightarrow{Vn_{\pi_2}}|} = \frac{|1*(-2) + (-2)*1 + (-2)*(-2)|}{\left|\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2}\right| * \left|\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}\right|} =$$

$$\frac{|-2-2+4|}{|\sqrt{9}| * |\sqrt{9}|} = \frac{0}{9}; \text{Cos}\ (\overrightarrow{Vn_{\pi_3}}, \overrightarrow{Vn_{\pi_2}}) = 0; \text{angulo que forman los planos } 90º$$

$$\text{Cos}\ (\overrightarrow{Vn_{\pi_1}}, \overrightarrow{Vn_{\pi_3}}) = \frac{|\overrightarrow{Vn_{\pi_1}} * \overrightarrow{Vn_{\pi_3}}|}{|\overrightarrow{Vn_{\pi_1}}| * |\overrightarrow{Vn_{\pi_3}}|} = \frac{|(-2)*1 + (-2)*(-2) + 1*(-2)|}{\left|\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2}\right| * \left|\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2}\right|}$$

$$= \frac{|-2+4-2|}{|\sqrt{9}| * |\sqrt{9}|} = \frac{0}{9} = 0;\ \text{Cos}\ (\overrightarrow{Vn_{\pi_1}}, \overrightarrow{Vn_{\pi_3}}) = 0; \text{angulo que forman los planos } 90º$$

Determinar la intersección de los tres planos

$\begin{cases} \pi_1: -2x - 2y + z = 0; \\ \pi_2: -2x + y - 2z = 0; \\ \pi_3: x - 2y - 2z = 0; \end{cases}$ Hallamos rango de la matriz de coeficientes ;

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 4 - 1 + 8 + 8 = 27\ Rango\ 3$$

El sistema es compatible determinado, con una única solución

La única solución que cumple el sistema es (0,0,0) se cortan en el origen

b) Determinar el punto P en el espacio del que se sabe que su proyeccion ortogonal sobre $\pi_1: -2x - 2y + z = 0$, es el punto $Q_1\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$ y su proyección sobre $\pi_2: -2x + y - 2z = 0$ es $Q_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Determinar la proyección ortogonal Q_3 de P sobre $\pi_3: x - 2y - 2z = 0$

El punto P pedido (x, y, z) estará en una recta perpendicular a

$\pi_1: -2x - 2y + z = 0$, y que pase por $Q_1\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$

$$La\ recta\ pedida\ será:;\ t\begin{cases} \overrightarrow{V_t} = (-2, -2, 1) \\ Q_1\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right) \end{cases};\ t\begin{cases} x = -2\lambda + \frac{1}{3}; \\ y = -2\lambda + \frac{4}{3}; \\ z = \lambda + \frac{10}{3}; \end{cases}$$

$\pi_2: -2x + y - 2z = 0$, y que pase por $Q_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$

$$La\ recta\ pedida\ será:\ s\begin{cases} \overrightarrow{V_t} = (-2, 1, -2) \\ Q_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) \end{cases};\ t\begin{cases} x = -2\beta - \frac{1}{3}; \\ y = \beta + \frac{8}{3}; \\ z = -2\beta + \frac{5}{3}; \end{cases}$$

P es un punto común a las dos retas $-2\beta - \frac{1}{3} = -2\lambda + \frac{1}{3};\ 2\beta + \frac{1}{3} = 2\lambda - \frac{1}{3};\ 2\beta = 2\lambda - \frac{2}{3};\ \beta = \lambda - \frac{1}{3}$

Sustituimos $\beta = \lambda - \frac{1}{3}; en\ \beta + \frac{8}{3} = -2\lambda + \frac{4}{3} => \lambda - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = -2\lambda + \frac{4}{3};\ 3\lambda = -1;\ \lambda = -\frac{1}{3}$

$$P = \begin{cases} x = -2\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}; \\ y = -2\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3}; \\ z = \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{10}{3}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{3}{3}; \\ y = \frac{6}{3}; \\ z = \frac{9}{3}; \end{cases} P = \begin{cases} x = 1; \\ y = 2; \\ z = 3; \end{cases} P(1,2,3)$$

Determinar la proyección ortogonal Q_3 de P sobre $\pi_3: x - 2y - 2z = 0$

Para hallar la proyeccion ortogonal hallo la recta pependicular a $\pi_3: x - 2y - 2z = 0$

y que pase por $P(1,2,3)$; $m\begin{cases} \overrightarrow{V_t} = (1, -2, -2) \\ P(1,2,3) \end{cases}; m\begin{cases} x = \beta + 1; \\ y = -2\beta + 2; \\ z = -2\beta + 3; \end{cases}$

El punto Q_3 sera el de interseccion de la recta m y el plano $\pi_3: x - 2y - 2z = 0$;

$(\beta + 1) - 2(-2\beta + 2) - 2(-2\beta + 3) = 0; \beta + 1 + 4\beta - 4 + 4\beta - 6 = 0;\ 9\beta = 9;\ \beta = \frac{9}{9} = 1$

sustituyo $\beta = 1$ en la recta $m\begin{cases} x = \beta + 1; \\ y = -2\beta + 2; \\ z = -2\beta + 3; \end{cases} => \begin{cases} x = 1 + 1; \\ y = -2 * 1 + 2; \\ z = -2 * 1 + 3; \end{cases} Q_3\begin{cases} x = 2 \\ y = 0; \\ z = 1; \end{cases} Q_3(2,0,1)$

7. Ejercicio

Segun los datos de la comunidad de Madrid, en la temporada $2021-2022$ la cobertura de la vacuna de la gripe entre mayores de 65 años fue de un 73,2%

a) Ante una situacion de brote epidemico, las autoridades deciden restringir aquellas reuniones en las que la probabilidad de que haya más de una persona no vacunada sea mayor de 0,5

Suponiendo que los asistentes a una reunion supone una muestra aleatoria, ¿ Se deberia restringir las reuniones de 7 personas mayores de 65 años?

Determinar el angulo que forman los planos dos a dos

b) Se toma una muestra aleatoria de 500 personas mayores de 65 años. Calcule, aproximadamente por la distribucción normal adecuada, la probabilidad de que al menos 350 de ellos esten vacunados contra la gripe

Solución

a) En una muestra n ; $\begin{cases} \text{q probabilidad de estar vacunado } 0{,}732 \\ \text{p probabidad de no estar vacunado } 1-0{,}732=0{,}268 \end{cases}$

Una reunión de 5 personas debe restringirse si P(X>1)=0,5

$$P(X>1)=1-P(X=0)-(P(X=1)=1-\binom{7}{0}0{,}732^{7}*0{,}268^{0}+\binom{7}{1}0{,}732^{7}*0{,}268^{1}\;;$$

$$P(X>1)=1-\frac{7¡}{0¡\,(7-0)¡}\,0{,}732^{7}*0{,}268^{0}-\frac{7¡}{1¡\,(7-1)¡}0{,}732^{6}*0{,}268^{1};$$

$$P(X>1)=1-1*0{,}1126*1-7*0{,}1538*0{,}268=1-0{,}1126-0{,}2885=0{,}59887$$

Dado que $0{,}59887>0{,}5$ se debe restringir la reunion

b) Se toma una muestra aleatoria de 500 personas mayores de 65 años. Calcule, aproximadamente por la distribuccion normal adecuada, la probabilidad de que al menos 350 de ellos esten vacunados contra la gripe

$n=500$, q: probabilidad de que no esten vacunadas $=0{,}268$;

N(μ, σ); (μ es la media y σ es la desviacion tipica) $\begin{cases} \mu=n*p=500*0{,}268=134 \\ \sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{500*0{,}268*0{,}732}=9{,}9039 \end{cases} N(134{,}9{,}9039)$

Pasamos (μ es la media y σ es la desviacion tipica) ; en otra Z que siga una distribuccion N(0,1)

aplicando la formula $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$

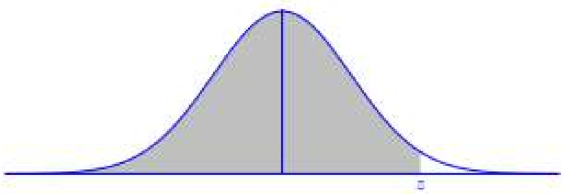
Si pide que al menos 350 esten vacunadas => $500-350=150;\ X=150$

$$P(X\le 150)\approx P(X\le 150{,}5);\ Z=\frac{150{,}5-134}{9{,}9039}\approx 1{,}666=1{,}67$$

Comprobamos en la tabla de distribuccion normal (0,1);

La probabilidad de que al menos 350 de ellos esten vacunado contra la gripe = 0,9525

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

2 Examen 2024-2025 B

1. **Ejercicio**

En el baloncesto existen canasta que valen un punto, otras que valen 2 y otras que valen 3. Calcule el número de lanzamientos de uno, dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con aciertos del 80% en tiros de uno, 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamiento
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades del resto de lazamientos

Solución

Datos del enunciado:

x lanzamientos de 1 punto; y lanzamientos de 2 puntos y z lanzamientos de 3 puntos

$$\begin{cases} 0{,}8\,x * 1 + 0{,}5\,y * 2 + 0{,}4\,z * 3 = 80 \text{ puntos} \\ \frac{1}{3}\,y = \frac{1}{5}(x+z) \\ 2z + 5 = x + y \end{cases} \begin{cases} 0{,}8\,x + 1{,}0\,y + 1{,}2\,z = 80 \\ 5\,y = 3(x+z) \\ 2z + 5 = x + y \end{cases} \begin{cases} 0{,}8\,x + \ y + 1{,}2\,z = 80 \\ 3x + 3z - 5y = 0 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

Para no trabajar con decimales multiplico la prímera por 5 $=> \begin{cases} 4\,x + \ 5y + 6\,z = 400 \\ 3x + 3z - 5y = 0 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4\,x + \ 5y + 6\,z = 400 \\ 3x - 5y + 3z \ = 0 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 = 3F_1 - 4F_2 \\ F_3 = F_1 - 4F_3 \end{matrix} \begin{cases} 4\,x + \ 5y + 6\,z = 400 \\ 0 + 35y + 6z = 1200 \\ 0 + y + 14z = 380 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 = F_2 - 35F_3 \end{matrix} \begin{cases} 4\,x + \ 5y + 6\,z = 400 \\ 0 + 35y + 6z = 1200 \\ 0 + 0 - 484z = -12100 \end{cases} z = \frac{12100}{484} = 25;\ F_2: 0 + 35y + 6 * 25 = 1200; y = 30$$

Sutitumos en F_1: $4\,x + \ 5 * 30 + 6 * 25 = 400; x = 25;$

Canastas lanzadas $\begin{cases} x = 25; \\ y = 30 \\ z = 25 \end{cases}$

2. **Ejercicio**

Sea la matriz A $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) Calcular el polinómio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ y halla las raices reales del polinómio

b) Para $\lambda = 5$, calcula un vector no nulo $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$;

Solución

a) Calcular el polinómio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ y halla las raices reales del polinómio

$$\lambda I = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|(A - \lambda I)| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) * (3-\lambda) * (2-\lambda) - 4 + 2\lambda = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$$

$-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20=0;$ Para halar las raices probamos con los divisores de 20

$\lambda=2;=>\ -2^3+9*2^2-24*2+20=0;\ -8+36-48+20=0$ una raiz será $\lambda=2$

Dividimos por ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & +9 & -24 & +20 \\ 2 & & -2 & 14 & -20 \\ \hline & -1 & +7 & -10 & 0 \end{array} => -\lambda^2+7\lambda-10=0;$$

$$-\lambda^2+7\lambda-10=0;\lambda=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4(-1)(-10)}}{2(-1)}=\frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{-2}=\frac{-7\pm3}{-2};\begin{cases}\lambda=5\\ \lambda=2\end{cases}$$

Las raices del polinimio son: $\lambda=2;\lambda=2;\lambda=5$

b) Para $\lambda=5$, calcula un vector no nulo $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A-\lambda I)\vec{v}=0;$

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}4-\lambda & 1 & 0\\ 2 & 3-\lambda & 0\\ 3 & 2 & 2-\lambda\end{pmatrix} Para\ \lambda=5;\begin{pmatrix}4-5 & 1 & 0\\ 2 & 3-5 & 0\\ 3 & 2 & 2-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

$$(A-5I)\vec{v}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0;\begin{pmatrix}-x+y\\2x-2y\\3x+2y-3z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$$

$\begin{cases}-x+y=0\\2x-2y=0\\3x+2y-3z=0\end{cases}$ Comprobamos el rango de la matriz de coeficientes $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & 2 & -3\end{vmatrix}=-6+6=0; Rango\ 2;$$

$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$ El rango de la matriz ampliada es 2

Sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones $\begin{cases}-x+y=0\\2x-2y=0\\3x+2y-3z=0\end{cases}$

Para $x=\lambda;y=\lambda;z=\frac{5\lambda}{3}=>\vec{v}\left(\lambda,\lambda,\frac{5\lambda}{3}\right);$ *un vector podría ser* $(1,1,\frac{5}{3})$

3. Ejercicio

Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con ayuda de unos grafiteros La dimensión del muro es de 3m de alto y 12 m de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas , se va a utilizar la curva $f(x)=\cos\frac{\pi x}{9}+2$ para diferencias dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se puede pintar 3 m cuadrados de supeficie.

a) Halle el valor máximo y en valor mínimo de la función f(x)en el intervalo [0,12]. ¿ Esta la curva en este intervalo [0,12] contenida completamente en el muro?

b) Halle el área que hay que pintar de cada color

c) ¿ Cuantos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva f(x)

Solución

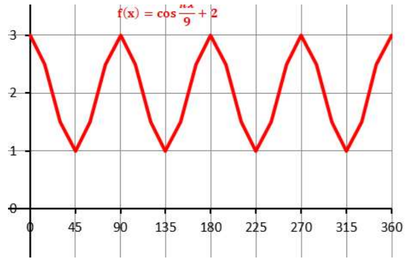
a) Halle el valor máximo y en valor mínimo de la función f(x)en el intervalo [0,12]. ¿ Esta la curva en este intervalo [0,12] contenida completamente en el muro?

$f(x) = \cos\frac{\pi x}{9} + 2$; dado que los valores maximos y mínimos del coseno son $-1 + 1$.

Los valores máximos y mínimos de la función

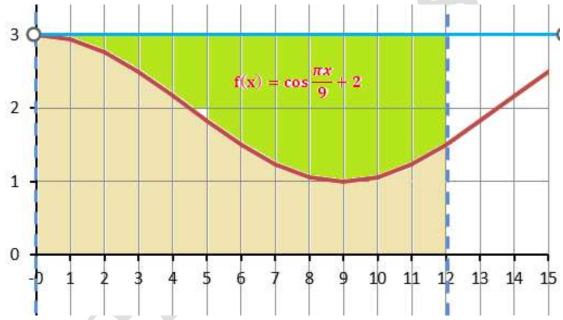
$$f(x) = \cos\frac{\pi x}{9} + 2 \text{ son } \begin{cases} -1 + 2 = 1 \\ 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

Puesto que la altura del muro es de 3 m la funcion está contenida en el muro



b) Halle el area que hay que pintar de cada color

El área marrón contenida entre la curva y el eje OX en el intervalo (0,12) será



$$\int_0^{12} \left(\cos\frac{\pi x}{9} + 2\right) dx$$

$$= \int_0^{12} \left(\cos\frac{\pi x}{9}\right) dx + \int_0^{12} 2\, dx$$

$$= \left[\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{9} + 2x\right]_0^{12}$$

$$= \frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\frac{\pi 12}{9} + 2 * 12 - \frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\frac{\pi 0}{9} + 2 * 0$$

dado que $\frac{\pi 12}{9} =$ 4,18879 radianes = 240 grados (está en el cuarto cuadrante)

$$= \frac{9}{\pi} \operatorname{sen} 240º + 2 * 12 - 0 = \frac{9}{\pi}(-0{,}866) + 24 = -2{,}48098 + 24 = 21{,}519\ u^2$$

El área de la zona marron $= 21{,}519\ m^2$

El área del muro a pintar $= 12 * 3 = 36\ m^2$

El área de la zona verde $= 36 - 21{,}519 = 14{,}48\ m^2$

c) ¿ Cuantos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva f(x).

$$\text{Botes de spray} = \frac{21{,}519\ m^2 \text{area a pintar}}{\text{Se pintan } 3\ m^2 \text{por bore de spray}} = 7{,}173 \text{ botes};\ 8 \text{ botes}$$

4. Ejercicio

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi: x + 2y - 3z = 1$, se pide:

a) Hallar una ecuación del plano que contenga a r y es perpendicular al plano π

b) Hallar una ecuación de la recta contenida en el plano π y que corta perpendicular a r

c) Calcula los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$

Solución

a) Hallar una ecuación del plano que contenga a r y es perpendicular al plano π

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1};\ r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 0 \\ z = \lambda + 2 \end{cases} \quad r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{V_r} = (2,0,1) \\ P(1,0,2) \end{cases}$$

El vector normal del plano $\pi: x + 2y - 3z = 1$ y el del plano pedido μ serán perpenediculares

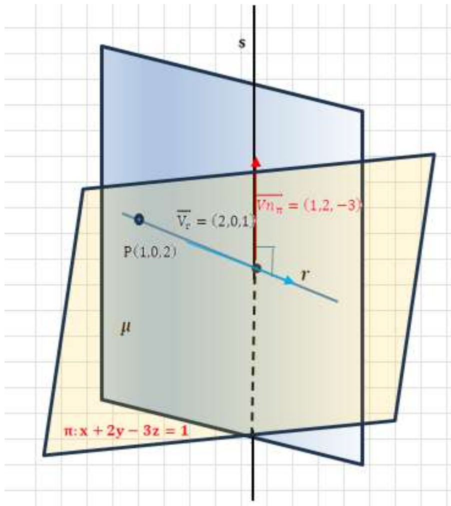
$\pi: x + 2y - 3z = 1;\ \overrightarrow{Vn_\pi} = (1,2,-3)$

μ: si contine a $r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{V_r} = (2,0,1) \\ P(1,0,2) \end{cases}$ contendrá el punto P(1,0,2) y un vector director $\overrightarrow{V_{\mu 1}} = \overrightarrow{V_r} = (2,0,1)$

Por otro lado como es perpendicular a $\pi: \mathrm{x} + 2\mathrm{y} - 3\mathrm{z} = 1$;

un vector director sera el vector normal de π

$\overrightarrow{Vn_\pi} = (1,2,-3) => \overrightarrow{V_{\mu 2}} = \overrightarrow{Vn_\pi} = (1,2,-3)$;



El plano pedido será $\equiv \begin{cases} \overrightarrow{V_{\mu 1}} = \overrightarrow{\mathrm{V_r}} = (2,0,1) \\ \overrightarrow{V_{\mu 2}} = \overrightarrow{Vn_\pi} = (1,2,-3) \\ \mathrm{P}(1,0,2) \end{cases}$

$$\mu = \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2 - 6y - y - 4z + 8$$

$= 2x - 7y - 4z + 6 = 0$; $\mu = 2x - 7y - 4z + 6 = 0$

b) Hallar una ecuación de la recta contenida en el plano π y que corta perpendicular a r

Hallamos el punto de intersección de la recta $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 0 \\ z = \lambda + 2 \end{cases}$ $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{V_r}} = (2,0,1) \\ \mathrm{P}(1,0,2) \end{cases}$ con el plano

$\pi: \mathrm{x} + 2\mathrm{y} - 3\mathrm{z} = 1$. Sustituimos las variables $=> (2\lambda + 1) + 2 * 0 - 3(\lambda + 2) = 1; 2\lambda + 1 - 3\lambda - 6 = 1$;

$\lambda = -6$; Punto de intersección $\begin{cases} x = 2 * (-6) + 1 \\ y = 0 \\ z = (-6) + 2 \end{cases}$ $Q \begin{cases} x = -11 \\ y = 0 \\ z = -4 \end{cases}$ $Q(-11,0,-4)$

La recta t pedida pasará por el punto $\mathrm{Q}(-11,0,-4)$ será perpendicular a r; $\overrightarrow{\mathrm{V_r}} = (2,0,1)$

al estar contenida en el plano $\pi: \mathrm{x} + 2\mathrm{y} - 3\mathrm{z} = 1$ será perpendicular al vector normal

del plano $\pi, \overrightarrow{Vn_\pi}\,(1,2,-3)$.

El vector director de la recta t es igual al producto vectorial $(\overrightarrow{\mathrm{V_r}} = (2,0,1) \mathrm{x}\, \overrightarrow{Vn_\pi}\,(1,2,-3)$;

$$\overrightarrow{\mathrm{V_t}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathrm{i} - 6\mathrm{j} - 4\mathrm{k} - \mathrm{j} = 2\mathrm{i} - 7\mathrm{j} - 4\mathrm{k};\ \overrightarrow{\mathrm{V_t}}\,(2,-7,-4)$$

$$\mathrm{t} \equiv \begin{cases} x = 2\lambda - 11 \\ y = -7\lambda \\ z = -4\lambda - 4 \end{cases}$$

c) Calcula los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$

$$\boldsymbol{Distancia\ de\ (P\ \ a\ \lambda\,)} = \frac{|\boldsymbol{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}|}{\sqrt{\boldsymbol{A^2 + B^2 + C^2}}};$$

$$Distancia\ (P\ \ a\ \lambda\,) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$;\pi: \mathrm{x} + 2\mathrm{y} - 3\mathrm{z} = 1; \mathrm{r} \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 0 \\ z = \lambda + 2 \end{cases}$

$$\text{Distancia (P a}\,\lambda\,) = \frac{|1(2\lambda + 1) + 2(0) - 3(\lambda + 2) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2\lambda + 1 + 0 - 3\lambda - 6 - 1|}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{|-\lambda - 6|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}; \begin{cases} (-\lambda - 6) = 14;\ \lambda = -20; \\ -(-\lambda - 6) = 14;\ \lambda + 6 = 14;\ \lambda = 8; \end{cases}; \text{ Solución } \begin{cases} \lambda = -20; \\ \lambda = 8; \end{cases}$$

Puntos pedidos para $\lambda = -20; \begin{cases} \mathrm{x} = 2\lambda + 1 \\ \mathrm{y} = 0 \\ \mathrm{z} = \lambda + 2 \end{cases}; \begin{cases} \mathrm{x} = 2(-20) + 1 \\ \mathrm{y} = 0 \\ \mathrm{z} = (-20) + 2 \end{cases}; (-39, 0, -18)$

Puntos pedidos para $\lambda = 8; \begin{cases} \mathrm{x} = 2\lambda + 1 \\ \mathrm{y} = 0 \\ \mathrm{z} = \lambda + 2 \end{cases}; \begin{cases} \mathrm{x} = 2(8) + 1 \\ \mathrm{y} = 0 \\ \mathrm{z} = (8) + 2 \end{cases}; (17, 0, 10)$

5. Ejercicio

Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi: x + y = 2$. se pide:

a) Hallar la distancia del punto P al plano π

b) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π;

c) Hallar el área del triangulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas

Solución

a) Hallar la distancia del punto P al plano π

$$\boldsymbol{Distancia\ de\ (P\ \ a\ \lambda\ ) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}};$$

$$\text{Distancia } (\text{P} \ \ \text{a}\ \pi\ ) = \frac{|1(0) + 1(1) + 0 * 1) - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π;

Para calcular el punto Q que es la proyección del punto P sobre el plano hallo la recta que pasa por P y Q

$\overrightarrow{Vn_\pi} = (1,1,0)$ La recta que con este vector director y que pasa por P será;

$$r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{Vn_\pi} = (1,1,0) \\ \quad P(0,11) \end{cases} \quad ; r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

El punto Q será el punto de interseccion de la recta r y el plano ;

Sustituyo los valores de la recta en el plano $\pi: x + y = 2 \Rightarrow \ \pi: \lambda + \lambda + 1 + 0 = 2; \lambda = \frac{1}{2}$

$$\text{Para } \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow Q: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} + 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$$

c) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas

Puntos de corte de π con los ejes;

Para $x = 0 \Rightarrow 0 + y = 2; y = 2; A(\,0,2,0)$

Para $y = 0 \Rightarrow x + 0 = 2; x = 2; B(2,0,0)$

$$\textbf{área del triángulo} = \frac{\mathbf{b * h}}{\mathbf{2}};$$

Tomamos como base la distancia AB;

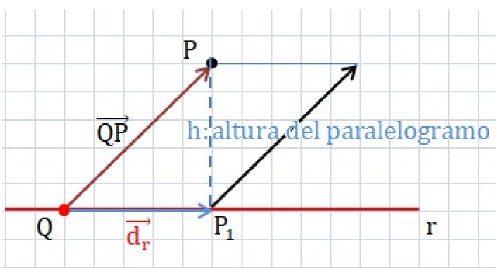
$h =$ distancia del punto $P(0,1,1)$ a la recta que pasa por AB

$$AB = \begin{cases} \overrightarrow{V_r} = B(2,0,0) - A(\,0,2,0) = (2,-2,0) \\ \qquad B(2,0,0) \end{cases}; AB: \begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = -2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

distancia $AB = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8}$;

$h =$ distancia del punto $P(0,1,1)$ a la recta que pasa por AB

Para hallar la distancia $d(P, P_1)$, de un punto P a una recta r , tomamos un punto Q cualquiera de la recta y con el vector $\overrightarrow{d_r}$ de la recta y el vector $\overrightarrow{QP}$ formamos un parallemogramo.



El modulo del producto vectorial $|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}|$ nos da el area del paralleogramo. Por otro lado sabemos que area paralelogramo = base por altura. (Area = $|\overrightarrow{d_r}| * h$); Igualamos $|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}| = |\overrightarrow{d_r}| \times h$;

$$\mathbf{h} = (\mathbf{d}(\mathbf{P},\mathbf{P_1}) = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{QP}} \ \mathbf{x} \ \overrightarrow{\mathbf{d_r}}|}{|\overrightarrow{\mathbf{d_r}}|}$$

Un punto de la recta AB : $\begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = -2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ *puede ser* A(0,2,0);

El vector $\overrightarrow{AP} =$ P(0,1,1) − A(0,2,0) = (0, −1,1)

$$h = (d(P,A) = \frac{|\overrightarrow{AP} \ x \ \overrightarrow{V_{AB}}|}{|\overrightarrow{V_{AB}}|};$$

$$\overrightarrow{AP}\ (0,-1,1);\ \overrightarrow{V_{AB}}\ (2,-2,0) => \ \overrightarrow{AP}\ x\ \overrightarrow{V_{AB}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2j + 2i + 2k;$$

$(\overrightarrow{AP}\ x\ \overrightarrow{V_{AB}}) = (2,2,2)$; *El modulo del producto vectorial* $|\overrightarrow{AP}\ x\ \overrightarrow{V_{AB}}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}$

$$h = \frac{|\overrightarrow{AP}\ x\ \overrightarrow{V_{AB}}|}{|\overrightarrow{V_{AB}}|} = \frac{|(2,2,2)|}{|\sqrt{8}|} = \frac{|\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}|}{|\sqrt{8}|} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}};$$

Area del triángulo $\widehat{ABP} = \frac{b * h}{2} => A = \frac{\sqrt{8} * \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}\ u^2$

6. **Ejercicio**

Sea E = {2,3,5,7,11,13,17,19} un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definidad por $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ y con resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos A = {7,11,13,19} , B = {2, 5, 7, 13, 17} y C = {3, 5, 7, 11, 13}.

Se pide calcular:

a) $P\left(\overline{(A-C)} \cap B\right)$

b) $P((A \cap B)|\bar{C})$

Solución

$$P(2) = P(5) = P(11) = P(13) = P(17) = P(19) = x; P(E) = x + \frac{1}{4} + x + \frac{1}{4} + x + x + x + x = 1;$$

$$6x + \frac{2}{4} = 1; 6x = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4}; \ x = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

$$P(2) = P(5) = P(11) = P(13 = P(17) = P(19) = x = \frac{1}{12}$$

a) $P\left(\overline{(A-C)} \cap B\right)$

$A - C = \{19\}$; $\overline{(A-C)}$ en E = {2,3,5,7,11,13,17}; $P\left(\overline{(A-C)} \cap B\right)$ = {2, 5, 7, 13, 17};

$$P\left(\overline{(A-C)} \cap B\right) = P(2) + P(5) + P(7) + P(13) = P(17)\Big)$$

$$P\left(\overline{(A-C)} \cap B\right) = P(2) + P(5) + P(7) + P(13) + P(17) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$P\left(\overline{(A-C)} \cap B\right) = \frac{7}{12}$$

b) $P((A \cap B)|\bar{C}) =$

Probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso al que denominamos A, como consecuencia de que haya tenido lugar otro evento llamado B;

$$\boldsymbol{P(A|B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(B)}}$$

$$P((A \cap B)|\bar{C}) = \frac{(P(A \cap B) \cap P(\bar{C}))}{P(\bar{C})}$$

$(P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}\{7{,}13\}\,;\ P(\bar{C}) = \{2{,}17{,}19\};\ (P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap P(\bar{C}) = \emptyset;$

$$\mathrm{P}\big((\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\big|\bar{C}\ \big) = \frac{\big(P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap P(\bar{C})\big)}{P(\bar{C})} = \frac{0}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}} = \frac{0}{\frac{3}{12}} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0;$$

$\mathrm{P}\big((\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\big|\bar{C}\ \big) = 0;$

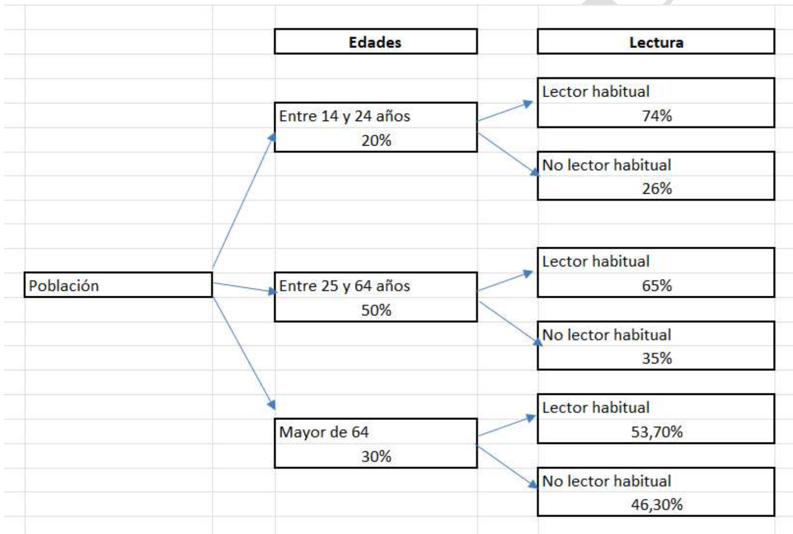
7. **Ejercicio**

Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años El 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de este país el 74% de sus ciudadanos entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65% entre los de 25 y 64 y al 53,7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestion de 14 años o más se pide:

a) Calcula la probabilidad de que sea lector habitual.

b) Si no es lector habitual, calcula la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años

Solución



a) Calcula la probabilidad de que sea lector habitual

$\mathrm{P}(\text{lector habitual}) = 0{,}2 * 0{,}74 + 0{,}5 * 0{,}65 + 0{,}3 * 0{,}537 = 0{,}148 + 0{,}325 + 0{,}1611 = 0{,}6341;$

$\mathrm{P}(\text{lector habitual}) = 63{,}41\%$

b) Si no es lector habitual, calcula la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años

Probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso al que denominamos A, como consecuencia de que haya tenido lugar otro evento llamado B;

$$\boldsymbol{P(A|B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(B)}}$$

$$P(\textit{tenga entre } 25 \textit{ y } 64 \textit{ años}|\ \textit{sabiendo que no es lector habitual}) = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$$

$\mathrm{P}(\text{tenga entre 25 y 64 años y no sea lector habitual }) = 0{,}5 * 0{,}35 = 0{,}175\%;$

$\mathrm{P}(\text{No sea lector habitual}) = 0{,}2 * 0{,}26 + 0{,}5 * 0{,}35 + 0{,}3 * 0{,}463 = 0{,}052 + 0{,}175 + 0.1389 = 0{,}3659$

$$\mathrm{P}(\text{tenga entre 25 y 64 años | sabiendo que no es lector habitual}) = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}} = \frac{0{,}175}{0{,}3659} = 0{,}47827$$

$\mathrm{P}(\text{tenga entre 25 y 64 años | sabiendo que no es lector habitual}) = 47{,}827\ \%;$

3 Examen 2024-2025 C

1. **Ejercicio**

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parametro real k

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Se pide:}$$

a) Discutir el sistema en fución de los valores de k

b) Resolver el sistema para $k = 0$;

Solución

a) Discutir el sistema en fución de los valores de k

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx & 1y & 1z \\ (k+1)x & 1y & (-k)z \\ 1x & (k+1)y & 0z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx & y & z \\ (k+1)x & y & -kz \\ x & (k+1)y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx & y & z \\ (k+1)x & y & -kz \\ x & (k+1)y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} kx & y & z \\ (k+1)x & y & -kz \\ x & (k+1)y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}$$

Comprobamos el rango de la matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ (k+1) & 1 & -k \\ 1 & (k+1) & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{vmatrix} = k^2 + 1 + 2k - k - 1 + k^3 + k^2 = k^3 + 2\,k^2 + k = k(k^2 + 2k + 1) = 0;$$

$k(k^2 + 2k + 1) = 0, \begin{cases} k = 0 \\ k = -1 \end{cases}$ *El rango de la matriz de coeficientes es* 3 *para* $k \neq 0$ *y* $k \neq -1$

para $k \begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq -1 \end{cases}$ *el sistema* $\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ (k+1)x + y - kz = k \\ x + (k+1)y + 0 = 2k \end{cases}$ *es compatible y determinado (una única solución)*

Estudiamos el rango de la matriz ampliada para $k = 0$; $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 0 \\ (k+1) & 1 & -k & k \\ 1 & (k+1) & 0 & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$; Rango de la matriz ampliada $= 2$;

Para $k = 0$; dado que rango de la matriz de coeficientes = rango matriz ampliada = 2

El sistema es compatible indeterminado infinitas soluciones

Estudiamos el rango de la matriz ampliada para $k = -1$; $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 0 \\ (k+1) & 1 & -k & k \\ 1 & (k+1) & 0 & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$; Rango de la matriz ampliada $= 3$

Para $k = -1$; dado que rango de la matriz de coeficientes = 2 y rango matriz ampliada = 3

El sistema es incompatible (no tiene solución)

b) Resolver el sistema para $k = 0$; El sistem es compatible indeterminado

$$\begin{pmatrix} kx & y & z \\ (k+1)x & y & -kz \\ x & (k+1)y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}; \text{el sistema será } \begin{cases} kx + y + z = 0 \\ (k+1)x + y - kz = k \\ x + (k+1)y + 0 = 2k \end{cases}$$

Para $k = 0$; sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones) => $\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

Hacemos $x = \lambda$ => $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

2. **Ejercicio**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA = (A + A^2)B$

b) Con la matriz $A_1 = A$, se consideran las matrices $A_2 = {A_1}^2 + A_1$; $A_3 = {A_2}^2 + A_2$; $A_4 = {A_3}^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025}

Solución

a) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA = (A + A^2)B$

Una matriz A_{nxn} cuadrada , se dice que se simérica si se cumple que $A^T = A$

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es simetrica si $\boldsymbol{B^T} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ para $B = \boldsymbol{B^T}$ implica que b ha de ser igual a c; $b = c$

B ha de ser de la forma $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

Calculamos $(A + A^2)$; $\begin{cases} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$(A + A^2) = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = (A + A^2)B \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix};$$

$\begin{pmatrix} a - b & 5a - 3b \\ b - d & 5b - 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 5b & -3b - 5d \\ a + b & b + d \end{pmatrix}$ igualamos términos

$$\begin{cases} a - b = -3a - 5b \\ b - d = a + b \\ 5a - 3b = -3b - 5d \\ 5b - 3d = b + d \end{cases} \begin{cases} 4a = -4b \\ b - d = a + b \\ 5a - 3b = -3b - 5d \\ 4b = 4d \end{cases} \begin{cases} a = -b \\ b - d = a + b \\ 5a - 3b = -3b - 5d \\ b = d \end{cases}$$

Sustituyendo valores en la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ => La matriz B ha de ser ; $B = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -a \end{pmatrix}$

b) Con la matriz $A_1 = A$, se consideran las matrices $A_2 = {A_1}^2 + A_1$; $A_3 = {A_2}^2 + A_2$; $A_4 = {A_3}^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025}

$$A_1 = A = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = {A_1}^2 + A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

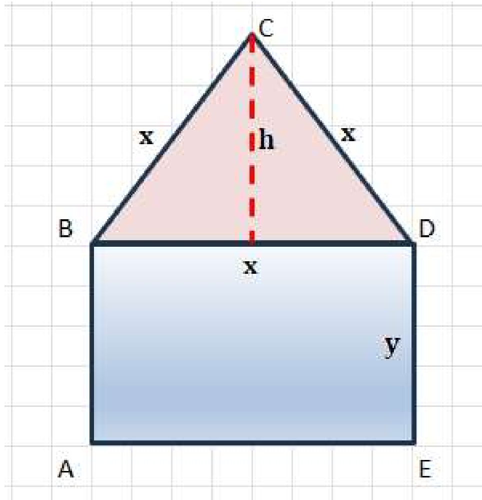
$$A_3 = {A_2}^2 + A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Dado que $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ es igual a $A_1 = A$ y 2025 es impar => $A_{2025} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

3. **Ejercicio**

Un agricultor dispone de 120 m de valla para delimitar una parcela con forma pentagonal . Los vertices del pentágono se nombran consecutivamente A, B, C, D y E . Se sabe que A, B, D y E forman un rectangulo y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D:

¿ A qué distancia del vertice A el agricultor debe ubicar los vertices B y E , si quiere que la parcela tenga la máxima área posible?



Solución

Area del rectángulo $= \mathrm{x} * \mathrm{y}$;

Area de triángulo equilátero $= \frac{\mathrm{x} * \mathrm{h}}{2}$

Al ser un tringulo equilatero $\mathrm{h}^2 = \mathrm{x}^2 + (\frac{\mathrm{x}}{2})^2$;

$$\mathrm{h} = \sqrt{\mathrm{x}^2 - (\frac{\mathrm{x}}{2})^2} = \sqrt{\mathrm{x}^2 - \frac{\mathrm{x}^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\mathrm{x}^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Area de triángulo equilátero $= \frac{\mathrm{x} * \mathrm{h}}{2} = \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{x}^2}{4} =$

Area de la parcela $= \mathrm{xy} + \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{x}^2}{4}$

Perímetro de la parcela: $3\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 120$;

$$\mathrm{y} = \frac{120}{2} - \frac{3\mathrm{x}}{2} = 60 - \frac{3}{2}x;\ y = 60 - \frac{3}{2}x$$

Sustituimos $y = 60 - \frac{3}{2}x$ en el área $= \mathrm{xy} + \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{x}^2}{4} \Rightarrow A = \mathrm{x}\left(60 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{x}^2}{4} = 60x - \frac{3}{2}\mathrm{x}^2 + \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{x}^2}{4}$

$\mathrm{A} = 60\mathrm{x} + \frac{(\sqrt{3}-6)\,\mathrm{x}^2}{4}$; Hallamos la derivada para ver donde hay un máximo o un míinimo

$\mathrm{A}' = 60 + 2\frac{\sqrt{3}-6}{4}\mathrm{x} = 60 + \frac{\sqrt{3}-6}{2}\mathrm{x}$ Igualamos a 0 $\Rightarrow 60 + \frac{\sqrt{3}-6}{2}\mathrm{x} = 0$;

$120 + (\sqrt{3}-6)\mathrm{x} = 0;\ x = \frac{-120}{\sqrt{3}-6} = \frac{-120}{-4{,}268} = 28{,}116\ m$;

$\mathrm{x} = 28{,}116\ \mathrm{m};\ y = 60 - \frac{3}{2}x = 60 - \frac{3}{2}(28{,}116) = 17{,}826\ \mathrm{m}$;

$\mathrm{x} = 28{,}116\ \mathrm{m}$; $\mathrm{y} = 17{,}826\ \mathrm{m}$;

Hallamos la segunda derivaa de $\mathrm{A} = 60\mathrm{x} + \frac{(\sqrt{3}-6)\,\mathrm{x}^2}{4} \Rightarrow \quad \mathrm{A}'' = \frac{\sqrt{3}-6}{2} = -2{,}134$

Al ser A´´ negativa tendremos un máximo

Distancia AB $= \mathrm{y} = 17{,}826$ m y distancia AE $= \mathrm{x} = 28{,}116$ m

4. Ejercicio

Sean los puntos A(1,1,2) , B(2, −1,0) , C(−2,0,3) y D(2, −3, −1) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}$

a)Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro formado por ellos

b) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D

c) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determiada por los puntos B yD

Solución

a)Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro formado por ellos

Dos o mas puntos son coplanarios si los vectores determinados por ellos son coplanarios (**están en el mismo plano**).

Dos o más vectores son coplanarios si son linealmente independientes,

$\overrightarrow{AB} = B(2,-1,0) - A(1,1,2) = (1,-2,-2)$

$\overrightarrow{AC} = C(-2,0,3) - A(1,1,2) = (-3,-1,1)$

$\overrightarrow{AD} = D(2,-3,-1) - A(1,1,2) = (1,-4,-3)$

$$Producto\ míxto \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 3-2-24-2+4+18 = -3;$$

Al ser distinto de 0 los vectores y puntos no son coplanarios;

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{3}\text{Area de la base} * \text{h}$$

Area de la base es la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}x\ \overrightarrow{AC}$

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} * \text{producto mixto} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} * (-3) = \frac{1}{2}\ u^3$$

b) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D

$$\text{área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}x\ \overrightarrow{AC}|$$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(-2i+6j-k-6k-2i-j)| = \frac{1}{2}|(-4i+5j-7k)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+5^2+(-7)^2}$$

$$Area\ de\ la\ cara\ ABC = \frac{1}{2}\sqrt{90} = \frac{1}{2} * 3\sqrt{10} = \frac{3}{2}\sqrt{10}\ u^2$$

$$\text{Dado que el volumen del tetraedro} = \frac{1}{3}\text{área de la base} * \text{altura del tetraedro}.$$

$$\frac{1}{2}u^3 = \frac{1}{3} * \frac{3}{2}\sqrt{10}\ u^2 * h;\ \ h(\text{altura}) = \frac{1}{\sqrt{10}}\ u;$$

c) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determiada por los puntos B yD

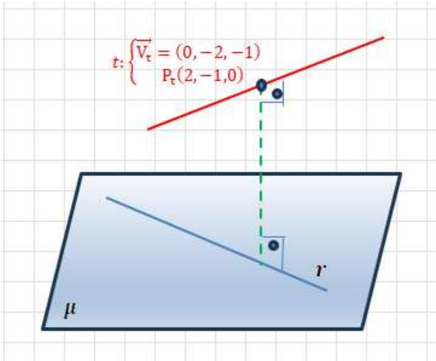
Recta determiada por los puntos B y D;

$$t \equiv \begin{cases} \overrightarrow{V_{BD}} = D(2,-3,-1) - B(2,-1,0) = (0,-2,-1) \\ P(2,-1,0) \end{cases};\ t: \begin{cases} x = 2 \\ y = -2\beta - 1 \\ z = -\beta \end{cases}$$

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1};\ r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{V_r} = (2,1,-1) \\ P(1,-1,0) \end{cases};\ r: \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda - 1 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes pues sus vectores directores no son proporcionales

Las rectas se cruzan.



Definimos plano π que contiene a r:

$r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{V_r} = (2,1,-1) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases}$;

y que sea paralelo a t: $\begin{cases} \overrightarrow{V_t} = (0,-2,-1) \\ P_t(2,-1,0) \end{cases}$

El plano π tendrá $\begin{cases} \overrightarrow{V_r} = (2,1,-1) \\ P_1(1,-1,0) \\ \overrightarrow{V_t} = (0,-2,-1) \text{ como el plano } \pi \text{ y la recta t son paralelos, el } \overrightarrow{V_t} \text{ será un vector de } \pi \end{cases}$

$\pi \begin{cases} \overrightarrow{V_r} = (2,1,-1) \\ P_1(1,-1,0) \\ \overrightarrow{V_t} = (0,-2,-1) \end{cases}$; $\begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$2x - 2 - 2y - 2 + 4z + x - 1 = 3x - 2y + 4z - 5 = 0$

Como el plano π y la recta t son paralelos , La distancia de cualquier punto de la recta t al plano π será igual a la distancia de la recta r a la recta t

Distancia de un punto a un plano $\mathbf{d(P,\alpha) = \dfrac{|a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

$d(\ P_t, \pi) = \dfrac{|3*2 + (-2)*(-1) + 4*0 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (4)^2}} = \dfrac{|6+2-5|}{\sqrt{29}} = \dfrac{3}{\sqrt{29}}$

5. Ejercicio

Dados los puntos A(0,0,1)y B(1,0,1)se pide:

a) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B

b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano $z = 1$, que diste una unidad tanto del punto A como del punto B

Solución

a) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B

Un plano π paralelo a OZ tendrá :

Un vector director $\overrightarrow{Vn_{1\pi}} = \overrightarrow{Vd_{OZ}} = (0,0,1)$

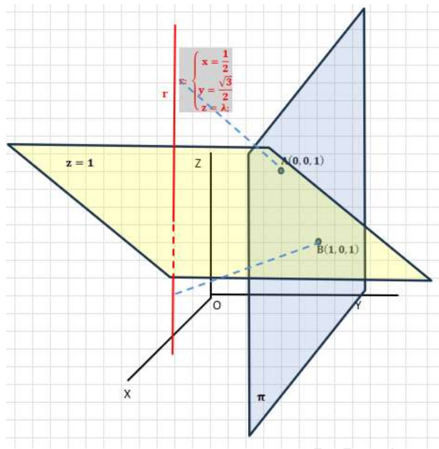
otro $\overrightarrow{Vn_{2\pi}} = \overrightarrow{AB}$ Ya que ha de contener a

A(0,0,1)y B(1,0,1); $\overrightarrow{AB} = B(1,0,1) - A(0,0,1) = (1,0,0)$

Plano π $\begin{cases} \overrightarrow{Vn_{1\pi}} = (0,0,1) \\ \overrightarrow{Vn_{2\pi}} = (1,0,0) \\ A(0,0,1) \end{cases}$ => $\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = y = 0;$

Plano π: $y = 0$;

b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano $z = 1$, que diste una unidad tanto del punto A como del punto B



El vector normal del plano $z = 1$ es $(0,0,1)$

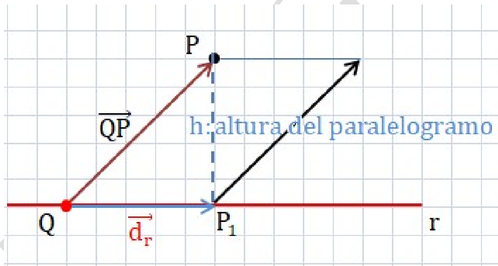
y este será el vector director de la recta pedida

$$r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{V_r} = (0,0,1) \\ P(a,b,c) \end{cases}$$

Dado que la recta es perpendicular al plano $z = 1$,

Cualquier punto de la recta será de la forma

$$(a,b,\lambda) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 0\lambda + a \\ y = 0\lambda + b \\ z = \lambda; \end{cases} \quad r: \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = \lambda; \end{cases}$$



Para hallar la distancia $d(P, P_1)$, de un punto P a una recta r , tomamos un punto Q cualquiera de la recta y con el vector $\overrightarrow{d_r}$ de la recta y el vector $\overrightarrow{QP}$ formamos un parallemogramo.

El modulo del producto vectorial $|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}|$ nos da el area del paralleogramo. Por otro lado sabemos que area paralelogramo = base por altura. (**Area** $= |\overrightarrow{d_r}| * h$); **Igualamos** $|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}| = |\overrightarrow{d_r}| \times h$;

$$h = (d(P,P_1)) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{d_r}|}{|\overrightarrow{d_r}|}$$

El punto Q de la recta r será $Q(a,b,1)$; $\overrightarrow{QA} = A(0,0,1) - Q(a,b,1) = (-a,-b,0)$

$$\text{Distancia de la recta al punto A} = \frac{|(-a,-b,0)(0,0,1)|}{|0,0,1|} = 1;\ \overrightarrow{QA} \times \overrightarrow{d_r} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\frac{|\overrightarrow{QA} \times \overrightarrow{d_r}|}{|\overrightarrow{d_r}|} = \frac{|-bi + aj|}{1} = |-b, a, 0| = \sqrt{(-b)^2 + a^2} = 1$$

El punto Q de la recta r será $Q(a,b,1)$; $\overrightarrow{QB} = B(1,0,1) - Q(a,b,1) = (1-a,-b,0)$

$$\text{Distancia de la recta al punto B} = \frac{|(1-a,-b,0)(0,0,1)|}{|0,0,1|} = 1; \overrightarrow{QB} \times \overrightarrow{d_r} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -bi - j + aj$$

$$\frac{|\overrightarrow{QB} \times \overrightarrow{d_r}|}{|\overrightarrow{d_r}|} = \frac{|-bi - j + aj|}{1} = 1\ ; |-b, +(a-1), 0| = \sqrt{(-b)^2 + (a-1)^2} = 1$$

$$(d(A,r) = \sqrt{(-b)^2 + a^2} = 1 = (d(B,r) = \sqrt{(-b)^2 + (a-1)^2} = 1$$

$$b^2 + a^2 = b^2 + a^2 + 1 - 2a; 2a = 1; a = \frac{1}{2}$$

$$(d(A,r) = \sqrt{(-b)^2 + a^2} = 1\ para\ a = \frac{1}{2}; \Rightarrow \sqrt{b^2 + (\frac{1}{2})^2} = 1;\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}} = 1;\ b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4};\ b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Punto de la recta r $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda\right)$; La recta pedida será r: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ z = \lambda; \end{cases}$

6. Ejercicio

En base a un estudio de los datos antropométricos de la poblacion laboral española en hombre se considera que la masa en kg de un individuo de esta población es una variable normal de media 75.67 y desviacion tipica 11,05 Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kg

b) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100kg

c) Elegidos 10 hombre distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100kg.

Solución

a) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kg

Pasamos (μ es la media y σ es la desviacion tipica) ; en otra Z que siga una distribuccion N(0,1) aplicando la formula $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Probabilidad de que tenga masa entre $P(60 \leq X \leq 80)$

Estandarizamos valores, $\begin{cases} \text{Para } X = 60;\ Z_{1=} \dfrac{60-75{,}67}{11{,}05} \approx -1{,}418 \\ \text{Para } X = 80;\ Z_{1=} \dfrac{80-75{,}67}{11{,}05} \approx 0{,}3918 \end{cases}$ $; P(-1{,}418 \leq Z \leq 0{,}3918$

Comprobamos en la tabla de distribuccion normal standard

$P(-1{,}418 \leq Z) = 1 - 0{,}9222 = 0{,}0778$

$P(Z \leq 0{,}3918) = 0{,}6517;$

$P(0{,}0778 \leq Z \leq 0{,}6517) = 0{,}6517 - 0{,}0778 = 0{,}5739;$

b) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100kg

Probabilidad de que tenga masa superior a 100; $P(X > 100)$

Para $X = 100;\ Z_{1=} \frac{100-75{,}67}{11{,}05} \approx 2{,}2018$

Comprobamos en la tabla de distribuccion normal standard

$P(Z \geq 2{,}2018) = 1 - 0{,}9861 = 0{,}0139;$

c) Elegidos 10 hombre distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100kg.

Según hemos calculado en el apartado b, la probabilidad de que un hombre tenga una masa superior a 100 es: $P(X > 100) = 0{,}0139;$

La probabilidad de que no más de uno supere los 100kg. implica que pueden superar los 100k, ningun hombre o un hombre

La probabilidad de que la masa sea inferior a 100 es $P(X < 100) = 1 - 0{,}0139 = 0{,}9861$

$P(X = 0) = P(X = 0) = \binom{10}{0} 0{,}0139^0 * 0{,}9861^{10} = \frac{10¡}{0¡\,(10-0)¡} 0{,}0139^0 * 0{,}9861^{10} = 0{,}8696;$

$P(X = 1) = \binom{10}{1} 0{,}0139^1 * 0{,}9861^9 = \frac{10¡}{1¡\,(10-1)¡} 0{,}0139^1 * 0{,}9861^9 = 0{,}1201;$

$P(X < 1) = 0{,}8696 + 0{,}1201 = 0{,}9897$

7. Ejercicio

La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día de lluvia es de 0,08 y en un día seco es de 0,004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0,032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

a)Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sinhaberse caído

b) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caido, no esté lloviendo

Solución

a)Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sinhaberse caído

Probabilidad condicionada, es la posibilidad de que ocurra un suceso al que denominamos A, como consecuencia de que haya tenido lugar otro evento llamado B;

$$\boldsymbol{P(A|B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(B)}};$$

P de que llueva L ; probabilidad de que no llueva $\bar{\mathrm{L}}$;

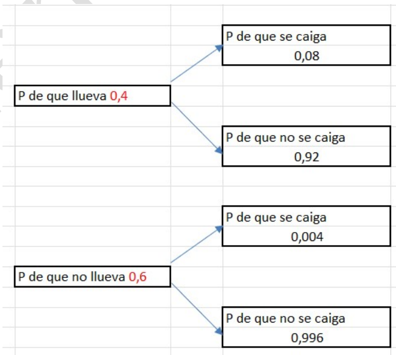
P de que se caiga $=$ C; P de que no se caiga $\bar{\mathrm{C}}$

Necesitmos conocer la probabilidad de que llueva

$$\mathrm{P(C|L)} = \frac{\mathrm{P(C \cap L)}}{\mathrm{P(L)}}; \begin{cases} \mathrm{P(C \cap L)} \text{ probabilidad de que llueva y se caiga} = 0{,}032 \\ \mathrm{P(C|L)} \text{ probabilidad de que sabiendo que lleve se caiga} = 0{,}08 \\ \mathrm{P(L)} = \text{Probabilidad de que llueva} \end{cases}$$

$$\mathrm{P(L)} = \frac{\mathrm{P(C \cap L)}}{\mathrm{P(C|L)}} = \frac{0{,}032}{0{,}08} = 0{,}4 \text{ Probabilidad de que llueva}$$

$$\mathrm{P(\bar{L})} = 1 - 0{,}4 = 0{,}6 \text{ Probabilidad de que no llueva}$$



Probabilidad de que no se caiga

$$\mathrm{P(\bar{C})} = 0{,}4 * 0{,}92 + 0{,}6 * 0{,}996 = 0{,}9656$$

b) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caido, no esté lloviendo

$$P(\bar{\mathrm{L}}|C) = \frac{\mathrm{P(\bar{L} \cap C)}}{\mathrm{P(C)}} \begin{cases} \mathrm{P(\bar{L} \cap C)} = 0{,}6 * 0{,}004 = 0{,}0024 \\ \mathrm{P(C)} = 0{,}4 * 0{,}08 + 0{,}6 * 0{,}004 = 0{,}0344 \end{cases}$$

$$P(\bar{\mathrm{L}}|C) = \frac{0{,}0024}{0{,}0344} = 0{,}0698$$